ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
1ο Φύλλο

1. Δίνονται τα σημεία $A = (-1, 2)$, $B = (3, -1)$ και $\Gamma = (5, 1)$ στο $\mathbb{R}^2$. Να ευρεθούν οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

2. Να αποδειχθεί οτι τα μη-μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{u}_1 = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{u}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ είναι συγγραμμικά τότε και μόνο τότε όταν $x_1y_2 = x_2y_1$.

3. Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ είναι τα διανύσματα $(a, 4)$, $(3, a-1) \in \mathbb{R}^2$ συγγραμμικά;

4. Να αποδειχθεί οτι τα τρία διακεκριμένα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_3, y_3) στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ είναι συνευθειακά τότε και μόνο τότε όταν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

5. Να αποδειχθεί οτι τρείς ευθείες στο $\mathbb{R}^2$, που δεν ταυτίζονται ή είναι παράλληλες ανά δύο μεταξύ τους, με εξισώσεις $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ και $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ συντρέχουν σε ένα κοινό σημείο τότε και μόνο τότε όταν

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Να αποδειχθεί οτι όλες οι ευθείες στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με εξίσωση $Ax + By + C = 0$, όπου A, B, $C \in \mathbb{R}$ με $A + B + C = 0$, συντρέχουν στο σημείο $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

7. Να ευρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων δύο διαφορετικών τεμνόμενων ευθειών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ με εξισώσεις $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.

8. Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το σημείο $(3, -1, 1)$ και την παραμετρισμένη ευθεία $E = \{(t, -2t + 4, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

9. Να υπολογισθεί η γωνία $0 < \theta < \pi$ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{u} = (-1, 2, -2)$ και $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)$ στον $\mathbb{R}^3$.

10. Να ευρεθεί η (οξεία) γωνία $B\widehat{A}\Gamma$, όπου $A = (4, 2, -3)$, $B = (-2, 8, -3)$ και $\Gamma = (-2, 2, 3)$.

11. Να ευρεθεί ένα διάνυσμα $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ μήκους 1 που σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{6}$ με το βασικό διάνυσμα $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$ και ίσες γωνίες με τα άλλα δύο βασικά διανύσματα $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ και $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$.

12. Εστω $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα. Αν θ_j είναι η γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{u}$ με το βασικό διάνυσμα $\overrightarrow{e_j}$, $j = 1,2,3$, να αποδειχθεί οτι

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1.$$

13. Τα σημεία $A = (1,1,-1)$, $B = (3,3,2)$ και $\Gamma = (3,-1,-2)$ ορίζουν ένα επίπεδο E στον $\mathbb{R}^3$.
(α) Να ευρεθεί ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{N} \in \mathbb{R}^3$ που είναι κάθετο στο E.
(β) Να ευρεθεί η εξίσωση του E.
(γ) Να υπολογιστεί η απόσταση του $(0,0,0)$ από το E.

14. Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το σημείο $(2,3,-7)$ και είναι κάθετο στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία $(1,2,3)$ και $(2,4,12)$.

15. Να ευρεθεί η παραμετρισμένη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(2,1,-3)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο με εξίσωση $4x - 3y + z = 5$.

16. Εστω $\overrightarrow{N_1}$, $\overrightarrow{N_2} \in \mathbb{R}^3$ δύο μη-μηδενικά και μη-συγγραμμικά διανύσματα και $\overrightarrow{P} \in \mathbb{R}^3$. Να αποδειχθεί οτι η τομή των δύο επιπέδων που διέρχονται από το $\overrightarrow{P}$ και είναι κάθετα στα $\overrightarrow{N_1}$ και $\overrightarrow{N_2}$, αντίστοιχα, είναι η παραμετρισμένη ευθεία $\{\overrightarrow{P} + t(\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}) : t \in \mathbb{R}\}$.

17. Εστω $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ δύο μη-μεδενικά και μη-συγγραμμικά διανύσματα και $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$. Αν οι ευθείες $E = \{\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{u} : t \in \mathbb{R}\}$ και $S = \{\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{v} : t \in \mathbb{R}\}$ είναι ασύμβατες (δηλαδή $E \cap S = \varnothing$), να αποδειχθεί οτι η απόστασή τους είναι ίση με

$$\frac{|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}.$$

18. Δίνονται τα σημεία $A = (-2,0,-3)$, $B = (1,-2,1)$, $\Gamma = (-2, -\frac{13}{5}, \frac{22}{5})$ και $\Delta = (\frac{12}{5}, -\frac{13}{5}, 0)$ στον $\mathbb{R}^3$.
(α) Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ευθεία AB και είναι παράλληλο προς την ευθεία $\Gamma\Delta$.
(β) Να υπολογιστεί η απόσταση της ευθείας AB από την ευθεία $\Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
2ο Φύλλο

1. Να αποδειχθεί οτι η εξίσωση $r = 2a(1 - \cos\phi)$ σε πολικές συντεταγμένες, όπου $a > 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 + y^2 + 2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

2. Να περιγραφούν γεωμετρικά τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$, που δίνονται σε σφαιρικές συντεταγμένες.
(α) $\{(\rho, \phi, \theta) : \rho = R\}$, όπου $R > 0$.
(β) $\{(\rho, \phi, \theta) : \phi = \phi_0\}$, όπου $0 \leq \phi_0 < 2\pi$.
(γ) $\{(\rho, \phi, \theta) : \theta = \theta_0\}$, όπου $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

3. Να περιγραφούν γεωμετρικά τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$, που δίνονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες.
(α) $\{(r, \phi, z) : r = a\}$, όπου $a > 0$.
(β) $\{(r, \phi, z) : \phi = \phi_0\}$, όπου $0 \leq \phi_0 < 2\pi$.
(γ) $\{(r, \phi, z) : z = c\}$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

4. Να ευρεθεί παραμέτριση της τομής του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $x + z = 1$ με τη σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας $\sqrt{5}$.

5. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία κανονική C^1 παραμετρισμένη καμπύλη ώστε $\gamma(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$. Αν υπάρχει $t_0 \in I$, εσωτερικό σημείου του διαστήματος I, τέτοιο ώστε

$$\|\gamma(t_0)\| \leq \|\gamma(t)\| \quad \text{για κάθε} \quad t \in I,$$

να αποδειχθεί οτι τα διανύσματα $\gamma(t_0)$ και $\dot{\gamma}(t_0)$ είναι κάθετα.

6. Εστω I ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία κανονική C^1 παραμετρισμένη καμπύλη ώστε $\|\gamma(s)\| = R$ για κάθε $s \in I$, όπου $R > 0$. Να αποδειχθεί οτι το διανυσμα θέσης $\gamma(s)$ και το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας $\dot{\gamma}(s)$ είναι κάθετα για κάθε $s \in I$.

7. Ένα υλικό σημείο κινείται στον $\mathbb{R}^3$ διαγράφοντας το ίχνος μίας λείας παραμετρισμένης καμπύλης. Αν το μήκος της στιγμιαίας ταχύτητας είναι σταθερό, να αποδειχθεί οτι τα διανύσματα της στιγμιαίας ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα.

8. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία C^1 παραμετρισμένη καμπύλη και $v \in \mathbb{R}^3$ μη-μηδενικό. Αν τα διανύσματα $\dot{\gamma}(t)$ και v είναι κάθετα για κάθε t στο διάστημα I και υπάρχει $t_0 \in I$ ώστε τα $\gamma(t_0)$ και v να είναι κάθετα, να αποδειχθεί οτι τα $\gamma(t)$ και v είναι κάθετα για κάθε $t \in I$.

9. Να αποδειχθεί οτι το μήκος της παραβολής $x^2 = 2py$, όπου $p > 0$, από το σημείο $(0,0)$ μέχρι το σημείο $(a, \frac{a^2}{2p})$, όπου $a > 0$, είναι ίσο με

$$\frac{1}{2p}\left(a\sqrt{a^2+p^2} + p^2 \log \frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}\right).$$

10. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ μία C^1 παραμετρισμένη καμπύλη και $(r(t), \phi(t))$, $t \in I$, η μορφή της σε πολικές συντεταγμένες. Αν a, $b \in I$, $a < b$, να αποδειχθεί οτι

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2(\phi'(t))^2}dt.$$

11. Να αποδειχθεί οτι το μήκος του λιμνίσκου του Bernoulli, δηλαδή της C^1 παραμετρισμένης καμπύλης, της οποίας οι πολικές συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$, όπου $|\phi| \leq \frac{\pi}{4}$, και ο $a > 0$ είναι σταθερά, ισούται με

$$2a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}}d\phi.$$

12. Εστω $b < 0 < a$ και $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η C^1 παραμετρισμένη καμπύλη με

$$\gamma(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t),$$

που λέγεται λογαριθμική σπείρα.
(α) Να αποδειχθεί οτι $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = (0,0)$ και $\lim_{t\to+\infty} \dot{\gamma}(t) = (0,0)$.
(β) Αν $T \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι το $\lim_{t\to+\infty} L(\gamma|_{[T,t]})$ υπάρχει. Ποιά είναι η τιμή του;

13. Να υπολογιστεί το μήκος της τομής της σφαίρας στον $\mathbb{R}^3$ κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας 1 με την κυλινδρική επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 = x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
3ο Φύλλο

1. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

(α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(β) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x y}{x+y}$

(γ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$

(δ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3+y}$

2. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} y + x\sin\dfrac{1}{y}, & \text{για } y \neq 0, \\ 0, & \text{για } y = 0. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(β) Να αποδειχθεί οτι το $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ δεν υπάρχει.

3. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Για κάθε $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ με $(u,v) \neq (0,0)$ να υπολογιστεί το όριο $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(tu,tv)$.

(β) Είναι η f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;

4. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.

(β) Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

5. Να υπολογιστεί η παράγωγος $f'(0)$ της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$(\alpha) \quad f(x) = \int_0^2 [x^2 y + xy^3]dy, \quad (\beta) \quad f(x) = \int_0^1 e^{-xy^2} dy.$$

6. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y)=\int_0^1 [e^{xt^2}+\sin(y^2t^2)]dt.$$

7. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ στο σημείο $(0,0)$, αν υπάρχει, που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\log(x^2+y^2), & \text{όταν } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{όταν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

8. Είναι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$;

9. Εστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με την ιδιότητα

$$|f(x,y,z)|\leq x^2+y^2+z^2 \quad \text{για κάθε} \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Να αποδειχθεί οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0,0)$.

10. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
(α) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, σε κάθε σημείο $(x,y)\neq(0,0)$.
(β) $f(x,y,z)=\sin(xy)+\cos(yz)$, σε κάθε σημείο $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

11. Να υπολογιστεί ο ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης
(α) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x,y)=(xy,x+y)$ στο σημείο $(1,2)$,
(β) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x,y)=(x+y,x-y,xy)$ στο σημείο $(1,0)$,
(γ) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x,y,z)=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$ στο σημείο $(0,1,1)$.

12. Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ όταν
(α) $f(x,y)=2x^2+y^2$, στο σημείο $(0,0,0)$,
(β) $f(x,y)=x^2-3y^2+x$, στο σημείο $(1,1,-1)$,
(γ) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$, στο σημείο $(1,0,2)$,
(δ) $f(x,y)=\sin(xy)$, στο σημείο $(1,\frac{\pi}{2},1)$.

13. Ποιά είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου, αν υπάρχει, του γραφήματος της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases} (x-y)^2\sin\dfrac{1}{x-y}, & \text{όταν } x\neq y,\\ 0, & \text{όταν } x=y.\end{cases}$$

στο σημείο $(0,0,0)$;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
4ο Φύλλο

1. Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι δύο παραγωγίσιμες συνρτήσεις, να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$.

2. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $Df(0, \pi, 1) = (2, 1, 7)$. Αν $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με $h(t) = f(\cos t, 2t, \sin t)$, να υπολογιστεί η παράγωγος $h'(\frac{\pi}{2})$.

3. Εστω οτι $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $h : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Να αποδειχθεί οτι

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, \phi)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial h}{\partial \phi}(r, \phi)\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2$$

για κάθε $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$, όπου $x = r \cos \phi$ και $y = r \sin \phi$.

4. Εστω οτι $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $Df(0, 0, 0) = (-1, 1, 1)$. Αν $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$h(x, y, z) = f(x + 2y - z, -x + 3y + z, x - y + z),$$

να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της h στο σημείο $(0, 0, 0)$.

5. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(\rho, \phi, \theta) = f(\rho \cos \phi \sin \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \theta).$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h}{\partial \rho}, \frac{\partial h}{\partial \phi}, \frac{\partial h}{\partial \theta}$ της h (σε κάθε σημείο) συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f.

6. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$h(r, \phi, z) = f(r \cos \phi, r \sin \phi, z).$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial \phi}, \frac{\partial h}{\partial z}$ της h (σε κάθε σημείο) συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f.

7. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση και $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ μία λεία παραμετρισμένη καμπύλη. Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος $(f \circ \gamma)''(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

8. Εστω f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο λείες συναρτήσεις και $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $\phi(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$. Να αποδειχθεί οτι

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}.$$

9. Εστω f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο λείες συναρτήσεις και $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $\phi(x, y) = f(x + g(y))$. Να αποδειχθεί οτι

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

10. Εστω $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$ το δυναμικό της βαρύτητας, δηλαδή

$$V(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Να αποδειχθεί οτι $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

11. Να αποδειχθεί οτι αν $c \in \mathbb{R}$, τότε οποιαδήποτε C^2 συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ της μορφής $u(x, t) = g(x + ct)$, όπου $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κάποια C^2 συνάρτηση, ικανοποιεί την κυματική διαφορική εξίσωση

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

12. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{όταν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της f σε κάθε σημείο διαφορετικό από το $(0, 0)$.

(β) Να αποδειχθεί οτι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$

(γ) Να αποδειχθεί οτι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$. Πώς εξηγείται αυτό;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
5ο Φύλλο

1. Να ευρεθούν τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν, της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όταν
(α) $f(x, y) = x^4 + x^2y + y^2$, (β) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + y$
(γ) $f(x, y) = y^2 - x^3$, (δ) $f(x, y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.

2. Να ευρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.$$

3. Να ευρεθούν τα σημεία του γραφήματος της συνάρτησης $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$, για $xy \neq 0$, που βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο $(0, 0, 0)$.

4. Εστω $R > 0$. Να ευρεθούν πραγματικοί αριθμοί x, y, $z \geq 0$ με άθροισμα R, τέτοιοι ώστε το γινόμενο xyz είναι το μέγιστο δυνατό.

5. Εστω $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = e^{ax^2 + by^2},$$

να ευρεθούν τα κρίσιμα σημεία της f και τα σημεία στα οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

6. Να ευρεθούν τα κρίσιμα σημεία, τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ όταν
(α) $f(x, y) = 2y^2 - x(x-1)^2$,
(β) $f(x, y) = x(y+1) - x^2y$.

7. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Να αποδειχθεί οτι το $(0, 0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f, αλλά η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε αυτό.

8. Να αποδειχθεί οτι σε κάθε τρίγωνο με γωνίες A, B και Γ ισχύει οτι

$$\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{\Gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Για ποιά τρίγωνα ισχύει η ισότητα;

9. Να ευρεθούν τα κρίσιμα σημεία, τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

και να αποδειχθεί οτι $|f(x,y)| \leq \dfrac{1}{e}$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

10. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$$

στο κλειστό και φραγμένο σύνολο

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 4 \quad \text{και} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

11. Να αποδειχθεί οτι η εξίσωση $2xe^y + y + 1 = 0$ ορίζει μία λεία συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$, όπου το I είναι κάποιο ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 0, τέτοια ώστε $g(0) = -1$ και $2xe^{g(x)} + g(x) + 1 = 0$ για κάθε $x \in I$. Να υπολογιστεί η παράγωγος $g'(0)$.

12. Να εξεταστεί ποιές από τις παρακάτω εξισώσεις ορίζουν λείες καμπύλες στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$.
(α) $y^2 + 3x + y + 1 = 0$, (β) $2x^2 + 4xy - y^2 = 1$
(γ) $x^3 + y^3 = 3xy$, (δ) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

13. Να εξεταστεί ποιές από τις παρακάτω εξισώσεις ορίζουν λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$.
(α) $2xe^y + y + z = 0$, (β) $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 0$
(γ) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 1$, όπου ο $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι ένας συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας.

14. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z) = x - y + 2z$$

πάνω στο ελλειψοειδές $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$.

15. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η τετραγωνική μορφή

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz$$

πάνω στη σφαίρα $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
6ο Φύλλο

1. Το κόστος κατασκευής κιβωτίων σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ανάλογο της επιφάνειας τους. Να ευρεθούν οι διαστάσεις του κιβωτίου με δεδομενο σταθερό όγκο $V > 0$ ώστε το κόστος κατασκευής να ελαχιστοποιείται.

2. Να ευρεθούν οι μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση $f(x, y) = xy$ στον μοναδιαίο κλειστό δίσκο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Να ευρεθεί η ελάχιστη απόσταση των σημείων του μοναδιαίου κύκλου

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

από τα σημεία της υπερβολής $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1,\ x > 0\}$.

4. Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $F(x, y, z) = \log x + \log y + 3 \log z$, πάνω στο σφαιρικό χωρίο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2, x > 0, y > 0, z > 0\},$$

όπου $R > 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του υπολογισμού αυτού, να αποδειχθεί οτι για κάθε $a > 0$, $b > 0$ και $c > 0$ ισχύει

$$abc^3 \leq \sqrt{27\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}\right)^5}.$$

5. Να ευρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμου με πλευρές παράλληλες στους άξονες που είναι εγγεγραμμένο στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

όπου $a > b > 0$ και
(α) έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν,
(β) έχει τη μέγιστη δυνατή περίμετρο.

6. Δίνεται η έλλειψη $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, όπου $a > b > 0$.
(α) Να ευρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο $(x_0, y_0) \in S$.
(β) Να ευρεθούν τα σημεία του S στα οποία η εφαπτόμενη και οι άξονες σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

7. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η λεία συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

στο κλειστό και φραγμένο σύνολο

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\},$$

καθώς και τα σημεία του K στα οποία η f παίρνει αυτές τις τιμές.

8. Εστω $R > 0$. Να ευρεθούν πραγματικοί αριθμοί $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $z \geq 0$ με σταθερό άθροισμα τετραγώνων $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ τέτοιοι ώστε το γινόμενό τους xyz να είναι το μέγιστο δυνατό.

9. Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$

στο στερεό ελλειψοειδές

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1\}.$$

10. Εστω $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ένας συμμετρικός πίνακας και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η τετραγωνική μορφή

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j.$$

Να αποδειχθεί οτι η μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της f πάνω στην μοναδιαία σφαίρα

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

είναι η μεγαλύτερη (μικρότερη) ιδιοτιμή του πίνακα A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
7ο Φύλλο

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:
$\displaystyle\int_0^1\int_0^1 ye^{xy}dxdy,\ \int_0^\pi\int_0^\pi \sin^2 x\cdot\sin^2 y dxdy,\ \int_0^3\int_{-1}^0\int_{-1}^2\left(\frac{z}{1-|x|y}\right)^2 dxdydz.$

2. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού στον $\mathbb{R}^3$ που περικλείεται από τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες, τα επίπεδα με εξισώσεις $x=1$ και $y=1$ και το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_B (x^2-xy)dxdy$, όπου B είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ και $(1,0)$.

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_B f(x,y)dxdy$, όπου
(α) $f(x,y)=x+y$ και $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\quad y\ge 0\}$,
(β) $f(x,y)=x^2-xy$ και $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2\le 4x,\quad x\le 4\}$,
(γ) $f(x,y)=x^2+y$ και $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge x^2,\quad x\ge y^2\}$.

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_B x^3ydxdy$, όπου B είναι το σύνολο που φράσσεται από τον άξονα των y και την παραβολή με εξίσωση $x=-4y^3+3$.

6. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+3y^2\le z\le 4-y^2\}$.

7. Αν $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le 1 \text{ και } -1\le x\le 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\iint_K (x^2+y)dxdy.$$

8. Να υπολογιστεί ο όγκος του συνόλου
$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le 4-x^2-z^2,\ x\ge 0 \text{ και } z\ge 0\}.$$

9. Αν $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1,\ 0\le y\le |x|\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\iint_B (x+y)dxdy.$$

10. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου
$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+1\le y\le 9-x^2,\ -2\le x\le 2\}.$$

11. Να υπολογιστεί ο όγκος του συνόλου
$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\ge 0\ y\ge 0 \text{ και } 0\le z\le 4-4x^2-4y^2\}.$$

12. Να υπολογιστεί ολοκλήρωμα $\iint_B xydxdy$, όπου B είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ και $(1,-1)$.

13. Να υπολογιστεί ολοκλήρωμα $\iint_B xdxdy$, όπου B είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(1/2,0)$, $(1,1/2)$, $(1/2,1)$ και $(0,1/2)$.

14. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_B e^{x+y} dxdy.$$

15. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_B e^{-(x-1)^2} dxdy.$$

16. Να υπολογιστεί ολοκλήρωμα $\iiint_B yzdxdydz$, όπου

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x \leq \sqrt{z},\ 0 \leq y \leq x \text{ και } 0 \leq z \leq 1\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
8ο Φύλλο

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_B f(x,y)dxdy$, όπου
(α) $f(x,y) = x$ και $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$,
(β) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ και $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$,
(γ) $f(x,y) = x^2 + y^2$ και $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad 0 \le x \le y \le x\sqrt{3}\}$.

2. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού στον $\mathbb{R}^3$ που περικλείεται από το οριζόντιο επίπεδο, τον κύλινδρο με ελλειπτική βάση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, όπου $a > b > 0$ και το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y) = \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}$, όπου p, $q > 0$.

3. Αν $a > 0$, $b > 0$ και $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x^2 + y^2 \le b,\ y \ge 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_B e^{(x^2+y^2)^2}(x^2 + y^2)dxdy.$$

4. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \le 36, x > 0, y > 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_B (3x + y)dxdy.$$

5. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5 \le 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_B (x + y + y^2)dxdy.$$

6. Εστω οτι $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + 2y^2 \le 1\}$.
(α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του K.
(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_K xydxdy$.

7. Θέτουμε $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a^2\}$, για κάθε $a > 0$.
(α) Να αποδειχθεί οτι

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

(β) Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{a\to+\infty} \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi.$$

Συνεπώς, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

8. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}.$$

9. Αν $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\},$$

να αποδειχθεί οτι

$$\iint_B f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(t)dt.$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τον μετασχηματισμό $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $g(x,y) = (x+y, y-x)$ και βρείτε το χωρίο $g(B)$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
9ο Φύλλο

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iiint_B xyz dxdydz$, όταν
(α) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$ και $0 \leq z \leq b\}$, όπου a, $b > 0$,
(β) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, όπου $R > 0$.

2. Αν $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ και $x^2 + y^2 \leq z\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_B z dxdydz.$$

3. Αν $a > b > 0$, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ και } x^2 + y^2 \leq b^2\}.$$

4. Αν $R > 0$ και $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, 0 \leq x \leq y$ και $z \geq 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_K 4z dxdydz.$$

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iiint_K z \sin(x^2 + y^2) dxdydz$, όπου K είναι το στερεό στον $\mathbb{R}^3$ που περικλείεται από τη σφαίρα ακτίνας $R > 0$ με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και το επίπεδο με εξίσωση $z = b$, όπου $0 < b < R$.
(Υπόδειξη: Μετασχηματίζοντας σε κυλινδρικές συντεταγμένες βρίσκουμε $\frac{\pi}{2}[R^2 - b^2 - \sin(R^2 - b^2)]$.)

6. Αν $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, να υπολογιστεί το ολοκήρωμα

$$\iiint_K \frac{yz}{1 + x} dxdydz.$$

7. Εστω $a > 0$, $b > 0$ και $c > 0$. Αν $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\},$$

να αποδειχθεί οτι

$$\iiint_K f\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\right) dxdydz = 4\pi abc \int_0^1 t^2 f(t) dt.$$

Ειδικά, ο όγκος του στερεού ελλειψοειδούς K είναι $\frac{4}{3}\pi abc$.

8. Αν $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ και $x^2 + y^2 \geq 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_B \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz.$$

9. Αν $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y$ και $0 \leq z \leq 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_B (x^2 + y^2) dxdydz.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
10ο Φύλλο

1. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s}$, όταν
(α) $\overrightarrow{F}(x, y) = (x, y)$ και $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
(β) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x^2, -xy, 1)$ και $\gamma(t) = (t, 0, t^2)$, $-1 \le t \le 1$.
(γ) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (-x, y, -z)$ και $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{\pi})$, $0 \le t \le 2\pi$.

2. Εστω $\overrightarrow{F}$ το διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (xy^2, -y).$$

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος της περιμέτρου του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Είναι το $\overrightarrow{F}$ συντηρητικό;

3. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (y \cos x - xy \sin x, x \cos x - 2y).$$

(α) Είναι το $\overrightarrow{F}$ συντηρητικό; Αν είναι, να ευρεθεί μία συνάρτηση δυναμικού.
(β) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$t \cos t - 2x(t) + (x(t) \cos t - tx(t) \sin t)x'(t) = 0.$$

4. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ στον $\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3x^2yz + y + 5, x^3z + x - z, x^3y - y + 7).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό και να ευρεθεί μία συνάρτηση δυναμικού του $\overrightarrow{F}$.
(β) Εστω $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ μία οποιαδήποτε παραμετρισμένη κατά τμήματα C^1 καμπύλη με αρχικό σημείο το $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ και τελικό το $\gamma(1) = (1, 1, 1)$. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s}.$$

5. Αν $\overrightarrow{F}$ είναι το διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2),$$

να αποδειχθεί οτι

$$\oint_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

για κάθε κλειστή παραμετρισμένη κατά τμήματα C^1 καμπύλη γ.

6. Να αποδειχθεί οτι το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (xy^2, x^3y)$$

δεν είναι συντηρητικό.

7. Εστω $\overrightarrow{F}$ το διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο.
(β) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s}$, όπου $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, είναι παραμέτριση του μοναδιαίου κύκλου με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.
(γ) Είναι το $\overrightarrow{F}$ συντηρητικό;
(δ) Εστω $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ μία οποιαδήποτε παραμετρισμένη κατά τμήματα C^1 απλή κλειστή καμπύλη, που είναι το σύνορο ενός κανονικού τόπου που περιέχει το $(0,0)$. Να αποδειχθεί οτι

$$\oint_\sigma \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s} = \pm 2\pi.$$

8. Εστω $\overrightarrow{F}$ το διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (-\frac{2}{3}y, \frac{1}{3}x)$$

και $C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^2\}$ και $C_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = bx^2\}$, όπου $0 < a < b$. Εστω επίσης $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ μία οποιαδήποτε απλή παραμετρισμένη κατά τμήματα C^1 καμπύλη με $\gamma(0) \in C_a$ και $\gamma(1) \in C_b$, που δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τις δύο παραβαολές. Να αποδειχθεί οτι το εμβαδόν του τόπου που περικλείεται από τις C_a, γ και C_b είναι ίσο με $\left|\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s}\right|$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα του Green.)

9. Εστω A, $B \in \mathbb{R}^2$ και $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ μία οποιαδήποτε απλή παραμετρισμένη κατά τμήματα C^1 καμπύλη με $\gamma(0) = A$ και $\gamma(1) = B$, που δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τα ευθύγραμμα τμήματα OA και OB, όπου $O = (0,0)$. Αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$, να αποδειχθεί οτι το εμβαδόν του τόπου που περικλείεται από τα ευθύγραμμα τμήματα OA, OB και τη γ είναι ίσο με

$$\frac{1}{2}\left|\int_0^1 [x'(x)y(t) - x(t)y'(t)]dt\right|.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
11ο Φύλλο

1. Εστω $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ και $\overrightarrow{F}$ το λείο διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^3 \setminus C$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(-\frac{2xz}{(x^2+y^2-1)^2+z^2}, -\frac{2yz}{(x^2+y^2-1)^2+z^2}, \frac{x^2+y^2-1}{(x^2+y^2-1)^2+z^2} \right).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο.
(β) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία $(0, 0, -1)$, $(0, \sqrt{2}, -1)$, $(0, \sqrt{2}, 1)$ και $(0, 0, 1)$.
(γ) Είναι το $\overrightarrow{F}$ συντηρητικό;

2. Αν f, g είναι δύο λείες πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, να αποδειχθεί οτι το διανυσματικό πεδίο $g\overrightarrow{\nabla f} + f\overrightarrow{\nabla g}$ είναι συντηρητικό.

3. Αν $\overrightarrow{F}$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ένα ανοιχτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^3$ και $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία λεία συνάρτηση, να αποδειχθεί οτι

$$\mathrm{curl}(f\overrightarrow{F}) = f \cdot \mathrm{curl}\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\nabla f} \times \overrightarrow{F}.$$

4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας $\phi(W)$, όταν
(α) $W = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ και $\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$,
(β) $W = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ και $\phi(u, v) = ((1 + \cos v) \cos u, (1 + \cos v) \sin u, \sin v)$.

5. Αν a, $b > 0$, να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2+y^2}{2a}, x^2 + y^2 \leq b^2 \right\}.$$

6. Εστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και h, $z : [a, b] \to \mathbb{R}$ δύο λείες συναρτήσεις με $h(t) > 0$ για κάθε $a \leq t \leq b$. Αν Σ είναι η επιφάνεια εκ περιστροφής της παραμετρισμένης λείας καμπύλης $\gamma(t) = (h(t), 0, z(t))$, $a \leq t \leq b$, περί τον κάθετο άξονα, να αποδειχθεί οτι το εμβαδόν της Σ είναι ίσο με

$$2\pi \int_a^b h(t)\sqrt{(h'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

7. Εστω Σ μία συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με προσανατολισμό $\overrightarrow{N}$ και f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ δύο λείες συναρτήσεις. Να αποδειχθεί οτι

$$\oint_{\partial\Sigma} f\overrightarrow{\nabla g} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\nabla f} \times \overrightarrow{\nabla g}) \cdot \overrightarrow{N}.$$

8. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση και $\overrightarrow{G}$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$. Εστω $\overrightarrow{F}$ το λείο διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2)\overrightarrow{G}(x, y, z).$$

Αν $\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, να αποδειχθεί οτι

$$\iint_\Sigma \mathrm{curl}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} = 0.$$

9. Εστω $\overrightarrow{F}$ το πεδίο βαρύτητας με τύπο

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (x, y, z)$$

στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Εστω Σ μία οποιαδήποτε κλειστή προσανατολισμένη επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ που είναι το σύνορο ενός κανονικού τόπου A στον $\mathbb{R}^3$. Αν το A περιέχει το σημείο $(0, 0, 0)$, να αποδειχθεί οτι

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} = 4\pi,$$

όπου $\overrightarrow{N}$ είναι ο προς τα έξω (του A) προσανατολισμός της Σ.