ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
1ο Φύλλο

1. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + 4z \end{pmatrix}.$$

Υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^3$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα της f;

2. Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

διαγωνοποιήσιμος;

3. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

δεν διαγωνοποιείται.

4. Εστω F ένα σώμα και $A \in F^{n\times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Εστω $\lambda \in F$ μία ιδιοτιμή του A, οπότε $\lambda \neq 0$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:
(α) Ο $\dfrac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.
(β) Οι A και A^{-1} έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

5. Να αποδειχθεί οτι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

διαγωνοποιείται και να ευρεθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε ο RAR^{-1} να είναι διαγώνιος.

6. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$, $n \geq 1$, χωρίς καμία ιδιοτιμή στο $\mathbb{R}$. Αν $W \leq \mathbb{R}^{2n}$ είναι ένας f-αναλλοίωτος υπόχωρος, να αποδειχθεί οτι η διάσταση του W είναι άρτιος ακέραιος.

7. Να αποδειχθεί οτι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$$

δεν έχει καμία ιδιοτιμή.

8. Εστω F ένα σώμα και $n \in \mathbb{N}$. Εστω ακόμα a_0, a_1,...,$a_{n-1} \in F$ και

$$p = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in F[X].$$

Να αποδειχθεί οτι το p είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in F^{n \times n}.$$

9. Εστω F ένα σώμα και $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε A, $B \in F^{n \times n}$ οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

10. Εστω F ένα σώμα και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο F με πεπερασμένη διάσταση. Εστω $f \in \mathrm{End}(V)$ και $p \in F[X]$.
(α) Αν το $\lambda \in F$ είναι ιδιοτιμή της f, να αποδειχθεί οτι το $p(\lambda) \in F$ είναι ιδιοτιμή της $p(f) \in \mathrm{End}(V)$.
(β) Αν το F είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα, να αποδειχθεί οτι ισχύει και το αντίστροφο του (α). Δηλαδή, για κάθε ιδιοτμή $a \in F$ της $p(f) \in \mathrm{End}(V)$ υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda \in F$ της f ώστε $a = p(\lambda)$.
(Υπόδειξη: Για την απόδειξη του (β) θεωρείστε το πολυώνυμο $p - a$.)

11. Εστω $C(\mathbb{R}) = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής$\}$ και $T : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ η γραμμική απεικόνιση με

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η T είναι μονομορφισμός, αλλά όχι ισομορφισμός.
(β) Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει κανένας 1-διάστατος T-αναλλοίωτος υπόχωρος του $C(\mathbb{R})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
2ο Φύλλο

1. Εστω F ένα σώμα και $A \in F^{n\times n}$. Να αποδειχθεί οτι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A είναι $(-1)^n \mathrm{det} A$.

2. Να ευρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο των παρακάτω στοιχείων του $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

3. Είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

διαγωνοποιήσιμος;

4. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n πάνω σε ένα σώμα F. Αν $f \in \mathrm{End}(V)$ και υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f^k = 0$, να αποδειχθεί οτι $f^n = 0$.

5. Εστω F ένα σώμα και a, b, $c \in F$. Να ευρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in F^{3\times 3}.$$

6. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω σε ένα σώμα F και $f : V \to V$ ένας γραμμικός ισομορφισμός. Αν το ελάχιστο πολυώνυμο της f έχει βαθμό m, να αποδειχθεί οτι η f^{-1} είναι γραμμικός συνδυασμός των id_V, f, f^2,..., f^{m-1}.

7. Να ευρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

με χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton.

8. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $n \geq 2$ πάνω σε ένα σώμα F. Αν η $f \in \mathrm{End}(V)$ έχει τάξη 1, να αποδειχθεί οτι το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι $X(X - a)$ για κάποιο $a \in F$.

9. Εστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ που έχει μοναδικές ιδιοτιμές τις 2 και 3. Να αποδειχθεί οτι $(A - 2I)^{n-1}(A - 3I)^{n-1} = 0$.

10. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να ευρεθούν όλοι οι f-αναλλοίωτοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$.

11. Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

τριγωνοποιήσιμος; Αν ναί, να ευρεθεί ένας άνω τριγωνικός πίνακας όμοιος προς αυτόν.

12. Εστω οτι ο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$(X-\lambda_1)^{d_1}(X-\lambda_2)^{d_2}\cdots(X-\lambda_k)^{d_k}.$$

Να αποδειχθεί οτι $d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 + \cdots d_k\lambda_k = \mathrm{Tr}A$.

13. Να ευρεθεί ένα πίνακας $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ που έχει ελάχιστο πολυώνυμο το X^2.

14. Εστω F ένα σώμα και $A \in F^{n\times n}$. Να αποδειχθεί οτι η γραμμική απεικόνιση $f : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ με τύπο $f(B) = AB$ έχει το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο με τον A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
3ο Φύλλο

1. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Αν W είναι ο υπόχωρος (ευθεία) που παράγεται από το $\{e_1\}$, να αποδειχθεί οτι ο W είναι f-αναλλοίωτος, αλλά δεν υπάρχει f-αναλλοίωτος υπόχωρος U τέτοιος ώστε $\mathbb{R}^2 = W \oplus U$.

2. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να ευρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο της f και η πρωταρχική του ανάλυση σε ανάγωγους διαιρέτες.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι ο A είναι όμοιος με τον

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να ευρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο της f και η πρωταρχική του ανάλυση σε ανάγωγους διαιρέτες.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})^2$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι ο A είναι όμοιος με τον

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

4. Εστω F ένα σώμα και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο F με πεπερασμένη διάσταση. Εστω $f \in \mathrm{End}(V)$ τέτοια ώστε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο να είναι $\chi = (X - \lambda_1)^{d_1} \cdots (X - \lambda_k)^{d_k}$, όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ είναι οι διακεκριμένες

ιδιοτιμές της f και $d_1,...,d_k \in \mathbb{N}$ είναι οι πολλαπλότητες τους, αντίστοιχα. Οταν το F είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι πάντα αυτής της μορφής. Αν το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι $p = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_k)^{n_k}$, να αποδειχθεί οτι

$$d_j = \mathrm{dimKer}(f - \lambda_j id_V)^{n_j}, \quad 1 \le j \le k.$$

5. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση πάνω στο σώμα F και $f \in \mathrm{End}(V)$. Εστω ακόμα p, p_1, $p_2 \in F[X]$ με $\mathrm{deg}p_1 \ge 1$, $\mathrm{deg}p_2 \ge 1$ τέτοια ώστε (α) $p = p_1p_2$, (β) τα p_1, p_2 είναι πρώτα μεταξύ τους και (γ) $p(f) = 0$.
Να αποδειχθεί οτι $V = \mathrm{Ker}p_1(f) \oplus \mathrm{Ker}p_2(f)$.
(Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος της Πρωταρχικής Ανάλυσης.)

6. Να αποδειχθεί οτι η $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

είναι μηδενοδύναμη.

7. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση πάνω στο σώμα F. Αν η $f \in \mathrm{End}(V)$ είναι μηδενοδύναμη, να αποδειχθεί οτι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της f είναι άνω τριγωνικός με μηδενικά στη διαγώνιο.

8. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι το $(X-1)(X-2)^2$.
(β) Να υπολογιστούν οι πίνακες (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση) του διαγωνοποιήσιμου και του μηδενοδύναμου μέρους της f.

9. Εστω F ένα σώμα και $A \in F^{n\times n}$. Να αποδειχθεί οτι αν ο A είναι μηδενοδύναμος, τότε η $f_A : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ με $f_A(X) = AX - XA$ είναι μηδενοδύναμη.
(Υπόδειξη: Αν $A^m = 0$, τότε $f_A^{m+1} = 0$.)

10. Να υπολογιστεί η n-στή δύναμη του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανάλυση σε διαγωνοποιήσιμο και μηδενοδύναμο μέρος.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
4ο Φύλλο

1. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Να ευρεθεί ο f-μηδενιστής του διανύσματος e_1.

2. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ η γραμμική απεικόνιση με $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}$. Να ευρεθεί ο f-μηδενιστής του διανύσματος $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και να αποδειχθεί οτι το v είναι f-κυκλικό.

3. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω στο σώμα F και $f \in \mathrm{End}(V)$. Αν τα διανύσματα u, $v \in V$ έχουν τον ίδιο f-μηδενιστή, να αποδειχθεί οτι για κάθε $q \in F[X]$ τα διανύσματα $q(f)(u)$ και $q(f)(v)$ έχουν τον ίδιο f-μηδενιστή.

4. Εστω F ένα μη-πεπερασμένο σώμα και V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n πάνω στο F και $f \in \mathrm{End}(V)$. Υποθέτουμε οτι η f είναι διαγωνοποιήσιμη.
(α) Αν υπάρχει ένα f-κυκλικό διάνυσμα, να αποδειχθεί οτι η f έχει μόνο απλές ιδιοτιμές.
(β) Αν η f έχει μόνο απλές ιδιοτιμές και $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ είναι μια βάση του V από ιδιοδιανύσματα της f, να αποδειχθεί οτι το $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ είναι f-κυκλικό διάνυσμα.

5. Εστω F ένα σώμα και V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω στο F. Εστω $f \in \mathrm{End}(V)$ και έστω οτι υπάρχει ένα f-κυκλικό διάνυσμα. Να αποδειχθεί οτι αν η $g \in \mathrm{End}(V)$ μετατίθεται με την f, τότε υπάρχει $q \in F[X]$ ώστε $g = q(f)$.

6. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να ευρεθεί οτι το ελάχιστο πολυώνυμο της f.
(β) Να αποδειχθεί οτι η f είναι μηδενοδύναμη.

(β) Να αποδειχθεί οτι ο A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Εστω $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι το $p = (X-1)^2$.
(β) Να αποδειχθεί οτι ο A είναι όμοιος με τον

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(γ) Να ευρεθούν διανύσματα $v_1,\ v_2 \in \mathbb{R}^3$ ώστε $\mathbb{R}^3 = Z(v_1, f) \oplus Z(v_2, f)$.
(Υπόδειξη: Για το (β) εφαρμόστε το Θεώρημα της Κυκλικής Ανάλυσης. Για το (γ) αναζητείστε τα $v_1,\ v_2$ έτσι ώστε ο πίνακας της f ως προς τη βάση που προκύπτει από αυτή την κυκλική ανάλυση του $\mathbb{R}^3$ να είναι ο B. Δοκιμάστε $v_1 = e_1$, παρατηρώντας οτι $\dim Z(e_1, f) = 2$.)

8. Εστω F ένα σώμα και V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω στο F και $f \in \mathrm{End}(V)$. Να αποδειχθεί οτι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι ανάγωγο πάνω στο F τότε και μόνο τότε όταν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του V είναι f-κυκλικό.

9. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση n πάνω σε ένα σώμα F. Εστω οτι η $f \in \mathrm{End}(V)$ είναι μηδενοδύναμη και $f^{n-1} \neq 0$. Αν το $v \in V$ είναι τέτοιο ώστε $f^{n-1}(v) \neq 0$, να αποδειχθεί οτι το v είναι f-κυκλικό διάνυσμα.

10. Εστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^2 + I_n = 0$, όπου I_n είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Να αποδειχθεί οτι ο n είναι άρτιος και οτι αν $n = 2k$, ο A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k\times 2k}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
5ο Φύλλο

1. Να ευρεθεί η μορφή Jordan του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

(Υπόδειξη: Ο πίνακας είναι μηδενοδύναμος.)

2. Εστω F ένα σώμα και $A \in F^{5\times 5}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi = (X-2)^3(X+7)^2.$$

Να ευρεθεί η μορφή Jordan του A, όταν το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το
(α) $p = (X-2)^2(X+7)$,
(β) $p = (X-2)^3(X+7)$.

3. Ποιές είναι οι δυνατές μορφές Jordan για έναν 6×6 πίνακα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(X+2)^4(X-1)^2$;

4. Εστω F ένα σώμα και A, $B \in F^{3\times 3}$ δύο μηδενοδύναμοι πίνακες. Να αποδειχθεί οτι οι A, B είναι όμοιοι τότε και μόνο τότε όταν έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

5. Εστω F ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και A, $B \in F^{n\times n}$ δύο πίνακες με το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi = (X-\lambda_1)^{d_1} \cdots (X-\lambda_k)^{d_k},$$

όπου τα $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in F$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές τους και το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο. Αν $1 \leq d_j \leq 3$ για κάθε $1 \leq j \leq k$, να αποδειχθεί οτι οι A, B είναι όμοιοι.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Ασκηση 4, το Θεώρημα της Πρωταρχικής Ανάλυσης και τη μορφή Jordan.)

6. Να ευρεθούν οι μορφές Jordan των παρακάτω πινάκων.

$$(\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix} \quad (\beta) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (\gamma) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2i \\ -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\delta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Εστω a, b, $c \in \mathbb{R}$ και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Να ευρεθεί η μορφή Jordan του A.

8. Εστω F ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n πάνω στο F και $f \in \mathrm{End}(V)$. Να αποδειχθεί οτι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(α) Ο V δεν είναι ευθύ άθροισμα δύο f-αναλλοίωτων, γνήσιων υποχώρων του.
(β) Το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι $(X - \lambda)^n$ για κάποιο $\lambda \in F$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
6ο Φύλλο

1. Εστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n πάνω στο F και $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ μια βάση του. Αν $\langle , \rangle : V \times V \to F$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον V, να αποδειχθεί οτι για κάθε c_1, c_2,..., $c_n \in F$ υπάρχει μοναδικό $x \in V$ τέτοιο ώστε $\langle x, v_j \rangle = c_j$ για κάθε $1 \leq j \leq n$.

2. Εστω $(V, \langle , \rangle)$ ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν η $f \in \mathrm{End}(V)$ είναι τέτοια ώστε $\langle f(v), v \rangle = 0$ για κάθε $v \in V$, να αποδειχθεί οτι $f = 0$. Ισχύει αυτό σε πραγματικούς διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο;
(Υπόδειξη: Για κάθε v, $w \in V$ υπολογίστε τα εσωτερικά γινόμενα $\langle f(v+w), v+w \rangle$ και $\langle f(iv+w), iv+w \rangle$.)

3. Εστω $(V, \langle , \rangle)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν τα x, $y \in V$ είναι τέτοια ώστε $\|y\| = 3$, $\|x+y\| = 4$ και $\|x-y\| = 6$, να υπολογιστεί το $\|x\|$.

4. Να αποδειχθεί οτι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ισχύει οτι

$$\left| \int_0^1 f(t)dt \right|^2 \leq \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

5. Αν a_1, a_2,..., $a_n > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1/2} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{\lambda} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{1-\lambda} \right)$$

και η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε όταν $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ή $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

6. Να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση του διανυσματικού υποχώρου του $\mathbb{C}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

7. Εστω $V \leq C[0,1]$ ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο συνεχών συναρτήσεων $S = \{1, t, t^2, t^3\}$. Δηλαδή, ο V αποτελείται από όλες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού το πολύ 3. Να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση του V ως προς το L^2-εσωτερικό γινόμενο με τον αλγόριθμο Gram-Schmidt.

8. Να ευρεθεί μια βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του διανυσματικού υποχώρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος της ευθείας στον $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

10. Εστω $(V, \langle , \rangle)$ ένας ευκλείδειος χώρος, $W \leq V$ και $u \in V \setminus W$.
(α) Να αποδειχθεί οτι το $W^{\perp} \cap (u + W)$ είναι μονοσύνολο.
(β) Αν $W^{\perp} \cap (u + W) = \{v_0\}$, να αποδειχθεί οτι $\|v_0\| = \min\{\|v\| : v \in u + W\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
7ο Φύλλο

1. Εστω $W \leq \ell_2$ ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο των ακολουθιών $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, όπου το 1 βρίσκεται στη n-οστή θέση, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι $W^\perp = \{0\}$ και συνεπώς $\ell_2 \neq W \oplus W^\perp$.

2. Να ευρεθεί η δυϊκή της βάσης του $\mathbb{C}^3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Εστω $n \geq 2$ και $\phi_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ η γραμμική μορφή με

$$\phi_k(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = \sum_{j=1}^{n} (k - j) x_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Να υπολογιστεί η διάσταση του $W = \{v \in \mathbb{C}^n : \phi_1(v) = \cdots = \phi_n(v) = 0\}$.

4. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n πάνω στο σώμα F και $\{v_1, ..., v_n\}$, $\{u_1, ..., u_n\}$ δύο βάσεις του. Εστω $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ο πίνακας αλλαγής βάσης, δηλαδή $u_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, $1 \leq j \leq n$. Αν $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ είναι ο πίνακας αλλαγής των αντίστοιχων δυϊκών βάσεων του V^*, δηλαδή $u_j^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i^*$, $1 \leq j \leq n$, να αποδειχθεί οτι $B = (A^t)^{-1}$.

5. Εστω V_n ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}[X]$ που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές και με βαθμό $< n$. Να ευρεθεί η δυϊκή της βάσης $\{1, X, X^2, ..., X^{n-1}\}$ του V_n.

6. Εστω $V = \{f | f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad \text{συνεχής}\}$. Είναι η $\phi : V \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(f) = \max\{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$$

στοιχείο του V^*;

7. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω στο σώμα F.
(α) Αν το $x \in V$ είναι τέτοιο ώστε $\phi(x) = 0$ για κάθε $\phi \in V^*$, να αποδειχθεί οτι $x = 0$.
(β) Για κάθε $x \in V$ ορίζεται η γραμμική μορφή $e_x : V^* \to F$ με $e_x(\phi) = \phi(x)$. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $e : V \to (V^*)^*$ με $e(x) = e_x$ είναι (φυσικός) γραμμικός ισομορφισμός.

8. Εστω V_n ο διανυσματικός χώρος που αποτελείται από όλες τις πραγματικές πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού $< n$, όπου $n \geq 2$. Εστω $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.
(α) Αν $\phi_i : V_n \to \mathbb{R}$ είναι η γραμμική μορφή με $\phi_i(p) = p(t_i)$, $1 \leq i \leq n$, να αποδειχθεί οτι το σύνολο $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ αποτελεί βάση του V_n^*.
(β) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $a < t_1$ και $t_n < b$ και κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ βαθμού $< n$ υπάρχουν c_1, c_2,..., $c_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_a^b p(t)dt = \sum_{i=1}^{n} c_i p(t_i).$$

(γ) (Lagrange) Να αποδειχθεί οτι για κάθε a_1, a_2,..., $a_n \in \mathbb{R}$ υπάρχει $p \in V_n$ τέτοιο ώστε $p(t_i) = a_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.
(Υπόδειξη: Για το (α) θεωρείστε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις $p_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - t_j)$, $1 \leq i \leq n$. Για το (γ) χρησιμοποιείστε την άσκηση 7.)

9. Εστω $(V, \langle , \rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης n και $\{v_1, ..., v_n\}$ μια ορθοκανονική του βάση. Αν το $\phi \in V^*$ είναι τέτοιο ώστε $\sum_{j=1}^{n} |\phi(v_j)|^2 = 1$, να αποδειχθεί οτι $|\phi(v)| \leq \|v\|$ για κάθε $v \in V$.

10. Να αποδειχθεί οτι για κάθε γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $\phi(A) = \mathrm{Tr}(A\bar{B}^t)$ για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

11. Εστω $n \geq 2$ και V_n ο διανυσματικός χώρος που αποτελείται από όλες τις πραγματικές πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού $< n$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει μια μοναδική $p \in V_n$ τέτοια ώστε

$$q(0) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad \text{για κάθε} \quad q \in V_n.$$

12. Εστω $T > 0$ και $V = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{λεία και περιοδική περιόδου} \quad T\}$. Στον V θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

Αν $D : V \to V$ είναι η γραμμική απεικόνιση με $D(f) = f'$, να αποδειχθεί οτι

$$\langle D(f), g \rangle = -\langle f, D(g) \rangle$$

για κάθε f, $g \in V$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
8ο Φύλλο

1. Εστω $(V, \langle , \rangle)$ ένας ερμιτιανός χώρος και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $f^* = -f$, να αποδειχθεί οτι όλες οι ιδιοτιμές της f είναι καθαρά φανταστικοί μιγαδικοί αριθμοί. Συνεπώς, κάθε αντι-ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, δηλαδή με την ιδιότητα $\bar{A}^t = -A$, έχει καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές.

2. Να αποδειχθεί οτι οι παρακάτω πραγματικοί 3×3 πίνακες είναι ορθογώνιοι.

$$\text{(α)} \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \text{(β)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3. Να εξεταστεί αν υπάρχουν a, b, $c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε ο παρακάτω 3×3 πίνακας να είναι ορθογώνιος.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

4. Να ευρεθούν όλα τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία ο παρακάτω πραγματικός 3×3 πίνακας είναι ορθογώνιος.

$$\begin{pmatrix} 2a & -2a & a \\ -2a & -a & 2a \\ a & 2a & 2a \end{pmatrix}$$

5. Να αποδειχθεί οτι η στροφή του $\mathbb{R}^2$ κατά γωνία $2\pi/3$ δεν είναι τριγωνοποιήσιμο στοιχείο του $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.

6. Να εξεταστεί αν οι παρακάτω μιγαδικοί 2×2 πίνακες είναι μοναδιακοί.

$$\text{(α)}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \qquad \text{(β)} \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2} & ai \\ -ai & \sqrt{1+a^2} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

7. Στον μιγαδικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{n\times n}$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο που δίνεται από τον τύπο $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A\bar{B}^t)$. Αν ο πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι μοναδιακός, να αποδειχθεί οτι η γραμμική απεικόνιση $f_U : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ με $f_U(A) = UA$ είναι μοναδιακή.

8. Να αποδειχθεί οτι κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι η σύνθεση το πολύ δύο ανακλάσεων.

9. Αν f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι δύο ορθογώνιοι μετασχηματισμοί με $\det f = \det g = -1$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοιος

ώστε $h \circ f \circ h^{-1} = g$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 8.)

10. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ υπάρχει ένα μη-μηδενικό $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $f^2(v) = v$.

11. Να αποδειχθεί οτι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

είναι περιστροφή περί άξονα και να ευρεθούν ο άξονας και η γωνία περιστροφής.

12. Εστω $(V, \langle , \rangle)$ ένας ευκλείδειος χώρος και v, $w \in V$ δύο μη-μηδενικά διανύσματα με $\|v\| = \|w\|$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει μια ανάκλαση $f : V \to V$ τέτοια ώστε $f(v) = w$ και $f(w) = v$.
(Υπόδειξη: Επειδή $\|v\| = \|w\|$, τα διανύσματα $v + w$ και $v - w$ είναι κάθετα.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
9ο Φύλλο

1. Εστω $(V, \langle, \rangle)$ ένας ερμιτιανός χώρος και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι η f είναι αυτοσυζυγής τότε και μόνο τότε όταν $\langle f(v), v\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $v \in V$.

2. Να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ από ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

3. Να ευρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$U^t \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} U$$

να είναι διαγώνιος.

4. Εστω $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Να ευρεθεί μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ από ιδιοδιανύσματα του A και ένας ορθογώνιος πίνακας $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, τέτοιος ώστε ο U^tAU να είναι διαγώνιος.

5. Εστω $(V, \langle, \rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και $f : V \to V$ μια αυτοσυζυγής γραμμική απεικόνιση. Εστω $\mu \in \mathbb{R}$, όταν ο V είναι ευκλείδειος ή $\mu \in \mathbb{C}$, όταν ο V είναι ερμιτιανός και $\epsilon > 0$. Αν υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $\|v\| = 1$ και $\|f(v) - \mu v\| < \epsilon$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει μια ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ της f τέτοια ώστε $|\lambda - \mu| < \epsilon$.

6. Να αποδειχθεί οτι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ με

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 + iz_2 \\ z_1 + 2z_2 \end{pmatrix}$$

είναι φυσιολογική, αλλά όχι αυτοσυζυγής.

7. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $0 \leq \theta < 2\pi$ υπάρχει $U \in U(2)$ τέτοιος ώστε

$$U \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

8. Να αποδειχθεί οτι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

είναι φυσιολογικός και να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^2$ από ιδιοδιανύσματα του A.

9. Εστω $(V, \langle , \rangle)$ ένας ερμιτιανός χώρος και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Θέτουμε

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + f^*) \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{1}{2i}(f - f^*).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι οι f_1, f_2 είναι αυτοσυζυγείς.
(β) Να αποδειχθεί οτι $f = f_1 + if_2$ και οι f_1, f_2 είναι οι μοναδικοί αυτοσυζυγείς μετασχηματισμοί του V με αυτή την ιδιότητα.
(γ) Να αποδειχθεί οτι η f είναι φυσιολογική τότε και μόνο τότε όταν οι f_1, f_2 μετατίθενται.

10. Να αποδειχθεί οτι οι παρακάτω μιγαδικοί πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

είναι φυσιολογικοί, αλλά ο AB δεν είναι φυσιολογικός.
(Υπόδειξη: Αρκεί να παρατηρήσουμε οτι $\bar{A}^t = A$ και $\bar{B}^t = -B$, αλλά $AB \neq BA$.)

11. Εστω $(G, +)$ μία πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και $C(G) = \{\phi | \phi : G \to \mathbb{C}\}$, που είναι μιγαδικός διανυσματικός χώρος διάστασης $|G|$, στον οποίο ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \phi)(x)\overline{\psi(x)}.$$

Για κάθε $y \in G$ ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $T_y : C(G) \to C(G)$ με

$$T_y(\phi)(x) = \phi(x - y)$$

για κάθε $\phi \in C(G)$, $x \in G$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η T_y είναι μοναδιακή.
(β) Αν το $y \in G$ έχει τάξη m, να αποδειχθεί οτι το ελάχιστο πολυώνυμο της T_y είναι το $X^m - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

12. Να αποδειχθεί οτι κάθε $A \in SU(2)$ είναι πίνακας της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Η 3-διάστατη σφαίρα είναι το σύνολο $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Να αποδειχθεί οτι ορίζεται μία 1-1 και επί απεικόνιση $h : S^3 \to SU(2)$ τέτοια ώστε οι h, h^{-1} είναι συνεχείς, θεωρώντας οτι $SU(2) \subset \mathbb{C}^{2\times 2} \approx \mathbb{C}^4$. Συνεπώς, στην S^3 μπορεί να οριστεί ένας πολλαπλασιασμός που της προσδίδει δομή μη-αβελιανής ομάδας. Επιπλέον, αυτός ο πολλαπλασιασμός και η συνάρτηση του αντίστροφου είναι συνεχείς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ
10ο Φύλλο

1. Εστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν δύο ιδιοτιμές λ, $\mu \in \mathbb{R}$ του A τέτοιες ώστε

$$\lambda\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \mu\|x\|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Εστω $(V, \langle,\rangle)$ ένας ερμιτιανός χώρος και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι η f είναι φυσιολογική τότε και μόνο τότε όταν $\|f(v\| = \|f^*(v)\|$ για κάθε $\in V$.

3. Να εξεταστεί ποιοί από τους παρακάτω πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες είναι θετικά ημιορισμένοι.

$$(\alpha) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\beta) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\gamma) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Εστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας. Να αποδειχθεί οτι η $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\sigma(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο, όπου $\langle,\rangle$ είναι το συνηθισμένο ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

5. Εστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A = B^tB$.
(Υπόδειξη: Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^n$ το εσωτερικό γινόμενο σ της άσκησης 2 και μια ορθοκανονική διατεταγμένη βάση $[v_1, v_2, ..., v_n]$ ως προς αυτό. Αν C είναι ο πίνακας με στήλες v_1, v_2,..., v_n, αρκεί να θέσουμε $B = C^{-1}$.)

6. Εστω $(V, \langle,\rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης. Εστω σ είναι ένα άλλο εσωτερικό γινόμενο στον V. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένας μοναδικός θετικά ορισμένος μετασχηματισμός $f : V \to V$ τέτοιος ώστε $\sigma(x, y) = \langle f(x), y\rangle$ για κάθε x, $y \in V$.
(Υπόδειξη: Για κάθε $y \in V$ η $\sigma_y(x) = \sigma(x, y)$, $x \in V$, είναι στοιχείο του V^*. Από το θεώρημα του Riesz υπάρχει μοναδικό $f(y) \in V$ τέτοιο ώστε $\sigma_y(x) = \langle x, f(y)\rangle$ για κάθε $x \in V$. Συνεπώς, $\langle f(x), y\rangle = \overline{\langle y, f(x)\rangle} = \overline{\sigma(y, f(x))} = \sigma(x, y)$ για κάθε x, $y \in V$.)

7. Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι ο A είναι θετικά ημιορισμένος.
(β) Να ευρεθεί η τετραγωνική ρίζα του A.

8. Να ευρεθεί μια πολική ανάλυση της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ με $f(e_1) = e_2$ και $f(e_2) = 0$.

9. Να ευρεθεί μια πολική ανάλυση της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

10. Να καθοριστούν οι πίνακες ως προς την κανονική βάση των παρακάτων διγραμμικών μορφών του $\mathbb{R}^3$.
(α) $2x_1y_1 - 3x_1y_3 + 2x_2y_2 - 5x_2y_3 + 4x_3y_1$.
(β) $3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

11. Να ευρεθούν οι συμμετρικές διγραμμικές μορφές στις οποίες αντιστοιχούν οι παρακάτω τετραγωνικές μορφές.
(α) $3x^3 - 5xy - 7y^2$.
(β) $3x^2 - 7xy + 5xz + 4y^2 - 4yz - 3z^2$.

12. Να αποδειχθεί οτι η $g : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ με

$$g(A, B) = n \cdot \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A) \cdot \mathrm{Tr}(B)$$

είναι μία συμμετρική, διγραμμική μορφή. Είναι η g μη-εκφυλισμένη;

13. Εστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των συμμετρικών πραγματικών 2×2 πινάκων. Να αποδειχθεί οτι η $q : V \to \mathbb{R}$ με $q(A) = \det(A)$ είναι μια τετραγωνική μορφή.

14. Να ευρεθούν η κανονική μορφή, η τάξη και η υπογραφή της τετραγωνικής μορφής

$$x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 2xy + 4xz - 6yz.$$