ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΜΟΤΟΠΙΑΣ 1

1. Να αποδειχθεί οτι κάθε στροφή του κύκλου $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση id_{S^1}.

2. Έστω $a : S^n \to S^n$, $n \geq 1$, η αντιποδική απεικόνιση $a(x) = -x$. Αν η $f : S^n \to S^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση χωρίς σταθερά σημεία, να αποδειχθεί οτι η f είναι ομοτοπική με την a.

3. Έστω X ένας χώρος και x, $y \in X$. Εστω $\{*\}$ ένα μονοσύνολο και c_x, $c_y : \{*\} \to X$ οι απεικονίσεις $c_x(*) = x$, $c_y(*) = y$. Να αποδειχθεί οτι τα σημεία x, y συνδέονται με ένα τόξο στον X τότε και μόνον τότε όταν $c_x \simeq c_y$.

4. Έστω X ένας χώρος και $f : X \to S^n$, $n \geq 1$, μια συνεχής απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι αν η f δεν είναι επί τότε είναι ομοτοπική με σταθερή.

5. Έστω X ένας χώρος και $A \subset X$ ένα retract με retraction $r : X \to A$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του A (ως υπόχωρος του X) ταυτίζεται με την τοπολογία πιλήκο ως προς r.
(β) Αν ο χώρος X είναι Hausdorff, να αποδειχθεί οτι το A είναι κλειστό σύνολο.

6. Έστω a, $b \in S^1$ διαφορετικά από το 1. Να αποδειχθεί οτι το $(\{1\} \times S^1) \cup (S^1 \times \{1\})$ είναι deformation retract του $S^1 \times S^1 \setminus \{(a, b)\}$.

7. Έστω X ένας χώρος και $A \subset X$. Να αποδειχθεί οτι το A είναι deformation retract του X τότε και μόνον τότε όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω δύο συνθήκες:
(α) Για κάθε χώρο Z και κάθε συνεχή απεικόνιση $f : A \to Z$, η f έχει συνεχή επέκταση στον X.
(β) Για κάθε χώρο Z και συνεχείς απεικονίσεις f, $g : X \to Z$, οι f, g είναι ομοτοπικές όταν οι $f|_A$, $g|_A$ είναι ομοτοπικές.

8. Να αποδειχθεί οτι ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός τότε και μόνον τότε όταν η διαγώνια απεικόνιση $\delta : X \to X \times X$, δηλαδή $\delta(x) = (x, x)$ για κάθε $x \in X$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

9. Να αποδειχθεί οτι για κάθε τοπολογικό χώρο X το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $[X, S^1]$ γίνεται αβελιανή ομάδα, αν θέσουμε $[f] + [g] = [f \cdot g]$ για κάθε ζεύγος συνεχών απεικονίσεων f, $g : X \to S^1$.

10. Έστω X ένας χώρος με μία σχέση ισοδυναμίας R και απεικόνιση πιλήκο $p : X \to X/R$.
(α) Αν Y είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος, να δειχθεί οτι η απεικόνιση $id \times p : Y \times X \to Y \times (X/R)$ επάγει έναν ομοιομορφισμό

$$\frac{Y \times X}{id \times R} \approx Y \times (X/R).$$

(β) Αν Z είναι ένας χώρος και $H : [0, 1] \times X \to Z$ μία ομοτοπία ώστε $H(t, x) = H(t, x')$ για κάθε $(x, x') \in R$ και $t \in [0, 1]$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία ομοτοπία $\tilde{H} : [0, 1] \times (X/R) \to Z$ τέτοια ώστε $H = \tilde{H} \circ (id \times p)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΜΟΤΟΠΙΑΣ 2

1. Αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός, να αποδειχθεί οτι για κάθε χώρο Y ο χώρος γινόμενο $X \times Y$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του Y.

2. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $X = \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\}$, να αποδειχθεί οτι η $f : S^n \to X$ με $f(x) = (x, x)$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

Απάντηση. Έστω $p : S^n \times S^n \to S^n$ η απεικόνιση προβολή στην πρώτη συντεταγμένη, δηλαδή $p(x, y) = x$. Προφανώς $p \circ f = id_{S^n}$. Η $f \circ (p|_X)$ δίνεται από τον τύπο

$$(f \circ (p|_X))(x, y) = (x, x).$$

Η $H : [0, 1] \times X \to X$ με

$$H_t(x, y) = \left(x, \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|} \right)$$

είναι καλά ορισμένη γιατί $(1-t)x + ty = 0$ ακριβώς τότε όταν $t = \dfrac{1}{2}$ και $x = -y$, όμως έχουμε $(x, y) \in X$, δηλαδή $x \neq -y$. Η H είναι προφανώς συνεχής και

$$H_0(x, y) = (x, x) = (f \circ (p|_X))(x, y),$$

$$H_1(x, y) = (x, y)$$

για κάθε $(x, y) \in X$. Με άλλα λόγια $H : f \circ (p|_X) \simeq id_X$. Αυτό δείχνει οτι η f είναι ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφο την $p|_X$.

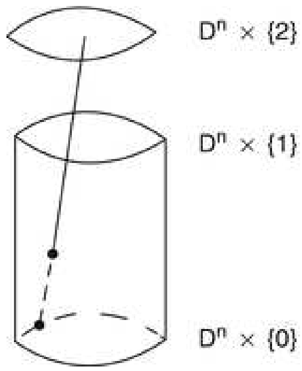
3. Η 3-σφαίρα είναι ο υπόχωρος $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ του $\mathbb{C}^2$. Αν $C \subset S^3$ είναι ο κύκλος $C = \{(z, 0) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\} \approx S^1$, να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $S^3 \setminus C$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του κύκλου S^1.
(Υπόδειξη: Η απεικόνιση $\phi : S^3 \setminus C \to \mathbb{C} \times S^1$ με

$$\phi(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|} \right)$$

είναι ομοιομορφισμός.)

4. Να αποδειχθεί οτι το $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$ είναι (strong) deformation retract του $D^n \times [0, 1]$, $n \geq 1$.

Απάντηση. Για κάθε σημείο $(x, s) \in D^n \times [0, 1]$ η ευθεία στον $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ που διέρχεται από το (x, s) και το σημείο $(0, 2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ τέμνει το $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$ σε ένα μοναδικό σημείο $r(x, s)$. Η απεικόνιση $r : D^n \times [0, 1] \to D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$ που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι retraction.



Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το (x, s) και το $r(x, s)$ περιέχεται στο $D^n \times [0, 1]$, το οποίο είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Συνεπώς, ορίζεται η απεικόνιση $H : D^n \times [0, 1] \to D^n \times [0, 1]$ με

$$H(t, (x, s)) = (1 - t) \cdot r(x, s) + t \cdot (x, s)$$

που είναι συνεχής, για την οποία έχουμε $H(0, (x, s)) = r(x, s)$ και $H(1, (x, s)) = (x, s)$. Δηλαδή, η H είναι μία ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{D^n \times [0,1]}$, όπου $i : D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1] \to D^n \times [0, 1]$ είναι η ένθεση. Επιπλέον, αν $(x, s) \in D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$, οπότε $r(x, s) = (x, s)$, έχουμε $H(t, (x, s)) = (x, s)$. Συνεπώς, η H είναι μία strong deformation retraction του $D^n \times [0, 1]$ στο $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$.

5. Να αποδειχθεί οτι η ορθογώνια ομάδα $O(n, \mathbb{R})$ είναι (strong) deformation retract της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 1$ (ως υπόχωροι του $\mathbb{R}^{n^2}$).

Απάντηση. Σύμφωνα με το θεώρημα της Πολικής Ανάλυσης (βλ. K.M. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, Prentice Hall, 1971, Theorem 14, σελ. 342), για κάθε $A \in GL(n, \mathbb{R})$ υπάρχει ένας μοναδικός ορθογώνιος πίνακας $U \in O(n, \mathbb{R})$ και ένας μοναδικός θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας S ώστε $A = US$. Όπως δείχνει η απόδειξη του θεωρήματος της Πολικής Ανάλυσης, $S = (A^T A)^{1/2}$ και $U = A(A^T A)^{-1/2}$. Η απεικόνιση $r : GL(n, \mathbb{R}) \to O(n, \mathbb{R})$ με

$$r(A) = U = A(A^T A)^{-1/2}$$

είναι συνεχής και $r \circ i = id_{O(n,\mathbb{R})}$, δηλαδή η $O(n, \mathbb{R})$ είναι retract της $GL(n, \mathbb{R})$ με retraction την r, όπου $i : O(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ είναι η ένθεση. Θα κατασκευάσουμε μία ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{GL(n,\mathbb{R})}$.

Επειδή ο συμμετρικός πίνακας $A^T A$ είναι θετικά ορισμένος έχει θετικές πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, ..., \lambda_n > 0$$

(ενδεχομένως όχι διαφορετικές ανά δύο) και σύμφωνα με το Φασματικό Θεώρημα (βλ. K.M. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, Prentice Hall, 1971, Theorem 9, σελ 335), υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $R \in O(n, \mathbb{R})$ ώστε

$$A^T A = R^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} R$$

οπότε για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζεται καλά ο θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας

$$(A^TA)^s = R^{-1} \begin{pmatrix} (\lambda_1)^s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n)^s \end{pmatrix} R.$$

Ορίζεται λοιπόν καλά η $H : [0,1] \times GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ με

$$H(t,A) = A(A^TA)^{\frac{t-1}{2}}$$

που είναι προφανώς συνεχής και $H(0,A) = A(A^TA)^{-1/2}$, ενώ $H(1,A) = A$. Αυτό σημαίνει οτι $H : i \circ r \simeq id_{GL(n,\mathbb{R})}$. Επιπλέον, $H(t,U) = U$ για κάθε $U \in O(n,\mathbb{R})$ και συνεπώς η $O(n,\mathbb{R})$ είναι strong deformation retract της $GL(n,\mathbb{R})$.
6. Εστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος και

$$PX = \{\gamma | \gamma : [0,1] \to X \quad \text{συνεχής}\}$$

εφοδιασμένο με τη συμπαγή-ανοιχτή τοπολογία. Να αποδειχθεί οτι οι χώροι X και PX έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.

7. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Ο mapping cone της f είναι ο χώρος πηλίκο

$$Cf = X \times [0,1] \coprod Y / \sim$$

όπου $(x,0) \sim f(x)$ και $(x,1) \sim (x',1)$ για κάθε x, $x' \in X$. Έστω $p : X \times [0,1] \coprod Y \to Cf$ η απεικόνιση πηλίκο.
(α) Να αποδειχθεί οτι ο $p(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Cf και η $p|_Y : Y \to Cf$ τοπολογική εμφύτευση, ενώ η $(p|_Y) \circ f : X \to Cf$ είναι ομοτοπική με σταθερή.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $p(X \times [0,1] \setminus X \times \{0\})$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Cf και η $p|_{X\times[0,1]\setminus X\times\{0\}}$ τοπολογική εμφύτευση.
(γ) Να αποδειχθεί οτι ο $p(Y)$ είναι retract του Cf τότε και μόνον τότε όταν η f είναι ομοτοπική με σταθερή.
(δ) Αν ο $n \geq 1$ είναι ακέραιος και $\eta : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ είναι η Hopf fibration, να αποδειχθεί οτι $C\eta \approx \mathbb{C}P^n$.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνεχή απεικόνιση $f : D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ με τύπο

$$f(z_0, z_1, ..., z_{n-1}) = [z_0, z_1, ..., \big(1 - \sum_{j=0}^{n-1} |z_j|^2\big)^{1/2}].)$$

(ε) Να αποδειχθεί οτι αν οι συνεχείς απεικονίσεις f_0, $f_1 : X \to Y$ είναι ομοτοπικές, τότε οι χώροι Cf_0 και Cf_1 έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.
(Υπόδειξη: Αν η F είναι ομοτοπία από την f_0 στην f_1, θεωρείστε την

$$h : X \times [0,1] \coprod Y \to Cf_1$$

με $h(y) = p(y)$ για $y \in Y$ και

$$h(x,t) = \begin{cases} p(F(x,2t)), & \text{όταν } 0 \leq t \leq 1/2 \\ p(x, 2t-1), & \text{όταν } 1/2 \leq t \leq 1.) \end{cases}$$

8. Έστω $A \subset X$ ένα strong deformation retract του χώρου Hausdorff X και $f : X \to Y$ μία συνεχής απεικόνιση. Στην ξένη ένωση $X \coprod Y$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $a \sim f(a)$, $a \in A$. Θέτουμε $Y \cup_f X = X \coprod Y / \sim$ και $p : X \coprod Y \to Y \cup_f X$ την απεικόνιση πιλήκο.
(α) Να αποδειχθεί οτι η p εμφυτεύει τοπολογικά τον Y στον χώρο $Y \cup_f X$.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $p(Y)$ είναι strong deformation retract του $Y \cup_f X$.
(γ) Για κάθε χώρο Y και κάθε συνεχή απεικόνιση $f : D^n \to Y$ να αποδειχθεί οτι αν $Y \cup_f D^n = D^n \coprod Y / \sim$, όπου $z \sim f(z)$, $z \in S^{n-1}$, τότε ο Y είναι strong deformation retract του $Y \cup_f D^n \setminus \{f(0)\}$.

9. Έστω K, Σ δύο χώροι και $\phi : K \to \Sigma$ μία συνεχής απεικόνιση. Για κάθε χώρο X, θεωρούμε την απεικόνιση $T_\phi(X) : [\Sigma, X] \to [K, X]$ με $T_\phi(X)[f] = [f \circ \phi]$. Να αποδειχθεί οτι ο T_ϕ είναι φυσικός μετασχηματισμός. Να αποδειχθεί επίσης οτι ο T_ϕ είναι φυσική ισοδυναμία τότε και τότε και μόνο τότε όταν η ϕ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΜΟΤΟΠΙΑΣ 3

1. Εστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος, x_0, $x_1 \in X$ και u, $v : [0,1] \to X$ δύο τόξα με $u(0) = v(0) = x_0$ και $u(1) = v(1) = x_1$.
(α) Αν $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, να αποδειχθεί οτι $u_+ = v_+ : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$.
(β) Αν $u \simeq v \ \mathrm{rel}\{0,1\}$, να αποδειχθεί οτι $u_+ = v_+$.

2. Εστω X ένας απλά συνεκτικός χώρος, $A \subset X$ και $f : A \to Y$ μία συνεχής απεικόνιση. Αν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε ο επαγόμενος ομομορφισμός $f_\sharp : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ να μην είναι ο τετριμένος, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει συνεχής επέκταση της f στον X.

Απάντηση. Έστω $i : A \to X$ η ένθεση. Αν υπάρχει συνεχής επέκταση $F : X \to Y$ της f, αυτό σημαίνει οτι $f = F \circ i$. Παίρνοντας τους επαγόμενους ομομορφισμούς στις θεμελιώδεις ομάδες $f_\sharp = F_\sharp \circ i_\sharp$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A, x_0) \arrow[rr, "i_\sharp"] \arrow[dr, "f_\sharp"'] & & \pi_1(X, x_0) \arrow[dl, "F_\sharp"] \\
& \pi_1(Y, f(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Αν ο X είναι απλά συνεκτικός, $\pi_(X, x_0) = \{1\}$ και συνεπώς $F_\sharp = 1$, δηλαδή είναι τετριμένος. Συνακόλουθα, ο $f_\sharp = F_\sharp \circ i_\sharp$ είναι τετριμένος.

3. Αν $p : [0,1] \to S^1$ είναι η $p(t) = e^{2\pi i t}$, να αποδειχθεί οτι η κλάση ομοτοπίας με σταθερά άκρα $[p]$ του τόξου p είναι γεννήτορας της $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Να αποδειχθεί οτι το $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$ είναι γεννήτορας τότε και μόνο τότε όταν $\gamma \simeq p \ \mathrm{rel}\{0,1\}$ ή $\gamma^{-1} \simeq p \ \mathrm{rel}\{0,1\}$.

4. Να αποδειχθεί οτι ο n-torus T^n δεν έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον m-torus T^m για $n \neq m$.

5. Εστω $L \subset \mathbb{R}^3$ μία ευθεία γραμμή. Να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $\mathbb{R}^3 \setminus L$ έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον κύκλο S^1 και συνεπώς $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L, x) \cong \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3 \setminus L$.
(Υπόδειξη: Θεωρώντας έναν ομοιομορφισμό του $\mathbb{R}^3$, που είναι σύνθεση μίας μεταφοράς και ενός γραμμικού ισομορφισμού, αναγόμαστε στην περίπτωση που η ευθεία είναι η $L = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ και τότε το $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \setminus \{(0,0,0)\}$ είναι (strong) deformation retract του $\mathbb{R}^3 \setminus L$.)

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ομομορφισμό ομάδων $h : \pi_1(T^2, (1,1)) \to \pi_1(T^2, (1,1))$ υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $f : T^2 \to T^2$ με $f(1,1) = (1,1)$ ώστε $f_\sharp = h$. Μάλιστα, αν ο h είναι ισομορφισμός, τότε η f μπορεί να επιλεγεί ομοιομορφισμός.

Απάντηση. Όπως ξέρουμε, $T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (από την άσκηση 6 του 4ου φύλλου) και συνεπώς $\pi_1(T^2, (1,1)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Το $e_1 = (1,0)$ αντιστοιχεί στην κλάση ομοτοπίας του τόξου $\gamma_1(t) = (e^{2\pi i t}, 1)$ και το $e_2 = (0,1)$ αντιστοιχεί στην κλάση ομοτοπίας (με σταθερά πάντα άκρα) του τόξου $\gamma_2(t) = (1, e^{2\pi i t})$, $0 \leq t \leq 1$.

Κάθε ομομορφισμός $h : \pi_1(T^2,(1,1)) \to \pi_1(T^2,(1,1))$ παριστάνεται λοιπόν από έναν πίνακα

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$$

όπου $h(e_1) = h(1,0) = (a,c) = ae_1 + ce_2$ και $h(e_2) = h(0,1) = (b,d) = be_1 + de_2$. Αν τώρα $f : T^2 \to T^2$ είναι η απεικόνιση με τύπο $f(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ ή πιο αναλυτικά

$$f(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{2\pi i(ax+by)}, e^{2\pi i(cx+dy)}),$$

τότε $f_\sharp = h$.

Στην πραγματικότητα η f επάγεται από την γραμμική απεικόνιση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που έχει τον παραπάνω πίνακα (ως προς την κανονική βάση), δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^2 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T^2 & \xrightarrow{f} & T^2 \end{array}$$

όπου η $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ είναι η συνηθισμένη απεικόνιση πιλήκο (και απεικόνιση επικάλυψης) $p(x,y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$.

Ο h είναι ισομορφισμός τότε και μόνον τότε όταν η ορίζουσα του πίνακα του είναι ± 1, δηλαδή $ad - bc = \pm 1$. Από αυτό προκύπτει οτι στην περίπτωση αυτή η f είναι ομοιομορφισμός. Ο αντίστροφος f^{-1} ορίζεται με ανάλογο τρόπο από τον h^{-1}.

7. Εστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος. Να αποδειχθεί οτι ο X είναι απλά συνεκτικός χώρος τότε και μόνο τότε όταν κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^1 \to X$ είναι ομοτοπική με σταθερή.

8. Να αποδειχθεί οτι ο n-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος $\mathbb{C}P^n$ είναι απλά συνεκτικός για κάθε $n \geq 0$.

Απάντηση. Προχωρούμε με επαγωγή στο n. Για $n = 0$, ο $\mathbb{C}P^0$ είναι μονοσύνολο και συνεπώς είναι απλά συνεκτικός και ο $\mathbb{C}P^1$ είναι ομοιομορφικός με την 2-σφαίρα S^2 και είναι επίσης απλά συνεκτικός. Υποθέτουμε οτι ο $\mathbb{C}P^{n-1}$ είναι απλά συνεκτικός και θα δείξουμε οτι ο $\mathbb{C}P^n$ είναι επίσης απλά συνεκτικός. Το σύνολο

$$E = \mathbb{C}P^n \setminus \{[0,...,0,1]\}$$

είναι ανοιχτό στον $\mathbb{C}P^n$ και $\mathbb{C}P^n = E \cup V$, όπου V είναι το ανοιχτό σύνολο

$$V = \{[z_0,...,z_{n-1},z_n] \in \mathbb{C}P^n : z_n \neq 0\}.$$

Επιπλέον, η $\phi : V \to \mathbb{C}^n$ με

$$\phi([z_0,...,z_{n-1},z_n]) = \Big(\frac{z_0}{z_n},...,\frac{z_{n-1}}{z_n}\Big)$$

είναι ομοιομορφισμός με αντίστροφη που δίνεται από τον τύπο

$$\phi^{-1}(t_0,...,t_{n-1}) = [t_0,...,t_{n-1},1].$$

Συνεπώς το V είναι απλά συνεκτικό.

Από την άλλη μεριά, η $j : \mathbb{C}P^{n-1} \to E$ με $j([z_0, ..., z_{n-1}]) = [z_0, ..., z_{m-1}, 0]$ είναι τοπολογική εμφύτευση και το $j(\mathbb{C}P^{n-1})$ είναι strong deformation retract του E. Πράγματι, η $r : E \to \mathbb{C}P^{n-1}$ με

$$r([z_0, ..., z_{n-1}, z_n]) = [z_0, ..., z_{m-1}]$$

είναι συνεχής και $r \circ j = id_{\mathbb{C}P^{n-1}}$. Επίσης, η συνεχής απεικόνιση $H : [0,1] \times E \to E$ με

$$H(t, [z_0, ..., z_{n-1}, z_n]) = [z_0, ..., z_{n-1}, tz_n]$$

είναι μία ομοτοπία $H : j \circ r \simeq id_E$ (με την επιπλέον ιδιότητα $H(t, [z_0, ..., z_{n-1}, 0] = [z_0, ..., z_{n-1}, 0]$ για κάθε $t \in [0,1]$ και $[z_0, ..., z_{m-1}] \in \mathbb{C}P^{n-1}$). Άρα οι χώροι E και $\mathbb{C}P^{n-1}$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο και ο E είναι κατά τόξα συνεκτικός, αφού ο $\mathbb{C}P^{n-1}$ είναι. Από την επαγωγική υπόθεση, προκύπτει τώρα οτι και ο E είναι απλά συνεκτικός. Τέλος, έχουμε

$$\phi(E \cap V) = \phi(V \setminus \{[0, ..., 0, 1]\}) = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

οπότε το $E \cap V$ είναι κατά τόξα συνεκτικό. Από αυτό τώρα προκύπτει οτι ο $\mathbb{C}P^n$ είναι απλά συνεκτικός.

9. Αν G είναι μία κατά τόξα συνεκτική τοπολογική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο 1, να αποδειχθεί οτι η $\pi_1(G, 1)$ είναι αβελιανή ομάδα.
(Υπόδειξη: Αν $[\gamma_1]$, $[\gamma_2] \in \pi_1(G, 1)$, θεωρούμε την απεικόνιση $F : [0,1] \times [0,1] \to G$ με $F(t, s) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(s)$.)

10. Να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος

$$S^1 \vee S^1 = \{(e^{2\pi it}, 1) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(1, e^{2\pi it}) : 0 \leq t \leq 1\}$$

δεν είναι retract του 2-torus $T^2 = S^1 \times S^1$.

11. Στον χώρο $S^1 \times [0,1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $(z, 0) \sim (-z, 0)$, $z \in S^1$. Ο χώρος πηλήκο $M^2 = S^1 \times [0,1]/\sim$ λέγεται ταινία του Möbius. Να αποδειχθεί οτι $\pi_1(M^2, *) \cong \mathbb{Z}$.

12. Έστω G, H δύο ομάδες.
(α) Να αποδειχθεί οτι αν το στοιχείο $x \in G * H$ έχει πεπερασμένη τάξη, να αποδειχθεί οτι το x είναι συζυγές με κάποιο στοιχείο του $G \cup H$.
(β) Αν οι ομάδες G, H δεν είναι τετριμένες, να αποδειχθεί οτι η ομάδα $G * H$ έχει στοιχεία που δεν έχουν πεπερασμένη τάξη.

13. Έστω $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ και $p : I^2 \to T^2$ η απεικόνιση πηλήκο $p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$. Αν $S^1 \vee S^1 = \{(z, w) \in T^2 : z = 1 \text{ ή } w = 1\}$, να αποδειχθεί οτι ο ομομορφισμός $(p|_{\partial I^2})_\sharp : \pi_1(\partial I^2, (0,0)) \to \pi_1(S^1 \vee S^1, (1,1))$ απεικονίζει τον γεννήτορα της $\pi_1(\partial I^2, (0,0))$ στον μεταθέτη των δύο γεννητόρων της $\pi_1(S^1 \vee S^1, (1,1))$.
(Υπόδειξη: Οι γεννήτορες της $\pi_1(S^1 \vee S^1, (1,1))$ αντιστοιχούν στα δύο κλειστά τόξα $\ell = \{(z, 1) \in T^2 : z \in S^1\}$ και $m = \{(1, w) \in T^2 : w \in S^1\}$.)

14. Έστω $M_g = T^2 \sharp \cdots \sharp T^2$ η προσανατολίσιμη, συνεκτική, συμπαγής επιφάνεια γένους $g \geq 1$. Αν $\pi = \pi_1(M_g, *)$, να αποδειχθεί οτι $\pi/[\pi, \pi] \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

(Υπόδειξη: Για κάθε ομάδα G και $N \lhd G$ με $N \leq [G,G]$ έχουμε

$$G/N \Big/ [G/N, G/N] \cong G/[G,G].$$

Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα αυτό για $G = \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ ($2g$ φορές) και κατάλληλη $N \lhd G$.)

15. Στο $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(x,0) \sim (1-x,1) \quad \text{και} \quad (0,y) \sim (1,y).$$

Ο χώρος πιλήκο K^2 λέγεται φιάλη του Klein. Να αποδειχθεί οτι

$$\pi_1(K^2, *) = \langle a, b | aba^{-1}b \rangle = \langle a_1, a_2 | a_1^2 a_2^2 \rangle.$$

16. Αν f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι οι ομοιομορφισμοί

$$f(x,y) = (x+1, y), \quad g(x,y) = (-x, y+1),$$

να αποδειχθεί οτι η ομάδα G που παράγουν δρά γνήσια ασυνεχώς επί του $\mathbb{R}^2$ με χώρο τροχιών τη φιάλη του Klein K^2.
(Υπόδειξη: Έχουμε $gfg^{-1}f = id$ και συνεπώς κάθε στοιχείο της G είναι της μορφής $f^m \circ g^n$ για κάποιους $m, n \in \mathbb{Z}$. Αν $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G$ είναι η απεικόνιση πιλήκο, τότε $p([0,1] \times [0,1]) = \mathbb{R}^2/G$ και η $p|_{(0,1)\times(0,1)}$ είναι 1-1.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΜΟΤΟΠΙΑΣ 4

1. Να αποδειχθεί οτι οι ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, δεν είναι ομοιομορφικοί.

2. Εστω $p : \widetilde{X} \to X$ μία απεικόνιση επικάλυψης κατά τόξα συνεκτικών και τοπικά κατά τόξα συνεκτικών χώρων. Αν ο $\widetilde{X}$ είναι συσταλτός χώρος, να αποδειχθεί οτι για κάθε απλά συνεκτικό και τοπικά κατά τόξα συνεκτικό χώρο Y κάθε συνεχής απεικόνιση $f : Y \to X$ είναι ομοτοπική με σταθερή.

3. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^n \to T^n$, $n \geq 2$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

4. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R}P^n \to S^1$, $n \geq 2$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

5. Έστω $n > 1$ ένας ακέραιος. Ποιά απεικόνιση επικάλυψης $p : S^1 \to S^1$ έχει χαρακτηριστική ομάδα την υποομάδα $n\mathbb{Z}$ της $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$;

6. Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μία απεικόνιση κανονικής επικάλυψης κατά τόξα συνεκτικών και τοπικά κατά τόξα συνεκτικών χώρων. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ με $p \circ h = p$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή αυτομορφισμός της επικάλυψης.

7. Έστω G μία τοπολογική ομάδα και H μία υποομάδα της.
(α) Να αποδειχθεί οτι η H είναι διακριτή τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή W του μοναδιαίου στοιχείου της e ώστε $W \cap H = \{e\}$.
(β) Αν η H είναι διακριτή και $G/H = \{Hg : g \in G\}$ είναι ο χώρος πιλήκο των δεξιών συμπλόκων της H στη G, να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πιλήκο $p : G \to G/H$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

8. Έστω G μία τοπολογική ομάδα, η οποία ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις για να έχει καθολικό χώρο επικάλυψης $\hat{G}$. Να αποδειχθεί οτι ο $\hat{G}$ δέχεται δομή τοπολογικής ομάδας έτσι ώστε η απεικόνιση καθολικής επικάλυψης $p : \hat{G} \to G$ να γίνεται ομομορφισμός ομάδων.
(Υπόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \hat{G} \times \hat{G} \to G$ με $f(\hat{x}, \hat{y}) = p(\hat{x})p(\hat{y})^{-1}$.)

9. Έστω X μία τοπολογική πολλαπλότητα και $p : \hat{X} \to X$ η απεικόνιση καθολικής επικάλυψης. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ομοιομορφισμό $f : X \to X$ υπάρχει ομοιομορφισμός $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}$ τέτοιος ώστε $p \circ \hat{f} = f \circ p$.

10. Αν X και Y είναι δύο τοπολογικές πολλαπλότητες που έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο, να αποδειχθεί οτι οι αντίστοιχοι χώροι καθολικής επικάλυψης έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.

11. Έστω p, $q \in \mathbb{N}$ πρώτοι μεταξύ τους με $1 \leq q < p$. Στην 3-σφαίρα

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

θεωρούμε τον ομοιομορφισμό $g : S^3 \to S^3$ με

$$g(z_1, z_2) = (z_1 e^{2\pi i q/p}, z_2 e^{2\pi i/p}).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η κυκλική ομάδα G που παράγεται από τον g δρά γνήσια ασυνεχώς επί της S^3.
(β) Ποιά είναι η θεμελειώδης ομάδα του χώρου τροχιών $L(p,q) = S^3/G$, οποίος λέγεται (p,q)-Lens space;
(γ) Χρησιμοποιώντας τη στερεογραφική προβολή ως προς τον βόρειο πόλο της S^3, να περιγραφεί η δράση της G επί της S^3 και να ευρεθεί η ανύψωση με αρχή το σημείο $(1,0) \in S^3$ ενός αντιπροσώπου του γεννήτορα της $\pi_1(L(p,q),(1,0))$.

12. Θεωρούμε την 3-σφαίρα $S^3 = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$ και την ομάδα $SU(2)$ των μοναδιαίων 2×2 μιγαδικών πινάκων με ορίζουσα 1 εφοδιασμένη με την τοπολογία που ορίζει ο περιορισμός της ευκλείδειας απόστασης από τον $\mathbb{C}^{2\times 2}$, τον οποίο ταυτίζουμε με τον $\mathbb{C}^4$.
(α) Να αποδειχθεί οτι

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : S^3 \to SU(2)$ με

$$f(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

είναι ομοιομορφισμός.
(γ) Αν $D^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ και $g : D^3 \to SO(3,\mathbb{R})$ είναι η απεικόνιση με $g(0) = I_3$ και τέτοια ώστε για $x \in D^3 \setminus \{0\}$ η $g(x)$ είναι η περιστροφή περί τον άξονα που παράγει το διάνυσμα x κατά την προσανατολισμένη γωνία $\|x\| \cdot \pi$, να αποδειχθεί οτι η g επάγει έναν ομοιομορφισμό $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3,\mathbb{R})$.
(δ) Να αποδειχθεί οτι η $SO(3,\mathbb{R})$ είναι κατά τόξα συνεκτική τοπολογική ομάδα και $\pi_1(SO(3,\mathbb{R}),*) \cong \mathbb{Z}_2$.

13. Έστω $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ ο μη-μεταθετικός διαιρετικός δακτύλιος των quaternions. Τότε

$$\begin{aligned} S^3 &= \{\alpha + \beta j \in \mathbb{H} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \\ &= \{a + bi + cj + dk : a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \end{aligned}$$

και είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{H} \setminus \{0\}$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : S^3 \to SU(2)$ με

$$f(\alpha + \beta j) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

είναι ομοιομορφισμός και ισομορφισμός ομάδων.
(β) Να αποδειχθεί οτι το κέντρο της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ είναι το $\mathbb{R}$.
(γ) Για κάθε $q \in S^3$ να δειχθεί οτι η απεικόνιση $P(q) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ με $P(q)(x) = qxq^{-1}$ είναι στοιχείο της $SO(4,\mathbb{R})$ και $P(q)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
(δ) Ταυτίζοντας τον $\mathbb{R}^3$ με τον διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{H}$ που παράγεται από το $\{i,j,k\}$, να αποδειχθεί οτι ο περιορισμός $p(q) = P(q)|_{\mathbb{R}^3}$, $q \in S^3$, ορίζει έναν επιμορφισμό ομάδων $p : S^3 \to SO(3,\mathbb{R})$ με πυρήνα $\{\pm 1\}$.
(ε) Να δειχθεί οτι η p είναι η απεικόνιση καθολικής επικάλυψης της $SO(3,\mathbb{R})$.
(Υπόδειξη: Για τον πολλαπλασιασμό στον $\mathbb{H}$ έχουμε

$$(\alpha + \beta j)(\alpha' + \beta' j) = (\alpha\alpha' - \beta\overline{\beta'}) + (\alpha\beta' + \beta\overline{\alpha'})j.)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΜΟΤΟΠΙΑΣ 5

1. Αν X είναι ένας H-χώρος με ομοτοπικά ταυτοτικό στοιχείο $x_0 \in X$, να αποδειχθεί οτι η $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή ομάδα.

2. Έστω X ένας χώρος. Στο χώρο γινόμενο $X \times [-1, 1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$, όπου $(x, t) \sim (y, s)$ όταν $t = s = 1$ ή $t = s = -1$. Ο χώρος πηλήκο ΣX λέγεται unreduced suspension του X. Να αποδειχθεί οτι αν ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε ο ΣX είναι απλά συνεκτικός χώρος.

3. Έστω (X, x_0) και (Y, y_0) δύο χώροι με βασικό σημείο που έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο, δηλαδή $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$.
(α) Να αποδειχθεί οτι $(\Omega X, x_0) \simeq (\Omega Y, y_0)$ και συνεπώς ο Ω είναι συναρτητής από την ομοτοπική κατηγορία των χώρων με βασικό σημείο στον εαυτό της.
(β) Να αποδειχθεί οτι $(SX, [x_0, 0]) \simeq (SY, [y_0, 0])$ και ο S είναι συναρτητής από την ομοτοπική κατηγορία των χώρων με βασικό σημείο στον εαυτό της.

4. Έστω (X, x_0) ένας χώρος με βασικό σημείο. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση

$$\sigma_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_{n+1}(SX, [x_0, 0])$$

με $\sigma([f]) = [Sf]$, για κάθε συνεχή $f : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$, είναι ομομορφισμός ομάδων, $n \in \mathbb{N}$. Η σ_n λέγεται suspension homomorphism.

5. Έστω X ένας χώρος και $x_0 \in A \subset X$. Αν η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ επάγει μονομορφισμό στις θεμελειώδεις ομάδες, να αποδειχθεί οτι η $\pi_2(X, A, x_0)$ είναι αβελιανή ομάδα.

6. Έστω X ένας χώρος και $x_0 \in A \subset X$. Αν το A είναι retract του X, να αποδειχθεί οτι

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(A, x_0) \oplus \pi_n(X, A, x_0)$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 2$.

7. Να υπολογιστεί η $\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}, *)$ για $n \geq 2$ και να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πηλήκο $p : (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \to (\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1}, *)$ δεν επάγει ισομορφισμό στις ομάδες ομοτοπίας.

8. Έστω $p : E \to B$ μία weak fibration. Αν ο B είναι κατά τόα συνεκτικός χώρος και κάποια ίνα της είναι κατά τόξα συνεκτική, να αποδειχθεί οτι ο E είναι κατά τόξα συνεκτικός χώρος.

9. Έστω $p : E \to B$ μία weak fibration. Αν υπάρχει συνεχής τομή (cross section) $s : B \to E$, δηλαδή $p \circ s = id_B$, να αποδειχθεί οτι

$$\pi_n(E, x_0) \cong \pi_n(B, b_0) \oplus \pi_n(F, x_0), \quad n \geq 2,$$

όπου $b_0 \in B$ και $x_0 \in p^{-1}(b_0) = F$.

10. Να αποδειχθεί οτι για κάθε κατά τόξα συνεκτικό χώρο X η απεικόνιση $p : PX \to X \times X$ με $p(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ είναι fibration, όπου $PX = \{\gamma | \gamma : [0, 1] \to X \quad \text{συνεχής}\}$ εφοδιασμένο

με τη συμπαγή-ανοιχτή τοπολογία.

11. Έστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος και $h : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Στο γινόμενο $[0,1] \times X$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(0, h(x)) \sim (1, x), \quad x \in X.$$

Ο χώρος πηλίκο $M = [0,1] \times X/\sim$ λέγεται mapping torus του h.
(α) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $p : M \to S^1$ με $p([t,x]) = e^{2\pi i t}$ είναι fibre bundle map με ίνα X.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\pi_n(X,*) \cong \pi_n(M,*)$ για $n \geq 2$, ενώ υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$\{1\} \to \pi_1(X,*) \to \pi_1(M,*) \to \mathbb{Z} \to \{1\}.$$

(γ) Αν $X = S^2$, να αποδειχθεί οτι $\pi_1(M,*) \cong \mathbb{Z}$ και $\pi_2(M,*) \cong \mathbb{Z}$.

12. Να αποδειχθεί οτι $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$ για κάθε ακέραιο $n > 2$.

13. Μία συνεχής απεικόνιση $p : E \to B$ λέμε οτι έχει τοπική τομή (local cross section) στο σημείο $b \in B$, αν υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή U του b στον B και μία συνεχής απεικόνιση $s : U \to E$ με $p \circ s = id_U$. Έστω G μία τοπολογική ομάδα, $H \leq G$ μία κλειστή υποομάδα της και $p : G \to G/H$ η απεικόνιση πηλίκο στο χώρο πηλίκο $G/H = \{gH : g \in G\}$ των αριστερών συμπλόκων της H στη G.
(α) Αν η p έχει τοπική τομή στο σημείο H του G/H, να αποδειχθεί οτι έχει τοπική τομή σε κάθε σημείο του G/H.
(β) Αν η p έχει τοπική τομή στο H, να αποδειχθεί οτι για κάθε κλειστή υποομάδα $K \leq H$ η κανονική απεικόνιση $q : G/K \to G/H$ είναι fibre bundle map με ίνα H/K.

14. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $p : SO(n+1,\mathbb{R}) \to S^n$ η απεικόνιση $p(A) = Ae_{n+1}$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η p επάγει έναν ομοιομορφισμό $SO(n+1,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R}) \approx S^n$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
SO(n+1,\mathbb{R}) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & S^n \\
\frac{SO(n+1,\mathbb{R})}{SO(n,\mathbb{R})} \arrow[ur, dashed, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

(β) Να αποδειχθεί οτι η p έχει τοπική τομή σε κάθε σημείο της S^n.
(γ) Να αποδειχθεί οτι $\pi_k(SO(n,\mathbb{R}),*) \cong \pi_k(SO(n+1,\mathbb{R}),*)$ για κάθε ακέραιο $0 \leq k < n-1$.
(δ) Να αποδειχθεί οτι $\pi_1(SO(n,\mathbb{R}),*) \cong \mathbb{Z}_2$ για κάθε ακέραιο $n \geq 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΜΟΤΟΠΙΑΣ 6

1. Είναι η $(n-1)$-σφαίρα S^{n-1} retract (ως ισημερινός) της n-σφαίρας S^n;

2. Έστω G μια μη-τετριμένη ομάδα ομοιομορφισμών της $2k$-σφαίρας S^{2k}, $k \geq 1$, που δρά ελεύθερα επί της S^{2k}, δηλαδή αν $g \in G$ και $g(x) = x$ για κάποιο $x \in S^{2k}$, τότε $g = id$. Να αποδειχθεί οτι $G \cong \mathbb{Z}_2$.

3. Έστω $f, g : S^n \to S^n$, $n \geq 1$, δύο συνεχείς απεικονίσεις με $|d(f)| \neq |d(g)|$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει $x \in S^n$ ώστε τα διανύσματα $f(x)$ και $g(x)$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ να είναι κάθετα.

4. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$, $n > 1$, επεκτείνεται σε μια συνεχή απεικόνιση $\tilde{f} : S^n \to S^n$ με $d(\tilde{f}) = d(f)$. Συνεπώς, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει συνεχής απεικόνιση της S^n βαθμού k.

5. Έστω $X \subset D^n$ ένα retract του D^n. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to X$ έχει σταθερό σημείο.

6. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας πίνακας του οποίου οι στήλες είναι στοιχεία του Δ_{n-1}, $n > 1$. Να αποδειχθεί οτι το 1 είναι ιδιοτιμή του A.

7. Έστω $n > 1$ και $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας πίνακας ώστε $a_{ij} > 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Να αποδειχθεί οτι ο A έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή $\lambda > 0$ στην οποία αντιστοιχεί τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ με $x_i > 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.
(Υπόδειξη: Θεωρούμε την $f : \Delta_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ με $f(x) = \dfrac{Ax}{\sigma(Ax)}$, όπου $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.)

8. Αν $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο με μη-κενό εσωτερικό, να αποδειχθεί οτι το ∂X δεν είναι retract του X.
(Υπόδειξη: Θεωρώντας κάποιο ομοιομορφικό αντίτυπο του X, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $0 \in \mathrm{int}X$ και $X \subset \mathrm{int}D^n$. Αν υπάρχει retraction $r : X \to \partial X$, τότε αυτή επεκτείνεται σε συνεχή $\tilde{r} : D^n \to D^n \setminus \mathrm{int}X$.)