ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ
1ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Να αποδειχθεί οτι $A \subset \{A\}$ τότε και μόνο τότε όταν $A = \varnothing$.

2. Να αποδειχθεί οτι $A \cup X = A \cup B$ και $A \cap X = \varnothing$ ακριβώς τότε όταν $X = B \setminus A$.

3. Αν $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ και $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$, να αποδειχθεί οτι $A = B = C$.

4. Αν A, $B \subset X$ και C, $D \subset Y$, να αποδειχθεί οτι

$$(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D),$$

αλλά δεν ισχύει πάντα η ισότητα.

5. Έστω $A \subset X$ και $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Αν $i : A \to X$ είναι η ένθεση, να αποδειχθεί οτι $f|_A = f \circ i$ και $(f \circ i)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$ για κάθε σύνολο $B \subset Y$.

6. Να αποδειχθεί οτι για μία απεικόνιση $f : X \to Y$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(α) Η f είναι $1 - 1$.
(β) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ για κάθε A, $B \subset X$.

7. Έστω $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ για κάθε σύνολο $B \subset Y$.

8. Έστω $f : X \to Y$ μία απεικόνιση.
(α) Να δειχθεί οτι η f είναι $1 - 1$ τότε και μόνο τότε όταν $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$ για κάθε σύνολο $A \subset X$.
(β) Να δειχθεί οτι η f είναι επί τότε και μόνο τότε όταν $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$ για κάθε σύνολο $A \subset X$.

9. Έστω X ένα σύνολο και $f : X \to X$ μία απεικόνιση. Ορίζουμε $f^2 = f \circ f$ και επαγωγικά $f^{n+1} = f^n \circ f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, τέτοιος ώστε $f^n = id_X$ (μία τέτοια απεικόνιση λέγεται περιοδική), να αποδειχθεί οτι η f είναι αναγκαστικά $1 - 1$ και επί.

10. Έστω ότι X, Y είναι δύο σύνολα και $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Αν $R_f \subset X \times X$ είναι ο πυρήνας της f, δηλαδή

$$(x_1, x_2) \in R_f \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2),$$

να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία $1 - 1$ απεικόνιση $f_* : X/R_f \to Y$ τέτοια ώστε $f_* \circ p = f$, όπου $p : X \to X/R_f$ είναι η απεικόνιση πιλήκο. Με άλλα λόγια, το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\
X/R_f \arrow[ur, dashed, "f_*"'] &
\end{tikzcd}$$

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ
2ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και $a \in A$, να κατασκευαστεί μία $1-1$ απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to A \setminus \{a\}$.

2. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

3. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο όλων των άπειρων υποσυνόλων του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι ισοπληθικό με το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

4. Αν A και B είναι δύο οποιαδήποτε σύνολα, να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία $1-1$ απεικόνιση $f : B^A \to \mathcal{P}(A \times B)$ και συνεπώς

$$B^A \lesssim \mathcal{P}(A \times B).$$

5. Να αποδειχθεί οτι σύνολα $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι ισοπληθικά.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα των Schröder-Bernstein.)

6. Αν X είναι ένα σύνολο, τότε μία $1-1$ και επί απεικόνιση $f : X \to X$ λέγεται μετάθεση του X. Το σύνολο όλων των μεταθέσεων του X συμβολίζουμε με $S(X)$.
(α) Αν το σύνολο X δεν είναι μονοσύνολο και είναι το πολύ αριθμήσιμο, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $f \in S(X)$ τέτοια ώστε $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in X$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $S(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.
(Υπόδειξη για το (β): Παρατηρείστε οτι αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που έχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{A}$ και από την άλλη μεριά $\mathcal{A} \lesssim S(\mathbb{N})$.)

7. Να αποδειχθεί οτι αν A, B και C είναι οποιαδήποτε σύνολα, τότε

$$C^{A \times B} \sim (C^B)^A.$$

8. Να αποδειχθεί οτι $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 7 και το θεώρημα των Schröder-Bernstein.)

9. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$C[0,1] = \{f | f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{συνεχής}\}$$

είναι ισοπληθικό του $\mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την πυκνότητα του συνόλου των ρητών αριθμών στο $\mathbb{R}$.)

10. Να αποδειχθεί οτι $\mathbb{R} \lesssim \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, αλλά δεν υπάρχει καμμία απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ που είναι επί. Είναι τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ισοπληθικά;

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ
3ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Έστω οτι X, Y είναι δύο σύνολα και $f : X \to Y$ είναι μία απεικόνιση. Αν Z είναι ένα σύνολο τέτοιο ώστε $f^{-1}(y) \lesssim Z$ για κάθε $y \in Y$, να αποδειχθεί οτι $X \lesssim Y \times Z$.

2. Αν $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μία μονότονη απεικόνιση, να αποδειχθεί οτι το σύνολο των σημείων του I στα οποία η f δεν είναι συνεχής είναι το πολύ αριθμήσιμο.

3. Αν $M = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{μονότονη}\}$, να αποδειχθεί οτι $M \sim \mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $H : M \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ με $H(f) = f|_{\mathbb{Q}}$. Δείξτε οτι αν η $f \in M$ είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ και $H(f) = H(g)$, τότε η $g \in M$ είναι επίσης συνεχής στο x και $f(x) = g(x)$. Στη συνέχεια εφαρμόστε κατάλληλα τις δύο προηγούμενες ασκήσεις 1 και 2, καθώς και το θεώρημα των Schröder-Bernstein.)

4. Για κάθε $A \subset (0, 1)$ θεωρούμε την απεικόνιση $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_A(x) = \begin{cases} -x, & \text{όταν } x \in A \text{ ή } -x \in A, \\ x, & \text{όταν } x \notin A \text{ και } -x \notin A. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f_A είναι $1-1$ και επί.
(β) Αν $S(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο όλων των μεταθέσεων του $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $F : \mathcal{P}((0, 1)) \to S(\mathbb{R})$ με $F(A) = f_A$ είναι $1-1$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) \sim S(\mathbb{R}) \sim \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad 1-1\} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

5. Αν X είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο, να αποδειχθεί οτι $X \times X \sim X^{\{0,1\}}$. Συνεπώς, $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$ για κάθε πληθάριθμο $\kappa > 0$.

6. Να αποδειχθεί οτι $c = c \cdot c \cdots c$ (n φορές) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

7. Αν κ είναι ένας πληθάριθμος τέτοιος ώστε $2 \leq \kappa \leq c$, να αποδειχθεί οτι $\kappa^{\aleph_0} = c$.

8. Να αποδειχθεί στην αριθμητική των πληθαρίθμων οτι

$$1 + 2 + 3 + \cdots = 2 + 2 + 2 + \cdots = 1! + 2! + 3! + \cdots = \aleph_0.$$

9. Να δειχθεί με ένα παράδειγμα οτι στην αριθμητική των πληθαρίθμων ενδέχεται για δύο πληθάριθμους κ, λ να ισχύει $\kappa < \lambda$, αλλά $\kappa + \mu = \lambda + \mu$ για κάποιον πληθάριθμο μ.

10. Αν X, Y είναι δύο σύνολα και υπάρχει απεικόνιση $f : X \to Y$ που είναι επί, να αποδειχθεί οτι $Y \lesssim X$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Αξίωμα της Επιλογής.)

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ
4ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Να εξηγηθεί πώς κατασκευάζεται το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων από τα αξιώματα των Zermelo-Fraenkel χωρίς το Αξίωμα του Απείρου και χωρίς το Αξίωμα της Επιλογής.

2. Έστω οτι 0, a και b είναι τρία σύμβολα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο και $X = \{0, a, b\}$. Αν $S : X \to X$ είναι η απεικόνιση με $S(0) = a$, $S(a) = b$, $S(b) = b$, να εξεταστεί ποιές από τις ιδιότητες ενός συστήματος Peano ικανοποιεί η τριάδα $(X, 0, S)$.

3. Έστω a, b δύο σύμβολα με $a \neq b$ και $X = (\mathbb{N} \times \{a\}) \cup (\mathbb{N} \times \{b\})$. Αν $S : X \to X$ είναι η απεικόνιση με $S(n, a) = (n+1, a)$, $S(n, b) = (n+1, b)$, να αποδειχθεί οτι η τριάδα $(X, (0, a), S)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες ενός συστήματος Peano εκτός από την Αρχή της Επαγωγής.

4. Να ευρεθούν όλες οι απεικονίσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $f(n + m) = f(n) + f(m)$ για κάθε n, $m \in \mathbb{N}$.

5. Αν F είναι ένα διατεταγμένο σώμα, να αποδειχθεί οτι για κάθε a, $b \in F$, με $a < b$, το σύνολο $\{x \in F | a < x < b\}$ είναι άπειρο.

6. Μπορεί ένα πεπερασμένο σώμα να γίνει διατεταγμένο;

7. Έστω $\mathbb{Q}(X) = \{\dfrac{f}{g} : f, g \in \mathbb{Q}[X], g \neq 0\}$. Το $\mathbb{Q}(X)$ γίνεται σώμα με τις συνηθισμένες πράξεις και λέγεται το σώμα των ρητών συναρτήσεων πάνω στο $\mathbb{Q}$. Έστω P το υποσύνολο του $\mathbb{Q}(X)$ που αποτελείται από όλες τις ρητές συναρτήσεις

$$\frac{a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0}{b_m X^m + \cdots + b_1 X + b_0} \quad \text{με} \quad a_n b_m > 0.$$

Αν r, $s \in \mathbb{Q}(X)$, ορίζουμε $r \geq s$ όταν $r - s \in P$ ή $p = q$. Το $\mathbb{Q}(X)$ γίνεται με αυτόν τον τρόπο διατεταγμένο σώμα. Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{Q}(X)$ δεν έχει την αρχιμήδεια ιδιότητα.
(Υπόδειξη: Αν $r(X) = X$, τότε $r > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γιατί $X - n > 0$.)

8. Στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διμελή σχέση

$$(a, b) \leq (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad (a < c) \quad \text{ή} \quad (a = c \quad \text{και} \quad b \leq d).$$

Να αποδειχθεί οτι το $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο.

9. Έστω X ένα σύνολο και $p : X \times X \to X$ μία απεικόνιση για την οποία γράφουμε $p(x, y) = xy$. Υποθέτουμε οτι η διμελής αυτή πράξη είναι προσεταιριστική, μεταθετική και επιπλέον $xx = x$ για κάθε $x \in X$. Στο X θεωρούμε τη διμελή σχέση $x \leq y$ τότε και μόνο τότε όταν $xy = y$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο X.
(β) Αν x, $y \in X$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $x \leq z$, $y \leq z$ και το z είναι ελάχιστο με αυτή την ιδιότητα.

10. Να αποδειχθεί οτι αν το K είναι ένα γνήσιο υποσώμα του $\mathbb{R}$, τότε το K δεν είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ
5ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Στο σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ορίζεται η λεξικογραφική διάταξη $\leq$, όπου

$$f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \quad \text{ή} \quad \exists n \in \mathbb{N}\Big(f(i) = g(i) \quad \forall i < n \quad \text{και} \quad f(n) < g(n)\Big).$$

Να αποδειχθεί οτι το $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο, αλλά δεν είναι καλά διατεταγμένο.

2. Έστω $X \subset \mathbb{R}$.
(α) Αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ τέτοιο ώστε $(x, x+\delta_x) \cap X = \varnothing$ ή $(x-\delta_x, x) \cap X = \varnothing$, να αποδειχθεί οτι το X είναι (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο.
(β) Αν το X είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, να αποδειχθεί οτι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μία γνήσια φθίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X ώστε $x = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.
(γ) Αν το $(X, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο, όπου $\leq$ είναι η συνηθισμένη διάταξη από το $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι το X είναι (το πολύ) αριθμήσιμο.

3. Έστω $(X, \leq)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $y \in X$ υπάρχουν $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $y = S^n(x)$ και $x = 0_X$ ή το x είναι οριακό στοιχείο του X.

4. Θεωρούμε το υποσύνολο $X = \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ του $\mathbb{Q}$.
(α) Να αποδειχθεί οτι αν και κάθε στοιχείο του X έχει επόμενο και κάθε στοιχείο διαφορετικό από το ελάχιστο $-\frac{1}{2}$ έχει προηγούμενο, το X δεν είναι όμοιο με το $\mathbb{N}$.
(β) Είναι το X καλά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$;

5. Αν $(X, \leq_X)$ και $(Y, \leq_Y)$ είναι δύο καλά διατεταγμένα σύνολα, να αποδειχθεί οτι υπάρχει το πολύ μία αρχική ομοιότητα $f : X \to f(X) \sqsubseteq Y$.

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε σύνολο X υπάρχει ένα καλά διατεταγμένο σύνολο $(Y, \leq)$ για το οποίο δεν υπάρχει καμία απεικόνιση $f : X \to Y$ η οποία είναι επί του Y.

7. Να αποδειχθεί οτι αν $X \lesssim Y$, τότε $h(X) \leq_\circ h(Y)$.

8. Να αποδειχθεί οτι $h([0, n)) =_\circ [0, n+1)$, όπου $[0, n) = \{0, 1, ..., n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

9. Έστω X ένα σύνολο και $(W, \leq)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο. Να αποδειχθεί οτι $W <_\circ h(X)$ τότε και μόνο τότε όταν $W \lesssim X$.

10. Έστω X ένα σύνολο και $R \subset X \times X$ μία διμελής σχέση μερικής διάταξης στο X. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία σχέση ολικής διάταξης $S \subset X \times X$ τέτοια ώστε $R \subset S$.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε το σύνολο

$$P = \{S \in \mathcal{P}(X \times X) | \text{το } S \text{ είναι μερική διάταξη στο } X \text{ και } R \subset S\}$$

μερικώς διατεταγμένο από τη σχέση υποσυνόλου και εφαρμόστε το Λήμμα του Zorn.)

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ
6ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ μία μέγιστη αλυσίδα ως προς τη σχέση υποσυνόλου. Παρατηρείστε οτι αναγκαστικά πρέπει $\varnothing$, $X \in \mathcal{C}$. Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε τα σύνολα

$$U_x = \bigcup \{A \in \mathcal{C} | x \notin A\}, \quad V_x = \bigcap \{A \in \mathcal{C} | x \in A\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι U_x, $V_x \in \mathcal{C}$ και $U_x \subset V_x$ για κάθε $x \in X$.
(β) Αν $x \in X$ και $A \in \mathcal{C}$, να αποδειχθεί οτι $A \subset U_x$ ή $V_x \subset A$.
Στο σύνολο X θεωρούμε τη διμελή σχέση

$$x \leq y \iff x = y \text{ ή } \exists A \in \mathcal{C}(x \in A \quad \text{και} \quad y \notin A).$$

(γ) Να αποδειχθεί οτι η $\leq$ είναι σχέση ολικής διάταξης στο X.
(δ) Να κατασκευαστεί μία $1-1$ απεικόνιση $f : X \to \mathcal{P}(X)$ τέτοια ώστε

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) \subset f(x_2) \quad \text{και} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

2. Να αποδειχθεί οτι για κάθε σύνολο X που δεν είναι μονοσύνολο υπάρχει μία $1-1$ και επί απεικόνιση $f : X \to X$ τέτοια ώστε $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in X$. Ειδικά, αν το X είναι άπειρο, υπάρχει μία τέτοια απεικόνιση για την οποία επιπλέον $f^{-1} = f$.

3. Να αποδειχθεί οτι αν το X είναι οποιοδήποτε άπειρο σύνολο, τότε $|X| < |S(X)|$, όπου $S(X) = \{f | f : X \to X \quad 1-1 \text{ και επί}\}$ είναι το σύνολο των μεταθέσεων του X.

4. Έστω οτι X, Y είναι δύο σύνολα, από τα οποία το Y είναι άπειρο. Αν υπάρχει μία απεικόνιση $f : X \to Y$ που είναι επί και τέτοια ώστε $|f^{-1}(y)| \leq |Y|$ για κάθε $y \in Y$, να αποδειχθεί οτι $X \sim Y$.

5. Να αποδειχθεί οτι οι προσθετικές ομάδες $(\mathbb{R}, +)$ και $(\mathbb{R}^2, +)$ είναι ισόμορφες.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2$ ως διανυσματικούς χώρους πάνω στο σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών και κατασκευάστε ένα $\mathbb{Q}$-γραμμικό ισομορφισμό $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.)

6. Έστω $(X, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Το $S \subset X$ λέγεται ομοτελικό υποσύνολο του X, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $x \leq s$. Υποθέτουμε οτι το $(X, \leq)$ είναι μη-κενό, ολικά διατεταγμένο και δεν έχει μέγιστο στοιχείο, γιατί αν υπάρχει μέγιστο στοιχείο $s \in X$, τότε προφανώς το $S = \{s\}$ είναι ομοτελικό υποσύνολο του X. Στο σύνολο

$$\mathcal{W} = \{W \subset X | \text{το } (W, \leq) \text{ είναι καλά διατεταγμένο}\}$$

θεωρούμε τη διμελή σχέση

$$W_1 \preceq W_2 \iff \text{το } W_1 \text{ είναι αρχικό τμήμα του } W_2.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η $\preceq$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathcal{W}$, ως προς την οποία κάθε αλυσίδα έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{W}$.
(β) (Hausdorff) Να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένα καλά διατεταγμένο ως προς $\leq$ ομοτελικό υποσύνολο του X.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ
7ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Έστω $(X, \leq)$ ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του οποίου είναι καλά διατεταγμένο (ως προς την περιορισμένη διάταξη). Να αποδειχθεί οτι το $(X, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο.

2. Στο σύνολο A των άρτιων φυσικών αριθμών θεωρούμε τη διμελή σχέση $\lhd$, όπου

$$2 \lhd 4 \lhd 6 \lhd \cdots \lhd 0.$$

Να αποδειχθεί οτι το $(A, \lhd)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και $\mathrm{Ord}(A, \lhd) = \omega + 1$.

3. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών θεωρούμε τη διμελή σχέση $\lhd$, όπου

$$0 \lhd 2 \lhd 4 \lhd 6 \lhd \cdots \lhd 1 \lhd 3 \lhd 5 \lhd \cdots .$$

Να αποδειχθεί οτι το $(\mathbb{N}, \lhd)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και $\mathrm{Ord}(A, \lhd) = \omega + \omega$.

4. Να αποδειχθεί οτι $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$.

5. Να αποδειχθεί οτι κάθε άπειρος διατακτικός αριθμός είναι της μορφής $\alpha + n$, όπου ο α είναι κάποιος οριακός διατακτικός αριθμός και $n \in \mathbb{N}$.

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε άπειρο διατακτικό αριθμό α, ο διατακτικός αριθμός $\alpha + 1$ δεν είναι πληθάριθμος. Συνεπώς κάθε άπειρος πληθάριθμος είναι οριακός διατακτικός αριθμός. (Υπόδειξη: Θεωρείστε την απεικόνιση $f : \alpha \to \alpha + 1$ με $f(0) = \alpha$, $f(n + 1) = n$, για $n < \omega$ και $f(\xi) = \xi$, για $\omega \leq \xi < \alpha$.)

7. Να αποδειχθεί οτι ο διατακτικός αριθμός α είναι πληθάριθμος τότε και μόνο τότε όταν για κανένα διατακτικό αριθμό $\beta < \alpha$ δεν υπάρχει απεικόνιση $f : \beta \to \alpha$ που είναι επί.

8. Έστω α ένας οριακός διατακτικός αριθμός και $\{\kappa_\xi | \xi < \alpha\}$ μία υπερπεπερασμένη γνήσια αύξουσα ακολουθία μήκους α άπειρων πληθαρίθμων. Να αποδειχθεί οτι ο διατακτικός αριθμός $\kappa = \bigcup_{\xi < \alpha} \kappa_\xi$ είναι πληθάριθμος.
(Υπόδειξη: Αν ο κ δεν είναι πληθάριθμος, υπάρχει διατακτικός αριθμός $\beta < \kappa$ και απεικόνιση $f : \beta \to \kappa$ που είναι επί. Υπάρχει $\xi < \alpha$ ώστε $\beta < \kappa_\xi$. Θεωρείστε την απεικόνιση $g : \beta \to \kappa_\xi$ με $g(\lambda) = f(\lambda)$, όταν $f(\lambda) \in \kappa_\xi$ και $g(\lambda) = 0$, όταν $f(\lambda) \notin \kappa_\xi$.)

9. Το σύνολο $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, όπου $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, με στοιχεία όλες τις ανοιχτές μπάλλες που έχουν κέντρο στο $\mathbb{Q}^m$ και έχουν ρητή ακτίνα είναι αριθμήσιμο. Έστω $B = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ μία αρίθμησή του. Για κάθε κλειστό σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ θεωρούμε το σύνολο

$$N_F = \{n \in \mathbb{N} | F \cap B_n = \varnothing\}.$$

Να αποδειχθεί οτι αν F_1 και F_2 είναι δύο κλειστά σύνολα με $F_1 \neq F_2$, τότε $N_{F_1} \neq N_{F_2}$, ενώ αν $F_1 \subset F_2$, τότε $N_{F_2} \subset N_{F_1}$.

10. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου $X \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, συμβολίζεται με X'. Αν το X είναι ένα κλειστό σύνολο, ορίζουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή $X_0 = X$, $X_{\beta+1} = X'_\beta$ και όταν ο β είναι οριακός διατακτικός αριθμός

$$X_\beta = \cap\{X_\xi | \xi < \beta\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός α τέτοιος ώστε $X_\alpha = X_\beta$ για κάθε διατακτικό αριθμό $\beta > \alpha$.
(β) (Cantor) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $X \setminus X_\alpha$ είναι αριθμήσιμο, ενώ το X_α είναι (προφανώς) τέλειο.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 9.)