Σημειώσεις Τοπολογίας

Κ. Αθανασόπουλου

Επιμέλεια: Ειρήνη Περισυνάκη

Σημειώσεις Τοπολογίας Κ. Αθανασόπουλου

Περιεχόμενα:

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

1. S. Lipschutz, General Topology, Schaum Outline Series, Mc Graw Hill 1996 (Βασικό βιβλίο του μαθήματος)
2. J. Dugundji, Topology, Allyn-Bacon 1966
3. J. Kelley, General Topoloay, Springer-Verlag 1975
4. J. Munkres, Topology, Addison-Wales 1966
5. S. Willard, General Topology, Addison-Wales 1970

I. ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1. Μετρικές:

1.1. Ορισμός Μια μετρική (ή συνάρτηση απόστασης) σε ένα σύνολο X είναι μία συνάρτηση $d: X\times X \to [0,+\infty)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $d(x,y)=0 \iff x=y$

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$ για κάθε $x,y\in X$ (συμμετρικότητα)

(iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ για κάθε $x,y,z\in X$ (τριγωνική ανισότητα)

Το ζεύγος (X,d) λέγεται τότε μετρικός χώρος. Ο αριθμός $d(x,y)$ λέγεται απόσταση των σημείων x,y του X. Κάθε υποσύνολο $A\subset X$ έχει την μετρική $d_A=d/A\times A$. (δηλ. είναι η μετρική d του X περιορισμένη στα στοιχεία του A).

1.2. Παραδείγματα:

(α) Σε κάθε σύνολο $X\neq\emptyset$ ορίζεται η διακριτή μετρική $\delta: X\times X\to[0,+\infty)$ με τύπο:

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & \text{αν } x\neq y\\ 0 & \text{αν } x=y\end{cases}$$

(β) Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται η μετρική
$d(x,y)=|x-y|$
Γενικότερα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται η μετρική
$d_\infty(x,y)=\max\{|x_i-y_i| \ : \ i=1,2,\dots,n\}$
όπου $x=(x_1,x_2,\dots x_n)$ $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$
Αν $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, τότε για την τριγωνική ανισότητα έχουμε
$|x_i-y_i|\leq |x_i-z_i|+|z_i-y_i|\leq d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y)$ για κάθε $i=1,\dots,n$.

(γ) Έστω $p \geq 1$. Στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται τότε η μετρική d_p με τύπο:

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Οι ιδιότητες (i) και (ii) είναι προφανείς. Για την (iii) θα χρειαστούμε την ανισότητα του Minkowski:

<u>Ανισότητα Minkowski.</u> Αν $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ τότε

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p}$$

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t^p$. Τότε $f''(t) \geq 0$ όταν $t \geq 0$ και συνεπώς η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Αν τώρα $A = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p}$ και

$\lambda = \dfrac{A}{A+B}$ τότε για $x = \dfrac{|a_i|}{A}$, $y = \dfrac{|b_i|}{B}$ έχουμε

λόγω της κυρτότητας $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \iff$

$$f\left(\frac{A}{A+B} \cdot \frac{|a_i|}{A} + \frac{B}{A+B} \cdot \frac{|b_i|}{B} \right) \leq \frac{A}{A+B} f\left(\frac{|a_i|}{A} \right) + \frac{B}{A+B} f\left(\frac{|b_i|}{B} \right) \iff$$

$$\iff f\left(\frac{|a_i| + |b_i|}{A+B} \right) \leq \frac{A}{A+B} f\left(\frac{|a_i|}{A} \right) + \frac{B}{A+B} f\left(\frac{|b_i|}{B} \right) \iff$$

$$\iff \frac{(|a_i| + |b_i|)^p}{(A+B)^p} \leq \frac{A}{A+B} \cdot \frac{|a_i|^p}{A^p} + \frac{B}{A+B} \cdot \frac{|b_i|^p}{B^p}.$$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες έχουμε:

$$\frac{1}{(A+B)^p} \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^p \leq \frac{A}{A+B} \cdot \cancel{\frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}{A^p}} + \frac{B}{A+B} \cdot \cancel{\frac{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p}{B^p}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^p \leq (A+B)^p$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq A + B = \left(\sum |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{1/p}$$

ο.ε.δ.

Θέτοντας τώρα στην ανισότητα Minkowski $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$ έχουμε την τριγωνική ανισότητα για την d_p.

Η d_2 λέγεται ευκλείδια μετρική και είναι η γνωστή $d_2(x,y) = \|x-y\|$. όπου $\|\cdot\|$ είναι το ευκλείδιο μήκος στον $\mathbb{R}^n$.

(δ). Έστω $X \neq \emptyset$ και $B(X,\mathbb{R}) = \{f \,/\, f: X \to \mathbb{R}$ φραγμένη$\}$

Τότε η $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ είναι μία μετρική στο $B(X,\mathbb{R})$

- Η συμμετρικότητα της d είναι φανερής.
- Αν $d(f,g) = 0$ τότε $0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in X\} = d(f,g) = 0$ για κάθε $x \in X$. και συνεπώς $f = g$.
- Η τριγωνική ανισότητα προκύπτει απ' την τριγωνική ανισότητα της d_∞ στο $\mathbb{R}$.

(ε) Αν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος τότε η $\tilde{d} = \min\{1, d\}$ είναι επίσης μετρική στον X αφού.

$$\min\{1, d(x,y)\} \leq \min\{1, d(x,z) + d(z,y)\} \leq \min\{1, d(x,z)\} + \min\{1, d(z,y)\}$$

Επίσης και η $\rho = \dfrac{d}{1+d}$ είναι μετρική στον X γιατί

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \frac{d(x,z) + d(z,y) + 2\,d(x,z)\,d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y) + d(x,z)\cdot d(z,y)} \geq$$

$$\frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{d(x,z) + d(z,y)}} \geq \frac{1}{1 + \dfrac{1}{d(x,y)}} = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

(στ) Έστω $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη οικογένεια μετρικών χώρων. Στο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ ορίζεται η μετρική d με τύπο

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} , (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)}$$

(ζ) Έστω $X = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R},\ n=1,2,\dots \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$

Στον X ορίζεται η μετρική $d\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2\right)^{1/2}$

Οι ιδιότητες (i) και (ii) είναι προφανείς. Για την τριγωνική ανισότητα έχουμε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ από την ανισότητα Minkowski για $p=2$:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} x_n^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{N} y_n^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{1}^{\infty} y_n^2 \right)^{1/2}$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2$ συγκλίνει και

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 \right)^{1/2}.$$

(η) Στο χώρο $X = C[0,1]$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται η μετρική

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt$$

όπως προκύπτει αμέσως από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann. Η d δεν είναι μετρική στο σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ γιατί δεν ισχύει η ιδιότητα (i). Πράγματι, αν

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{αν } t = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{και } g(t) = 0 \text{ για κάθε } t \in [0,1]$$

τότε οι f, g είναι ολοκληρώσιμες και $\int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt = 0$ όμως $f \neq g$.

(θ). Έστω $X = \mathbb{Z}$ και $p \in \mathbb{N}$ ένας πρώτος αριθμός. Για κάθε $x \in X \setminus \{0\}$ συμβολίζουμε με $V_p(x)$ τον εκθέτη του p στην πρωταρχική ανάλυση του $|x|$ ως γινόμενο πρώτων αριθμών.
Η $d(x,y) = p^{-V_p(x-y)}$ όταν $x \neq y$ και $d(x,x) = 0$ είναι μία μετρική στο $X = \mathbb{Z}$ που λέγεται p-αδική μετρική.
Οι ιδιότητες (i) και (ii) είναι προφανείς. Όσον αφορά την τριγωνική ανισότητα ισχύει η ισχυρότερη ιδιότητα.

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\} \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Πράγματι, έστω ότι $d(x,z) \geq d(z,y)$, δηλαδή $V_p(x-z) \geq V_p(z-y)$
Ισχύει $|x-y| = \big||x-z| \pm |z-y|\big|$. Έτσι, αν $|x-y| = \left(\prod_{q\neq p} q^{a_q}\right) \cdot p^{V_p(x-y)}$
$|x-z| = \left(\prod_{q \neq p} q^{b_q}\right) p^{V_p(x-z)}$ και $|z-y| = \left(\prod_{q\neq p} q^{c_q}\right) p^{V_p(z-y)}$ έχουμε:

$$|x-y| = \left| \left(\prod_{q\neq p} q^{b_q}\right) p^{V_p(x-z)} \pm \left(\prod_{q\neq p} q^{c_q}\right) p^{V_p(z-y)} \right| =$$

$$= \left| \left(\prod_{q\neq p} q^{b_q}\right) \pm \left(\prod_{q\neq p} q^{c_q}\right) p^{V_p(z-y) - V_p(x-z)} \right| \cdot p^{V_p(x-z)}$$

που σημαίνει ότι $V_p(x-z) \leq V_p(x-y)$ και συνεπώς

$$d(x,z) \geq d(x,y) \quad \text{ο.ε.δ.}$$

2. Σύγκλιση και συνέχεια σε μετρικούς χώρους.

Όπως ξέρουμε αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ τότε εξορισμού αυτή συγκλίνει στο $x \in \mathbb{R}$ αν

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ N\in\mathbb{N} : n\geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Ο ορισμός της σύγκλισης τώρα σ' έναν μετρικό χώρο (X,d) είναι άμεση γενίκευση.

2.1. Ορισμός Μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον μετρικό χώρο (X,d) συγκλίνει στο σημείο x αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει δείκτης $N\in\mathbb{N}$ τ.ω για $n\geq N$ ισχύει $d(x_n,x)<\varepsilon$.
Το x λέγεται όριο της ακολουθίας.

2.2. Πρόταση Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σ' έναν μετρικό χώρο (X,d) έχει το πολύ ένα όριο (συνεπώς ακριβώς ένα όριο)

Απόδειξη: Έστω ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ταυτόχρονα προς τα σημεία $x,y\in X$ και $x\neq y$. Τότε $d(x,y)>0$. και για $\varepsilon=\dfrac{d(x,y)}{3}>0$ υπάρχουν $N_1, N_2\in\mathbb{N}$ ώστε

αν $n\geq N_1$ $d(x_n,x)<\varepsilon$ και αν $n\geq N_2$, $d(x_n,y)<\varepsilon$

Για $n\geq \max\{N_1,N_2\}$ έχουμε

$$d(x,y)\leq d(x_n,x)+d(x_n,y)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon=\frac{2d(x,y)}{3}, \text{ άτοπο.}$$

Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x, θα συμβολίζουμε στη συνέχεια με $x_n \longrightarrow x$.

<u>2.3. Ορισμός:</u> Έστω (X,d), (Y,ρ) δύο μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Η f λέγεται <u>συνεχής στο σημείο</u> $x_0 \in X$ αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο x_0 η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(x_0)$ στον Y.
Η f λέγεται <u>συνεχής</u> αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in X$.

<u>2.4. Πρόταση:</u> Η f είναι συνεχής στο x_0 τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)$ τέτοιο ώστε για $x\in X$ αν $d(x_0,x)<\delta \Rightarrow \rho(f(x_0),f(x))<\varepsilon$.

<u>Απόδειξη:</u> $(\Rightarrow)$ Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ που για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x_\delta \in X$ με $d(x_0,x_\delta)<\delta$ και $\rho(f(x_0),f(x_\delta))\geq\varepsilon$.
Για $\delta=\frac{1}{n}$ ειδικά, $n=1,2,\ldots$ ορίσουμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $d(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$ και $\rho(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Είναι φανερό ότι $x_n \to x_0$ αλλά $f(x_n) \not\to f(x_0)$

$(\Leftarrow)$ Έστω $x_n \to x$ και $\varepsilon>0$. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$d(x_0,x)<\delta,\ x\in X \Rightarrow \rho(f(x_0),f(x))<\varepsilon.$$

Όμως αφού $x_n \to x_0$, υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ τ.ω. $d(x_n,x_0)<\delta$ $\forall n\geq N$.
Άρα $\rho(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$ για κάθε $n\geq N$. ο.ε.δ.

<u>2.5. Παραδείγματα.</u>

(α) Αν $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ και $g:(Y,\rho)\to(Z,\delta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0 όπως είναι φανερό από τον ορισμό.

(β) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $g, f : X \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις (όπου στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την ευκλείδεια μετρική). Τότε οι συναρτήσεις

$$f+g \;,\; f\cdot g \;,\; |f| \;,\; \max\{f,g\} \text{ και } \min\{f,g\}$$

είναι συνεχείς. Αν $f(x) \neq 0$ $\forall x \in X$ τότε η $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής.

(γ) Έστω $\emptyset \neq A \subseteq X$, όπου (X,d) ένας μετρικός χώρος. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε $d(x,A) = \inf\{d(x,z) : z \in A\}$. και θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = d(x,A)$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής, αποδεικνύοντας την (ισχυρότερη) ιδιότητα

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y) \quad \text{για κάθε } x, y \in X.$$

Πράγματι, για κάθε $z \in A$ έχουμε $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ και συνεπώς $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \Rightarrow$

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$$

και όμοια $\quad d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$

Άρα $\quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

Όπως φαίνεται από την Πρόταση 2.4. η συνέχεια της f στο σημείο x_0 εξαρτάται από το πώς απεικονίζει η f τα σύνολα $\{x \in X : d(x_0, x) < \varepsilon\}$ όταν $\varepsilon > 0$ και συγκεκριμένα από το αν αυτά απεικονίζονται μέσα σε αντίστοιχα σύνολα στο Y με το $f(x_0)$ στην θέση του x_0.

2.5. Ορισμός Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος, $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο $S(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x_0,x) < \varepsilon\}$ λέγεται ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα ε.

2.6. Παραδείγματα

(α) Έστω $X = \mathbb{R}^2$ με την ευκλείδια μετρική d_2.
Τότε η ανοιχτή μπάλα $S((0,0),1)$ είναι ο ανοιχτός δίσκος που περικλείεται από τον κύκλο με ακτίνα 1 και κέντρο το $(0,0)$.

(β) Έστω $X = \mathbb{R}^2$ με μετρική την d_∞. Τότε η ανοιχτή μπάλα $S((0,0),1)$ είναι το τετράγωνο με κέντρο το $(0,0)$ και πλευρά 2.

Χρησιμοποιώντας την έννοια της μπάλας η σύγκλιση ακολουθίας και η συνέχεια συνάρτησης μπορούν να διατυπωθούν ως ακολούθως:

"$x_n \to x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow x_n \in S(x,\varepsilon)$"

"η f είναι συνεχής στο $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$

$$f(S(x_0,\delta)) \subset S(f(x_0),\varepsilon)$$

ή ακόμα

$$S(x_0,\delta) \subset f^{-1}(S(f(x_0),\varepsilon))$$

3. Περιοχές σε μετρικούς χώρους.

3.1. Ορισμός: Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται ανοιχτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta > 0 : S(x,\delta) \subset A$.

3.2. Πρόταση: Κάθε ανοιχτή μπάλα $S(x,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $x \in X$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη: Αν $y \in S(x,\varepsilon)$ τότε $\varepsilon - d(x,y) > 0$, και $d(z,y) < \varepsilon - d(x,y) \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \varepsilon$

Άρα $S(y, \varepsilon - d(x,y)) \subseteq S(x,\varepsilon)$.

3.3. Ορισμός: Ένα σύνολο A στον μετρικό χώρο (X,d) λέγεται κλειστό αν το $X \setminus A$ είναι ανοιχτό.

3.4. Πρόταση: Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Τότε

(α) Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο

(β) Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο

(γ) Τα X, $\emptyset$ είναι ανοιχτά σύνολα.

Απόδειξη: Τα (α), (γ) είναι προφανή. Αν τώρα $A_1, \dots, A_n \subset X$ είναι ανοιχτά σύνολα και $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ τότε για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon_i) \subset A_i$. Αν $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0$ τότε $S(x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} S(x,\varepsilon_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

3.5. Πόρισμα: Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος τότε:

(α) Η πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο

(β) Η τομή οποιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο

(γ) Τα $\emptyset$, X είναι κλειστά σύνολα.

Απόδειξη: Συνέπεια των νόμων του de Morgan:

$$X \setminus (A \cup B \cup \Gamma \cup \cdots) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \cap (X \setminus \Gamma) \cap \cdots$$

$$X \setminus (A \cap B \cap \Gamma \cap \cdots) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (X \setminus \Gamma) \cup \cdots$$

3.6. Παραδείγματα

(α) Σε έναν μετρικό χώρο τα μονοσύνολα είναι πάντα κλειστά σύνολα.

(β) Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως προς την ευκλείδεια μετρική είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών, ξένων ανά δύο διαστημάτων.

Απόδειξη Αν το A είναι ανοιχτό, θεωρούμε στο A την σχέση "$\sim$" με: $x \sim y \Leftrightarrow$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα $(a,b) \subset A$ με $x, y \in (a,b)$.

Η "$\sim$" είναι σχέση ισοδυναμίας στο A της οποίας οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ανοιχτά διαστήματα. Αφού κάθε ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ περιέχει έναν ρητό, οι κλάσεις της "$\sim$" είναι αριθμήσιμες στο πλήθος. Το A είναι η ξένη ένωσή τους.

3.7. Ορισμός Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $x \in X$. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται περιοχή του x αν υπάρχει $\delta > 0$: $S(x,\delta) \subset A$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{U}(x)$ το σύνολο των περιοχών του x.

2.3. Πρόταση: Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $x \in X$

(α) Κάθε ανοιχτό σύνολο που περιέχει το x είναι περιοχή του x.

(β) Αν $A \in \mathcal{U}(x)$, $A \subset B$ τότε $B \in \mathcal{U}(x)$.

(γ) Αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{U}(x)$ τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}(x)$

(δ) $A \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in A$

(ε) Αν $A \in \mathcal{U}(x)$ τότε υπάρχει $B \in \mathcal{U}(x)$ τ.ω $B \subset A$ και για κάθε $y \in B$, $A \in \mathcal{U}(y)$

Απόδειξη: Προφανής.

Μπορούμε τώρα να ξαναδιατυπώσουμε τις έννοιες της σύγκλισης και της συνέχειας ως εξής:

"$x_n \longrightarrow x \iff \forall\ A \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$: $x_n \in A$ για κάθε $n \geq N$"

"η f είναι συνεχής στο $x_0 \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{U}(x_0)\ \forall\ B \in \mathcal{U}(f(x_0))$".

<u>3.9. Πρόταση:</u> Μία συνάρτηση $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό σύνολο για κάθε ανοιχτό σύνολο $A \subset Y$.

<u>Απόδειξη</u> ($\Rightarrow$) Έστω $x \in f^{-1}(A)$. Αφού $f(x) \in A$ και το A είναι ανοιχτό, το $A \in \mathcal{U}(f(x))$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x (αφού είναι παντού στο X) $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}(x)$. Άρα το $f^{-1}(A)$ είναι περιοχή κάθε σημείου του και συνεπώς ανοιχτό.

($\Leftarrow$) Έστω $B \in \mathcal{U}(f(x_0))$ τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $A \subset B$ που περιέχει το $f(x_0)$ (π.χ μία ανοιχτή μπάλα).
Το $f^{-1}(A)$ είναι λοιπόν ανοιχτό και $x_0 \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
Άρα το $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}(x_0)$.

Είναι φανερό ότι το μόνο που χρειαζόμαστε για να ορίσουμε έννοιες σύγκλισης και συνέχειας είναι η έννοια του ανοιχτού συνόλου. Παρατηρούμε όμως ότι δύο διαφορετικές μετρικές στο ίδιο σύνολο μπορεί να δίνουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα. Αυτό συμβαίνει παραδείγματος χάριν για το $\mathbb{R}^2$ και τις μετρικές d_∞, d_2 αφού για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ κάθε τετράγωνο με κέντρο το (x_1, x_2) περιέχει έναν δίσκο με το ίδιο κέντρο και αντίστροφα. Δύο τέτοιες μετρικές λέγονται <u>τοπολογικά ισοδύναμες</u> και ορίζουν την ίδια έννοια σύγκλισης.

4. Πλήρεις μετρικοί χώροι

Όπως είναι γνωστό μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) συγκλίνει τότε και μόνο τότε όταν

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\quad n,m\geq N \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon$ (Cauchy)

Η ιδιότητα αυτή λέγεται ιδιότητα Cauchy.

<u>4.1. Ορισμός</u> Μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. σ' έναν μετρικό χώρο (X,d) λέγεται <u>ακολουθία Cauchy</u> αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει δείκτης $N\in\mathbb{N}$: $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ για κάθε $n,m\geq N$.

Σε αντίθεση με το $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$ μία ακολουθία Cauchy σ' έναν μετρικό χώρο ενδεχομένως να μη συγκλίνει. Για παράδειγμα, αν $X=(0,1)$ με την περιορισμένη ευκλείδια μετρική και $x_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ τότε $|x_n-x_m|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|$ και συνεπώς η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy η οποία όμως δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο του X.

Η έννοια "ακολουθία Cauchy" εξαρτάται από την μετρική και όχι μόνο από τα ανοιχτά σύνολα που αυτή ορίζει όπως η έννοια "σύγκλιση". Είναι δηλαδή ενδεχόμενο σ' ένα σύνολο X με δύο μετρικές d,ρ που είναι τοπολογικά ισοδύναμες, δηλαδή ορίζουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα, μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι Cauchy ως προς την ρ αλλά όχι ως προς την d.

<u>4.2. Παράδειγμα.</u> Έστω $X=\mathbb{R}$ και $d=d_2$ ενώ ρ είναι η μετρική με τύπο

$$\rho(x,y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right| = d\left(\frac{x}{1+|x|},\frac{y}{1+|y|}\right)$$

Οι d, ρ είναι τοπολογικά ισοδύναμες μετρικές στο $\mathbb{R}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα ως εξής: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Η f είναι συνεχής αν θεωρήσουμε το $\mathbb{R}$ και το $(-1,1)$ εφοδιασμένα με την ευκλείδια μετρική d_2. Είναι και 1-1 και επί.
Η $f^{-1}: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ και είναι και αυτή συνεχής. Αν το $A \subset \mathbb{R}$ είναι ρ-ανοιχτό τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $S_\rho(x,\varepsilon) \subset A$. Από την συνέχεια όμως της f, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
$$\Leftrightarrow \rho(x,y) < \varepsilon.$$

δηλαδή, $S_d(x,\delta) \subset S_\rho(x,\varepsilon) \subset A$. Άρα το A είναι d-ανοιχτό.
Έστω $B \subset \mathbb{R}$ ένα d-ανοιχτό σύνολο. Τότε για κάθε $x \in B$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $S_d(x,\varepsilon) \subset B$. Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x)$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $y' \in (-1,1)$ με $|f(x) - y'| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(y')| < \delta$. Επειδή η f είναι επί, υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ με $y' = f(y)$. Άρα $|f(x) - f(y)| < \delta \Rightarrow |x-y| < \varepsilon$
$$\Leftrightarrow \rho(x,y) < \delta \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon.$$

Δηλαδή $S_\rho(x,\delta) \subset S_d(x,\varepsilon) \subset B$. Άρα το B είναι ρ-ανοιχτό.

Αν τώρα $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ προφανώς δεν είναι d-Cauchy αφού $|x_n - x_m| \geq 1$ για κάθε $n \neq m$
Είναι όμως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρ-Cauchy. Πραγματικά έχουμε
$$\rho(x_n, x_m) = \left|\frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m}\right| = \left|\frac{n-m}{(1+n)(1+m)}\right| = \left|\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+m}\right|.$$

Αν λοιπόν $\varepsilon>0$, υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{1+N}<\frac{\varepsilon}{2}$ και τότε για $n, m \geq N$ έχουμε $\rho(x_n,x_m) \leq \frac{1}{1+n}+\frac{1}{1+m} \leq \frac{2}{1+N} < \varepsilon$

<u>4.3. Πρόταση.</u> Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι d-Cauchy.

Απόδειξη: Έστω $x_n \to x$ και $\varepsilon>0$. Υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ τ.ω $d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n\geq N$. Αν λοιπόν $n,m>N$ τότε

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x)+d(x_m,x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

<u>4.4. Ορισμός</u> Ένας μετρικός χώρος (X,d) λέγεται πλήρης αν κάθε ακολουθία d-Cauchy συγκλίνει σε κάποιο σημείο του X

<u>4.5. Παραδείγματα</u>

(α) Ο $(\mathbb{R}^n, d_2)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος

(β) Ο $([a,b], d_2)$ είναι πλήρης για κάθε $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$

(γ) Ο μετρικός χώρος $(B(X;\mathbb{R}), d)$ όπου $B(X;\mathbb{R})$ το σύνολο όλων των φραγμένων συναρτήσεων του συνόλου $X\neq\emptyset$ στο $\mathbb{R}$ και d η supremum μετρική είναι πλήρης. Πράγματι· έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία d-Cauchy στο $B(X;\mathbb{R})$. Τότε για κάθε $x\in X$ η $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d_2-Cauchy στο $\mathbb{R}$ που είναι πλήρης. Συνεπώς υπάρχει το όριό της που συμβολίζουμε με $f(x)$. Ορίζεται λοιπόν η συνάρτηση $f: X\to\mathbb{R}$. Έστω τώρα $\varepsilon>0$. Αφού η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m\geq N$ $\quad d(f_n,f_m)<\varepsilon/3$

Έστω $n\geq N$ και $x\in X$ αφού $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ υπάρχει $m\geq N$ τ.ω $|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon/3$. Οπότε έχουμε:

$$|f_n(x)-f(x)|\leq |f_n(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f(x)|<d(f_n,f_m)+\frac{\varepsilon}{3}<\frac{2\varepsilon}{3}.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι για $n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{για όλα τα } x \in X.$$

Οπότε και $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ (1)

Προκύπτει τώρα ότι η f είναι φραγμένη αφού $|f(x)| < \varepsilon + |f_N(x)|$ $\forall x \in X$ και η f_N είναι φραγμένη. Άρα $f \in B(X;\mathbb{R})$ και προφανώς από την (1) $d(f_n, f) < \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Άρα $f_n \longrightarrow f$

(δ) ίδια απόδειξη δείχνει ότι ο χώρος $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την supremum μετρική είναι πλήρης.

Το παράδειγμα 4.2 δείχνει ότι ένα σύνολο X μπορεί να έχει δύο τοπολογικά ισοδύναμες μετρικές ως προς την μία από τις οποίες να είναι πλήρης ενώ ως προς την άλλη να μην είναι. Συνεπώς η έννοια της πληρότητας δεν συνδέεται άμεσα με την έννοια της σύγκλισης και δεν είναι <u>τοπολογική</u> έννοια. Παρόλα αυτά η έννοια της πληρότητας είναι χρήσιμη στην Ανάλυση και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά κυρίως λόγω του επόμενου θεωρήματος.

<u>4.6. Θεώρημα</u> Έστω (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μία συνάρτηση για την οποία υπάρχει $0 < a < 1$ ώστε $d(f(x), f(y)) \leq a\, d(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$.
Τότε υπάρχει $x_0 \in X$: $f(x_0) = x_0$, δηλαδή η f έχει σταθερό σημείο που είναι <u>ένα και μοναδικό.</u>

<u>Απόδειξη:</u> Θα δείξουμε πρώτα ότι αν η f έχει ένα σταθερό σημείο τότε αυτό είναι μοναδικό. Πράγματι έστω ότι $x_0, y_0 \in X$ με $f(x_0) = x_0$ και $f(y_0) = y_0$, $x_0 \neq y_0$. Τότε $d(x_0, y_0) > 0$ και

$d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \leq a\, d(x_0, y_0)$, $0 < a < 1$, αντίφαση

Δείχνουμε τώρα την ύπαρξη του x_0. Έστω τυχαίο $x \in X$.
Θεωρούμε την ακολουθία $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $f^n = \underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ φορές}}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:
$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \le a\cdot d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \le \cdots \le a^n\cdot d(x, f(x)).$$
Συνεπώς για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $m>n$
$$d(f^n(x), f^m(x)) \le d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + \cdots + d(f^{m-1}(x), f^m(x))$$
$$\le (a^n + \cdots + a^{m-1})\, d(x, f(x))$$
$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^{k+n}\right) d(f(x), x) = \frac{a^n}{1-a}\cdot d(x, f(x))$$
αφού $0<a<1$. Αφού $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{1-a} = 0$, προκύπτει από αυτό ότι η $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και αφού ο (X,d) είναι πλήρης έχει ένα όριο $x_0 \in X$. Λόγω όμως της υπόθεσης για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε αν $n \ge N$ $d(f^n(x), x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Συνεπώς
$$d(x_0, f(x_0)) \le d(x_0, f^{N+1}(x)) + d(f^{N+1}(x), f(x_0))$$
$$\le d(x_0, f^{N+1}(x)) + a\cdot d(f^N(x), x_0) < \varepsilon$$
Άρα $d(x_0, f(x_0)) = 0$ δηλαδή $x_0 = f(x_0)$.
Μια f όπως το Θεώρημα 4.6 λέγεται <u>συστολή</u> και είναι συνεχής (Μάλιστα λόγω της συνέχειας $f(f^n(x)) \to f(x_0)$ άρα $x_0 = f(x_0)$).

<u>4.7. Εφαρμογή.</u> Έστω $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις και $|\lambda| < \frac{1}{M}$ όπου
$$M = \sup\{\, |K(x,y)| : (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \,\}.$$

Θεωρούμε τον χώρο $C[0,1]$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την supremum μετρική που είναι πλήρης. Τότε η συνάρτηση $T: C[0,1]\to C[0,1]$ με τύπο

$$T(f)=\lambda\cdot\int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy+\phi(x)$$

είναι συστολή. Πράγματι για κάθε $f,g\in[0,1]$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
d(T(f),T(g)) &= \sup\{\,|T(f)(x)-T(g)(x)| : x\in[0,1]\,\}\\
&= \sup\left\{\,\left|\lambda\int_0^1 K(x,y)(f(y)-g(y))\,dy\right| : x\in[0,1]\right\}\\
&\le \sup\left\{\,|\lambda|\cdot\int_0^1 |K(x,y)|\,|f(y)-g(y)|\,dy : x\in[0,1]\right\}\\
&\le |\lambda|\cdot M\cdot\int_0^1 |f(y)-g(y)|\,dy\\
&\le (|\lambda|\cdot M)\cdot d(f,g)
\end{aligned}$$

και $|\lambda|\cdot M<1$. Άρα υπάρχει $f\in C[0,1]$ ώστε

$$f(x)=\lambda\int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy+\phi(x) \quad \text{για κάθε } x\in[0,1].$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.

1) Δείξτε ότι η d είναι μετρική στο

(α) $\mathbb{R}$, όπου $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$

(β) $\mathbb{R}$, όπου $d(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

(γ) $\mathbb{R}^n$ όπου $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$, όπου $p > 1$, για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2). Έστω $X = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$. Δείξτε ότι η

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2\right)^{1/2}$$

είναι μετρική στον X.

3) Έστω $p \in \mathbb{N}$ ένας πρώτος αριθμός. Για κάθε $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ συμβολίζουμε με $v_p(x)$ τον εκθέτη του p στην πρωταρχική ανάλυση του $|x|$. ως γινόμενο πρώτων αριθμών. Να αποδειχθεί ότι η

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x = y \\ p^{-v_p(x-y)}, & \text{όταν } x \neq y \end{cases}$$

είναι μετρική στο $\mathbb{Z}$. Μάλιστα για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} \leq d(x,z) + d(z,y).$$

4) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Δείξτε ότι

$$|d(x,z) - d(y,u)| \leq d(x,y) + d(z,u) \text{ για κάθε } x, y, z, u \in X.$$

5) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Να αποδειχθεί ότι οι

$\tilde{d} = \min\{1, d\}$ και $\rho = \frac{d}{1+d}$ είναι μετρικές στο X και μάλιστα τοπολογικά ισοδύναμες με την d.

6). Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$ είναι συνεχής αποδεικνύοντας ότι $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$.

7) Έστω $C[0,1]$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ και $d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$ όπου $f, g \in C[0,1]$. Δείξτε ότι:

(α) Η d είναι μετρική στο $C[0,1]$

(β) $f_n \to f$ στο $C[0,1]$ τότε και μόνον τότε όταν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(γ) Ο $(C[0,1], d)$ είναι πλήρης.

8) Έστω $C^1[0,1]$ όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, και

$$d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t) - g'(t)|$$

(α) Δείξτε ότι η d είναι μετρική στον $C^1[0,1]$

(β) Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος $(C^1[0,1], d)$ είναι πλήρης.

9) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$. Να αποδειχθεί ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) το A είναι κλειστό σύνολο

(β) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο A και $x_n \to x$, τότε $x \in A$

(γ) $A = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$, όπου $d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$.

10) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. και $A, B \subseteq X$ δύο κλειστά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$. Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ ώστε $f^{-1}(0) = A$ και $f^{-1}(1) = B$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις ασκήσεις 6 και 9)

11) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $p \in X$. Αν $A, B \subseteq X$ είναι δύο μη κενά, κλειστά σύνολα, τότε θέτουμε

$$d_p(A,B) = \sup\{\, |d(x,A) - d(x,B)|\, e^{-d(x,p)} : x \in X \,\}$$

Δείξτε ότι η d_p είναι μετρική στο σύνολο όλων των μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X. Δείξτε επίσης ότι αν q είναι ένα άλλο σημείο του X τότε οι d_p, d_q είναι τοπολογικά ισοδύναμες μετρικές.

12) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται φραγμένο αν $\sup\{d(x,y) : x, y \in A\} < +\infty$. Δείξτε ότι στο σύνολο $F(X)$ όλων των μη-κενών, φραγμένων και κλειστών υποσυνόλων του X ο τύπος

$$\rho(A,B) = \max\Big\{ \sup\{d(x,B) : x \in A\},\ \sup\{d(x,A) : x \in B\} \Big\}$$

ορίζει μετρική. (Η μετρική αυτή λέγεται μετρική Hausdorff).

II ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1. Τοπολογίες

Όπως διαπιστώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο προκειμένου να εισάγουμε έννοια σύγκλισης σ'ένα σύνολο δεν είναι ανάγκη να εισάγουμε μία μετρική σ'αυτό. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι μία οικογένεια υποσυνόλων τα οποία θα πάρουν την θέση των ανοικτών συνόλων.

1.1. Ορισμός Μια τοπολογία σ'ένα (μη κενό) σύνολο X είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{T}$ του $\mathcal{P}(X)$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(β) Αν $A_i \in \mathcal{T}$ $i \in I \implies \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ και

(γ) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$

Το ζευγάρι $(X, \mathcal{T})$ λέγεται τοπολογικός χώρος και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται ανοικτά υποσύνολα του X. Τα σύνολα $X \smallsetminus A$, $A \in \mathcal{T}$ λέγονται κλειστά.

Αργότερα θα συμβολίζουμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ απλώς με X όταν είναι σαφές ποια τοπολογία θεωρούμε. Επίσης ο X θα αποκαλείται συχνά και χώρος χωρίς τον επιθετικό προσδιορισμό τοπολογικός και τα στοιχεία του σημεία.

1.2. Παραδείγματα.

(α) Σε κάθε σύνολο $X \neq \emptyset$ ορίζεται η τετριμμένη τοπολογία $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

(β) Σε κάθε σύνολο $X \neq \emptyset$ ορίζεται η διακριτή τοπολογία $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. δηλαδή κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό. Ο χώρος $(X, \mathcal{P}(X))$ λέγεται διακριτός.

(γ) Έστω $X=\{0,1\}$ και $\mathcal{T}=\{\emptyset, X, \{0\}\}$. Η $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία στον X που λέγεται τοπολογία του Sierpinski.

(δ) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $\mathcal{T}_d$ η οικογένεια όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του όπως ορίστηκαν στην παράγραφο 3 του κεφαλαίου I. Τότε ο $(X,\mathcal{T}_d)$ είναι τοπολογικός χώρος.

Ένας τοπολογικός χώρος $(Y,\mathcal{T})$ λέγεται <u>μετρικοποιήσιμος</u> αν υπάρχει μία μετρική ρ στο Y ώστε $\mathcal{T}=\mathcal{T}_\rho$.

(ε) Έστω X ένα άπειρο σύνολο και $\mathcal{T}=\{A\subset X : X\setminus A \text{ πεπερασμένο}\}\cup\{\emptyset\}$. Η $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία στο X που λέγεται <u>συμπεπερασμένη</u> τοπολογία.

(στ) Έστω $(X,\leqq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $\mathcal{T}$ η οικογένεια των συνόλων $A\subset X$ με την ιδιότητα

$$x\in A \text{ και } y\leqq x \Rightarrow y\in A$$

Η $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία στο X.

(ζ) Έστω $(X\leqq)$ ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο και $\mathcal{T}$ η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του X που είναι ενώσεις και πεπερασμένες τομές συνόλων της μορφής:

$$I_x=\{t\in X : t\leqq x\} \text{ και } J_x=\{t\in X : t\geqq x\}$$

μαζί με το $\emptyset$ και τον X. Η $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία στο X που λέγεται <u>τοπολογία της διάταξης $\leqq$</u>.

<u>1.3. Λήμμα.</u> Σ' έναν τοπολογικό χώρο οι τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο και η πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι επίσης κλειστό σύνολο.

Η άπειρη τομή ανοιχτών συνόλων δεν είναι πάντα ανοιχτό σύνολο, όπως και η άπειρη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι πάντα κλειστό σύνολο. Είναι προφανές ότι ένα σύνολο X μπορεί να δέχεται πολλές τοπολογίες. Μία τοπολογία $\mathcal{T}_1$ σ' ένα σύνολο X λέγεται <u>λεπτότερη</u> από μία τοπολογία $\mathcal{T}_2$ στο X, αν $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, δηλαδή αν η $\mathcal{T}_1$ έχει περισσότερα ανοιχτά σύνολα από την $\mathcal{T}_2$. Παραδείγματος χάριν, η ευκλείδια τοπολογία στο $\mathbb{R}$ (που ορίζεται από την ευκλείδια μετρική) είναι λεπτότερη από την συμπεπερασμένη τοπολογία στο $\mathbb{R}$.

Για την περιγραφή μιας τοπολογίας δεν είναι ανάγκη να ξέρουμε όλα τα ανοιχτά σύνολα.

<u>1.4 Ορισμός.</u> Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Το $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ λέγεται <u>βάση</u> της τοπολογίας αν κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένωση στοιχείων του $\mathcal{B}$.

<u>1.5. Παραδείγματα.</u> Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{ S(x,\tfrac{1}{n}) : x \in X, n \in \mathbb{N} \}$$

αποτελεί βάση της μετρικής τοπολογίας $\mathcal{T}_d$.

<u>1.6. Θεώρημα.</u> Έστω X ένα (μη κενό) σύνολο και $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(a) Το $\mathcal{B}$ είναι βάση για μία μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$.

(b) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ και για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, και $x \in B_1 \cap B_2$ υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

<u>Απόδειξη</u> (a) $\Rightarrow$ (b) Κατ' αρχήν αφού το X είναι ανοιχτό και το $\mathcal{B}$ βάση της $\mathcal{T}$, το X είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$.
Έστω τώρα $x \in B_1 \cap B_2$, όπου $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Αφού τα B_1, B_2 είναι ανοιχτά, το $B_1 \cap B_2$ είναι ανοιχτό. Επειδή το $\mathcal{B}$ είναι βάση, υπάρχει μία οικογένεια $\{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B}$ ώστε $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} B_i$. Αφού $x \in B_1 \cap B_2$ υπάρχει $i_0 \in I$ τω $x \in B_{i_0}$. Θέτουμε $B_3 = B_{i_0}$.

(b)⇒(a) Θέτουμε $\mathcal{T}=\{A\subset X : \exists\{B_i : i\in I\}\subset\mathcal{B}$ με $A=\bigcup_{i\in I}B_i\}$

Τότε $X\in\mathcal{T}$ από την υπόθεση και $\emptyset=\bigcup_{i\in\emptyset}B_i\in\mathcal{T}$ για $I=\emptyset$.

Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία (με βάση $\mathcal{B}$).

Έστω $\{A_j : j\in J\}\subset\mathcal{T}$ θα δείξουμε ότι $\bigcup_{j\in J}A_j\in\mathcal{T}$.

Πράγματι, για κάθε $j\in J$, υπάρχει $\{B_{ij} : i\in I_j\}\subset\mathcal{B}$ ώστε

$A_j=\bigcup_{i\in I_j}B_{ij}$. Άρα $\bigcup_{j\in J}A_j=\bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I_j}B_{ij}\in\mathcal{T}$.

Αν τώρα $A_1, A_2\in\mathcal{T}$ και $A_1=\bigcup_{i\in I}B_i$ $A_2=\bigcup_{j\in J}B_j$, τότε

$A_1\cap A_2=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(B_i\cap B_j)$. Λόγω της υπόθεσης για κάθε $x\in B_i\cap B_j$

υπάρχει $B_{ij}(x)\in\mathcal{B}$ ώστε $x\in B_{ij}(x)\subset B_i\cap B_j$. Άρα

$$B_i\cap B_j=\bigcup_{x\in B_i\cap B_j}B_{ij}(x).\ \text{Συνεπώς}\ A_1\cap A_2=\bigcup_{\substack{(i,j)\in I\times J\\ x\in A_1\cap A_2}}B_{ij}(x)\in\mathcal{T}.$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι αν $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{T}$ τότε $A_1\cap\dots\cap A_n\in\mathcal{T}$.

Τέλος, από τον ορισμό είναι φανερό ότι η $\mathcal{T}$ είναι η μοναδική τοπολογία στο X που έχει βάση την $\mathcal{B}$.

<u>1.7. Πρόταση</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $A\subset X$ είναι ανοιχτό τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $x\in A$ υπάρχει $B\in\mathcal{B}$ ώστε $x\in B\subset A$, όπου $\mathcal{B}$ είναι μία βάση της τοπολογίας.

<u>Απόδειξη.</u> Αν το A είναι ανοιχτό τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο από τους ορισμούς. Αντίστροφα· για κάθε $x\in A$ υπάρχει $B_x\in\mathcal{B}$ ώστε $x\in B_x\subset A$, οπότε $A=\bigcup_{x\in A}B_x$ και το A είναι ανοιχτό ως ένωση ανοιχτών.

Στην πραγματικότητα μπορούμε από κάθε οικογένεια υποσυνόλων του X να κατασκευάσουμε μία (ελάχιστη) τοπολογία που την περιέχει (και είναι βέβαια μοναδική).

1.8. Ορισμός. Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{C}\subset\mathcal{T}$ λέγεται υποβάση της $\mathcal{T}$ αν το σύνολο

$$\mathcal{B}=\{B\subset X : \exists\ C_1,C_2,\dots,C_k\in\mathcal{C} \text{ με } B=\bigcap_{i=1}^{k}C_i\}$$

είναι βάση της $\mathcal{T}$.

1.9. Θεώρημα Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(X)$. Τότε υπάρχει μία μοναδική τοπολογία στο X της οποίας το $\mathcal{C}$ είναι υποβάση.

Απόδειξη Θέτουμε $\mathcal{B}=\{B\subset X: \exists\, C_1,\dots,C_k\in\mathcal{C} \text{ με } B=\bigcap_{i=1}^{k}C_i\}\cup\{X\}$. Τότε το $\mathcal{B}$ ικανοποιεί το (β) του Θεωρήματος 1.6. και συνεπώς υπάρχει μία μοναδική τοπολογία στο X με βάση $\mathcal{B}$. Πράγματι αν $B_1=\bigcap_{i=1}^{k}C_i$ $B_2=\bigcap_{j=1}^{\lambda}D_j$, τότε $B_1\cap B_2\in\mathcal{B}$ και συνεπώς για κάθε $x\in B_1\cap B_2$ υπάρχει $B_3=B_1\cap B_2$ με $x\in B_3\subset B_1\cap B_2$.

1.10. Παραδείγματα.

(α) Στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}$ τα ανοιχτά διαστήματα (a,b), $a<b$, αποτελούν βάση της τοπολογίας.

Επειδή $(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,+\infty)$, η οικογένεια

$$\mathcal{C}=\{(-\infty,b),(a,+\infty) : a,b\in\mathbb{R}\}$$

αποτελεί υποβάση της ευκλείδιας τοπολογίας του $\mathbb{R}$.

(β) Το σύνολο $\mathcal{C}=\{(-\infty,b],(a,+\infty) : a,b\in\mathbb{R}\}$ αποτελεί υποβάση για μία τοπολογία στο $\mathbb{R}$ που είναι λεπτότερη από την ευκλείδια. Πράγματι στα πλαίσια αυτής της τοπολογίας του $\mathbb{R}$ το σύνολο $(a,b]$

είναι ανοιχτό ενώ δεν είναι στην ευκλείδια. Επίσης κάθε ανοιχτό διάστημα $(a,b) = \bigcup_{n}^{\infty} (a, b-\frac{1}{n}]$ είναι ανοιχτό σ' αυτή την τοπολογία.

<u>1.11 Ορισμός.</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα σύνολο $V \subset X$ λέγεται <u>περιοχή</u> του x αν υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο A ώστε $x \in A \subset V$. Το σύνολο όλων των περιοχών του x θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{U}(x)$.

<u>1.12 Πρόταση.</u> Σ' έναν τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(α) το $A \subset X$ είναι ανοιχτό.
(β) το A είναι περιοχή κάθε σημείου που περιέχει
(γ) για κάθε $x \in A$ υπάρχει μία περιοχή V_x του x ώστε $V_x \subset A$.

<u>Απόδειξη.</u> Τα (α)⇒(β) και (β)⇒(γ) είναι τετριμένα. Αν τώρα ισχύει η (γ) τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο A_x ώστε $x \in A_x \subset V_x \subset A$. Άρα το $A = \bigcup_{x \in A} A_x$ είναι ανοιχτό.

<u>1.13 Πρόταση.</u> Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$, τότε ισχύουν τα παρακάτω:
(α) $V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in V$ (άρα $\emptyset \notin \mathcal{U}(x)$)
(β) $V, W \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{U}(x)$
(γ) $V \in \mathcal{U}(x)$ και $V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{U}(x)$
(δ) Αν $V \in \mathcal{U}(x)$ τότε υπάρχει $W \in \mathcal{U}(x)$ τ.ω $W \subset V$ και $V \in \mathcal{U}(y)$ για κάθε $y \in W$.

Απόδειξη: Τα (α), (β), (γ) είναι άμεσα από τους ορισμούς ενώ το (δ) από την πρόταση 1.12 αρκεί να πάρουμε το W ανοιχτό. (π.χ. υπάρχει ανοιχτό W τ.ω $x \in W \subset V$).

1.14. Θεώρημα Έστω X ένα (μη κενό) σύνολο και $\{\mathcal{U}(x) : x \in X\}$ μία οικογένεια όπου $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ για κάθε $x \in X$. Αν η $\mathcal{U}(x)$ έχει τις ιδιότητες (α), (β), (γ) και (δ) της πρότασης 1.13 τότε υπάρχει μία μοναδική τοπολογία στο X ως προς την οποία το $\mathcal{U}(x)$ είναι το σύνολο όλων των περιοχών του x, για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη Κατ' αρχήν αν $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ είναι δύο τοπολογίες στο X με την ιδιότητα αυτή τότε για κάθε $A \in \mathcal{T}_1$ ισχύει $A \in \mathcal{U}(x)$ για κάθε $x \in A$ που από την πρόταση 1.12 ισοδυναμεί με $A \in \mathcal{T}_2$. Άρα $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Θα δείξουμε τώρα την ύπαρξη μίας τοπολογίας $\mathcal{T}$ μ' αυτή την ιδιότητα. Θέτουμε $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{U}(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$.

Είναι προφανές ότι $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Αν $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{T}$, τότε για κάθε $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ υπάρχει $i \in I$ τ.ω $x \in A_i$. Αφού $A_i \in \mathcal{U}(x)$, προκύπτει από την ιδιότητα (γ) πρόταση 1.13 ότι $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{U}(x)$ για κάθε $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Άρα $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$. Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, τότε για κάθε $x \in A_1 \cap A_2$ έχουμε $A_1 \in \mathcal{U}(x)$ και $A_2 \in \mathcal{U}(x)$. Σύμφωνα λοιπόν με το (β) έχουμε και $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}(x)$ για κάθε $x \in A_1 \cap A_2$, δηλαδή $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

Αυτά δείχνουν ότι το $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία. Έστω τώρα $\mathcal{U}'(x)$ το σύνολο των περιοχών του x ως προς την $\mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{U}'(x) = \mathcal{U}(x)$.

Έστω $V' \in \mathcal{U}'(x)$. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $A \in \mathcal{T}$ με $x \in A \subset V'$. Από τον ορισμό όμως της $\mathcal{T}$ έχουμε $A \in \mathcal{U}(x)$. Άρα από το (γ) $V' \in \mathcal{U}(x)$.

Αντίστροφα· έστω $V \in \mathcal{U}(x)$. Θέτουμε $V^\circ = \{y \in V : V \in \mathcal{U}(y)\} \subset V$. Τότε $x \in V^\circ$ από την ιδιότητα (α). Για κάθε $y \in V^\circ$, αφού $V \in \mathcal{U}(y)$, από την ιδιότητα (δ) υπάρχει $W \in \mathcal{U}(y)$ ώστε $W \subset V^\circ$ και αφού $W \in \mathcal{U}(y)$ έχουμε από την ιδιότητα (γ) ότι $V^\circ \in \mathcal{U}(y)$.

Δείξαμε λοιπόν ότι το $V^\circ \in \mathcal{U}(y)$ για κάθε $y \in V^\circ$. Συνεπώς $V^\circ \in \mathcal{T}$ από τον ορισμό της $\mathcal{T}$. και αφού $x \in V^\circ$ από την πρόταση 1.12 έχουμε $V^\circ \in \mathcal{U}'(x)$. Όμως $V^\circ \subset V$ άρα από την πρόταση 1.13(γ) έχουμε και $V \in \mathcal{U}'(x)$.

<u>1.15. Ορισμός</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα σύνολο $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ λέγεται <u>βάση περιοχών</u> του x αν για κάθε $V \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}(x)$ ώστε $x \in B \subset V$.

<u>1.16. Παραδείγματα.</u>

(α) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $x \in X$.

Το $\mathcal{B}(x) = \{ S(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \}$ αποτελεί βάση περιοχών του x.

(β) Σε κάθε τοπολογικό χώρο X και για κάθε $x \in X$ το

$\mathcal{B}(x) = \{ A \in \mathcal{U}(x) : A$ ανοιχτό$\}$ είναι βάση περιοχών του x.

<u>1.17 Ορισμός</u>

(α) Ένας χώρος X λέγεται <u>1ος αριθμήσιμος</u> αν κάθε $x \in X$ έχει μία <u>αριθμήσιμη</u> βάση περιοχών

(β) Ένας χώρος X λέγεται <u>2ος αριθμήσιμος</u> αν έχει μία <u>αριθμήσιμη</u> βάση για την τοπολογία.

<u>1.18 Παραδείγματα.</u>

(α) Κάθε μετρικός χώρος είναι 1ος αριθμήσιμος. Δεν είναι όμως πάντα 2ος αριθμήσιμος. Για παράδειγμα αν X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο τότε η διακριτή τοπολογία στο X δεν είναι 2η αριθμήσιμη και ορίζεται από την διακριτή μετρική. Η ελάχιστη βάση της διακριτής τοπολογία είναι η $\mathcal{B} = \{ \{x\} : x \in X \}$.

(β) Ο ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι 1ος και 2ος αριθμήσιμος

Μία βάση για την τοπολογία του είναι η

$$\mathcal{B} = \{ S(x, \tfrac{1}{n}) : n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Q}^n \}$$

<u>1.19. Πρόταση</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μία βάση της τοπολογίας του. Για κάθε $x \in X$ η οικογένεια

$$\mathcal{B}(x) = \{ B \in \mathcal{B} : x \in B \}$$

είναι βάση περιοχών του x.

<u>Απόδειξη.</u> Για κάθε $V \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο A με $x \in A \subset V$. Αφού το $\mathcal{B}$ είναι βάση, υπάρχει $\{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B}$ με $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Άρα υπάρχει $i_0 \in I$ με $x \in B_{i_0}$ οπότε $x \in B_{i_0} \subset V$ και $B_i \in \mathcal{B}(x)$. ο.ε.δ.

<u>1.20 Πόρισμα</u> Κάθε $2^{ος}$ αριθμήσιμος χώρος είναι $1^{ος}$ αριθμήσιμος.

<u>2. Στοιχειώδεις τοπολογικές έννοιες</u>

Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Στην προηγούμενη παράγραφο 1, τα σύνολα $X \setminus A$, $A \in \mathcal{T}$ τα ονομάσαμε <u>κλειστά</u>. Είναι ενδεχόμενο ένα σύνολο σ' έναν τοπολογικό χώρο να μην είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό. Παραδείγματος χάριν, το διάστημα $(0,1]$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό σύνολο στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}$.

<u>2.1 Ορισμός</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Το σύνολο

$$cl A = \overline{A} = \bigcap \{ F \subset X : A \subset F,\ F \text{ κλειστό} \}$$

λέγεται <u>κλειστότητα</u> ή <u>κλειστή θήκη του A</u> και είναι εξ ορισμού το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το A.

Τα σημεία του $\overline{A}$ λέγονται <u>οριακά σημεία</u> του A.

2.2. Λήμμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Τότε
$$\overline{A} = \{x \in X : V \cap A \neq \emptyset \text{ για κάθε } V \in \mathcal{U}(x)\}.$$

Απόδειξη: Έστω $x \in \overline{A}$. Αν υπάρχει μία περιοχή V του x με $V \cap A = \emptyset$, τότε υπάρχει ένα σύνολο B ανοιχτό με $x \in B \subset V$ και κατά συνέπεια $B \cap A = \emptyset$. Συνεπώς $A \subset X \setminus B$ και το $X \setminus B$ είναι κλειστό. Άρα $x \in \overline{A} \subset X \setminus B$ και $x \in B$, άτοπο.

Αντίστροφα· έστω $x \notin \overline{A}$, δηλ. $x \in X \setminus \overline{A} = X \setminus \left(\bigcap \{F \subset X : F \text{ κλειστό και } A \subset F\}\right)$
$$= \bigcup \{X \setminus F : F \text{ κλειστό και } A \subset F\}.$$
Τότε το $X \setminus \overline{A}$ είναι μία ανοιχτή περιοχή του x και
$$(X \setminus \overline{A}) \cap A \subset (X \setminus A) \cap A = \emptyset.$$
Άρα το x δεν ανήκει στο δεξιό σύνολο στην ισότητα του Λήμματος. ο.ε.δ.

2.3. Παραδείγματα

(α) Στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}$ έχουμε:
$$\overline{(0,1]} = [0,1], \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}, \quad \overline{(0,1] \cup \{2\}} = [0,1] \cup \{2\}$$
και $\overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

(β) Στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}^2$, αν
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x} \text{ όπου } 0 < x \leq 1\}$ τότε $\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$

(γ) Στον χώρο Sierpinski $X = \{0,1\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$ έχουμε: $\overline{\{0\}} = X$, $\overline{\{1\}} = \{1\}$.

2.4. Πρόταση. Για κάθε σύνολο A σ'έναν τοπολογικό χώρο X ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $A \subset \overline{A}$

(β) το A είναι κλειστό τότε και μόνον τότε όταν $A = \overline{A}$

(γ) το $\overline{A}$ είναι κλειστό.

<u>Απόδειξη:</u> Τα (α), (γ) είναι προφανή εξ ορισμού. Όσον αφορά το (β) είναι προφανές ότι αν $A=\overline{A}$ τότε το A είναι κλειστό. Αντίστροφα αν το A είναι κλειστό, τότε το $\overline{A}$ είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το A, δηλ. $A=\overline{A}$.

<u>2.5 Πρόταση</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subset X$. Τότε

(α) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ και

(β) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

<u>Απόδειξη</u> (α) Αφού $A \subset B \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ εξ ορισμού του $\overline{A}$.

(β) Το $\overline{A \cup B}$ είναι κλειστό σύνολο και περιέχει και το A και το B. Άρα $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Όμως και το $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό, ως πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων και περιέχει το $A \cup B$. Άρα $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ από τον ορισμό του $\overline{A \cup B}$. Τελικά $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

<u>2.6. Παρατήρηση:</u> Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε τώρα ότι

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_k}$$

Γενικά όμως δεν ισχύει $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ όταν το I είναι άπειρο.

Για παράδειγμα, στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}$ αν $A_n = [0, 1-\frac{1}{n}]$ $n \in \mathbb{N}$ τότε $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \overline{[0,1)} = [0,1]$ ενώ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1-\frac{1}{n}] = [0,1)$.

Γενικά όμως ισχύει $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$, αφού το $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ είναι κλειστό και περιέχει κάθε A_i, $i \in I$.

<u>2.7. Ορισμός:</u> Ένα υποσύνολο D ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται <u>πυκνό στο X</u>, αν $\overline{D} = X$.

2.8. Παραδείγματα

(α) Το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}$, όπως και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (οι άρρητοι)

(β) Σ' έναν διακριτό χώρο X το μοναδικό πυκνό σύνολο είναι το X.

(γ) Το $\mathbb{Q}^n$ είναι πυκνό στον ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$.

(δ) Το $\{0\}$ είναι πυκνό στον χώρο Sierpinski $\{0,1\}$.

2.9. Ορισμός Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Το σύνολο

$$\operatorname{int} A = A^{\circ} = \bigcup \{ B \subset X : \ B \subset A \text{ και } B \text{ ανοιχτό} \}$$

λέγεται εσωτερικό του A και είναι το μέγιστο ανοιχτό σύνολο που περιέχεται στο A. Τα σημεία του A° λέγονται εσωτερικά σημεία του A.

2.10. Λήμμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Τότε

$$A^{\circ} = \{ x \in X : \ A \in \mathcal{U}(x) \}$$

Απόδειξη Αν $x \in A^{\circ}$, τότε $A^{\circ} \in \mathcal{U}(x)$. Αφού είναι ανοιχτό και $A^{\circ} \subset A$, $A \in \mathcal{U}(x)$. Αντίστροφα· αν $A \in \mathcal{U}(x)$, υπάρχει ένα ανοιχτό B ώστε $x \in B \subset A$. Εξ ορισμού τότε $x \in B \subset A^{\circ}$.

2.11. Παραδείγματα.

(α) Στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$(0,1]^{\circ} = (0,1), \quad \mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset \quad \mathbb{Z}^{\circ} = \emptyset \quad \left((0,1] \cup \{2\} \right)^{\circ} = (0,1)$$

και $\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}^{\circ} = \emptyset$

(β) Στον χώρο Sierpinski έχουμε $\{0\}^{\circ} = \{0\}$ και $\{1\}^{\circ} = \emptyset$.

2.12 Πρόταση Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Τότε

(α) $A^{\circ} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ για κάθε $A \subset X$.

(β) Το $A \subset X$ είναι ανοιχτό τότε και μόνο τότε όταν $A = A^{\circ}$

(γ) Αν $A \subset B$. τότε $A^\circ \subset B^\circ$

(δ) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ για κάθε $A, B \subset X$

Απόδειξη (α) Ένα ανοιχτό σύνολο B περιέχεται στο A τότε και μόνο τότε όταν το $F = X \setminus B$ είναι κλειστό και περιέχει το $X \setminus A$. Άρα.

$$A^\circ = \bigcup \{X \setminus F : F \text{ κλειστό και } X \setminus A \subset F\}$$
$$= X \setminus \bigcap \{F : F \text{ κλειστό και } X \setminus A \subset F\}$$
$$= X \setminus \overline{(X \setminus A)}$$

(β) Το A είναι ανοιχτό τότε και μόνο τότε όταν το $X \setminus A$ είναι κλειστό που είναι ισοδύναμο σύμφωνα με την πρόταση 2.4(β) με $X \setminus A = \overline{X \setminus A}$, συνεπώς $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)} = A$. Το (γ) είναι προφανές.

(δ) Από το (γ) έχουμε $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ και το $A^\circ \cap B^\circ$ είναι ανοιχτό ως πεπερασμένη τομή ανοιχτών συνόλων και περιέχεται στο $A \cap B$. Άρα $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$, από τον ορισμό του $(A \cap B)^\circ$. Τελικά $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

2.13 Παρατήρηση Γενικά δεν ισχύει η ισότητα $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$. Για παράδειγμα, στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}$ έχουμε $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$ και $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Άρα

$$\mathbb{R} = (\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))^\circ \neq \mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset.$$

Το ίδιο παράδειγμα ότι δεν ισχύει η ισότητα $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2.14. Πρόταση Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $D \subset X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(α) Το D είναι πυκνό στο X

(β) Αν $F \subset X$ είναι ένα κλειστό σύνολο και $D \subset F$ τότε $F = X$

(γ) Κάθε ανοιχτό μη κενό σύνολο τέμνει το D

(δ) $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$.

Απόδειξη: (α) ⇒ (β) $D \subset F \Rightarrow X = \overline{D} \subset \overline{F} = F$. Άρα $F = X$.

(β) ⇒ (γ) Αν $A \subset X$ ανοιχτό και $D \cap A = \emptyset$ τότε $D \subset X \setminus A$ και το $X \setminus A$ είναι κλειστό. Από υπόθεση, $X \setminus A = X \Leftrightarrow A = \emptyset$, αφού $A \subset X$.

(γ) ⇒ (δ) Έστω ότι $(X \setminus D)^\circ \neq \emptyset$. Τότε το $(X \setminus D)^\circ$ είναι ανοιχτό, μη κενό και περιέχεται στο $X \setminus D$. Από υπόθεση

$$\emptyset \neq D \cap (X \setminus D)^\circ \subseteq D \cap (X \setminus D) = \emptyset \quad \text{αντίφαση.}$$

(δ) ⇒ (α) $\emptyset = (X \setminus D)^\circ = X \setminus \overline{X \setminus (X \setminus D)} = X \setminus \overline{D}$. Άρα $X = \overline{D}$.

2.15 Ορισμός Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Το σύνολο

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

λέγεται σύνορο του A και είναι βέβαια κλειστό σύνολο.

2.16. Παραδείγματα.

(α) Στην ευκλείδια τοπολογία του $\mathbb{R}$ έχουμε:

$\partial(0,1] = \{0,1\}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ $\partial\left((0,1] \cup \{2\}\right) = \{0,1,2\}$

και $\partial\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

(β) Στον χώρο Sierpinski $\partial\{0\} = \{1\}$ και $\partial\{1\} = \{1\}$

(γ) Στον ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$ έχουμε $\partial S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_2(x,0) = 1\}$.

2.17. Πρόταση Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Τότε

(α) $\partial A = \partial(X \setminus A)$

(β) $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$

(γ) $\partial A \cap A^\circ = \emptyset$

(δ) $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$

(ε) $X = A^\circ \cup \partial A \cup (X \setminus A)^\circ$ και η ένωση είναι ξένη.

Απόδειξη: Το (α) είναι προφανές. Για το (β) έχουμε

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \cap \left(X \setminus (X \setminus \overline{(X \setminus A)})\right) = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ$$

Το (γ) είναι προφανές όπως και το (δ). Για το (ε) έχουμε
$X\setminus\overline{A} = X\setminus\overline{(X\setminus(X\setminus A))} = (X\setminus A)^{\circ}$. Άρα $X = \overline{A}\cup(X\setminus\overline{A}) =$
$= A^{\circ}\cup\partial A\cup(X\setminus A)^{\circ}$.

3. Συνεχείς συναρτήσεις

3.1. Ορισμός Έστω $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ δύο τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f:(X,\mathcal{T})\longrightarrow(Y,\mathcal{S})$ λέγεται συνεχής αν $f^{-1}(\mathcal{S})\subset\mathcal{T}$, δηλαδή το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X για κάθε ανοιχτό σύνολο $A\subset Y$.

3.2. Πρόταση Έστω $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X\to Y$ μία συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(α) Η f είναι συνεχής

(β) Το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X για κάθε κλειστό σύνολο $F\subset Y$.

(γ) Αν $\mathcal{C}$ είναι μία υποβάση (ή βάση) της $\mathcal{S}$, το $f^{-1}(C)$ είναι ανοιχτό στον X για κάθε $C\in\mathcal{C}$.

(δ) Για κάθε $x\in X$ και $W\in\mathcal{U}(f(x))$ υπάρχει $V\in\mathcal{U}(x)$: $f(V)\subset W$

(ε) $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ για κάθε $A\subset X$

(στ) $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$ για κάθε $B\subset Y$.

Απόδειξη: Η ισοδυναμία των (α), (β) είναι προφανής

(α)$\Leftrightarrow$(γ) Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο, κάθε ανοιχτό σύνολο $B\subset Y$ είναι $B=\bigcup\{C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_k} : (i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\cdots\times I_k\}$

Άρα το $f^{-1}(B)=\bigcup\{f^{-1}(C_{i_1})\cap\cdots\cap f^{-1}(C_{i_k}) : (i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\cdots\times I_k\}$ είναι ανοιχτό.

(α) ⇒ (δ). Υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $A \subset Y$ με $f(x) \in A \subset W$. Αρκεί τώρα να θέσουμε $V = f^{-1}(A)$ που είναι ανοιχτή περιοχή του x.

(δ) ⇒ (ε) Έστω $x \in \bar{A}$ και $W \in \mathcal{U}(f(x))$. Τότε υπάρχει $V \in \mathcal{U}(x)$ ώστε $f(V) \subset W$. Όμως αφού $x \in \bar{A}$ έχουμε $V \cap A \neq \emptyset$. Άρα $\emptyset \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset W \cap f(A)$. Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε $W \in \mathcal{U}(f(x))$ τέμνει το $f(A)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2 αυτό σημαίνει ότι $f(x) \in \overline{f(A)}$ για κάθε $x \in \bar{A}$. ο.ε.δ.

(ε) ⇒ (στ) Αν $A = f^{-1}(B)$, τότε απ' την υπόθεση έχουμε $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B \cap f(X)} \subset \bar{B}$. Άρα $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$

(στ) ⇒ (β) Αν το F είναι κλειστό στο Y, τότε $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\bar{F}) = f^{-1}(F)$ και συνεπώς το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό. ο.ε.δ.

3.3. Παραδείγματα.

(α) Έστω X ένας διακριτός χώρος και Y ένας οποιοσδήποτε τοπολογικός χώρος. Κάθε συνάρτηση $f: X \to Y$ είναι τότε συνεχής.

(β) Έστω X ένα σύνολο με δύο τοπολογίες $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$. Η $\mathcal{T}_1$ είναι λεπτότερη από την $\mathcal{T}_2$ τότε και μόνο τότε όταν η ταυτοτική απεικόνιση $id: (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ είναι συνεχής.

3.4. Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μια συνάρτηση. Η f λέγεται συνεχής στο σημείο $x \in X$ αν για κάθε $W \in \mathcal{U}(f(x))$ υπάρχει $V \in \mathcal{U}(x)$ τ.ω. $f(V) \subset W$.

3.5 Λήμμα. Μία συνάρτηση $f: X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων είναι συνεχής τότε και μόνο τότε, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$.

Απόδειξη: Άμεση από την πρόταση 3.2.

3.6. Πρόταση Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη: Αν $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και οι X, Y, Z είναι τοπολογικοί χώροι και $A \subset Z$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, τότε το $g^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό στο Y αφού η g είναι συνεχής και το $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ είναι ανοιχτό στον X αφού η f είναι συνεχής.

Είναι ενδεχόμενο μία συνεχής συνάρτηση να μην απεικονίζει ανοιχτά σύνολα του πεδίου ορισμού της σε ανοιχτά σύνολα του πεδίου τιμών της ούτε κλειστά σε κλειστά. Για παράδειγμα αν $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ είναι δύο διαφορετικές τοπολογίες σ' ένα σύνολο X και η $\mathcal{T}_1$ είναι λεπτότερη της $\mathcal{T}_2$, δηλ $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ τότε η ταυτοτική απεικόνιση $id: (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ είναι συνεχής αλλά υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $A \in \mathcal{T}_1$ ώστε $id(A) \notin \mathcal{T}_2$, και συνεπώς το $id(A)$ δεν είναι ανοιχτό. Ούτε το $X \setminus A = X \setminus id(A)$ είναι $\mathcal{T}_2$ κλειστό ενώ το $X \setminus A$ είναι $\mathcal{T}_1$ κλειστό.

3.7. Ορισμός: Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται <u>ανοιχτή</u> (<u>κλειστή</u>) αν απεικονίζει ανοιχτά (κλειστά) υποσύνολα του X σε ανοιχτά (κλειστά) υποσύνολα του Y.

3.8 Πρόταση. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(α) Η f είναι ανοιχτή.

(β) $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$ για κάθε $A \subset X$

(γ) Η f απεικονίζει τα στοιχεία μιας βάσης του X σε ανοιχτά σύνολα στο Y.

(δ) Για κάθε $x \in X$ και $V \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει $W \in \mathcal{U}(f(x))$ τ.ω $f(x) \in W \subset f(V)$.

Απόδειξη: (α) ⇒ (β) Αφου $A^{\circ} \subset A$ εχουμε $f(A^{\circ}) \subset f(A)$ και επειδή η f είναι ανοιχτή το $f(A^{\circ})$ είναι ανοιχτό. Άρα $f(A^{\circ}) \subseteq (f(A))^{\circ}$

(β) ⇒ (γ) Έστω $\mathcal{B}$ μία βάση του X και $B \in \mathcal{B}$. Το B είναι ανοιχτο και συνεπώς $B = B^{\circ}$. Άρα $f(B) = f(B^{\circ}) \subset (f(B))^{\circ} \subset f(B)$ Συνεπώς $f(B) = (f(B))^{\circ}$ που σημαίνει ότι το $f(B)$ είναι ανοιχτό.

(γ) ⇒ (δ) Υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο B μέλος κάποιας βάσης ώστε $x \in B \subset V$. Αφού το $f(B)$ είναι ανοιχτό, αρκεί να θεωρήσουμε $W = f(B)$.

(δ) ⇒ (α). Έστω $A \subset X$ ένα ανοιχτό σύνολο. Για κάθε $x \in A$ έχουμε τότε $A \in \mathcal{U}(x)$ και απ'την υπόθεση υπάρχει $W_x \in \mathcal{U}(f(x))$ ώστε $W_x \subset f(A)$. Άρα το $f(A)$ είναι ανοιχτό αφού

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} W_x .$$

3.9. Πρόταση. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι κλειστή τότε και μόνο τότε όταν $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ για κάθε $A \subset X$.

Απόδειξη. Αν η f είναι κλειστή τότε το $f(\overline{A})$ είναι κλειστό και περιέχει το $f(A)$. Άρα $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. Αντίστροφα· αν το $F \subset X$ είναι κλειστό τότε $f(F) \subset \overline{f(F)} \subset f(\overline{F}) = f(F)$ Άρα $f(F) = \overline{f(F)}$ που σημαίνει ότι το $f(F)$ είναι κλειστό.

<u>3.10 Παραδείγματα</u>. Η πρώτη προβολή $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = x$ είναι ανοιχτή συνάρτηση, όπου στα $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ θεωρούμε τις αντίστοιχες ευκλείδιες τοπολογίες, αφού κάθε ανοιχτή μπάλα στο $\mathbb{R}^2$ απεικονίζεται σ' ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$.
Η π δεν είναι όμως κλειστή αφού $\pi(\{(x,y) : xy=1, x>0\}) = (0,+\infty)$.

<u>3.11 Ορισμός</u>. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται ομοιομορφισμός αν είναι 1-1, επί, συνεχής και η $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής.
Δύο χώροι X, Y λέγονται <u>ομοιομορφικοί</u>, και συμβολίζουμε $X \approx Y$, αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f : X \to Y$

<u>3.12 Παραδείγματα</u>
(α) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ είναι ομοιομορφισμός, αφού η αντίστροφή της έχει τύπο $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$ και είναι συνεχής.
Γενικότερα η $f : \mathbb{R}^n \to S(0,1)$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{1+d(0,x)}$ είναι ομοιομορφισμός.
(β) Η συνάρτηση $f : [0,1) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ με τύπο
$f(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t = e^{2\pi i t}$, είναι 1-1, επί, συνεχής αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός αφού η f^{-1} δεν είναι συνεχής γιατί το $(f^{-1})^{-1}([0,\frac{1}{2})) = f([0,\frac{1}{2}))$ δεν είναι ανοιχτό στο S^1.
(Σημείωση: στο $[0,1)$ και στο S^1 θεωρούμε τις τοπολογίες που ορίζουν οι αντίστοιχες περιορισμένες ευκλείδιες μετρικές)
(γ) Το $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ και το τετράγωνο $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| = 1\}$ εφοδιασμένα με τις τοπολογίες που

ορίζει η ευκλείδια μετρική είναι ομοιομορφικοί χώροι
Ένας ομοιομορφισμός είναι η συνάρτηση $f: S^1 \longrightarrow X$ με τύπο

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|} \right).$$

<u>3.13 Πρόταση.</u> Έστω X, Y δύο χώροι και $f: X \longrightarrow Y$ μία 1-1 και επί συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

(α) Η f είναι ομοιομορφισμός

(β) Η f είναι συνεχής και ανοιχτή

(γ) Η f είναι συνεχής και κλειστή

(δ) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ για κάθε $A \in X$.

<u>Απόδειξη</u> Είναι προφανής από τα προηγούμενα.

Από τον ορισμό τους οι συνεχείς συναρτήσεις είναι εκείνες οι απεικονίσεις που μεταφέρουν την τοπολογική δομή. Δηλαδή είναι οι μορφισμοί της κατηγορίας με αντικείμενο τους τοπολογικούς χώρους. Οι ομοιομορφισμοί μεταφέρουν αμφίδρομα την τοπολογική δομή κατά τρόπο 1-1 και επί και συνεπώς είναι οι ισομορφισμοί της κατηγορίας. Έτσι στα πλαίσια της τοπολογίας δύο ομοιομορφικοί χώροι θεωρούμε ότι ταυτίζονται. Η σχέση της ομοιομορφίας είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των τοπολογικών χώρων. Το γενικό πρόβλημα της τοπολογίας είναι η κατάταξη όλων των τοπολογικών χώρων modulo ομοιομορφία. Το πρόβλημα αυτό αποδείχθηκε ότι δεν μπορεί να λυθεί αλγοριθμικά. Έτσι η προσοχή έχει επικεντρωθεί στο πρόβλημα του διαχωρισμού των μη-ομοιομορφικών χώρων βρίσκοντας κατάλληλα <u>τοπολογικά αναλλοίωτα</u>. Μια <u>τοπολογικά αναλλοίωτη ιδιότητα</u> είναι μία ιδιότητα που αν την έχει ένας τοπολογικός χώρος X, τότε την έχουν και όλοι οι ομοιομορφικοί προς αυτόν. Τετριμένα παραδείγματα είναι ο πληθάριθμος του X και ο πληθάριθμος της τοπολογίας του. Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε μερικά τέτοια αναλλοίωτα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.

1) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την τοπολογία με υποβάση $\mathcal{C}=\{(-\infty,b],(a,+\infty): a,b\in\mathbb{R}\}$

(α) Δείξτε ότι σ' αυτή την τοπολογία τα σύνολα $(a,b]$, $(a,+\infty)$ και $(-\infty,b]$ είναι ανοιχτά και κλειστά.

(β) Δείξτε ότι το $\mathbb{R}$ μ' αυτή την τοπολογία είναι $1^{ος}$ αριθμήσιμος χώρος αλλά δεν είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος.

2) Στο σύνολο $C[0,1]=\{f/\ f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής$\}$ ορίζονται οι μετρικές $d(f,g)=\sup\{\,|f(t)-g(t)|: t\in[0,1]\}$ και $\rho(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\,dt$

Δείξτε ότι η τοπολογία $\mathcal{T}_d$ είναι γνήσια λεπτότερη από την $\mathcal{T}_\rho$.

3) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $A\subset X$. Αποδείξτε ότι $\overline{A}=\{x\in X:$ υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ με $x_n\to x\}$.

4) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A\subset X$ ένα κλειστό σύνολο. Δείξτε ότι $A^\circ=(\overline{A^\circ})^\circ$.

5) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A\subset X$. Δείξτε ότι το A είναι ανοιχτό τότε και μόνον τότε όταν $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$ για κάθε $B\subset X$.

6) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $\{A_i: i\in I\}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του. Δείξτε ότι αν το $\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$ είναι κλειστό, τότε $\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$.

7) Έστω A,B δύο πυκνά υποσύνολα του χώρου X. Αν το A είναι και ανοιχτό, δείξτε ότι το $A\cap B$ είναι πυκνό στον X.

8) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $D\subset X$. Δείξτε ότι το D είναι πυκνό στον X τότε και μόνο τότε όταν $\overline{D\cap A}=\overline{A}$ για κάθε ανοιχτό σύνολο $A\subset X$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την άσκηση 5)

9) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{C}$ μια υποβάση του. Έστω $D\subset X$ ώστε $D\cap C\neq\emptyset$ για κάθε $C\in\mathcal{C}$. Είναι το D πυκνό στον X;

10) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Δείξτε ότι το A είναι ανοιχτό και κλειστό, τότε και μόνο τότε όταν $\partial A = \emptyset$.

11) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, $A \subset X$ και $\mathcal{B}(x)$ μία βάση περιοχών του $x \in X$. Δείξτε ότι $\overline{A} = \{x \in X : B \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(x)\}$.

12) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Δείξτε ότι το $A \subset X$ είναι ανοιχτό τότε και μόνο τότε όταν $A \cap \partial A = \emptyset$.

13) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, πεπερασμένο σύνολο $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [0,1]$ και $\varepsilon > 0$ θέτουμε

$$B(t_1, \dots, t_n, \varepsilon)(f) = \{ g \in C[0,1] : |g(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon ,\ 1 \leq i \leq n \}$$

(α) Δείξτε ότι τα σύνολα $B(t_1, \dots, t_n, \varepsilon)(f)$ όπου $f \in C[0,1]$, $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [0,1]$, $\varepsilon > 0$, αποτελούν τη βάση μιας τοπολογίας $\mathcal{L}$ στο $C[0,1]$.

(β) Δείξτε ότι η τοπολογία $\mathcal{T}_d$ της άσκησης 2 είναι λεπτότερη από την $\mathcal{L}$.

14) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subset X$ ώστε $\partial A \cap \partial B = \emptyset$. Δείξτε ότι $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

15) Για κάθε άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ δείξτε ότι $\sup A \in \overline{A}$ (ως προς την ευκλείδια τοπολογία)

16) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Δείξτε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ του A είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν το A είναι ανοιχτό και κλειστό.

17) Στο $C[0,1]$ θεωρούμε την τοπολογία $\mathcal{T}_d$ της άσκησης 2. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\phi, \psi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπους $\phi(f) = f(1)$ και $\psi(f) = \int_0^1 f$ είναι συνεχείς.

18) Έστω $p(x)$ ένα πολυώνυμο στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλειστή.

19) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $f: X \to \mathbb{R}$ μία φραγμένη, ανοιχτή συνάρτηση. Έστω $A \subset X$. Δείξτε ότι για κάθε $a \in A^{\circ}$ ισχύει

$$|f(a)| < \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$

20) Στο δισύνολο $\{0,1\}$ θεωρούμε την διακριτή τοπολογία. Δείξτε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathcal{X}: [0,1] \to \{0,1\}$ του διαστήματος $[0, \frac{1}{2}]$ είναι επί, ανοιχτή, κλειστή αλλά όχι συνεχής.

21) Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν $\partial f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\partial A)$ για κάθε σύνολο $A \subset X$.

22) Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία ανοιχτή και συνεχής συνάρτηση. Ισχύει τότε $f(A^{\circ}) = (f(A))^{\circ}$ για κάθε $A \subset X$;

23) Στο $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την ευκλείδια τοπολογία. Έστω D^n η ανοιχτή μπάλα με κέντρο το $0 \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα 1. Δείξτε ότι $\mathbb{R}^n \approx D^n$.

4. Υπόχωροι και χώροι γινόμενα

<u>4.1. Ορισμός</u> Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Το $\mathcal{T}_A = \{A \cap T : T \in \mathcal{T}\}$ είναι μία τοπολογία στο A που λέγεται <u>σχετική τοπολογία</u> του A και ο χώρος $(A, \mathcal{T}_A)$ <u>υπόχωρος</u> του $(X, \mathcal{T})$.

<u>4.2. Παραδείγματα</u>

(α) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$. Τότε η σχετική τοπολογία του A είναι αυτή που ορίζει ο περιορισμός $d/A \times A$ της μετρικής d στο A.

(β) Στην σχετική ευκλείδια τοπολογία του $A = (0,1] \cup \{2\}$ τα σύνολα $(\frac{1}{2}, 1]$, $\{2\}$ είναι ανοιχτά.

<u>4.3. Θεώρημα.</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Τότε

(α) Το $G \subset A$ είναι ανοιχτό στο $A \Leftrightarrow$ υπάρχει $H \in \mathcal{T}$ τ.ω $G = H \cap A$.

(β) Το $F \subset A$ είναι κλειστό στο $A \Leftrightarrow$ υπάρχει K κλειστό στο X τ.ω $F = K \cap A$

(γ) $cl_A B = (cl_X B) \cap A$ για κάθε $B \subset A$.

(δ) Αν $\mathcal{B}$ είναι μία βάση της τοπολογίας του X τότε η

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι βάση της σχετικής τοπολογίας του A.

(ε) Αν $\mathcal{B}(x)$ είναι μία βάση περιοχών του $x \in A$ στο X, τότε η

$\mathcal{B}_A(x) = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}(x)\}$ είναι βάση περιοχών του x στο A.

<u>Απόδειξη:</u> Το (α) είναι ο ορισμός. Για το (β) έχουμε το F κλειστό στο $A \Leftrightarrow$ το $A \setminus F$ ανοιχτό στο $A \Leftrightarrow$ υπάρχει H ανοιχτό στο X τ.ω $A \setminus F = H \cap A \Leftrightarrow F = A \cap (X \setminus H)$ και θέτουμε $K = X \setminus H$.

(γ). Από το (β), το $(cl_X B) \cap A$ είναι κλειστό στο A και περιέχει το B. Άρα $cl_A B \subset A \cap cl_X B$. Επίσης:

$$cl_A B = \bigcap \{ F \subset A : F \text{ κλειστό στο } A \text{ και } B \subset F \}$$
$$= \bigcap \{ K \cap A : K \text{ κλειστό στο } X \text{ και } B \subset K \cap A \}$$
$$= \bigcap \{ K : K \text{ κλειστό στο } X \text{ και } B \subset K \} \cap A = (cl_X B) \cap A.$$

(δ) Αν $G \subset A$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο στο A, τότε υπάρχει $H \subset X$ ανοιχτό στο X με $G = H \cap A$. Άρα υπάρχει $\{ B_i : i \in I \} \subset \mathcal{B}$. με $H = \bigcup_{i \in I} B_i$. Έχουμε λοιπόν $G = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$ ο.ε.δ.

(ε) Έστω V μία περιοχή του x στο A. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $H \subset X$ στο X με $x \in H \cap A \subset V$. Το H είναι περιοχή του x και συνεπώς υπάρχει $B \in \mathcal{B}(x)$ ώστε $x \in B \subset H$. Άρα $x \in B \cap A \subset H \cap A \subset V$ ο.ε.δ.

<u>4.4. Παρατήρηση.</u> Γενικά δεν ισχύει $int_A(B) = A \cap int_X B$ ούτε $\partial_A B = A \cap \partial_X B$ αλλά μόνο ότι $A \cap int_X B \subset int_A B$ και $\partial_A B \subset A \cap \partial_X B$. Για παράδειγμα, αν $X = \mathbb{R}^2$ με την ευκλείδια τοπολογία και $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ και $B = A$, τότε $int_A B = B$, ενώ $A \cap int_X B = A \cap \emptyset = \emptyset$ και $\partial_A B = \emptyset$ ενώ $A \cap \partial_X B = A \cap B = A$.

<u>4.5. Πρόταση.</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ ένας υπόχωρος. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$ όπου Y είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο περιορισμός $f/A : A \to Y$ είναι επίσης συνεχής συνάρτηση.

<u>Απόδειξη:</u> Για κάθε ανοιχτό σύνολο $B \subset Y$ το $f^{-1}(B)$ είναι ανοιχτό στο X και συνεπώς το $(f/A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$ είναι ανοιχτό στο A.

<u>4.6. Πρόταση</u> Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση: Τότε η $f : X \to f(X)$ είναι συνεχής.

Απόδειξη Για κάθε ανοιχτό σύνολο $B \subset Y$ έχουμε
$f^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(B)$ που είναι ανοιχτό

4.7. Παρατήρηση Αν A είναι ένας υπόχωρος του X και $f: X \to Y$ είναι μία συνάρτηση ώστε η $f/A : A \to Y$ να είναι συνεχής τότε η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής στα σημεία του A.
Για παράδειγμα, αν $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ και $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
τότε η $f/\mathbb{Q} = 0$ και είναι συνεχής, όμως η f δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$.

4.8. Ορισμός. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται εμφύτευση του X στον Y αν η $f: X \to f(X)$ είναι ομοιομορφισμός.

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο 3 για τους ομοιομορφισμούς στην περίπτωση που υπάρχει μία εμφύτευση $f: X \to Y$, ο X θεωρείται υπόχωρος του Y.

4.9. Παραδείγματα
(α) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x) = (0, x)$ είναι εμφύτευση όπως και η $f(x) = (e^x \cos x, e^x \sin x)$
(β) Η $f: [0,1) \to \mathbb{R}^2$ με $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ δεν είναι εμφύτευση.

Έστω $X_1, \dots, X_k$ πεπερασμένοι το πλήθος τοπολογικοί χώροι. Στο καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times \dots \times X_k$ ορίζεται τότε η τοπολογία με βάση $\mathcal{C} = \{ A_1 \times \dots \times A_k \cdot A_i \subset X_i$ ανοιχτό, $1 \leq i \leq k \}$.

Έστω τώρα μία οποιαδήποτε οικογένεια $\{X_i : i \in I\}$ τοπολογικών χώρων $(\neq \emptyset)$ και $\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \longrightarrow X_i$, $i \in I$ οι φυσικές προβολές. Τότε η οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{ \pi_i^{-1}(A_i) : A_i \subset X_i \text{ ανοιχτό } i \in I \}$$

είναι υποβάση για μία τοπολογία στο $\prod_{i \in I} X_i$ που λέγεται <u>τοπολογία γινόμενο</u> και ο $\prod_{i \in I} X_i$ εφοδιασμένος μ' αυτή την τοπολογία <u>χώρος γινόμενο</u> των X_i, $i \in I$. Απ' τον ορισμό μία βάση της τοπολογίας γινόμενο είναι η

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{i \in I} A_i : A_i \subset X_i \text{ ανοιχτό και } A_i = X_i \text{ για όλα τα } i \in I \text{ εκτός από πεπερασμένα στο πλήθος} \}$$

Στην περίπτωση που $I = \{1, 2, \dots, k\}$ τότε η τοπολογία γινόμενο ταυτίζεται μ' αυτή που ορίσαμε προηγουμένως.

<u>4.10. Παραδείγματα:</u>

(a) Ο χώρος γινόμενο $[1,2] \times S^1$ είναι ομοιομορφικός με το $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \}$, όπου σ' όλους τους χώρους που παρουσιάζονται θεωρούμε την ευκλείδια τοπολογία. Ένας ομοιομορφισμός είναι η συνάρτηση

$$f : [1,2] \times S^1 \longrightarrow \Delta \text{ με τύπο } f(t,z) = t \cdot z.$$

(β) Αν το I είναι άπειρο και $A_i \subset X_i$, $i \in I$ ανοιχτά σύνολα με

$A_i \neq X_i$ για άπειρο πλήθος $i\in I$, τότε το σύνολο $\prod_{i\in I} A_i$ δεν είναι ανοιχτό, γιατί αν ήταν θα περιείχε ένα στοιχείο της βάσης $\mathcal{B}$ που σημαίνει ότι $X_i \subset A_i$ για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος $i\in I$, δηλαδή $A_i\neq X_i$ για πεπερασμένα το πλήθος $i\in I$.

4.11. Πρόταση Έστω X_i, $i\in I$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων και $\mathcal{B}_i$ μία βάση της τοπολογίας του X_i για κάθε $i\in I$. Τότε το

$$\mathcal{B}' = \Big\{ \prod_{i\in I} B_i \;:\; B_i\in \mathcal{B}_i \text{ και } B_i = X_i \text{ για όλα τα } i\in I \text{ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος} \Big\}$$

είναι βάση της τοπολογίας γινόμενο.

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\prod_{i\in I} A_i \in \mathcal{B}$ και $x\in \prod_{i\in I} A_i$ υπάρχει $\prod_{i\in I} B_i \in \mathcal{B}'$ ώστε $x\in \prod_{i\in I} B_i \subset \prod_{i\in I} A_i$.

Πράγματι· έστω ότι $\{i_1,\dots,i_k\} = \{i\in I : A_i\neq X_i\}$. Τότε υπάρχουν $B_{i_1}\in\mathcal{B}_{i_1}, \dots, B_{i_k}\in \mathcal{B}_{i_k}$ με $\pi_{i_1}(x)\in B_{i_1}\subset A_{i_1}, \dots, \pi_{i_k}(x)\in B_{i_k}\subset A_{i_k}$. Συνεπώς $x\in \prod_{i\in I} B_i \subset \prod_{i\in I} A_i$. ο.ε.δ.

4.12. Πρόταση. Έστω X_i, $i\in I$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων

(α) Για κάθε $i\in I$, η απεικόνιση i-προβολή $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής και ανοιχτή. Η τοπολογία γινόμενο είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει τις π_i, $i\in I$ συνεχείς.

(β) Για κάθε τοπολογικό χώρο X. μία συνάρτηση $f: X\longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν οι $\pi_i\circ f : X\to X_i$ $i\in I$ είναι συνεχείς. Οι $\pi_i\circ f$, $i\in I$ λέγονται <u>συντεταγμένες</u> της f.

Απόδειξη. (α) Από τον ορισμό της τοπολογίας γινόμενο, για κάθε ανοιχτό σύνολο $A_i\subset X_i$, το $\pi_i^{-1}(A_i)$ είναι ανοιχτό στον χώρο γινόμενο. Άρα η π_i είναι συνεχής. Έστω τώρα $A \subset \prod_{i\in I} X_i$ ένα ανοιχτό σύνολο, που ανήκει στη βάση $\mathcal{B}$.

Τότε $A = \prod_{j\in I} A_j$ όπου το $A_j \subset X_j$ είναι ανοιχτό και $A_j \neq X_j$ για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος $j \in I$.

Άρα $\pi_i(A) = A_i$ και σύμφωνα με την πρόταση 3.8 η π_i είναι ανοιχτή. Έστω τώρα $\mathcal{T}'$ μία τοπολογία στο $\prod_{i\in I} X_i$ ώστε οι $\pi_i : (\prod X_i, \mathcal{T}') \to X_i$ $i \in I$ να είναι όλες συνεχείς. Τότε $\pi_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}'$ για κάθε ανοιχτό σύνολο $A_i \subset X_i$ και κάθε $i \in I$. Άρα η $\mathcal{T}'$ περιέχει την υποβάση $\mathcal{C}$ της τοπολογίας γινόμενο και συνεπώς και την ίδια την τοπολογία γινόμενο.

(β) Αν η f είναι συνεχής τοτε η $\pi_i \circ f$, $i \in I$ είναι συνεχής.

Αντίστροφα· Έστω οτι κάθε $\pi_i \circ f$, $i \in I$ είναι συνεχής και $\pi_i^{-1}(A_i) = \prod_{j\in I} A_j \in \mathcal{C}$. Τότε $f^{-1}(\prod_{j\in I} A_j) = f^{-1} \circ \pi_i^{-1}(A_i) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A_i)$ που είναι ανοιχτό στο X λόγω της συνέχειας της $\pi_i \circ f$. Άρα η f αντιστρέφει τα υποβασικά σε ανοιχτά. Συνεπώς είναι συνεχής.

4.13 Παράδειγμα. Από τον ορισμό της τοπολογίας γινόμενο είναι άμεσο ότι το πεπερασμένο γινόμενο διακριτών τοπολογικών χώρων είναι επίσης διακριτός χώρος. Αυτό όμως δεν ισχύει για άπειρο γινόμενο όπου η κατάσταση είναι ριζικά διαφορετική. Μάλιστα η κατασκευή μη-διακριτών χώρων από διακριτους χρησιμοποιώντας καρτεσιανά γινόμενα είναι αρκετά συνηθισμένη διαδικασία. Σαν ένα παράδειγμα θα περιγράψουμε το σύνολο του Cantor C ως ένα καρτεσιανό γινόμενο διακριτών χώρων.

Όπως είναι γνωστό, το C αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς στο διάστημα $[0,1]$ που στην τριαδική τους παράσταση δεν εμφανίζεται ο αριθμός 1, δηλαδή

$$C = \left\{ x \in [0,1] : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \ \text{με } a_n = 0 \text{ ή } 2 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το χώρο $X_n = \{0,2\}$ με την διακριτή τοπολογία. Το καρτεσιανό γινόμενο $\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ αποτελείται απ' όλες τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $a_n = 0$ ή 2 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow C$ με τύπο

$$f\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

είναι ομοιομορφισμός. Η f είναι προφανώς 1-1 και επί, αφού η τριαδική παράσταση κάθε στοιχείου του C είναι μοναδική. Θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι η f είναι συνεχής. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοιχτό σύνολο $A \subset \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ που περιέχει το $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε για κάθε $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$

$$\left| f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) - f((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \right| < \varepsilon$$

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} < \varepsilon$. Το σύνολο $A = \{a_1\} \times \cdots \times \{a_{n_0}\} \times \prod_{n=n_0+1}^{\infty} X_n$ είναι ανοιχτή περιοχή του $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και αν $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, τότε $a_n = b_n$ για $n = 1, \ldots, n_0$ οπότε

$$\left| f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) - f((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} < \varepsilon.$$

Θα δείξουμε τέλος ότι η $f^{-1} : C \longrightarrow \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής.

Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε σύμφωνα με την πρόταση 4.12(β) ότι οι συντελεστές a_n, $n\in\mathbb{N}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του $x=\sum_1^\infty \frac{a_n}{3^n}$.
Έστω $N\in\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $a_N: C\to\{0,2\}$ είναι συνεχής. Ισχυρισμός: αν $\delta=\frac{1}{3^{N+1}}$ τότε για $x,y\in C$ με

$|x-y|<\delta$ ισχύει $a_n(x)=a_n(y)$ για κάθε $n=1,2,\dots,N$.
(και συνεπώς $|a_N(x)-a_N(y)|=0<\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon>0$).
Πράγματι· ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $n_0: 1\le n_0\le N$ που

$a_{n_0}(x)\neq a_{n_0}(y)$ και $a_n(x)=a_n(y)$ για $1\le n<n_0$.
Θέτουμε $\mathbb{N}_+=\{n\in\mathbb{N}: a_n(x)-a_n(y)=2\}$, $\mathbb{N}_-=\{n\in\mathbb{N}: a_n(x)-a_n(y)=-2\}$
οπότε για $x,y\in C$ με $|x-y|<\delta$ έχουμε:

$$|x-y|=\left|\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n(x)-a_n(y)}{3^n}\right|=\left|\sum_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{2}{3^n}-\sum_{n\in\mathbb{N}_-}\frac{2}{3^n}\right|<\delta=\frac{1}{3^{N+1}}.$$

όμως από την επιλογή του n_0, τα $1,2,\dots,n_0-1\notin\mathbb{N}_+\cup\mathbb{N}_-$ ενώ $n_0\in\mathbb{N}_+\cup\mathbb{N}_-$. Τότε όμως. (αν π.χ. $n_0\in\mathbb{N}_+$)

$$\frac{2}{3^{n_0}}\le\sum_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{2}{3^n}<\frac{1}{3^{N+1}}+\sum_{n\in\mathbb{N}_-}\frac{2}{3^n}\le\frac{1}{3^{N+1}}+\sum_{n=n_0+1}^\infty\frac{2}{3^n}=$$

$$=\frac{1}{3^{N+1}}+\frac{1}{3^{n_0}}<\frac{2}{3^{n_0}}\quad \text{άτοπο.}$$

ο.ε.δ.

Τελειώνουμε με την παρατήρηση ότι μέσα σ' ένα χώρο γινόμενο $\prod_{i\in I}X_i$ κάθε επιμέρους χώρος X_i μπορεί να εμφυτευθεί ως υπόχωρος. Πράγματι· Έστω $a_i\in X_i$ για κάθε $i\in I$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f_i: X_i\longrightarrow\prod_{i\in I}X_i$ με τύπο $f_i(x)=(x_\kappa)_{\kappa\in I}$ όπου $x_\kappa=a_\kappa$ για $\kappa\neq i$ και $x_i=x$. Τότε η f είναι εμφύτευση.

5. Χώρος πηλίκο

Η έννοια του χώρου πηλίκου είναι μεγάλης σημασίας για την τοπολογία μιας και είναι η πηγή πολλών μεθόδων για την παραγωγή νέων χώρων από παλιούς.

5.1. Ορισμός Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, Y ένα μη-κενό σύνολο και $f: X\to Y$ μία συνάρτηση "επί". Η οικογένεια

$$\mathcal{T}_f = \{ B\subset Y : f^{-1}(B)\in\mathcal{T} \}$$

είναι μία τοπολογία στο Y που λέγεται τοπολογία πηλίκο και είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο Y ως προς την οποία η f είναι συνεχής.

5.2. Ορισμός Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο X. Το σύνολο $X/\sim$ των κλάσεων της $\sim$ γίνεται τοπολογικός χώρος αν εφοδιαστεί με την τοπολογία πηλίκο που ορίζει η φυσική απεικόνιση $\pi : X\longrightarrow X/\sim$ με τύπο $\pi(x)=[x]$ (όπου με $[x]$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του x) και λέγεται χώρος πηλίκο στον X (ως προς την $\sim$)

5.3 Πρόταση Έστω $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X\to Y$ μία συνεχής και "επί" συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathcal{S}=\mathcal{T}_f$

(β) για κάθε χώρο Z και συνάρτηση $g: Y\to Z$, η g είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν η $g\circ f$ είναι συνεχής

Απόδειξη: (α)$\Rightarrow$(β) Αν η g είναι συνεχής τότε προφανώς και η $g\circ f$ είναι. Έστω ότι η $g\circ f$ είναι συνεχής. Τότε για κάθε ανοιχτό

σύνολο $\Gamma \subset Z$, το $(g\circ f)^{-1}(\Gamma)$ είναι ανοιχτό στο X. Όμως $(g\circ f)^{-1}(\Gamma) = f^{-1}(g^{-1}(\Gamma)) \in \mathcal{T}$ σημαίνει ότι $g^{-1}(\Gamma) \in \mathcal{T}_f = \mathcal{S}$.
Άρα η g είναι συνεχής.
(β) ⇒ (α) Έστω $Z = (Y, \mathcal{T}_f)$ και $g: id: Y \to Z$. Λόγω της υπόθεσης $g\circ f = f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_f) = Z$ που είναι συνεχής. Επίσης η σύνδεση των $(X,\mathcal{T}) \xrightarrow{f} Z = (Y,\mathcal{T}_f) \xrightarrow{g^{-1}} (Y,\mathcal{S})$ είναι η $f:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{S})$ που είναι συνεχής. Άρα από το (α) ⇒ (β) η g^{-1} είναι συνεχής. Δείξαμε λοιπόν ότι η $id:(Y,\mathcal{S}) \to (Y,\mathcal{T}_f)$ είναι ομοιομορφισμός. Άρα $\mathcal{S} = \mathcal{T}_f$.

5.4. Παραδείγματα

(α) Έστω X, Y δύο χώροι και $f: X \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση "επί" του Y. Αν η f είναι ανοιχτή (ή κλειστή) τότε η τοπολογία του Y ταυτίζεται με την τοπολογία πηλίκο (ως προς f). Πράγματι: αν $\mathcal{S}$ είναι η τοπολογία του Y τότε $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_f$, αφού η $\mathcal{T}_f$ είναι η μέγιστη τοπολογία στο Y που κάνει την f συνεχή. Αν τώρα $B \in \mathcal{T}_f$ τότε το $f^{-1}(B) \subset X$ είναι ανοιχτό και αφού η f είναι ανοιχτή το $B = f(f^{-1}(B)) \in \mathcal{S}$. Άρα και $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{S}$, δηλαδή $\mathcal{T}_f = \mathcal{S}$.
Όμοια, αν η f είναι κλειστή και $B \in \mathcal{T}_f$ τότε το $X \setminus f^{-1}(B) \subset X$ είναι κλειστό και συνεπώς το $Y \setminus B = f(f^{-1}(Y \setminus B)) = f(X \setminus f^{-1}(B))$ είναι κλειστό στο $(Y,\mathcal{S})$. Άρα $B \in \mathcal{S}$. ο.ε.δ.
(β) Έστω $X = [0,1]$ και $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας με

$$x \sim x \quad \text{όταν} \quad x \in (0,1) \quad \text{και} \quad 0 \sim 1.$$

Τότε ο χώρος πηλίκο $X/\sim$ είναι ομοιομορφικός με τον S^1 όταν σ' αυτό θεωρήσουμε την σχετική τοπολογία από το $\mathbb{R}^2$:

Πράγματι· Θεωρούμε την $f:[0,1]/\sim \longrightarrow S^1$ με τύπο $f([x])=e^{2\pi i x}=(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Τότε η f είναι καλά ορισμένη, 1-1, επί και συνεχής αφού η $f\circ\pi:[0,1]\to S^1$ είναι συνεχής, όπου $\pi:[0,1]\to[0,1]/\sim$ είναι η απεικόνιση πηλίκο. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ανοιχτή. Έστω B ένα ανοιχτό υποσύνολο του $[0,1]/\sim$. Τότε είτε $B\subset(0,1)$, είτε $0,1\in B$ · π.χ. $B=(a,b)$, $0<a<b<1$ ή $B=[0,\varepsilon)\cup(\delta,1]$. Άρα είναι φανερό ότι το $f(B)$ είναι ανοιχτό στο S^1.
Μάλιστα μία βάση της τοπολογίας του $[0,1]/\sim$ είναι η

$$\mathcal{B}=\{\ \{[x]: a<x<b\},\ 0<a<b<1\}\cup\{\{[x]: x\in[0,a)\cup(b,1]\}:\ 0<a<b<1\}$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι η f είναι ανοιχτή.

(γ) <u>Το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$.</u>

Στο $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ θεωρούμε τη σχέση $\sim$: $x\sim y \Leftrightarrow \exists\ \lambda\neq 0$ με $\lambda x=y$. Η $\sim$ είναι προφανώς σχέση ισοδυναμίας. Το σύνολο $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}/\sim$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}P^2$ και λέγεται προβολικό επίπεδο. Με την τοπολογία πηλίκο είναι τοπολογικός χώρος. Τα στοιχεία του είναι οι ευθείες που διέρχονται από το $0\in\mathbb{R}^3$. Κάνουμε τρείς παρατηρήσεις:

1) Έστω $R=\{(x,y)\in(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})^2 \ :\ x\sim y\}$

Τότε το R ως υποσύνολο του χώρου γινόμενου $(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ είναι κλειστό:

Αν $(x_n,y_n)\in R$ και $(x_n,y_n)\longrightarrow(x,y)$ στο $(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})^2$ τότε υπάρχουν $\lambda_n\neq 0$ ώστε $\lambda_n x_n=y_n$. Συνεπώς

$$|\lambda_n|=\frac{\|y_n\|}{\|x_n\|}\longrightarrow\frac{\|y\|}{\|x\|}>0$$

Συνεπώς η $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία μακριά απ' το 0.
Υπάρχει λοιπόν υπακολουθία της λ_{n_k} που συγκλίνει σ' ένα $\lambda\neq 0$
Άρα $\lambda_{n_k} x_{n_k} \longrightarrow \lambda x$ και $\lambda_{n_k} x_{n_k} = y_{n_k} \longrightarrow y$ δηλ. $y=\lambda x$
$\Leftrightarrow x\sim y$

2) Η φυσική απεικόνιση $\pi : \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \to \mathbb{R}P^2$ είναι ανοιχτή.
Αν $A\subset \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο τότε

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{\lambda\neq 0} \lambda A = \{\lambda x : \lambda\neq 0,\ x\in A\}$$

Το σύνολο $\lambda\cdot A = \{\lambda x : x\in A\}$ είναι ανοιχτό όταν $\lambda\neq 0$. Πράγματι· αν $\lambda x\in\lambda A$, τότε αφού το A είναι ανοιχτό υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $S(x,\varepsilon)\subset A$ Προκύπτει ότι $S(\lambda x, |\lambda|\varepsilon)\subset \lambda A$ Πράγματι αν
$y\in S(\lambda x,|\lambda|\varepsilon) \Leftrightarrow \|\lambda x-y\| < |\lambda|\varepsilon \Rightarrow \|x-\frac{y}{\lambda}\|<\varepsilon \Rightarrow \frac{y}{\lambda}\in S(x,\varepsilon)\subset A$
Άρα υπάρχει $x'\in A$ τ.ω $x'=\frac{1}{\lambda}y \Leftrightarrow y=\lambda x' \Leftrightarrow y\in\lambda A$.

3) Ο $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ ως γνωστό είναι 2ος αριθμήσιμος.
Επειδή η π είναι ανοιχτή, και ο $\mathbb{R}P^2$ είναι. Πράγματι, αν $\mathcal{B}=\{B_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ και $A\subset\mathbb{R}P^2$ ανοιχτό,
$\Leftrightarrow \pi^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n_k} \Rightarrow A=\pi(\pi^{-1}(A)) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\pi(B_{n_k})$
Άρα το $\mathcal{B}'=\{\pi(B_n) : n\in\mathbb{N}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}P^2$.

<u>5.5. Πρόταση.</u> Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $Y\neq\emptyset$ ένα σύνολο και $f : X\to Y$ μία επί συνάρτηση. Στο X θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $R_f=\{(x,x')\in X\times X : f(x)=f(x')\}$.
Τότε ορίζεται η συνάρτηση $\tilde{f} : X/R_f \longrightarrow Y$ και είναι ομοιομορφισμός. Όπου στα X/R_f και Y θεωρήσαμε τις τοπολογίες

σημείο ως προς την $\pi: X \longrightarrow X/R_f$ και την $f: X \to Y$ αντίστοιχα.

<u>Απόδειξη.</u> Είναι προφανές ότι η $\tilde{f}$ ορίζεται και είναι 1-1 και επί. Επίσης από την πρόταση 5.3 προκύπτει ότι οι $\tilde{f}$ και $\tilde{f}^{-1}$ είναι συνεχείς, αφού η $f = \tilde{f} \circ \pi : X \to Y$ και η $\pi : \tilde{f}^{-1} \circ f : X \to X/R_f$ είναι συνεχείς αντίστοιχα.

<u>5.6. Παράδειγμα.</u> Στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με $x \sim y \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda > 0 : \lambda x = y$. Τότε $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim \; \approx S^2$ όπου $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Πράγματι: Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow S^2$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Η f είναι προφανώς συνεχής και επί. Είναι επίσης και ανοιχτή γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ και $\varepsilon > 0$ έχουμε $S(f(x), \frac{\varepsilon}{\|x\|}) \cap S^2 \subset f(S(x,\varepsilon))$
Πράγματι για κάθε $z \in S^2 \cap S(f(x), \frac{\varepsilon}{\|x\|})$ έχουμε $\|z\| = 1$ και $\left\|\frac{x}{\|x\|} - z\right\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$, οπότε για $y = \|x\| z$, $f(y) = \frac{y}{\|y\|} = \frac{\|x\| z}{\|x\|} = z$. και $\|x - y\| = \|x - \|x\| z\| < \varepsilon$. Οπότε $z \in f(S(x,\varepsilon))$.
Συνεπώς η τοπολογία του S^2 ταυτίζεται με την $\mathcal{T}_f$ και σύμφωνα με την πρόταση 5.5, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/R_f \approx S^2$. Παρατηρούμε ότι $R_f = \sim$ γιατί

$$\begin{aligned} R_f &= \{(x,y) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2 : f(x) = f(y)\} \\ &= \{(x,y) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2 : \frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}\} \\ &= \{(x,y) \; : \; y = \frac{\|y\|}{\|x\|} \cdot x\} \\ &= \{(x,y) \; : \exists\, \lambda > 0 \text{ με } y = \lambda x\} = \sim . \end{aligned}$$

Συνεπώς $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim \; \approx S^2$.

<u>5.7 Θεώρημα</u> Έστω X, Y δύο χώροι με σχέσεις ισοδυναμίας R, S αντίστοιχα και $f: X \longrightarrow Y$ μία συνεχής συνάρτηση που διατηρεί τις σχέσεις ισοδυναμίας, δηλαδή: $x R x' \Rightarrow f(x) S f(x')$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $f_*: X/R \longrightarrow Y/S$ με $f(R(x)) = S(f(x))$ και είναι συνεχής.

Απόδειξη: Από την υπόθεση η f_* είναι καλώς ορισμένη. και αν $\pi: X \longrightarrow X/R$, $p: Y \longrightarrow Y/S$ είναι οι φυσικές απεικονίσεις

τότε $f_* \circ \pi = p \circ f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X/R \arrow[r, "f_*"] & Y/S \end{tikzcd}$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η $p \circ f$ είναι συνεχής και συνεπώς η $f_* \circ \pi$ είναι συνεχής. Άρα η f_* είναι συνεχής από την πρόταση 5.3.

Έστω X ένας χώρος και $A \subset X$. Στο X ορίζεται τότε η σχέση ισοδυναμίας με κλάσεις A, και όλα τα $\{x\}$ για $x \in X \setminus A$. Ο χώρος πηλίκο $X/\sim$ συμβολίζεται με X/A και λέγεται ο χώρος που προκύπτει από την συρίκνωση του A.

<u>6. Σύγκλιση Moore-Smith.</u>

<u>6.1 Ορισμός</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον X συγκλίνει στο $x \in X$ αν για κάθε $V \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει δείκτης $N \in \mathbb{N}$ τ.ω $x_n \in V$ για κάθε $n \geq N$.

Ο ορισμός αυτός βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με την γνωστή έννοια σύγκλισης σε μετρικούς χώρους. Όμως δεν αρκεί για την περιγραφή της τοπολογίας αφού μία συνάρτηση μπορεί να μεταφέρει την σύγκλιση ακολουθιών αλλά να μήν είναι συνεχής.

<u>6.2. Παράδειγμα.</u> Έστω $X = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ (όπου $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$) εφοδιασμένο με την τοπολογία $\mathcal{T}$ που ορίζεται ως εξής: Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \setminus \{(0,0)\}$ είναι ανοιχτό, ενώ ένα σύνολο $A \subset \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ που περιέχει το $(0,0)$ είναι ανοιχτό αν για όλα τα $m \in \mathbb{Z}^+$, εκτός το πολύ από πεπερασμένα το πλήθος, το σύνολο

$$A_m = \{ k \in \mathbb{Z}^+ : (k,m) \notin A \}$$

είναι πεπερασμένο. Είναι προφανές ότι η σχετική τοπολογία του $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \setminus \{(0,0)\}$ είναι η διακριτή. Έστω τώρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο $X \setminus \{(0,0)\}$. Αν όλοι οι όροι της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βρίσκονται πάνω σε πεπερασμένο το πλήθος γραμμές τότε το $X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανοιχτή περιοχή του $(0,0)$ και συνεπώς η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο $(0,0)$. Αν υπάρχουν άπειρα $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ ώστε $x_{n_k} = (\lambda_k, \mu_k)$ για κάποια $\lambda_k \in \mathbb{Z}^+$ και $\mu_k \to +\infty$, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το (λ_k, μ_k) είναι ο μοναδικός όρος της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην γραμμή $\{(\ell, \mu_k) : \ell \in \mathbb{Z}^+\}$, οπότε το $X \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$ είναι ανοιχτή περιοχή το $(0,0)$ και συνεπώς η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο $(0,0)$. Συνεπώς οι μόνες ακολουθίες στον X που συγκλίνουν στο $(0,0)$ είναι οι τελικά σταθερές. Έστω τώρα $\mathcal{T}_\delta$ η διακριτή τοπολογία στο X και $f = id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_\delta)$. Τότε για κάθε $x \in X$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο x, η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(x)$ αφού όπως αποδείξαμε οι μοναδικές συγκλίνουσες ακολουθίες στο X είναι οι τελικά σταθερές.

Όμως το $\{(0,0)\} \in \mathcal{T}_\delta$ ενώ το $f^{-1}(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\} \notin \mathcal{T}$, δηλαδή η f δεν αντιστρέφει τα ανοιχτά σε ανοιχτά και είναι συνεπώς μη-συνεχής.

Είναι λοιπόν φανερό ότι χρειαζόμαστε μία θεωρία σύγκλισης στους τοπολογικούς χώρους που να γενικεύει την έννοια σύγκλισης σε μετρικούς χώρους. Η βασική έννοια σ' αυτή τη θεωρία είναι η έννοια του δικτύου.

6.3. Ορισμός Ένα προδιατεταγμένο σύνολο είναι ένα ζεύγος $(\Lambda, \geqq)$ όπου Λ είναι ένα μη κενό σύνολο και $\geqq$ μία διμελής σχέση στο Λ με τις ιδιότητες.

(i) $x \geqq x$

(ii) $x \geqq y$ και $y \geqq z \Rightarrow x \geqq z$ για κάθε $x, y, z \in X$.

Ένα προδιατεταγμένο σύνολο $(\Lambda, \geqq)$ λέγεται κατευθυνόμενο αν για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ υπάρχει $\lambda_3 \in \Lambda$ ώστε $\lambda_3 \geqq \lambda_1$ και $\lambda_3 \geqq \lambda_2$.

6.4. Ορισμός. Έστω $(\Lambda, \geqq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο και $M \subset \Lambda$. Το M λέγεται ομοτελικό του Λ αν για κάθε $\lambda \in \Lambda$ υπάρχει $\mu \in M$ ώστε $\mu \geqq \lambda$.

Είναι προφανές ότι ένα ομοτελικό υποσύνολο M του κατευθυνόμενου συνόλου $(\Lambda, \geqq)$ είναι κατευθυνόμενο με κατεύθυνση $\geqq$.

6.5. Ορισμός Έστω X ένα μη-κενό σύνολο. Ένα δίκτυο στο X είναι μία συνάρτηση $p : (\Lambda, \geqq) \longrightarrow X$, όπου $(\Lambda, \geqq)$ είναι κάποιο κατευθυνόμενο σύνολο. Το δίκτυο p θα συμβολίζεται συνήθως με $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

Έτσι μία ακολουθία σ' ένα σύνολο X είναι ένα δίκτυο στο X με $\Lambda = \mathbb{N}$ και κατεύθυνση την συνηθισμένη διάταξη.

6.6. Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον X. και $x\in X$. Το δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x όταν για κάθε $V\in\mathcal{U}(x)$ υπάρχει $\lambda_0=\lambda_0(V)\in\Lambda$ τ.ω για $\lambda\geqq\lambda_0$, $x_\lambda\in V$.

6.7 Παράδειγμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, $x\in X$ και $\mathcal{U}(x)$ το σύνολο όλων των περιοχών του x. Στο $\mathcal{U}(x)$ ορίζεται η διμελής σχέση $V\geqq W$ όταν $V\subset W$. Το ζεύγος $(\mathcal{U}(x),\geqq)$ είναι τότε ένα κατευθυνόμενο σύνολο γιατί για κάθε $V_1, V_2\in\mathcal{U}(x)$ το $V_3=V_1\cap V_2\in\mathcal{U}(x)$ και $V_3\geqq V_1$, $V_3\geqq V_2$.
Αν $p:(\mathcal{U}(x),\geqq)\longrightarrow X$ είναι μία συνάρτηση με $p(V)=x_V\in V$ τότε το $(x_V)_{V\in\mathcal{U}(x)}$ είναι ένα δίκτυο στον X που συγκλίνει στο x. Πράγματι, για κάθε $V\in\mathcal{U}(x)$ υπάρχει $\lambda_0=V$ τ.ω. για $W\geqq V$ $x_W\in W\subset V$.

6.8. Πρόταση Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, $A\subset X$ και $x\in X$. Τότε $x\in\overline{A}$ τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει ένα δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στον X με $x_\lambda\in A$ για κάθε $\lambda\in\Lambda$ που συγκλίνει στο x.
Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $\mathcal{U}(x)$ το σύνολο των περιοχών του x με κατεύθυνση την σχέση υποσύνολο. Αφού $x\in\overline{A}$, έχουμε $V\cap A\neq\emptyset$ για κάθε $V\in\mathcal{U}(x)$. Έτσι από το αξίωμα της επιλογής υπάρχει για κάθε $V\in\mathcal{U}(x)$ ένα $x_V\in V\cap A$. Ορίζεται λοιπόν το δίκτυο $(x_V)_{V\in\mathcal{U}(x)}$ που συγκλίνει στο x. (παράδειγμα 6.7)
($\Leftarrow$) Έστω V μία περιοχή του x. Αφού υπάρχει δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ που συγκλίνει στο x με $x_\lambda\in A$ για κάθε $\lambda\in\Lambda$, υπάρχει $\lambda_0\in\Lambda$ ώστε $\lambda\geqq\lambda_0\Rightarrow x_\lambda\in V\Rightarrow x_\lambda\in V\cap A$. Άρα $V\cap A\neq\emptyset$. ο.ε.δ.

6.9. Πρόταση Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(i) Η f είναι συνεχής στο σημείο $x \in X$

(ii) Για κάθε δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ που συγκλίνει στο x, το δίκτυο $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει στο $f(x)$.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x και $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ένα δίκτυο που συγκλίνει στο x. Αν $W \in \mathcal{U}(f(x))$, τότε λόγω της συνέχειας υπάρχει $V \in \mathcal{U}(x)$ τ.ω $f(V) \subset W$. Συνεπώς, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τ.ω αν $\lambda \geqq \lambda_0$, $x_\lambda \in V$. Άρα $f(x_\lambda) \in f(V) \subset W$. για κάθε $\lambda \geqq \lambda_0$. Συνεπώς το $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει στο $f(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x, τότε υπάρχει μία περιοχή W του $f(x)$ ώστε για κάθε $V \in \mathcal{U}(x)$ έχουμε $f(V) \cap (Y \setminus W) \neq \emptyset$. Απ' το αξίωμα της επιλογής, για κάθε $V \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει $y = f(x_V)$ με $y \in f(V) \cap (Y \setminus W)$. Το δίκτυο $(x_V)_{V \in \mathcal{U}(x)}$ τώρα συγκλίνει στο x, αλλά το $(f(x_V))_{V \in \mathcal{U}(x)}$ δεν συγκλίνει στο $f(x)$, αφού υπάρχει περιοχή W του $f(x)$ για την οποία έχουμε $f(x_V) \in Y \setminus W$ για κάθε $V \in \mathcal{U}(x)$. ο.ε.δ.

6.10 Παρατήρηση. Ιστορικά η έννοια του δικτύου ξεκίνησε στις αρχές του $20^{ού}$ αιώνα κατά την προσπάθεια θεμελείωσης της θεωρίας ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα· έστω $a < b$ και Λ το σύνολο όλων των διαμερίσεων $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ του διαστήματος $[a, b]$. Στο Λ ορίζεται η κατεύθυνση $\geqq$ ως εξής: $\lambda_1 \geqq \lambda_2$ όταν κάθε στοιχείο της διαμέρισης λ_2 είναι και στη λ_1. Για κάθε συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ορίζεται τώρα ένα δίκτυο $p: (\Lambda, \geqq) \to \mathbb{R}$ ως εξής:

Αν $\lambda = (t_0, \dots, t_n)$, τότε

$$p_\lambda = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup \{ f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i \}.$$

Επίσης ορίζεται και ένα δεύτερο δίκτυο $q : (\Lambda, \geq) \to \mathbb{R}$ με

$$q_\lambda = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot \inf \{ f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i \}.$$

Η f τώρα είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann τότε και μόνο τότε όταν τα δίκτυα $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό ο οποίος αν υπάρχει είναι μοναδικός.

6.11. Παρατήρηση. Είναι ενδεχόμενο ένα δίκτυο σ' έναν τοπολογικό χώρο να συγκλίνει σε περισσότερα από ένα σημεία. Για παράδειγμα, αν $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{T}$ είναι η τραχεία τοπολογία στον X, δηλαδή $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. τότε κάθε δίκτυο στον X συγκλίνει σ' όλα τα σημεία του X. Ένα άλλο μη τετριμμένο παράδειγμα είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία στο $\mathbb{N}$, δηλαδή θεωρούμε το $\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία $\mathcal{T}_c = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{A \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ πεπερασμένο}\}$.
Στο $\mathbb{N}$ θεωρούμε τώρα την ακολουθία (δίκτυο) $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει τότε σε κάθε στοιχείο του $\mathbb{N}$. Πράγματι, αν $k \in \mathbb{N}$ και A είναι μία ανοιχτή περιοχή του k τότε το $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο. Υπάρχει λοιπόν το $m = \max\{\mathbb{N} \setminus A\}$. Αν λοιπόν $N = m+1$, τότε για $n \geq N$ έχουμε $x_n = n \in A$. Άρα η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο k.

Είναι φανερό ότι χρειάζεται να ξεχωρίσουμε εκείνους τους χώρους στους οποίους τα όρια των συγκλινουσών δικτύων είναι μοναδικά. Αυτό όμως είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

6.12. Πρόταση Έστω X_i, $i\in I$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων, $((x_i^\lambda)_{i\in I})_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον χώρο γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ και $(x_i)_{i\in I}$.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $((x_i^\lambda)_{i\in I})_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow (x_i)_{i\in I}$

(ii) $(x_i^\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = \left(\pi_i((x_j^\lambda)_{j\in J})\right)_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow x_i = \pi_i((x_i)_{i\in I})$ για κάθε $i\in I$.

Απόδειξη: (i)$\Rightarrow$(ii) είναι προφανές από την συνέχεια των προβολών.
(ii)$\Rightarrow$(i). Έστω $A = V_{i_1}\times\cdots\times V_{i_k}\times\prod_{j\neq i_1,\dots,i_k} X_j = \pi_{i_1}^{-1}(V_{i_1})\cap\cdots\cap\pi_{i_k}^{-1}(V_{i_k})$ μία βασική περιοχή του $(x_i)_{i\in I}$. Τότε τα $V_{i_1},\dots,V_{i_k}$ είναι ανοιχτές περιοχές των $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ αντίστοιχα. Άρα υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ ώστε $\lambda\geqq\lambda_\mu \Rightarrow x_{i_\mu}^\lambda\in V_{i_\mu}$ για $\mu=1,\dots,k$. Επειδή το Λ είναι κατευθυνόμενο υπάρχει $\lambda_0\in\Lambda$ με $\lambda_0\geqq\lambda_1, \lambda_0\geqq\lambda_2,\dots,\lambda_0\geqq\lambda_k$.
Αν λοιπόν $\lambda\geqq\lambda_0$ τότε $x_{i_\mu}^\lambda\in V_{i_\mu}$ για κάθε $\mu: 1\leq\mu\leq k$.
Συνεπώς $(x_i^\lambda)_{i\in I}\in A$ για κάθε $\lambda\geqq\lambda_0$. ο.ε.δ.

6.12. Παράδειγμα. Έστω $\Gamma\neq\emptyset$ σύνολο και X ένας τοπολογικός χώρος. Έστω $f_n:\Gamma\to X$, $n\in\mathbb{N}$ μία ακολουθία συναρτήσεων και $f:\Gamma\to X$. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στον χώρο γινόμενο X^Γ και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow f \iff f_n(x)\longrightarrow f(x)$ για κάθε $x\in\Gamma$.
(δηλ έχουμε την κατα σημείο σύγκλιση της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

6.13 Θεώρημα. Έστω X ένας 1ος αριθμήσιμος χώρος. Τότε οι προτάσεις 6.8 και 6.9 ισχύουν όταν τα δίκτυα αντικατασταθούν από ακολουθίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.

1). Έστω $\mathbb{R}_n$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με την τοπολογία που έχει υποβάση $\mathcal{C}=\{(-\infty,b],(a,+\infty):a,b\in\mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_n$ δεν είναι διακριτός ενώ ο υπόχωρος $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1\}$ είναι.

2) Δείξτε ότι το $\prod_{i\in I}A_i$ είναι πυκνό στον $\prod_{i\in I}X_i$ τότε και μόνο τότε όταν κάθε $A_i, i\in I$ είναι πυκνό στον X_i.

3) Έστω $X_n, n\in\mathbb{N}$ μία ακολουθία μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων. Δείξτε ότι ο χώρος γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ είναι μετρικοποιήσιμος. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι αν $d_n\leq 1$ είναι μία συμβιβαστή μετρική στον $X_n, n\in\mathbb{N}$ τότε η $d=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{2^n}$ είναι συμβιβαστή μετρική στο $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$)

4) Έστω $X_i, i\in I$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων. Αν το I είναι υπεραριθμήσιμο, δείξτε ότι ο $\prod_{i\in I}X_i$ δεν είναι $1^{\text{ος}}$ αριθμήσιμος.

5) Δείξτε ότι αν $X_i\approx Y_i, i\in I$, τότε $\prod_{i\in I}X_i\approx\prod_{i\in I}Y_i$

6) Δείξτε ότι το σύνολο $A=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : |x_n|\leq\frac{1}{n}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}\}$ έχει κενό εσωτερικό στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και είναι κλειστό.

7) Δείξτε ότι ο χώρος γινόμενο $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, όπου στο $\{0,2\}$ θεωρούμε την διακριτή τοπολογία, είναι ομοιομορφικός με το σύνολο του Cantor

$$C=\{x\in[0,1] : x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \text{ , } a_n=0 \text{ ή } 2 \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}\}$$

8) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με $x\sim y$ τότε και μόνο τότε όταν $x-y\in\mathbb{Z}$. Δείξτε ότι $\mathbb{R}/\sim\ \approx S^1$.

9) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A\subset X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $f:X\longrightarrow A$ με $f/_A=id_A$ (Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται retraction του X στο A). Δείξτε ότι η σχετική τοπολογία του A ταυτίζεται με την τοπολογία πηλίκο $\mathcal{T}_f$.

10) Έστω R μία σχέση ισοδυναμίας στον χώρο X και $\pi : X \to X/R$ η φυσική απεικόνιση. Για κάθε $A \subset X$ θέτουμε $C(A) = \{x \in X : \exists a \in A \text{ τ.ω. } xRa\}$. Δείξτε ότι η π είναι ανοιχτή τότε και μόνο τότε όταν το $C(A)$ είναι ανοιχτό στον X για κάθε ανοιχτό σύνολο $A \subset X$.

11) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και G μία ομάδα ομοιομορφισμών του X επί του εαυτού του. Στο X θεωρούμε την σχέση $\sim$ που ορίζεται ως εξής:

$$x \sim y \iff \text{υπάρχει } g \in G : g(x) = y.$$

Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στον X και ότι η φυσική απεικόνιση $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ είναι ανοιχτή.

12) Έστω $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στον χώρο X και $A \subset X$ ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $a \in A$ με $x \sim a$. Έστω $i : A \to X$ με $i(a) = a$.

(a) Δείξτε ότι η i επάγει μία συνεχή, 1-1 και επί απεικόνιση $i_* : A/\sim \longrightarrow X/\sim$

(β) Αν $\pi : X \to X/\sim$ είναι η φυσική απεικόνιση και το $C(\Gamma) = \pi^{-1}(\pi(\Gamma))$ είναι ανοιχτό στον X για κάθε ανοιχτό σύνολο $\Gamma \subset A$ (στην σχετική τοπολογία του A), δείξτε ότι η i_* είναι ομοιομορφισμός.

13) Στο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ θεωρούμε την ευκλείδια τοπολογία και την σχέση ισοδυναμίας $R = \{(z, -z) : z \in S^1\}$. Δείξτε ότι $S^1/R \approx S^1$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε την συνάρτηση $f : S^1 \to S^1$ με τύπο $f(z) = z^2$ και αποδείξτε ότι είναι συνεχής, κλειστή και επί. Για την κλειστότητα της f χρησιμοποιήστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass).

14) Στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με:

$$x \sim y \iff \text{υπάρχει } \lambda \neq 0 \text{ τ.ω } y = \lambda x.$$

Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$ λέγεται πραγματικό προβολικό επίπεδο. Μία <u>ευθεία</u> στο $\mathbb{R}P^2$ είναι ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}P^2$ για το οποίο το $\pi^{-1}(A)$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από το $0 \in \mathbb{R}^3$ και

από το οποίο λείπει βέβαια το 0, όπου $\pi: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ είναι η φυσική απεικόνιση. Δείξτε ότι κάθε ευθεία στο $\mathbb{R}P^2$ είναι ομοιομορφική με τον S^1.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις ασκήσεις 12 και 13)

15) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Στον X ορίζεται τότε η σχέση ισοδυναμίας $R = \{(x,x) : x \in X \setminus A\} \cup \{(x,y) : x, y \in A\}$. Ο χώρος πηλίκο συμβολίζεται με X/A και λέμε ότι ο X/A παίρνεται με συρρίκνωση του A σε σημείο. Έστω

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \quad \text{και} \quad S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

με τις ευκλείδιες τοπολογίες. Έστω $h: D^n \longrightarrow S^n$ η απεικόνιση με τύπο $h(x) = (\cos\pi(1-t), x_1 \sin\pi(1-t), x_2 \sin\pi(1-t), \ldots, x_n \sin\pi(1-t))$ όταν $x \neq 0$, όπου $t = \|x\|$ και $\frac{x}{\|x\|} = (x_1, \ldots, x_n)$, ενώ $h(0) = (-1, 0, 0, \ldots, 0)$. Δείξτε ότι η h επάγει έναν ομοιομορφισμό $\tilde{h}: D^n/S^{n-1} \approx S^n$.

III. ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Χώρος του Hausdorff

1.1. Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται χώρος Hausdorff αν για κάθε $x, y \in X$, $x \neq y$ υπάρχουν $V \in \mathcal{U}(x)$, $W \in \mathcal{U}(y)$ τ.ω $V \cap W = \emptyset$.

1.2. Θεώρημα. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff τότε και μόνο τότε όταν κάθε δίκτυο στον X συγκλίνει το πολύ σ' ένα όριο.

Απόδειξη ($\Rightarrow$) Έστω ότι ο X είναι Hausdorff και $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι ένα δίκτυο στον X που συγκλίνει στο x και στο y με $x \neq y$. Τότε υπάρχουν $V \in \mathcal{U}(x)$, $W \in \mathcal{U}(y)$ τ.ω $V \cap W = \emptyset$. Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ τ.ω $x_\lambda \in V$ για κάθε $\lambda \geqq \lambda_1$ και $x_\lambda \in W$ για κάθε $\lambda \geqq \lambda_2$. Υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ με $\lambda_0 \geqq \lambda_1$ και $\lambda_0 \geqq \lambda_2$. Για $\lambda \geqq \lambda_0$ έχουμε τώρα $x_\lambda \in V \cap W = \emptyset$. άτοπο.

($\Leftarrow$) Έστω $x, y \in X$ για τα οποία $V \cap W \neq \emptyset$ για όλα τα $V \in \mathcal{U}(x)$, $W \in \mathcal{U}(y)$. Τα σύνολα $\mathcal{U}(x)$, $\mathcal{U}(y)$ είναι κατευθυνόμενα με κατεύθυνση $\subset$. Στο $\Lambda = \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)$ ορίζουμε την προδιάταξη $\geqq$ ως εξής:

$$(V, W) \geqq (V', W') \text{ όταν } V \subset V' \text{ και } W \subset W'$$

Η είναι κατεύθυνση. Για κάθε $\lambda = (V, W) \in \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)$ υπάρχει τότε ένα $x_\lambda \in V \cap W$. Το $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι ένα δίκτυο που συγκλίνει και στο x και στο y. Πράγματι· για κάθε $V_0 \in \mathcal{U}(x)$, $W_0 \in \mathcal{U}(y)$ υπάρχει το $\lambda_0 = (V_0, W_0)$ ώστε για $\lambda = (V, W) \geqq \lambda_0 = (V_0, W_0)$ έχουμε $x_\lambda \in V \cap W \subset V_0 \cap W_0$. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση. ο.ε.δ.

Η ιδιότητα ενός χώρου να είναι Hausdorff είναι τοπολογικά αναλλοίωτη. Δηλαδή αν $X \approx Y$ και ο X είναι Hausdorff, τότε και ο Y είναι Hausdorff.

Επίσης, κάθε υπόχωρος ενός χώρου Hausdorff είναι Hausdorff. Είναι προφανές ότι κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος είναι Hausdorff. Ο χώρος Sierpinski δεν είναι Hausdorff.

<u>1.3. Πρόταση</u> Σ' έναν χώρο Hausdorff X κάθε πεπερασμένο σύνολο $A \subset X$ είναι κλειστό.

<u>Απόδειξη.</u> Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ στον X είναι κλειστό, δηλαδή το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοιχτό. Πράγματι· για κάθε $y \in X \setminus \{x\}$ υπάρχει μία περιοχή $W \in \mathcal{U}(y)$ και μία περιοχή $V \in \mathcal{U}(x)$ ώστε $V \cap W = \emptyset$ δηλαδή $W \subset X \setminus V \subset X \setminus \{x\}$. ο.ε.δ.

<u>1.4. Πρόταση</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και Y ένας χώρος Hausdorff. Έστω $f, g : X \to Y$ δύο συνεχείς συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) το σύνολο $\Gamma = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό στον Y.

(β) Αν $D \subset X$ είναι ένα πυκνό σύνολο και $f|D = g|D$, τότε $f = g$

(γ) Αν η f είναι επιπλέον 1-1 (και συνεχής) τότε ο X είναι Hausdorff.

<u>Απόδειξη:</u> (α) Αν $x \in \overline{\Gamma}$, τότε υπάρχει ένα δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ από σημεία του Γ, δηλαδή $f(x_\lambda) = g(x_\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ ώστε $x_\lambda \to x$. Αφού οι f, g είναι συνεχείς, $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$ και $g(x_\lambda) \longrightarrow g(x)$. Επειδή ο Y είναι Hausdorff το δίκτυο $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} = (g(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ έχει το πολύ ένα όριο. Άρα $f(x) = g(x)$ δηλ $x \in \Gamma$.

(β) Αφού $f|D = g|D$ τότε $D \subset \Gamma$ (του (α)) και το Γ είναι κλειστό σύνολο άρα $\overline{D} = X \subset \Gamma$, άρα $X = \Gamma$.

(γ) Η συνάρτηση $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ είναι 1-1 και ανοιχτή. Πράγματι· αν το $B \subset f(X)$ είναι ανοιχτό στο $f(X)$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό $A \subset Y$ με $B = A \cap f(X)$. Επειδή η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(B) = f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό στο X. Ο $f(X)$ είναι επίσης Hausdorff αφού ο Y είναι. Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$. Επειδή η f είναι 1-1, $f(x_1) \neq f(y_1)$, συνεπώς υπάρχουν $V_1 \in \mathcal{U}(f(x_1))$, $V_2 \in \mathcal{U}(f(x_2))$ με $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Τότε τα $f^{-1}(V_i) \in \mathcal{U}(x_i)$, $i=1,2$ και $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$. ο.ε.δ.

<u>1.5 Πρόταση.</u> Έστω X_i, $i \in I$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ είναι Hausdorff τότε και μόνο τότε όταν ο X_i είναι Hausdorff για κάθε $i \in I$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι κάθε X_i, $i \in I$ είναι Hausdorff και $(x_i)_{i \in I} \neq (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ τ.ω $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ και $V \in \mathcal{U}(x_{i_0})$, $W \in \mathcal{U}(y_{i_0})$ στον X_{i_0} με $V \cap W = \emptyset$.
Τα σύνολα $\prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i \times V$, $\prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i \times W$ είναι ξένες μεταξύ τους περιοχές των $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$. ο.ε.δ.
Για το αντίθετο, αν ο $\prod_{i \in I} X_i$ είναι Hausdorff, και ο X_j είναι γιατί είναι ομοιομορφικός με τον υπόχωρο του $\prod_{i \in I} X_i$

$$\Gamma_j = \{ (x_i)_{i \in I} : x_j \in X_j \text{ και } x_i \neq a_i \text{ για } i \neq j \}$$

όπου το $(a_i)_{i \in I}$ το έχουμε διαλέξει στο $\prod_{i \in I} X_i$.

Γενικά οι χώροι πηλίκο χώρων Hausdorff δεν είναι Hausdorff.

<u>1.6. Παράδειγμα.</u> Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με

$x \sim y$ όταν $x, y \leq 0$ ή $x, y > 0$. Η $\sim$ έχει μόνο δύο κλάσεις την $a = (-\infty, 0]$ και την $b = (0, +\infty)$, δηλαδή $\mathbb{R}/\sim\, = \{a, b\}$. Αν $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \{a, b\}$ είναι η φυσική προβολή, $\pi^{-1}(a) = (-\infty, a]$ και $\pi^{-1}(b) = (0, +\infty)$. Συνεπώς το $\{b\}$ είναι ανοιχτό ως προς την τοπολογία πηλίκο ενώ το $\{a\}$ είναι κλειστό. Άρα ο $\mathbb{R}/\sim$ είναι ο χώρος Sierpinski που δεν είναι Hausdorff.

<u>1.7. Πρόταση.</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και R μία σχέση ισοδυναμίας στο X και $\pi : X \longrightarrow X/_R$ η φυσική προβολή. Αν η $R \subset X \times X$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$ και η π είναι ανοιχτή συνάρτηση, τότε ο $X/_R$ είναι Hausdorff.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\pi(x) \neq \pi(y)$. Τότε τα x, y δεν είναι R-ισοδύναμα, δηλαδή $(x, y) \notin R = \overline{R}$, αφού το R είναι κλειστό στον $X \times X$. Άρα υπάρχουν $V \in \mathcal{U}(x)$, $W \in \mathcal{U}(y)$ ώστε $(V \times W) \cap R = \emptyset \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow V \times W \subset X \times X \setminus R$. Συνεπώς $\pi(V) \cap \pi(W) = \emptyset$ και επειδή η π υποτίθεται ανοιχτή, $\pi(V) \in \mathcal{U}(\pi(x))$, $\pi(W) \in \mathcal{U}(\pi(y))$.

<u>1.8. Πρόταση.</u> Έστω Y ένας χώρος Hausdorff, X τοπολογικός χώρος και $f : X \longrightarrow Y$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε ο $X/_{R(f)}$ είναι Hausdorff όπου $x \, R(f) \, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\pi : X \longrightarrow X/_{R(f)}$ η φυσική προβολή. Τότε ορίζεται η $g : X/_{R(f)} \longrightarrow Y$ με $g(\pi(x)) = f(x)$ που είναι 1-1 και συνεχής. Από την πρόταση 1.4 (γ) προκύπτει ότι ο $X/_{R(f)}$ είναι Hausdorff.

2. Κανονικοί Χώροι

2.1. Ορισμός. Ένας χώρος Hausdorff λέγεται κανονικός αν για κάθε $x \in X$ και κλειστό σύνολο $F \subset X$ με $x \notin F$ υπάρχουν δύο ανοιχτά σύνολα V, W με $x \in V$, $F \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$.

2.2 Πρόταση. Για έναν τοπολογικό χώρο X του Hausdorff τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι κανονικός

(β) Για κάθε $x \in X$ και $W \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset X$ με $x \in V \subset \overline{V} \subset W$ (δηλαδή κάθε σημείο του X έχει μία βάση κλειστών περιοχών)

(γ) Για κάθε $x \in X$ και κλειστό σύνολο $F \subset X$ με $x \notin F$, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο V με $x \in V$ και $\overline{V} \cap F = \emptyset$.

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β) Υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή A του x με $A \subset W$. Το $F = X \setminus A$ είναι κλειστό και $x \notin F$. Άρα υπάρχουν ανοιχτά σύνολα V, G με $x \in V$ και $F \subset G$ και $V \cap G = \emptyset$, δηλαδή $V \subset X \setminus G$. Συνεπώς $\overline{V} \subset X \setminus G \subset X \setminus F = A \subset W$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Το $X \setminus F$ είναι ανοιχτή περιοχή του x. Άρα υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή V του x με $x \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus F$, δηλαδή $\overline{V} \cap F = \emptyset$.

(γ) $\Rightarrow$ (α) Το $W = X \setminus \overline{V}$ είναι ανοιχτή περιοχή του F και $V \cap W = \emptyset$.

2.3. Παράδειγμα. Κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος X είναι κανονικός. Έστω d μία μετρική που δίνει την τοπολογία του X: Έστω $x \in X$ και $F \subset X$ ένα κλειστό σύνολο με $x \notin F$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$f: X \to [0,+\infty)$ με τύπο $f(z) = d(z,F)$. Η f είναι συνεχής και επειδή το F είναι κλειστό, $f^{-1}(\{0\}) = F$, ενώ $f(x) > 0$. Τα σύνολα $W = f^{-1}\left(\left[0, \frac{f(x)}{2}\right)\right)$ και $V = f^{-1}\left(\left(\frac{f(x)}{2}, +\infty\right)\right)$ είναι ξένα, ανοιχτά και $x \in V$, $F \subset W$.

<u>2.4. Παράδειγμα χώρου Hausdorff που δεν είναι κανονικός</u>

Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την τοπολογία $\mathcal{T}$ με υποβάση

$$\mathcal{C} = \{ (a,b) : a < b \} \cup \{ \mathbb{Q} \}.$$

Η $\mathcal{T}$ είναι προφανώς λεπτότερη από την ευκλείδια τοπολογία και συνεπώς είναι Hausdorff. Στην $\mathcal{T}$ το $\mathbb{Q}$ είναι ανοιχτό σύνολο. Άρα το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ κλειστό. Όμως το $1 \in \mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν έχουν ξένες περιοχές.

Είναι προφανές ότι η ιδιότητα ενός χώρου να είναι κανονικός είναι τοπολογική αναλλοίωτη.

<u>2.5. Θεώρημα.</u> (α) Κάθε υπόχωρος ενός κανονικού χώρου X είναι κανονικός.

(β) Το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ είναι κανονικός χώρος τότε και μόνο τότε όταν κάθε $X_i, i \in I$ είναι κανονικός χώρος.

<u>Απόδειξη</u> (α) Έστω $Y \subset X$, $x \in Y$ και $F \subset Y$ ένα κλειστό σύνολο στον Y με $x \notin F$. Τότε υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $B \subset X$ με $F = X \cap B$. Προφανώς $x \notin B$ και συνεπώς υπάρχουν ανοιχτά $V, W \subset X$ στον X με $x \in V$, $B \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$. Τα $V \cap Y$, $W \cap Y$ είναι ανοιχτά στον Y και $x \in Y \cap V$, $F \subset W \cap Y$ ενώ $(V \cap Y) \cap (Y \cap W) = V \cap W \cap Y = \emptyset$.

(β) Το ευθύ αποδεικνύεται όπως στην πρόταση 1.4.

Έστω ότι ο X_i είναι κανονικοί $\forall i \in I$ και $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$.

Για κάθε υποβασική περιοχή $U_{i_1}\times\cdots\times U_{i_k}\times\prod_{i\neq i_1,\dots,i_k} X_i$ του $(x_i)_{i\in I}$

υπάρχουν ανοιχτές περιοχές V_{i_λ} του x_{i_λ}, $\lambda=1,2,\dots,k$ με

$x_{i_\lambda}\in V_{i_\lambda}\subset\overline{V_{i_\lambda}}\subset U_{i_\lambda}$, $\lambda=1,2,\dots,k$. Συνεπώς έχουμε

$$(x_i)_{i\in I}\in V_{i_1}\times\cdots\times V_{i_k}\times\prod_{i\neq i_1,\dots,i_k} X_i \subset \overline{V_{i_1}\times\cdots\times V_{i_k}\times\prod_{i\neq i_1,\dots,i_k} X_i} =$$

$$=\overline{V_{i_1}}\times\cdots\times\overline{V_{i_k}}\times\prod_{i\neq i_1,\dots,i_k} X_i \subset U_{i_1}\times\cdots U_{i_k}\times\prod_{i\neq i_1,\dots,i_k} X_i.$$

Αν τώρα G είναι μία οποιαδήποτε περιοχή του $(x_i)_{i\in I}$, τότε υπάρχουν υποβασικές περιοχές $C_1,\dots,C_n$ του $(x_i)_{i\in I}$ με $\bigcap_{j=1}^{n} C_j\subset G$. Για κάθε $1\le j\le n$ υπάρχει όπως δείξαμε μία (υποβασική) ανοιχτή περιοχή B_j του $(x_i)_{i\in I}$ με $\overline{B_j}\subset C_j$. Άρα:

$$(x_i)_{i\in I}\in\bigcap_{j=1}^{n} B_j\subset\overline{\bigcap_{j=1}^{n} B_j}\subset\bigcap_{j=1}^{n}\overline{B_j}\subset\bigcap_{j=1}^{n} C_j\subset G. \quad \text{ο.ε.δ.}$$

3. Φυσιολογικοί χώροι

3.1. Ορισμός. Ένας χώρος Hausdorff X λέγεται φυσιολογικός αν για κάθε ζεύγος κλειστών συνόλων $A,B\subset X$ με $A\cap B=\emptyset$, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $V,W\subset X$ με $A\subset V$, $B\subset W$ και $V\cap W=\emptyset$.

Είναι προφανές ότι κάθε φυσιολογικός χώρος είναι κανονικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει (πρβλ. παράδειγμα 3.3)

3.2. Πρόταση. Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι φυσιολογικός

(β) Για κάθε κλειστό σύνολο $F \subset X$ και ανοιχτό $G \supset F$ υπάρχει ένα ανοιχτό $V \subset X$ με $F \subset V \subset \overline{V} \subset G$.

(γ) Για κάθε κλειστά σύνολα $A, B \subset X$ με $A \cap B = \emptyset$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset X$ με $A \subset V$ και $\overline{V} \cap B = \emptyset$.

(δ) Για κάθε κλειστά σύνολα $A, B \subset X$ με $A \cap B = \emptyset$ υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $V, W \subset X$ με $A \subset V$, $B \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$.

Απόδειξη· (α)$\Rightarrow$(β) Το $X \setminus G$ είναι κλειστό σύνολο και $F \cap (X \setminus G) = \emptyset$. Άρα υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $V, W \subset X$ με $F \subset V$, $X \setminus G \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$, δηλαδή $V \subset X \setminus W$. Συνεπώς $\overline{V} \subset X \setminus W \subset G$.

(β)$\Rightarrow$(γ) Το $G = X \setminus B$ είναι ανοιχτό και περιέχει το A. Άρα υπάρχει $V \subset X$ ανοιχτό με $A \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus B$, δηλαδή $\overline{V} \cap B = \emptyset$.

(γ)$\Rightarrow$(δ) Απ' την υπόθεση υπάρχει $V \subset X$ ανοιχτό με $A \subset V$ και $\overline{V} \cap B = \emptyset$. Εφαρμόζουμε πάλι την υπόθεση για τα $B, \overline{V}$, οπότε υπάρχει $W \subset X$ ανοιχτό με $B \subset W$ και $\overline{W} \cap \overline{V} = \emptyset$.

(δ)$\Rightarrow$(α) προφανές.

Είναι προφανές ότι η ιδιότητα της φυσιολογικότητας είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.

Γενικά ένας υπόχωρος ενός φυσιολογικού χώρου δεν είναι φυσιολογικός. Όμως κάθε κλειστός υπόχωρος ενός φυσιολογικού χώρου είναι φυσιολογικός. Το καρτεσιανό γινόμενο φυσιολογικών χώρων (ακόμα και πεπερασμένου πλήθους) δεν είναι φυσιολογικός χώρος.

3.3. Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{R}_n$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με την τοπολογία που έχει υποβάση.

$$\mathcal{C} = \{ (-\infty, b], (a, +\infty), a, b \in \mathbb{R} \}$$

Έστω $A, B \subset \mathbb{R}_n$ δύο κλειστά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$. Για κάθε $a \in A$ θέτουμε $B_a = \sup\{ b \in B : b < a \}$. Επειδή το B είναι κλειστό $B_a \in \overline{B} = B$ και συνεπώς $B_a < a$. Άρα $(B_a, a] \cap B = \emptyset$. Το σύνολο τώρα $V = \bigcup_{a \in A} (B_a, a]$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}_n$ και $V \cap B = \emptyset$, $A \subset V$.

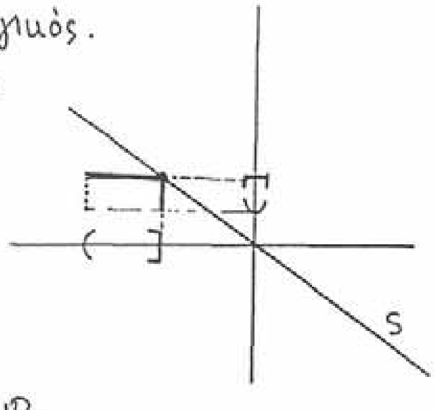
Όμοια για κάθε $b \in B$ θέτουμε $A_b = \sup\{ a \in A : a < b \}$ και το σύνολο $W = \bigcup_{b \in B} (A_b, b]$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}_n$ και $W \cap A = \emptyset$, $B \subset W$.

Θα δείξουμε ότι $V \cap W = \emptyset$. Πράγματι αν $V \cap W \neq \emptyset$ τότε υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $(B_a, a] \cap (A_b, b] \neq \emptyset$. Αφού $A \cap B = \emptyset$ $a \neq b$. Έστω ότι $a > b$. Τότε $B_a < b < a$ αντίφαση. Όμοια αν $a < b$.

Αυτό δείχνει ότι ο $\mathbb{R}_n$ είναι φυσιολογικός.

Θα δείξουμε ότι ο $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n$ δεν είναι:

Ο υπόχωρος $S = \{ (x, -x) : x \in \mathbb{R}_n \}$ είναι κλειστός και η σχετική του τοπολογία είναι η διακριτή (δες σχήμα)



Επίσης το σύνολο $D = \{ (r, s) : r, s \in \mathbb{Q} \}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n$.

Αν ο $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n$ ήταν φυσιολογικός τότε αφού κάθε υποσύνολο $A \subset S$

του S είναι κλειστό στο S και ο S κλειστός στον $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$, θα έπρεπε για κάθε $A \subset S$ να υπάρχει ένα ανοιχτό $V(A) \supset A$ και ένα ανοιχτό σύνολο $V(S \setminus A) \supset S \setminus A$. ώστε $V(A) \cap V(S \setminus A) = \emptyset$. Επειδή το D είναι πυκνό στον $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ έχουμε $D \cap V(A) \neq \emptyset$ για κάθε $A \subset S$. Ορίζεται τώρα η συνάρτηση

$$\lambda : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(D) \text{ με τύπο } \lambda(A) = V(A) \cap D.$$

Αν $A \neq B$, $A, B \subset S$ τότε $(S \setminus B) \cap A \neq \emptyset$ και συνεπώς $V(S \setminus B) \cap V(A) \neq \emptyset$ και είναι βέβαια ανοιχτό σύνολο. Άρα $\emptyset \neq D \cap V(S \setminus B) \cap V(A) \subset D \cap V(A)$ και $\big(D \cap V(S \setminus B) \cap V(A)\big) \cap V(B) = \emptyset$. Άρα $D \cap V(A) \neq V(B) \cap D$. Συνεπώς η λ είναι 1-1. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το S είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το D αριθμήσιμο

<u>3.4. Παράδειγμα.</u> Κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος X είναι φυσιολογικός. Έστω d μία μετρική που δίνει την τοπολογία του X. Αν $A, B \subset X$ είναι δύο κλειστά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$, θέτουμε την συνάρτηση

$$f : X \longrightarrow [0,1] \quad \text{με} \quad f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

Η f είναι συνεχής και $f^{-1}(\{0\}) = A$, $f^{-1}(\{1\}) = B$. Άρα τα $V = f^{-1}\left([0, \tfrac{1}{3})\right)$, $W = f^{-1}\left((\tfrac{2}{3}, 1]\right)$ είναι ανοιχτά, $A \subset V$, $B \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$.

3.5 Θεώρημα (Λήμμα του P. Urysohn)

Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) ο X είναι φυσιολογικός.

(β) Για κάθε κλειστά σύνολα $A, B \subset X$ με $A \cap B = \emptyset$ υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f: X \to [0,1]$ με $A \subset f^{-1}(\{0\})$, $B \subset f^{-1}(\{1\})$.

Απόδειξη: (β)$\Rightarrow$(α). Είναι προφανές θέτοντας $V = f^{-1}([0,\frac{1}{3}))$, $W = f^{-1}((\frac{2}{3},1])$. Τότε $A \subset V$, $B \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$.

Για την απόδειξη του (α)$\Rightarrow$(β) θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

3.6. Λήμμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $D \subset [0,+\infty)$ πυκνό στο $[0,+\infty)$. Έστω $\{A_d : d \in D\}$ μία οικογένεια ανοιχτών συνόλων του X με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $X = \bigcup_{d \in D} A_d$ και (β) αν $d_1 < d_2$ τότε $\overline{A_{d_1}} \subset A_{d_2}$.

Τότε η συνάρτηση $f: X \to [0,+\infty)$ με $f(x) = \inf\{d \in D : x \in A_d\}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη: Κατ' αρχήν λόγω του (α) η f είναι καλά ορισμένη. Επίσης η f έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Αν $f(x) < d$ τότε $x \in A_d$. Πράγματι αν $x \notin A_d$ τότε απ' την υπόθεση (β) $x \notin A_{d'}$ για κάθε $d' < d$. Συνεπώς $d \leq f(x)$ άτοπο.

(2) Αν $x \in \overline{A_d}$ τότε $f(x) \leq d$. Πράγματι· αν $f(x) > d$, τότε αφού το D είναι πυκνό στο $[0,+\infty)$, $f(x) > d' > d$ για κάποιο $d' \in D$ και λόγω του (β) έχουμε $x \in \overline{A_d} \subset A_{d'}$. Άρα $f(x) \leq d' < f(x)$, αντίφαση.

(3) $f^{-1}((-\infty,b)) = \bigcup_{d<b} A_d$ Έστω $x \in f^{-1}((-\infty,b))$ δηλαδή $f(x) < b$

Αφού το D είναι πυκνό στο $[0,+\infty)$ υπάρχει $d \in D$ τ.ω. $f(x) < d < b$, οπότε από το (1) έχουμε $x \in A_d$. Άρα $f^{-1}((-\infty, b)) \subset \bigcup_{d<b} A_d$.

Αν τώρα $x \in A_d$ για $d<b$ τότε από το (2) έχουμε $f(x) \leq d < b$

$\Rightarrow x \in f^{-1}((-\infty, b))$.

(4) $f^{-1}((-\infty, b]) = \bigcap_{d>b} \overline{A_d}$. Έστω $x \in f^{-1}((-\infty, b])$ δηλαδή

$f(x) \leq b$. Αφού D πυκνό στο $[0,+\infty)$ υπάρχει $d \in D$, $d > b \geq f(x)$.

Από το (1) $x \in A_d$ για όλα τα $d>b$, $d \in D$. Άρα $x \in \bigcap_{d>b} A_d \subset \bigcap_{d>b} \overline{A_d}$.

Αντίστροφα, αν $x \in \overline{A_d}$ για όλα τα $d>b$, τότε από το

(2) έχουμε $f(x) \leq d$ για όλα τα $d>b$. Επειδή το D είναι πυκνό

στο $[0,+\infty)$ υπάρχει μία φθίνουσα ακολουθία $d_n \to b$, $d_n \in D$.

Άρα $f(x) \leq b$.

Για να είναι η f συνεχής αρκεί ν' αντιστρέφει τα υποβασικά σύνολα $(-\infty, b)$, $(a,+\infty)$ του $\mathbb{R}$ σε ανοιχτά στον X. Λόγω του (3)

το $f^{-1}((-\infty, b))$ είναι ανοιχτό για κάθε $b \in \mathbb{R}$. Επίσης

$f^{-1}((a,+\infty)) = X \setminus f^{-1}((-\infty, a]) = X \setminus \bigcap_{d>a} \overline{A_d}$ (λόγω της (4))

που είναι ανοιχτό. Άρα η f είναι συνεχής.

Απόδειξη του (α)$\Rightarrow$(β) στο Θεώρημα 3.5

Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα για $D = \mathbb{Q}^+$. Αν $q \in \mathbb{Q}^+$ και $q>1$ θέτουμε $A_q = X$. Θέτουμε επίσης $A_1 = X \setminus B$. Επειδή $A \subset X \setminus B$ από την πρόταση 3.2 (β) υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο A_0 με

$$A \subset A_0 \subset \overline{A_0} \subset X \setminus B = A_1$$

Έστω μία αρίθμηση του $[0,1] \cap \mathbb{Q}^+ = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $q_0 = 0$, $q_1 = 1$

Έχουμε ήδη ορίσει τα A_{q_0}, A_{q_1} και $\overline{A_{q_0}} \subset A_{q_1}$.

Η ιδέα είναι να κατασκευάσουμε μία οικογένεια ανοιχτών συνόλων $\{A_{q_n} : 0 \le q_n \le 1, q_n \in \mathbb{Q}\}$ με $\overline{A_{q_n}} \subset A_{q_m}$ όταν $q_n < q_m$.
Τότε η $\{A_q : q \in \mathbb{Q}^+\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 3.6. οπότε η συνάρτηση $f(x) = \inf\{q \in \mathbb{Q}^+ : x \in A_q\}$ είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο $[0,1]$, αφού $f(x)=1$ για κάθε $x \in B$ (διαφορετικά αν $f(x)<1$ τότε $x \in A_q$ με $q \le 1$ οπότε $x \in A_q \subset A_1 = X \setminus B$ αντίφαση) και αν $x \in X \setminus B$, τότε $x \in A_1$ άρα $f(x) \le 1$.
Μάλιστα αν $x \in A$ τότε $x \in A_0$ οπότε $f(x)=0$
Δηλ. η f είναι η ζητούμενη συνεχής που $f(A)=\{0\}$ και $f(B)=\{1\}$.

<u>Κατασκευή της οικογένειας</u>

Ορίζουμε τα σύνολα A_{q_n}, $n \in \mathbb{N}$ επαγωγικά: Έστω $n \ge 1$ και υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί τα $A_{q_0}, \dots, A_{q_n}$ ώστε αν $q_k < q_\lambda$ τότε $\overline{A_{q_k}} \subset A_{q_\lambda}$, όπου $k, \lambda \le n$.
Ορίζουμε το $A_{q_{n+1}}$ ως εξής: Υπάρχουν τα

$$q_{k_0} = \max\{q_i : q_i < q_{n+1}, 0 \le i \le n\}$$

$$q_{\lambda_0} = \min\{q_i : q_i > q_{n+1}, 0 \le i \le n\}$$

Από επαγωγική υπόθεση $\overline{A_{q_{k_0}}} \subset A_{q_{\lambda_0}}$ γιατί $q_{k_0} < q_{\lambda_0}$
Αφού ο X είναι φυσιολογικός, από την πρόταση 3.2(β) υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $A_{q_{n+1}}$ ώστε $\overline{A_{q_{k_0}}} \subset A_{q_{n+1}} \subset \overline{A_{q_{n+1}}} \subset A_{q_{\lambda_0}}$.
Από την επιλογή των q_{k_0}, q_{λ_0} είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι αν $k, \lambda \le n+1$ και $q_k < q_\lambda$ τότε $\overline{A_{q_k}} \subset A_{q_\lambda}$. ο.ε.δ.

3.7 Θεώρημα (H. Tietze) Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(a) Ο X είναι φυσιολογικός

(b) Για κάθε κλειστό σύνολο $A \subset X$ και συνεχή συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $F/A = f$. Επιπλέον, αν $f(A) \subset (-\infty, \alpha)$, $\alpha > 0$, τότε η F μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $F(x) \subset (-\infty, \alpha)$

Απόδειξη: (b)$\Rightarrow$(a). Έστω $A, B \subset X$ δύο κλειστά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$. Το σύνολο $A \cup B$ είναι κλειστό στον X. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) = 0$ και $f(B) = 1$. Αφού $A \cap B = \emptyset$ η f είναι συνεχής. Σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει συνεχής $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $F|_{A \cup B} = f$. Τα σύνολα σύνολα $V = F^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$, $W = F^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty)$ είναι ξένα, ανοιχτά και $A \subset V$, $B \subset W$. ο.ε.δ.

Για την απόδειξη του αντίστροφου θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα:

3.8. Λήμμα. Έστω X ένας φυσιολογικός χώρος, $A \subset X$ ένα κλειστό σύνολο και $g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $|g(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in A$, όπου $\alpha > 0$. Τότε υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $h: X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $|h(x)| \leq \frac{\alpha}{3}$ για κάθε $x \in X$

(ii) $|g(x) - h(x)| \leq \frac{2}{3}\alpha$ για κάθε $x \in A$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα σύνολα $B_1 = \{x \in A : g(x) \geq \frac{1}{3}\alpha\}$, $B_2 = \{x \in A : g(x) \leq -\frac{1}{3}\alpha\}$. Τότε προφανώς $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Επειδή τα B_1, B_2 είναι κλειστά στο A και το A είναι κλειστό στον X, τα B_1, B_2 είναι κλειστά στον X. Από το Λήμμα του Urysohn υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $h: X \to \mathbb{R}$ με $h(B_1) = \frac{1}{3}a$, $h(B_2) = -\frac{1}{3}a$ και $h(X) \subset [-\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a]$

Είναι προφανές ότι η h ικανοποιεί τις (i) και (ii).

<u>Απόδειξη του (a) ⇒ (b) στο θεώρημα του Tietze.</u>

Έστω κατ' αρχήν ότι $f(A) \subset [-a, a]$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.8 οπότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h_0: X \to [-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}]$ ώστε $|f(x) - h_0(x)| \leq \frac{2}{3}a$ για κάθε $x \in A$.

Εφαρμόζουμε πάλι το Λήμμα 3.8 για την $f - h_0: A \to \mathbb{R}$ οπότε υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $h_1: X \to [\frac{1}{3}\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}\frac{2}{3}a]$ με $|f(x) - h_0(x) - h_1(x)| \leq \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}a$ για κάθε $x \in A$.

Επαγωγικά τώρα αν οι $h_0, \dots, h_n$ έχουν οριστεί, υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $h_{n+1}: X \to \mathbb{R}$ με $|h_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n a$, $x \in X$ και $|f(x) - h_0(x) - \dots - h_{n+1}(x)| \leq \frac{2}{3}\cdot(\frac{2}{3})^n a$. για κάθε $x \in A$.

Δηλ. $|f(x) - \sum_{k=0}^{n} h_k(x)| \leq (\frac{2}{3})^n a$ για κάθε $x \in A$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Επειδή η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^k a$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $F: X \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής.

Επίσης $|F(x)| \leq \frac{1}{3}a \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = a$ για κάθε $x \in X$ ενώ αν $x \in A$ τότε $|f(x) - F(x)| \leq |f(x) - \sum_{k=0}^{n} h_k(x)| + |\sum_{k=0}^{n} h_k(x) - F(x)| \to 0$. όταν $n \to +\infty$. Άρα $F|A = f$.

Έστω τώρα ότι $f(A) \subset (-a,a)$. Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα υπάρχει συνεχής επέκταση $F: X \to \mathbb{R}$ με $F(A) \subset [-a,a]$. Το σύνολο $B = \{x \in X : |F(x)| = a\}$ είναι κλειστό στο X και $A \cap B = \emptyset$, αφού η F είναι επέκταση της f. Αφού ο X είναι φυσιολογικός, από το θεώρημα του Urysohn υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $\phi: X \to [0,1]$ με $A \subset \phi^{-1}(1)$, $B \subset \phi^{-1}(0)$.
Η συνάρτηση $G = \phi \circ F : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής επέκταση της f, ενώ αν $x \in B$ τότε $G(x) = 0$ και όταν $x \in X \setminus B$ τότε

$$|G(x)| = |\phi(x)| \cdot |F(x)| < 1 \cdot a = a.$$

Αν η f δεν είναι φραγμένη θεωρούμε τον ομοιομορφισμό $\psi: \mathbb{R} \to (-1,1)$ με τύπο $\psi(t) = \dfrac{t}{1+|t|}$. Από τα προηγούμενα, η συνεχής συνάρτηση $\psi \circ f : A \to (-1,1)$ έχει μία συνεχή επέκταση $F: X \to (-1,1)$. Τότε η $\psi^{-1} \circ F : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής επέκταση της f αφού για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$\psi^{-1} \circ F(x) = \psi^{-1} \circ \psi \circ f(x) = f(x) \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

<u>38 Θεώρημα</u> Κάθε κανονικός $2^{ος}$ αριθμήσιμος χώρος X είναι φυσιολογικός.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία βάση της τοπολογίας του X. Έστω $A, B \subset X$ δύο κλειστά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$. Αφού ο X είναι κανονικός, για κάθε $x \in A$ υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή $B_{n(x)} \in \mathcal{B}$ με $\overline{B_{n(x)}} \cap B = \emptyset$. Όμοια για κάθε $y \in B$ υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή $B_{n(y)} \in \mathcal{B}$ με $\overline{B_{n(y)}} \cap A = \emptyset$. Έστω ότι

$\{B_{n(x)} : x \in A\} = \{B_{n_1}, B_{n_2}, \dots\}$ και $\{B_{n(y)} : y \in B\} = \{B_{m_1}, B_{m_2}, \dots\}$

Ορίζουμε τα σύνολα $B'_{n_k} = B_{n_k} \setminus (\overline{B}_{m_1} \cup \cdots \cup \overline{B}_{m_k})$ και $B'_{m_k} = B_{m_k} \setminus (\overline{B}_{n_1} \cup \cdots \cup \overline{B}_{n_k})$ που είναι ανοιχτά. Θέτουμε $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} B'_{n_k}$, $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} B'_{m_k}$. Τα V, W είναι ανοιχτά, $A \subset V$ και $B \subset W$. Επιπλέον $V \cap W = \emptyset$. Πράγματι, αν $x \in V \cap W$ τότε υπάρχουν n_k, m_λ τ.ω $x \in B'_{n_k} \cap B'_{m_\lambda} \neq \emptyset$, δηλαδή

$$x \in B_{n_k} \cap B_{m_\lambda} \cap \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}_{m_i}\right) \cap \left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{\lambda} \overline{B}_{n_j}\right) \neq \emptyset$$

Αν $k \geq \lambda$ τότε $B_{m_\lambda} \cap \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}_{m_i}\right) = \emptyset$, αντίφαση όμοια αν $k \leq \lambda$. Συνεπώς $V \cap W = \emptyset$. ο.ε.δ.

4. Μετρικοποιησιμότητα.

Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε η $\rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ είναι μία μετρική στο X που είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την d, δηλαδή $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$ και $\rho \leq 1$. Έτσι για κάθε μετρικοποιήσιμο χώρο $(X, \mathcal{T})$ υπάρχει μία μετρική $d \leq 1$ με $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

4.1. Θεώρημα. Έστω X_n, $n \in \mathbb{N}$ μία (αριθμήσιμη) οικογένεια μετρικοποιήσιμων χώρων. Τότε ο χώρος γινόμενο $\prod_{i=1}^{n} X_i$ είναι μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη: Έστω $d_n \leq 1$ μία μετρική στον X_n που παράγει την τοπολογία του X_n. Αν $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θέτουμε

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Η d είναι φανερώς μετρική στο $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Θα δείξουμε ότι η d παράγει την τοπολογία γινόμενο, δηλαδή η $\mathcal{T}_d$ είναι η τοπολογία γινόμενο.

Έστω $V_{n_i} \subset X_{n_i}$ ένα ανοιχτό σύνολο $1 \le i \le k$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα σημείο στο $V_{n_1} \times \dots \times V_{n_k} \times \prod_{n \ne n_1,\dots,n_k} X_n$. Τότε $x_{n_i} \in X_{n_i}$ και

συνεπώς υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ ώστε $S(x_{n_i}, \varepsilon_i) \subset V_{n_i}$

Θέτουμε $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ και $\varepsilon = \frac{1}{2^N} \cdot \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} > 0$

Αν $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(x,\varepsilon)$ τότε $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} < \varepsilon$.

Όμως για $1 \le i \le k$ έχουμε:

$$\frac{1}{2^{n_i}} d_{n_i}(x_{n_i}, y_{n_i}) \le d(x,y) < \varepsilon = \frac{1}{2^N} \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} \le \frac{1}{2^{n_i}} \varepsilon_i$$

$\Rightarrow d_{n_i}(x_{n_i}, y_{n_i}) < \varepsilon_i \Rightarrow y_{n_i} \in V_{n_i}$. Άρα $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V_{n_1} \times \dots \times V_{n_k} \times \prod_{n \ne n_1,\dots,n_k} X_n$

Άρα τα βασικά ανοιχτά σύνολα στο $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι d-ανοιχτά και συνεπώς κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι d-ανοιχτό.

Αντίστροφα έστω $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$ θέτουμε $V_n = S(x_{n_i}, \varepsilon/2)$.

Αν $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V_1 \times \dots \times V_N \times \prod_{n>N} X_n$ τότε $d_n(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ και

συνεπώς $d(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n) <$

$$< \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ Άρα

$(d_n \le 1)$

$$V_1 \times \dots \times V_N \times \prod_{n>N} X_n \subset S(x,\varepsilon).$$

Άρα οι ανοιχτές d-μπάλες είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ και συνεπώς και κάθε d-ανοιχτό σύνολο. ο.ε.δ.

<u>4.2. Λήμμα (εμφυτεύσεως)</u> Έστω $X_i, i\in I$ μία οικογένεια χώρων, Y ένας τοπολογικός χώρος και $f_i : Y \longrightarrow X_i$ μία οικογένεια συνεχών συναρτήσεων.

Έστω $f : Y \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ η συνεχής συνάρτηση $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$

(α) Αν για κάθε $y_1 \neq y_2$ υπάρχει $i\in I$ τ.ω $f_i(y_1) \neq f_i(y_2)$ τότε η f είναι 1-1

(β) Αν για κάθε $y\in Y$ και κλειστό $F\subset Y$ με $y\notin F$ υπάρχει $i\in I$ ώστε $f_i(y) \in X_i \setminus \overline{f_i(F)}$, τότε η f είναι ανοιχτή επί του $f(Y)$.

<u>Απόδειξη:</u> Το (α) είναι προφανές. Αποδεικνύουμε το (β). Έστω $A\subset Y$ ένα ανοιχτό σύνολο. Αν $A=\emptyset$ τότε $f(A)=\emptyset$ που είναι ανοιχτό. Έστω λοιπόν ότι $A\neq\emptyset$ και $y\in A$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \prod_{i\in I} X_i$ ώστε $f(y) \subset V\cap f(Y) \subset f(A)$. Επειδή το $Y\setminus A$ είναι κλειστό και $y\notin Y\setminus A$, υπάρχει $i_0\in I$ ώστε $f_{i_0}(y) \in X_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(Y\setminus A)}$ απ' την υπόθεση. Θέτουμε $V = \left(X_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(Y\setminus A)}\right) \times \prod_{i\in I, i\neq i_0} X_i$.

Το V είναι ανοιχτό και $f(y)\in V$. Επιπλέον αν $x\in V\cap f(Y)$ τότε υπάρχει $z\in Y$ τ.ω $x = f(z) = (f_i(z))_{i\in I} \in V$. Συνεπώς $f_{i_0}(z) \in X_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(Y\setminus A)} \Rightarrow z\notin Y\setminus A \Leftrightarrow z\in A \Rightarrow x = f(z) \in f(A)$.

Άρα $V\cap f(Y) \subset f(A)$ ο.ε.δ.

4.3. Θεώρημα (P. Urysohn). Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(a) Ο X είναι κανονικός και $2^{\underline{os}}$ αριθμήσιμος

(b) Ο X είναι μετρικοποιήσιμος και $2^{\underline{os}}$ αριθμήσιμος.

Απόδειξη. Το (b) $\Rightarrow$ (a) είναι γνωστό (παράδειγμα 3.4).

(a) $\Rightarrow$ (b) Έστω $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία (αριθμήσιμη) βάση της τοπολογίας του X. Θέτουμε $P = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \overline{B_m} \subset B_n\}$. Το P είναι μη-κενό και αριθμήσιμο. Αφού ο X είναι $2^{\underline{os}}$ αριθμήσιμος και κανονικός, είναι φυσιολογικός απ' το Θεώρημα 3.8. Για κάθε $(m,n) \in P$ έχουμε $\overline{B_m} \cap (X \setminus B_n) = \emptyset$. και απ' το Λήμμα του Urysohn υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f_{m,n} : X \longrightarrow [0,1]$ με $f_{m,n}(\overline{B_m}) = \{1\}$ και $f_{m,n}(X \setminus B_n) = \{0\}$.

Επειδή το $[0,1]$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος, το αριθμήσιμο γινόμενο $[0,1]^P$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος. (Θεώρημα 4.1)

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : X \longrightarrow [0,1]^P$ με $f(x) = (f_{m,n}(x))_{(m,n) \in P}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1, και ανοιχτή. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν τα (a), (b) του Λήμματος 4.2. Έστω $x, y \in X$, $x \neq y$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \in B_n$ και $y \notin B_n$. Επειδή ο X είναι κανονικός υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $x \in B_m \subset \overline{B_m} \subset B_n$. Τότε έχουμε $f_{m,n}(x) = 1$ και $f_{m,n}(y) = 0$. Άρα ισχύει το (a) του Λήμματος 4.2. Έστω τώρα ότι $x \in X$ και $F \subset X$ ένα κλειστό σύνολο και $x \notin F$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω $x \in B_n$ και $\overline{B_n} \cap F = \emptyset \Rightarrow F \subset X \setminus \overline{B_n}$.

Αφού ο X είναι κανονικός, υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ με $x\in B_m\subset\overline{B_m}\subset B_n$, οπότε $f_{m,n}(x)=1$ ενώ $\overline{f_{m,n}(F)}\subset\overline{f_{m,n}(X\setminus\overline{B_n})}=\overline{\{0\}}=\{0\}$ και συνεπώς $f_{m,n}(x)\in[0,1]\setminus\overline{f_{m,n}(F)}$. Άρα ισχύει το (b) του Λήμματος 4.2.

Άρα ο X είναι ομοιομορφικός με υπόχωρο του $[0,1]^{P}\approx[0,1]^{\mathbb{N}}$. δηλ. μετρικοποιήσιμος.

<u>4.4. Θεώρημα.</u> Ένας μετρικοποιήσιμος χώρος X είναι 2^{os} αριθμήσιμος τότε και μόνον τότε όταν ο X έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω d μία μετρική που παράγει την τοπολογία του X.

($\Rightarrow$) Έστω ότι ο X είναι 2^{os} αριθμήσιμος και $\mathcal{B}=\{B_n:n\in\mathbb{N}\}$ μία αριθμήσιμη βάση του X. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ επιλέγουμε ένα $x_n\in B_n$. Το σύνολο $D=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον X αφού τέμνει κάθε βασικό ανοιχτό σύνολο.

($\Leftarrow$) Έστω ότι ο X έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D και $\mathcal{B}=\{S(x,q):x\in D$ και $q\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)\}$. Το $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμο και θα δείξουμε ότι αποτελεί βάση της τοπολογίας του X.

Πράγματι· έστω $A\subset X$ ένα ανοιχτό σύνολο και $a\in A$. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $S(a,\varepsilon)\subset A$. Αν $0<q<\varepsilon$, $q\in\mathbb{Q}$ τότε $S(a,q)\subset S(a,\varepsilon)\subset A$. Επειδή το D είναι πυκνό στον X, υπάρχει $x\in D\cap S(a,q/2)$. Για κάθε $y\in S(x,q/2)$ έχουμε τώρα $d(y,a)<d(y,x)+d(x,a)<q/2+q/2=q$.

Άρα: $S(x,q/2)\subset S(a,q)\subset A$. Επειδή $d(x,a)<\frac{q}{2}$, $a\in S(x,q/2)$

Άρα $a\in S(x,q/2)\subset A$ και προφανώς $S(x,q/2)\in\mathcal{B}$.

<u>4.6 Πόρισμα.</u> Έστω X ένας χώρος Hausdorff.
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(a) Ο X είναι κανονικός και $2^{\text{ος}}$ αριθμήσιμος

(β) Ο X είναι μετρικοποιήσιμος και έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.

1). Αποδείξτε ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff τότε και μόνο τότε όταν η διαγώνιος $\Delta = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.

2) Έστω X, Y δύο χώροι Hausdorff και $f : X \longrightarrow Y$ μία συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το γράφημα $G = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ της f είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$.

3) Έστω $\{x_1, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο σ' έναν χώρο Hausdorff X. Δείξτε ότι υπάρχουν ξένες ανά δύο μεταξύ τους ανοιχτές περιοχές $V_i \in \mathcal{U}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$.

4) Έστω X ένας χώρος Hausdorff με άπειρο το πλήθος στοιχεία. Δείξτε ότι ο X περιέχει έναν αριθμήσιμο διακριτό υπόχωρο με άπειρα στοιχεία.

5) Δείξτε ότι το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι χώρος Hausdorff.

6) Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Στον χώρο γινόμενο $X \times [0,1]$ θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $(x,1) \sim (x',1)$ για κάθε $x, x' \in X$. Δείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $X \times [0,1]/\sim$ είναι Hausdorff.

7) Έστω X ένας κανονικός χώρος και $A \subset X$ ένα κλειστό σύνολο. Δείξτε ότι $A = \bigcap \{V \subset X : V \text{ ανοιχτό και } A \subset V\}$.

8) Έστω X ένας κανονικός χώρος και $A \subset X$ ένα κλειστό σύνολο Δείξτε οτι ο χώρος πηλίκο X/A είναι Hausdorff.

9) Έστω X ένας κανονικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $V \in \mathcal{U}(x)$, $W \in \mathcal{U}(y)$ με $\overline{V} \cap \overline{W} = \emptyset$.

10) Έστω $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Στον X θεωρούμε την τοπολογία $\mathcal{T}$ που στο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ταυτίζεται με την ευκλείδια, ενώ οι ανοιχτές περιοχές των σημείων $(x_0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι τα σύνολα της μορφής $\{(x_0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < y_0^2\}$, $y_0 > 0$.

Δείξτε ότι ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ δεν είναι φυσιολογικός.

11) Δείξτε ότι κάθε κανονικός $2^{\underline{os}}$ αριθμήσιμος είναι φυσιολογικός.

12) Έστω $A \subset X$ ένα κλειστό σύνολο σ' έναν φυσιολογικό χώρο X. Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^n$ έχει συνεχή επέκταση $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

IV ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΧΩΡΟΙ

1. Συμπαγείς χώροι.

1.1. Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff λέγεται συμπαγής αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\{A_i : i\in I\}$ του X, δηλαδή τα $A_i\subset X$, $i\in I$ είναι ανοιχτά και $X=\bigcup_{i\in I} A_i$, έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχουν $i_1,\dots,i_k$ ώστε $X=A_{i_1}\cup\dots\cup A_{i_k}$.

Είναι προφανές ότι η ιδιότητα της συμπάγειας είναι τοπολογικά αναλλοίωτη.

1.2 Θεώρημα. Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(i) ο X είναι συμπαγής

(ii) Για κάθε οικογένεια $\{F_i : i\in I\}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα $\bigcap_{i\in I} F_i=\emptyset$ υπάρχουν $i_1,\dots,i_k$ με $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}=\emptyset$.

(iii) Για κάθε οικογένεια $\{F_i : i\in I\}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, δηλαδή $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}\neq\emptyset$ για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{i_1,\dots,i_k\}\subset I$, ισχύει $\bigcap_{i\in I} F_i\neq\emptyset$.

Απόδειξη (i)$\Rightarrow$(ii) Τα σύνολα $X\setminus F_i=A_i$, $i\in I$ είναι ανοιχτά και $\bigcup_{i\in I} A_i=\bigcup_{i\in I}(X\setminus F_i)=X\setminus\bigcap_{i\in I} F_i=X\setminus\emptyset=X$. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $i_1,\dots,i_k$ με $X=A_{i_1}\cup\dots\cup A_{i_k}=(X\setminus F_{i_1})\cup\dots\cup(X\setminus F_{i_k})=$

$=X\setminus\left(\bigcap_{\lambda=1}^{k} F_{i_\lambda}\right)$. Συνεπώς $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}=\emptyset$.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) προφανές

(iii)$\Rightarrow$(i). Έστω $\{A_i : i\in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του X. Θέτουμε

$F_i = X \setminus A_i$. Τότε τα F_i, $i\in I$ είναι κλειστά και $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Άρα υπάρχουν $i_1,\dots,i_k$ τ.ω $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}=\emptyset \Leftrightarrow X\setminus(A_{i_1}\cup\dots\cup A_{i_k})=\emptyset$ $\Rightarrow X = A_{i_1}\cup\dots\cup A_{i_k}$

1.3 Παραδείγματα.

α) Κάθε πεπερασμένος τοπολογικός χώρος Hausdorff είναι συμπαγής.

(β) Ένας διακριτός χώρος είναι συμπαγής τότε και μόνο τότε όταν είναι πεπερασμένος

(γ) Κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ με την σχετική ευκλείδια τοπολογία είναι συμπαγής χώρος. Έστω $\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του $[a,b]$. Θέτουμε

$$A=\{x\in[a,b] : \text{το } [a,x] \text{ καλύπτεται από πεπερασμένα στοιχεία του } \mathcal{A}\}$$

Τότε προφανώς $a\in A$ και $A\neq\emptyset$. Θέτουμε $t=\sup A$, οπότε $a\le t\le b$. Έστω ότι $t<b$. Υπάρχει $i_0\in I$ τ.ω $t\in A_{i_0}$. Αφού το A_{i_0} είναι ανοιχτό στο $[a,b]$, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)\subset A_{i_0}$. Αφού $t=\sup A$ υπάρχει $x\in A$ με $t-\varepsilon<x\le t$. Υπάρχουν λοιπόν $i_1,\dots,i_k$ με $[a,x]\subset A_{i_1}\cup\dots\cup A_{i_k}$, οπότε $[a,t+\frac{\varepsilon}{2}]\subset A_{i_1}\cup\dots\cup A_{i_k}\cup A_{i_0}$ που αντιφάσκει με τον ορισμό του t. Άρα $t=b$. ο.ε.δ.

(δ) Αν $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, όπου X Hausdorff χώρος και $x_n\longrightarrow x$, τότε το $\overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}$ είναι συμπαγές.

(ε) Το $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγής χώρος π.χ. $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$, ούτε το $\mathbb{Q}$.

1.4 Πρόταση. Έστω X ένας χώρος Hausdorff και $A \subset X$ ένας υπόχωρος. Ο A είναι συμπαγής τότε και μόνο τότε όταν για κάθε οικογένεια $\{G_i : i \in I\}$ ανοιχτών υποσυνόλων του X με $A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$, υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in I$ ώστε $A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}$.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω ότι ο A είναι συμπαγής. Το $\{A \cap G_i : i \in I\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του A (στην σχετική τοπολογία του A) και συνεπώς υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in I$ τω $A = (A \cap G_{i_1}) \cup \dots \cup (A \cap G_{i_k})$ $= A \cap (G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}) \Rightarrow A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $\{A_i : i \in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του A στην σχετική τοπολογία του A. Τότε για κάθε $i \in I$ υπάρχει $G_i \subset X$ ανοιχτό με $A_i = A \cap G_i$. Προφανώς $A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$, οπότε υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in I$ τω $A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k} \Rightarrow A = A \cap (G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}) = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}$.

ο.ε.δ.

1.5. Πρόταση. Έστω X ένας συμπαγής χώρος. Τότε κάθε κλειστό υποσύνολό του είναι συμπαγές.

Απόδειξη: Έστω $A \subset X$ ένα κλειστό σύνολο και $\{G_i : i \in I\}$ μία οικογένεια ανοιχτών συνόλων του X με $A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. Τότε το $\{G_i : i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X. Συνεπώς υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in I$ ώστε $X = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k} \cup (X \setminus A)$.

Αφού $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, κατ' ανάγκη $A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}$. ο.ε.δ.

1.6. Πρόταση. Έστω Y ένας χώρος Hausdorff και X ένα συμπαγές υποσύνολο του Y και $y \in Y \setminus X$. Τότε υπάρχουν ανοιχτά σύνολα V, W με $y \in V$ και $X \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$.

<u>Απόδειξη.</u> Γιά κάθε $x \in X$ υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $V_x \in \mathcal{U}(y)$, $W_x \in \mathcal{U}(x)$ με $V_x \cap W_x = \emptyset$. Τότε $X \subset \bigcup_{x \in X} W_x$ και συνεπώς υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ με $X \subset W_{x_1} \cup \dots \cup W_{x_n}$. Θέτουμε $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ και $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$. Τα V, W είναι ανοιχτά και $y \in V$, $X \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$.

<u>1.7. Πόρισμα.</u> Κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστό.

<u>1.8. Θεώρημα.</u> Έστω X ένας χώρος Hausdorff και $A, B \subset X$ δύο συμπαγή σύνολα με $A \cap B = \emptyset$. Τότε υπάρχουν ανοιχτά σύνολα V, W με $A \subset V$, $B \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x \in A$. Τότε υπάρχουν ανοιχτά σύνολα V_x, W_x με $x \in V_x$ και $B \subset W_x$ και $V_x \cap W_x = \emptyset$. Αρα υπάρχουν, αφού ο A είναι συμπαγές και $A \subset \bigcup_{x \in A} V_x$, $x_1, \dots, x_n$ με $A \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$. Θέτουμε $V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ και $W = W_{x_1} \cap \dots \cap W_{x_n}$. Τα V, W είναι ανοιχτά, $A \subset V$, $B \subset W$ και $V \cap W = \emptyset$.

<u>1.9. Πόρισμα</u> Κάθε συμπαγής χώρος είναι φυσιολογικός

<u>1.10 Πόρισμα.</u> Κάθε συμπαγής $2^{ος}$ αριθμήσιμος είναι μετρικοποιήσιμος.

<u>Απόδειξη των πορισμάτων:</u> Αν $A, B \subset X$ είναι δύο κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς χώρου X με $A \cap B = \emptyset$, τότε τα A, B είναι συμπαγή, από την πρόταση 1.5. Το συμπέρασμα προκύπτει λοιπόν από το θεώρημα 1.8. Αν ο X είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος

τότε είναι μετρικοποιήσιμος από το θεώρημα μετρικοποιήσεως του Urysohn.

1.11. Πρόταση Έστω X ένας κανονικός χώρος και $A \subset X$ ένα συμπαγές σύνολο. Για κάθε ανοιχτό σύνολο $W \supset A$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset X$ με $A \subset V \subset \overline{V} \subset W$.

Απόδειξη Αφού ο X είναι κανονικός, για κάθε $x \in A \subset W$ υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή $V_x \in \mathcal{U}(x)$ με $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset W$. Τότε $A = \bigcup\limits_{x \in A} V_x$ και αφού το A είναι συμπαγές υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in A$ με $A \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Θέτουμε $V = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Τότε $A \subset V \subset \overline{V} = \overline{V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}} = \overline{V_{x_1}} \cup \cdots \cup \overline{V_{x_n}} \subset W$.

1.12. Πρόταση. Αν οι χώροι X, Y είναι συμπαγείς, τότε ο $X \times Y$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Επειδή τα σύνολα της μορφής $V \times W$, όπου τα $V \subset X$, $W \subset Y$ είναι ανοιχτά, αποτελούν βάση της τοπολογίας του $X \times Y$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοιχτό κάλυμμα του $X \times Y$ της μορφής $\{V_i \times W_i : i \in I\}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Έστω $x \in X$. Επειδή το $\{x\} \times Y$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $i_1(x), \ldots, i_{\kappa(x)}(x) \in I$ τ.ω $\{x\} \times Y \subset \bigcup\limits_{\lambda=1}^{\kappa(x)} V_{i_\lambda(x)} \times W_{i_\lambda(x)}$. Το σύνολο $V_x = \bigcap\limits_{\lambda=1}^{\kappa(x)} V_{i_\lambda(x)}$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και $V_x \times Y \subset \bigcup\limits_{\lambda=1}^{\kappa(x)} V_{i_\lambda(x)} \times W_{i_\lambda(x)}$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in X$ ώστε $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Έτσι έχουμε $X \times Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i} \times Y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigcup\limits_{\lambda=1}^{\kappa(x_i)} V_{i_\lambda(x_i)} \times W_{i_\lambda(x_i)}$ ο.ε.δ.

<u>1.13. Πόρισμα.</u> Αν οι χώροι $X_1, \dots, X_k$ είναι συμπαγείς τότε και ο $X_1 \times \dots \times X_k$ είναι.

<u>1.14 Πόρισμα.</u> Αν $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$ τότε το $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ είναι συμπαγές.

<u>1.15 Πόρισμα (Heine - Borel).</u> Ένα υποσύνολο X του ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές τότε και μόνο τότε όταν είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω ότι το X είναι συμπαγές. Τότε το X είναι κλειστό αφού ο $\mathbb{R}^n$ είναι Hausdorff. (Πρόταση 1.6). Επίσης

$$X \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (-k, k)^n.$$

Άρα υπάρχουν $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ τ.ω

$$X \subset (-n_1, n_1)^n \cup \dots \cup (-n_k, n_k)^n \subset (-N, N)^n$$

όπου $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Άρα το X είναι φραγμένο.

($\Leftarrow$) Αν το X είναι κλειστό και φραγμένο, τότε υπάρχει ένα $k \in \mathbb{N}$ ώστε $X \subset [-k, k] \times \dots \times [-k, k] = [-k, k]^n$, που είναι συμπαγές. Άρα το X είναι συμπαγές (πρόταση 1.5).

<u>1.16. Θεώρημα.</u> Έστω X ένας συμπαγής χώρος και Y ένας χώρος Hausdorff. και έστω $f: X \longrightarrow Y$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Το $f(X)$ είναι συμπαγές

(β) Η f είναι κλειστή

(γ) Αν η f είναι 1-1 και επί τότε είναι ομοιομορφισμός.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\{V_i : i \in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του $f(X)$.

Τότε το $\{f^{-1}(V_i): i\in I\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του X και συνεπώς υπάρχουν $i_1,\dots,i_k\in I$ με $X=f^{-1}(V_{i_1})\cup\dots\cup f^{-1}(V_{i_k})$.
Άρα $f(X)=V_{i_1}\cup\dots\cup V_{i_k}$

(β) Αν το $F\subset X$ είναι κλειστό, τότε το F είναι συμπαγές και από το (α) το $f(F)$ είναι συμπαγές. Αφού ο Y είναι Hausdorff το $f(F)$ είναι κλειστό στο Y.

(γ) Προφανές.

1.17. Παρατηρήσεις.

(α) Το Θεώρημα 1.16 (β) δεν ισχύει αν ο Y δεν είναι Hausdorff. Για παράδειγμα, έστω ότι $X=\{0,1\}$ με την διακριτή τοπολογία και Y ο χώρος του Sierpinski, που ως γνωστό δεν είναι Hausdorff. Ο X είναι συμπαγής, η (συνεχής) συνάρτηση $f: X\longrightarrow Y$ με $f(0)=0$, $f(1)=0$ δεν είναι κλειστή αφού η τοπολογία του Y είναι η $\mathcal{T}=\{\emptyset, X, \{0\}\}$. Το ίδιο ισχύει και για την $id: X\to Y$.

(β) Μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' έναν συμπαγή χώρο δεν είναι πάντα ανοιχτή. Για παράδειγμα, αν $X=[0,1]\cup\{2\}$ $Y=[0,1]$ με τις ευκλείδιες τοπολογίες και $f: X\to Y$ με $f(x)=\frac{1}{2}x$ τότε το $\{2\}$ είναι ανοιχτό στον X, αλλά το $f(\{2\})=\{1\}$ δεν είναι ανοιχτό στον Y.

(γ) Το σύνολο του Cantor C είναι ομοιομορφικό με το $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$.

1.18 Θεώρημα. Έστω X ένας συμπαγής χώρος και $f: X\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2\in X$ ώστε

$$f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2) \quad \text{για κάθε } x\in X.$$

<u>Απόδειξη</u> Επειδή ο X είναι συμπαγής χώρος το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα κλειστό και φραγμένο. Άρα λοιπόν τα $a = \inf f(X)$, $b = \sup f(X)$ είναι πραγματικοί αριθμοί και επειδή το $f(X)$ είναι κλειστό, περιέχονται στο $f(X)$. ο.ε.δ.

<u>2. Συμπαγείς μετρικοί χώροι</u>

<u>2.1 Λήμμα (Lindelöf)</u> Έστω X ένας 2^{os} αριθμήσιμος χώρος. Τότε κάθε ανοιχτό κάλυμμα του X έχει ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας του X. Έστω $\{V_i : i \in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του X. Θεωρούμε το σύνολο $P = \{n \in \mathbb{N} : \text{υπάρχει } i \in I \text{ με } B_n \subset V_i\} \subset \mathbb{N}$. Τότε $X = \bigcup_{n \in P} B_n$. Πράγματι· για κάθε $x \in X = \bigcup_{i \in I} V_i$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $x \in V_i$. Αφού το $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας του X, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω $x \in B_n \subset V_i$. Άρα $x \in B_n$ και $n \in P$. Για κάθε $n \in P$ επιλέγουμε τώρα ένα $i(n) \in I$ με $B_n \subset V_{i(n)}$ (αξίωμα της επιλογής). Τότε $X = \bigcup_{n \in P} B_n \subset \bigcup_{n \in P} V_{i(n)}$ και συνεπώς το $\{V_{i(n)} : n \in P\}$ είναι ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα του $\{V_i : i \in I\}$.

<u>2.2. Θεώρημα</u> Έστω X ένας μετρικοποιήσιμος χώρος. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(a) Ο X είναι συμπαγής

(β) Κάθε ακολουθία στον X έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

<u>Απόδειξη:</u> (a) $\Rightarrow$ (β): Έστω ότι $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία

στον X χωρίς συγκλίνουσα υποακολουθία. Θεωρούμε τα σύνολα.
$A_k = \overline{\{x_m : m \geq k\}}$, $k \in \mathbb{N}$ που είναι κλειστά και $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$
Πράγματι, αν $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε
$S(x, \frac{1}{k}) \cap \{x_m : m \geq k\} \neq \emptyset$, όπου $S(x, \frac{1}{k})$ είναι η ανοιχτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα $\frac{1}{k}$ για κάποια συμβιβαστή μετρική d στον X. Έτσι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\lambda_k \geqslant k$ φυσικός με $d(x, x_{\lambda_k}) < \frac{1}{k}$. Τότε η $(x_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$ είναι υποακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $x_{\lambda_k} \longrightarrow x$, αντίφαση. Αφού τώρα $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$
και ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ ώστε
$A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_m} = \emptyset$. Όμως αν $k_i = \max\{k_1, \dots, k_m\}$, τότε
$A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_m} = A_{k_i} \neq \emptyset$, αντίφαση.

(β) $\Rightarrow$ (α). Θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι ο X είναι 2ος αριθμήσιμος αποδεικνύοντας ότι ο X έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο. (Θ.4.4., III).

<u>Ισχυρισμός</u>: $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ τ.ω $X = \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon)$

<u>Απόδειξη του Ισχυρισμού</u>: Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $X \neq \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon)$ για κάθε $x_1, \dots, x_n \in X$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $x_1 \in X$ οποιοδήποτε σημείο. Τότε $X \neq S(x_1, \varepsilon)$ και συνεπώς υπάρχει $x_2 \in X \setminus S(x_1, \varepsilon)$.
Αφού $X \neq S(x_1, \varepsilon) \cup S(x_2, \varepsilon)$, υπάρχει $x_3 \in X$ με $x_3 \in X \setminus S(x_1, \varepsilon) \cup S(x_2, \varepsilon)$.
Επαγωγικά, υπάρχει λοιπόν μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε
$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} S(x_i, \varepsilon)$, συνεπώς $d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \neq m$.
Άρα η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν έχει συγκλίνουσα υποακολουθία, που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

Αφού τώρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $x_1(\varepsilon),\dots,x_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)\in X$ τ.ώ. $X=\bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} S(x_i(\varepsilon),\varepsilon)$, το σύνολο

$$D=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{x_1(\tfrac{1}{k}),\dots,x_{n(\frac{1}{k})}(\tfrac{1}{k}):k\in\mathbb{N}\right\}$$

είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον X. Δείξαμε λοιπόν ότι ο X είναι 2ος αριθμήσιμος.

Έστω τώρα ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{V_i : i\in I\}$ του X. Από το Λήμμα του Lindelöf υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα $\{V_{i_n}: n\in\mathbb{N}\}$ του X. Θα δείξουμε ότι έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα με απαγωγή στο άτοπο. Αν δεν έχει, τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει ένα σημείο $x_n\in X\setminus\bigcup_{k=1}^{n}V_{i_k}\neq\emptyset$. Η ακολουθία τώρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει απ' την υπόθεση μία συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ πράγμα που οδηγεί σε άτοπο. Πράγματι· αν $x_{n_k}\to x\in X$ τότε υπάρχει $k_0\in\mathbb{N}$ ώστε $x\in V_{i_{k_0}}$ που είναι ανοιχτό και συνεπώς $x_{n_k}\in V_{i_{k_0}}$ για κάθε $k\geq K$ για κάποιο $K\in\mathbb{N}$. Όμως για $k\geq k_0, K$ έχουμε $x_{n_k}\in (X\setminus\bigcup_{\lambda=1}^{k}V_{i_\lambda})\cap V_{i_{k_0}}=\emptyset$, άτοπο.

<u>2.3. Πόρισμα.</u> Κάθε συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος είναι 2ος αριθμήσιμος

Τα ανοιχτά καλύμματα των συμπαγών μετρικών χώρων έχουν την ακόλουθη σπουδαία ιδιότητα.

<u>2.4 Θεώρημα (Lebesgue)</u> Έστω (X,d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $\{V_i : i\in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει $\lambda>0$ που λέγεται αριθμός Lebesgue του καλύμματος ώστε για κάθε $x\in X$ υπάρχει $i\in I$ με $S(x,\lambda)\subset V_i$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $x \in V_i$ και συνεπώς υπάρχει $\varepsilon(x) > 0$ $S(x, \varepsilon(x)) \subset V_i$. Το $\{ S(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}) : x \in X \}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X και συνεπώς, αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2})$

Θέτουμε $\lambda = \min \{ \frac{\varepsilon(x_1)}{2}, \dots, \frac{\varepsilon(x_n)}{2} \} > 0$. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i : 1 \leq i \leq n$ με $x \in S(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2})$ και συνεπώς για κάθε $y \in S(x, \lambda)$ έχουμε

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \lambda + \frac{\varepsilon(x_i)}{2} \leq \frac{\varepsilon(x_i)}{2} + \frac{\varepsilon(x_i)}{2} = \varepsilon(x_i)$$

Άρα $y \in S(x, \varepsilon(x_i)) \subset V_i$. Αυτό δείχνει ότι $S(x, \lambda) \subset V_i$. ο.ε.δ.

2.5 Πόρισμα (ομοιόμορφη ~~σύγκλιση~~ συνέχεια)

Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και (Y, ρ) ένας μετρικός χώρος και $f : X \longrightarrow Y$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω αν $x, y \in X$ και $d(x, y) < \delta$, τότε $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ ο αριθμός Lebesgue του ανοιχτού καλύμματος $\{ f^{-1}(S(z, \frac{\varepsilon}{2})) : z \in Y \}$ του X. Αν τώρα $x, y \in X$ και $d(x, y) < \delta$ τότε $y \in S(x, \delta)$ και υπάρχει $z \in Y$ ώστε $S(x, \delta) \subset f^{-1}(S(z, \frac{\varepsilon}{2}))$, δηλαδή $f(S(x, \delta)) \subset S(z, \frac{\varepsilon}{2})$

Άρα $f(y) \in S(z, \frac{\varepsilon}{2})$ και κατά συνέπεια,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), z) + d(f(y), z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Τοπικά συμπαγείς χώροι

3.1 Ορισμός. Ένας χώρος Hausdorff X λέγεται τοπικά συμπαγής αν κάθε σημείο του έχει τουλάχιστον μία συμπαγή περιοχή στον X.

Είναι προφανές ότι η τοπική συμπάγεια είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.

3.2 Παραδείγματα

(α) Κάθε συμπαγής χώρος είναι τοπικά συμπαγής

(β) Ο ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συμπαγής αλλά όχι συμπαγής.

(γ) Κάθε διακριτός χώρος είναι τοπικά συμπαγής.

(δ) Κάθε κλειστός ή ανοιχτός υπόχωρος ενός τοπικά συμπαγή χώρου είναι τοπικά συμπαγής.

3.3. Πρόταση. Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος και $x \in X$. Τότε για κάθε $W \in \mathcal{U}(x)$ υπάρχει μία συμπαγής περιοχή $V \in \mathcal{U}(x)$ με $V \subset W$.

Απόδειξη: Επειδή ο X είναι τοπικά συμπαγής χώρος υπάρχει μια συμπαγής περιοχή $U \in \mathcal{U}(x)$. Το U είναι συμπαγής χώρος και συνεπώς κανονικός. Αφού $U \cap W \in \mathcal{U}(x)$, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο G στο U ώστε $x \in G \subset cl_U G \subset U \cap W$.

Αφού το U είναι κλειστό στον X, ως συμπαγές, από την $G \subset U \cap W \subset U$ έχουμε $\overline{G} \subset \overline{U} = U$. Θεωρούμε τώρα $V = \overline{G}$. Το είναι τότε περιοχη του x, συμπαγές, αφού είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς U και $V = \overline{G} = \overline{G} \cap U = cl_U G \subset U \cap W \subset W$. ο.ε.δ.

3.4. Πόρισμα. Κάθε τοπικά συμπαγής χώρος είναι κανονικός.

3.5 Πόρισμα. Κάθε τοπικά συμπαγής $2^{\text{ος}}$ αριθμήσιμος είναι μετρικοποιήσιμος.

Κάθε τοπικά συμπαγής χώρος X μπορεί να εμφυτευθεί σ' έναν συμπαγή χώρο $\hat{X}$ ώστε το $\hat{X} \setminus X$ να είναι μονοσύνολο. Έστω ∞ ένα σύμβολο με $\infty \notin X$. Θέτουμε $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Στο $\hat{X}$ θεωρούμε την τοπολογία

$$\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\hat{X} \setminus C : C \subset X \text{ συμπαγές}\} \cup \{\emptyset, \hat{X}\}.$$

όπου $\mathcal{T}$ είναι η τοπολογία του X. Είναι προφανές ότι $\hat{\mathcal{T}}_X = \mathcal{T}$. και συνεπώς η $id : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ είναι εμφύτευση.

3.6. Λήμμα. Ο $\hat{X}$ είναι συμπαγής χώρος.

Απόδειξη Δείχνουμε κατ' αρχήν ότι ο $\hat{X}$ είναι Hausdorff. Αρκεί να δείξουμε ότι το ∞ και το $x \in X$ ξεχωρίζονται με ανοιχτά σύνολα. Επειδή ο X είναι τοπικά συμπαγής υπάρχει μία συμπαγής περιοχή $V \subset X$ του $x \in X$. Συνεπώς το $\hat{X} \setminus V$ είναι μία ανοιχτή περιοχή του ∞ και το V° μία ανοιχτή περιοχή του x με $(\hat{X} \setminus V) \cap V^\circ = \emptyset$. Άρα ο $\hat{X}$ είναι Hausdorff. Έστω τώρα $\{V_i : i \in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του $\hat{X}$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $\infty \in V_{i_0}$. Συνεπώς το $V_{i_0} = \hat{X} \setminus C$ για κάποιο $C \subset X$ συμπαγές. Επειδή το C είναι συμπαγές υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in I$ με $C \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}$. Προφανώς τώρα $\hat{X} = V_{i_0} \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}$. ο.ε.δ.

3.7. Θεώρημα. Για κάθε τοπικά συμπαγή χώρο X υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος συμπαγής χώρος $\hat{X}$ στον οποίο ο X μπορεί να εμφυτευθεί έτσι ώστε το $\hat{X} \setminus X$ να είναι μονοσύνολο.

Απόδειξη. Όπως είδαμε παραπάνω ένας τέτοιος χώρος υπάρχει. Έστω τώρα ότι υπάρχει και ένας δεύτερος $\hat{Y} = X \cup \{\alpha\}$.
Θα δείξουμε ότι $\hat{X} \approx \hat{Y}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : \hat{X} \to \hat{Y}$ με $h(x) = x$ όταν $x \in X$ και $h(\infty) = \alpha$. Η h είναι προφανώς 1-1 και επί. Θα δείξουμε ότι είναι συνεχής. Έστω $A \subset \hat{Y}$ ένα ανοιχτό σύνολο. Αν $A \subset X$ τότε $h^{-1}(A) = A$. Αν το A περιέχει το α, τότε το $C = \hat{Y} \setminus A$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.
Τότε $A = \hat{Y} \setminus C$, ενώ $h^{-1}(C) = C$ που είναι συμπαγές υποσύνολο του $\hat{X}$.
Αφού η h είναι 1-1 και επί, έχουμε $h^{-1}(A) = h^{-1}(\hat{Y} \setminus C) = \hat{X} \setminus h^{-1}(C)$ $= \hat{X} \setminus C$ που είναι ανοιχτό στον $\hat{X}$. Άρα η h είναι συνεχής και συνεπώς ομοιομορφισμός αφού ο $\hat{X}$ είναι συμπαγής.

Ο χώρος $\hat{X}$ λέγεται η Alexandroff συμπαγοποίηση του X.

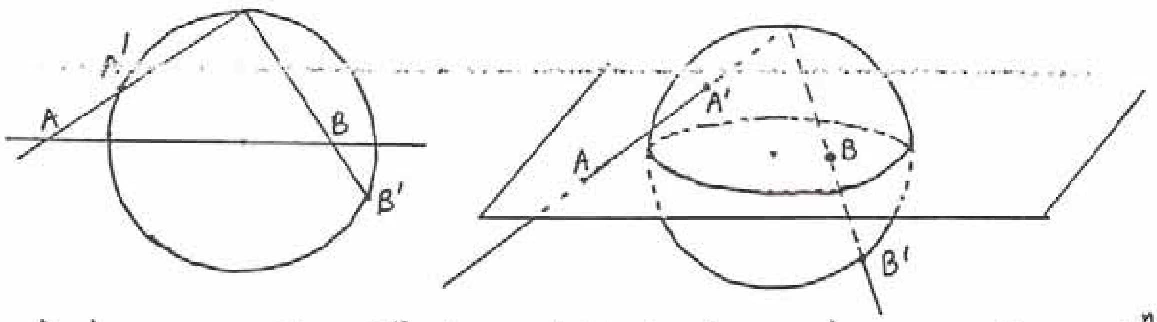
3.8. Παραδείγματα.

(α) Αν $X = (0,1]$, τότε $\hat{X} = [0,1]$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3.7.

(β) Ο ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ μπορεί να εμφυτευθεί στον $S^n \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$. μέσω της στερεογραφικής εμφύτευσης:

$$i(x) = i(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right).$$

όπου $x = (x_1,\dots,x_n)$.



Αφού η n-σφαίρα S^n είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο στο $\mathbb{R}^{n+1}$) προκύπτει ότι η Alexandroff συμπαγοποίηση του $\mathbb{R}^n$ είναι η n-σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

Οι τοπικά συμπαγείς χώροι έχουν την ακόλουθη ιδιότητα που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην ανάλυση:

<u>3.9 Θεώρημα (Baire)</u> Η τομή κάθε αριθμήσιμης οικογένειας ανοιχτών και πυκνών υποσυνόλων ενός τοπικά συμπαγούς χώρου X είναι πυκνό υποσύνολο του X.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία αριθμήσιμη οικογένεια ανοιχτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Πρέπει να δείξουμε ότι $V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$ για κάθε μη-κενό ανοιχτό σύνολο $V \subset X$. Επειδή το D_1 είναι πυκνό έχουμε $V \cap D_1 \neq \emptyset$. Επειδή το D_1 είναι ανοιχτό, το $V \cap D_1$ είναι λοιπόν μη-κενό και ανοιχτό. Έστω $x_1 \in V \cap D_1$. Επειδή ο X είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει μία συμπαγής περιοχή B_1 του x με $x \in B_1^\circ \subset B_1 \subset V \cap D_1$. Επειδή το D_2 είναι πυκνό στον X, έχουμε $B_1^\circ \cap D_2 \neq \emptyset$. Το $B_1^\circ \cap D_2$ είναι και ανοιχτό γιατί το D_2 είναι ανοιχτό. Έστω $x_2 \in B_1^\circ \cap D_2$. Υπάρχει τώρα μία συμπαγής περιοχή του x_2

με $x_2 \in B_2^\circ \subset B_2 \subset B_1^\circ \cap D_2$. Επαγωγικά, υπάρχει μία ακολουθία $\{B_n : n\in\mathbb{N}\}$ μη κενών συμπαγών συνόλων ώστε $B_{n+1} \subset B_n^\circ \cap D_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς η $\{B_n : n\in\mathbb{N}\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και $B_n \subset B_1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αφού το B_1 είναι συμπαγές, από το Θεώρημα 1.2 προκύπτει ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$. Όμως τότε έχουμε $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V\cap D_n = V \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right)$. ο.ε.δ.

<u>3.10 Πόρισμα.</u> Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος και $\{F_n : n\in\mathbb{N}\}$ μία ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X. Αν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, τότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $F_n^\circ \neq \emptyset$.

<u>Απόδειξη.</u> Αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = \emptyset$. Τα $X\setminus F_n$ είναι ανοιχτά και συνεπώς απ' το Θεώρημα του Baire δεν είναι όλα πυκνά στον X. Άρα υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τ.ω.

$$\overline{X\setminus F_n} \neq X \iff F_n^\circ = X \setminus \left(\overline{X\setminus F_n}\right) \neq \emptyset.$$

<u>3.11. Παρατήρηση.</u> Οι υποθέσεις της "ανοιχτότητας" και του αριθμήσιμου είναι απαραίτητες στο θεώρημα Baire. Πράγματι, η υπεραριθμήσιμη οικογένεια $D_x = \mathbb{R}\setminus\{x\}$, $x\in\mathbb{R}$ ανοιχτών, πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έχει $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} D_x = \emptyset = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$.

Επίσης τα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι πυκνά αλλά όχι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και πάλι $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.

1) Έστω X ένας συμπαγής χώρος και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
   (α) Αν $f, g \in \mathcal{F}$, τότε $f \cdot g \in \mathcal{F}$.
   (β) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $f \in \mathcal{F}$ ώστε το $f^{-1}(0)$ να είναι περιοχή του x.
   Δείξτε ότι $0 \in \mathcal{F}$.

2) Δείξτε ότι το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος.

3) Έστω $SO(n, \mathbb{R})$ το σύνολο των ορθογωνίων πραγματικών $n \times n$ πινάκων με ορίζουσα 1. Στο $SO(n,\mathbb{R})$ θεωρούμε την σχετική ευκλείδια τοπολογία από το $\mathbb{R}^{n^2}$. Δείξτε ότι το $SO(n,\mathbb{R})$ είναι συμπαγές.

4) Έστω X ένας μετρικοποιήσιμος χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον X χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία. Δείξτε ότι το σύνολο Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο, διακριτό και κλειστό υποσύνολο του X.

5) Έστω X ένας μετρικοποιήσιμος χώρος. Δείξτε ότι ο X είναι συμπαγής τότε και μόνο τότε όταν για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

6) Δείξτε ότι δεν υπάρχει καμία συνεχής και επί συνάρτηση $f : S^1 \to \mathbb{R}$.

7) Έστω X ένας συμπαγής χώρος, Y ένας χώρος Hausdorff και $f : X \to Y$ μία συνεχής, επί συνάρτηση. Δείξτε ότι η τοπολογία του Y ταυτίζεται με την τοπολογία πηλίκο της f.

8) Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

9) Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών περιοχών του x με $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{x\}$. Δείξτε ότι η $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση περιοχών του x.

10) Έστω X ένας συμπαγής χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με $f_n \leq f_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μία συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, δείξτε ότι η σύγκλιση είναι και ομοιόμορφη. (Υπόδειξη: Θεωρείστε για κάθε $\varepsilon > 0$ τα σύνολα $A_n = \{x \in X : g(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$)

11) Έστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του. Δείξτε ότι για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset X$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset V$, υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{n_0} \subset V$.

12) Έστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και $f : X \to X$ μία συνεχής συνάρτηση.

(α) Αν $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X, δείξτε ότι $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $A \neq \emptyset$ τέτοιο ώστε $f(A) = A$. (Υπόδειξη: Για το (α) χρησιμοποιείστε την άσκηση 11, ενώ για το (β) θεωρείστε τα σύνολα $F_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$ όπου $f^n = f \circ \cdots \circ f$)

13) Είναι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών τοπικά συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$;

14) Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος και $C \subset X$ ένα συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι για κάθε ανοιχτό σύνολο W με $C \subset W$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο V ώστε $\overline{V}$ είναι συμπαγές και

$$C \subset V \subset \overline{V} \subset W.$$

15). Έστω X ένας τοπικά συμπαγής, $2^{\text{ος}}$ αριθμήσιμος χώρος. Δείξτε ότι υπάρχει μία ακολουθία ανοιχτών συνόλων $\{V_n : n\in\mathbb{N}\}$ ώστε το $\overline{V_n}$ είναι συμπαγές και $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Λήμμα του Lindelöf και την άσκηση 14).

16) Έστω (X,d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $A, B \subset X$, όπου το A είναι συμπαγές, το B κλειστό και $A\cap B=\emptyset$. Δείξτε ότι
$\delta(A) = \sup\{ d(x,y) : x,y\in A\} < +\infty$ και

$$d(A,B) = \inf\{ d(x,y) : x\in A,\ y\in B\} > 0$$

17). Έστω $C[0,1] = \{ f \,/\, f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ συνεχής}\}$ εφοδιασμένος με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης που ορίζεται από την μετρική $d(f,g) = \sup\{ |f(t)-g(t)| : t\in[0,1]\}$.
Δείξτε ότι ο $C[0,1]$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.
(Υπόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι σε κάθε ανοιχτή μπάλα με κέντρο την μηδενική συνάρτηση υπάρχει μία ακολουθία συναρτήσεων στο $C[0,1]$ που δεν έχει καμία υπακολουθία που να συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνεχή συνάρτηση).

V ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

1. Συνεκτικοί χώροι

1.1. Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ο X λέγεται συνεκτικός αν δεν υπάρχουν μη κενά $A, B \subset X$ ανοιχτά σύνολα με $A \cap B = \emptyset$ και $X = A \cup B$.

Ένα υποσύνολο $Y \subset X$ λέγεται συνεκτικό αν είναι συνεκτικό ως υπόχωρος του X.

1.2. Παραδείγματα

(α) Ένας διακριτός χώρος είναι συνεκτικός τότε και μόνο τότε όταν είναι μονοσύνολο.

Ένας χώρος στον οποίο τα μόνα συνεκτικά σύνολα είναι τα μονοσύνολα λέγεται ολικά μη-συνεκτικός.

(β) Ο χώρος Sierpinski είναι συνεκτικός.

(γ) Ο χώρος $\mathbb{R}_n$ δεν είναι συνεκτικός γιατί τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{R}_n : x \leq 1\}$ $B = \{x \in \mathbb{R}_n : x > 1\}$ είναι ανοιχτά στο $\mathbb{R}_n$, $A \cap B = \emptyset$ και $\mathbb{R}_n = A \cup B$.

(δ) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ αφού τα $A = \mathbb{Q} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{2}\}$, $B = \mathbb{Q} \cap \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\}$ είναι ανοιχτά στο $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q} = A \cup B$ και $A \cap B = \emptyset$.

1.3. Θεώρημα. Τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα μονοσύνολα, το $\mathbb{R}$ και τα κάθε είδους διαστήματα. Άρα το $\mathbb{Q}$ είναι ολικά μη-συνεκτικό.

Απόδειξη: Έστω $Y \subset \mathbb{R}$ ένα συνεκτικό σύνολο, όχι μονοσύνολο. Αν το Y δεν είναι διάστημα, τότε υπάρχουν $a, b \in Y$ και $c \notin Y$.

Τα ανοιχτά στο Y σύνολα $A=\{x\in Y: x<c\}$, $B=\{x\in Y: x>c\}$ είναι μη κενά, $A\cap B=\emptyset$ και $A\cup B=Y$, δηλαδή το Y δεν είναι συνεκτικό, αντίφαση

Αντίστροφα: Έστω Y ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και έστω ότι το Y δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν A, B ανοιχτά σύνολα στο Y μη κενά ώστε $A\cap B=\emptyset$ και $Y=A\cup B$. Υπάρχουν $a\in A$, $b\in B$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a<b$. Θέτουμε $t=\sup\{x\in\mathbb{R}: [a,x)\subset A\}$. Τότε $t\leq b$ και αφού το Y είναι διάστημα $[a,t]\subset[a,b]\subset Y$. Επίσης $t\in cl_Y A=A$, αφού $A=Y\setminus B$ και το B είναι ανοιχτό στο Y. Άρα $t<b$. Επίσης επειδή το A είναι ανοιχτό στο Y και $t<b$, υπάρχει $\varepsilon>0$ με $t+\varepsilon<b$, ώστε $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)\cap Y\subset A$. Όμως αφού το Y είναι διάστημα, προκύπτει ότι $(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\subset Y$ και συνεπώς $(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\subset A$, πράγμα που αντιφάσκει με τον ορισμό του t.

<u>1.4. Λήμμα.</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι συνεκτικός

(β) Τα μοναδικά ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του X είναι τα $\emptyset$ και X.

<u>Απόδειξη</u> (α)$\Rightarrow$(β) Αν το $A\subset X$ είναι ανοιχτό και κλειστό και $A\neq\emptyset$, τότε το $X\setminus A$ είναι ανοιχτό και κλειστό και $X=A\cup(X\setminus A)$. Αφού ο X είναι συνεκτικός, κατ' ανάγκη $X\setminus A=\emptyset$, άρα $A=X$.

(β)$\Rightarrow$(α) Αν $X=A\cup B$, όπου τα A, B είναι μη κενά, ανοιχτά και $A \cap B = \emptyset$ τότε το $A = X \setminus B$ είναι ανοιχτό και κλειστό, και μη κενό, αντίφαση.

Είναι προφανές ότι η συνεκτικότητα είναι τοπολογικά αναλλοίωτη ιδιότητα.

<u>1.5. Πρόταση.</u> Έστω $f : X \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση του χώρου X επί του Y. Αν ο X είναι συνεκτικός, τότε και ο Y είναι.

<u>Απόδειξη:</u> Αν το Y δεν ήταν συνεκτικό τότε θα υπήρχε ένα ανοιχτό και κλειστό μη κενό σύνολο $A \subsetneqq Y$. Αφού η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό και κλειστό στον X. Επειδή η f είναι επί, $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ και επειδή $A \neq Y$, $f^{-1}(A) \neq X$. Άρα ο X δεν είναι συνεκτικός, αντίφαση.

Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικές ιδιότητες - προτάσεις που μας επιτρέπουν να διαπιστώνουμε την συνεκτικότητα συνόλων σε τοπολογικούς χώρους.

<u>1.6. Πρόταση.</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $\{A_i : i \in I\}$ μία οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X με $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Τότε το σύνολο $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη: Έστω ότι το $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ δεν είναι συνεκτικό, δηλαδή υπάρχουν B, C ανοιχτά, μη κενά υποσύνολα του A με $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$. Έστω $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \subset A$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \in B$. Αφού $C \neq \emptyset$, υπάρχει $y \in C \subset A$ και $i_0 \in I$ με $y \in A_{i_0}$. Έχουμε τώρα:

$$A_{i_0} = A \cap A_{i_0} = (B \cup C) \cap A_{i_0} = (B \cap A_{i_0}) \cup (C \cap A_{i_0}).$$

όπου $x\in B\cap A_{i_0}$, $y\in C\cap A_{i_0} \Rightarrow B\cap A_{i_0}\neq\emptyset$ και $C\cap A_{i_0}\neq\emptyset$.

Τα $B\cap A_{i_0}$, $C\cap A_{i_0}$ είναι ανοιχτά στο A_{i_0}, $(B\cap A_{i_0})\cap(C\cap A_{i_0})=\emptyset$ και $A_{i_0}=(B\cap A_{i_0})\cup(A_{i_0}\cap C)$

Άρα το A_{i_0} δεν είναι συνεκτικό, αντίφαση.

<u>1.7. Πρόταση.</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A\subset X$ ένα συνεκτικό σύνολο. Αν $A\subset B\subset \bar{A}$, τότε το B είναι συνεκτικό.

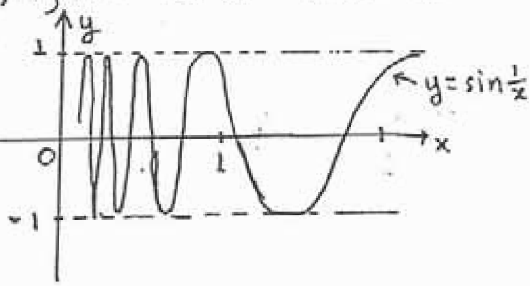
<u>Απόδειξη:</u> Έστω $G, H\subset X$ δύο ανοιχτά σύνολα ώστε $G\cap B\neq\emptyset$, $H\cap B\neq\emptyset$, $B\subset G\cup H$ και $G\cap H\cap B=\emptyset$.

Τότε $A\subset G\cup H$ και $G\cap H\cap A=\emptyset$ αφού $A\subset B$. Από την $A=(A\cap G)\cup(A\cap H)$, λόγω της συνεκτικότητας του A συμπεραίνουμε ότι $G\cap A=\emptyset$ ή $H\cap A=\emptyset$ (ή και τα δύο). Έστω ότι $G\cap A=\emptyset$. Τότε $A\subset X\setminus G$ που είναι κλειστό στον X. Άρα $A\subset B\subset \bar{A}\subset X\setminus G$. Συνεπώς $B\cap G=\emptyset$, αντίφαση.

<u>1.8. Παραδείγματα.</u>

(α) Η τομή δύο συνεκτικών συνόλων δεν είναι πάντα συνεκτικό σύνολο. Αν π.χ. $A=\{(x,x^2)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\}$ και $B=\{(x,1)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\}$ τότε $A=f(\mathbb{R})$ όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ είναι η συνεχής συνάρτηση $f(x)=(x,x^2)$ και $B=g(\mathbb{R})$ όπου $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ είναι η συνεχής συνάρτηση $g(x)=(x,1)$. Άρα τα A, B είναι συνεκτικά, αφού το $\mathbb{R}$ είναι, όμως $A\cap B=\{(1,1),(-1,1)\}$ που δέν είναι συνεκτικό.

(β) Το σύνολο $A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\in\mathbb{R}^2 : 0<x\leq 1\}$



είναι συνεκτικό αφού

είναι εικόνα της συνεχούς συνάρτησης $f(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$.
Άρα το σύνολο $\bar{A} = A \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ είναι συνεκτικό.

<u>1.9. Θεώρημα.</u> Αν $\{X_i : i \in I\}$ είναι μία οικογένεια συνεκτικών χώρων, τότε ο χώρος γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι συνεκτικός.

<u>Απόδειξη:</u> Αποδεικνύουμε πρώτα το θεώρημα στην περίπτωση που το I είναι πεπερασμένο, δηλαδή $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ και $\prod_{i\in I} X_i = X_1 \times \cdots \times X_n$. Γι' αυτό αρκεί να αποδείξουμε την περίπτωση $n=2$, δηλαδή αν οι X_1, X_2 είναι συνεκτικοί τότε ο $X_1 \times X_2$ είναι συνεκτικός. Έστω $x_1 \in X_1$ και $x_2 \in X_2$. Για κάθε $x \in X_1$ θέτουμε $A_x = (\{x\} \times X_2) \cup (\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})$

Το $\{x\} \times X_2$ είναι ομοιομορφικό με τον X_2 και συνεπώς συνεκτικό. Όμοια τα $\{x_1\} \times X_2$, $X_1 \times \{x_2\}$ είναι συνεκτικά. Επίσης $(\{x_1\} \times X_2) \cap (X \times \{x_2\}) = \{(x, x_2)\}$ συνεπώς απ' την πρόταση 1.6 το $(\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})$ είναι συνεκτικό.
Όμοια, αφού $(\{x\} \times X_2) \cap [(\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})] \ni (x, x_2)$ το A_x είναι συνεκτικό. Όμως $(x_1, x_2) \in \bigcap_{x\in X_1} A_x$ και συνεπώς ο $X_1 \times X_2 = \bigcup_{x \in X_1} A_x$ είναι συνεκτικός. Με επαγωγή έπεται ότι το πεπερασμένο γινόμενο $X_1 \times \cdots \times X_n$ είναι συνεκτικός χώρος.
Αποδεικνύουμε τώρα την γενική περίπτωση της συνεκτικότητας του $\prod_{i\in I} X_i$. Έστω $x_i \in X_i$, $i \in I$. Θέτουμε J να είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του I.

Για κάθε $F \in \mathcal{J}$, $i \in I$ θέτουμε

$$A_i^F = \begin{cases} \{x_i\} & \text{αν } i \in I \setminus F \\ X_i & \text{αν } i \in F. \end{cases}$$

Επειδή το F είναι πεπερασμένο το σύνολο

$$A^F = \prod_{i \in I} A_i^F = \prod_{i \notin F} \{x_i\} \times \prod_{i \in F} X_i$$

είναι συνεκτικό, όπως αποδείξαμε παραπάνω.

Ακόμα το $(x_i)_{i \in I} \in A^F$ για κάθε $F \in \mathcal{J}$. Άρα $\bigcap_{F \in \mathcal{J}} A^F \neq \emptyset$ και συνεπώς από την πρόταση 1.6 έχουμε ότι το $\bigcup_{F \in \mathcal{J}} A^F$ είναι συνεκτικό. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\bigcup_{F \in \mathcal{J}} A^F$ είναι πυκνό στον $\prod_{i \in I} X_i$, λόγω της πρότασης 1.7. Πράγματι· έστω $V_i \subset X_i$ ένα ανοιχτό σύνολο για κάθε $i = i_1, \dots, i_k \in I$

Αν $F_0 = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{J}$, τότε $\left(V_{i_1} \times \dots \times V_{i_k} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{F \in \mathcal{J}} A^F\right)$ περιέχει το A^{F_0} οπότε είναι μη κενό. ο.ε.δ.

<u>1.10 Πόρισμα.</u> Ο ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός, $n \geq 1$.

<u>1.11 Ορισμός</u> Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X που περιέχουν το x λέγεται συνεκτική συνιστώσα του x και συμβολίζεται με $C(x)$.

Απ' την πρόταση 1.6 προκύπτει ότι το $C(x)$ είναι συνεκτικό σύνολο ενώ απ' την πρόταση 1.7 ότι είναι και κλειστό σύνολο αφού το $\overline{C(x)}$ είναι συνεκτικό που περιέχει το x. Επίσης, τα $C(x)$, $x \in X$ συνιστούν διαμέριση του X.

1.12. Παραδείγματα (α) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{Q}$ είναι μονοσύνολο όπως προκύπτει απ' το θεώρημα 1.3 και την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$.

(β) Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός διακριτού χώρου είναι μονοσύνολο.

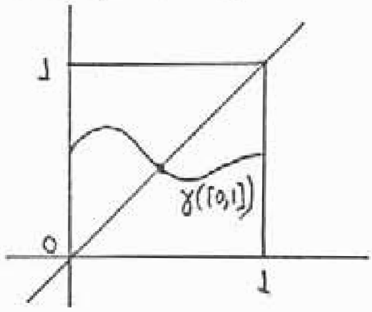
2. Εφαρμογές της συνεκτικότητας.

2.1 Θεώρημα. Έστω X ένας συνεκτικός χώρος και $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Αν $x, y \in X$ και $f(x) < c < f(y)$, τότε υπάρχει $z \in X$: $f(z) = c$

Απόδειξη: Αφού η f είναι συνεχής και το X συνεκτικό, το $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα διάστημα, αφού $f(x) < f(y)$. Συνεπώς $c \in [f(x), f(y)] \subset f(X)$. ο.ε.δ.

2.2 Θεώρημα Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \to [0,1]$ έχει σταθερό σημείο δηλαδή υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) = x_0$.

Απόδειξη: Αν $f(0) = 0$ ή $f(1) = 1$ τότε $x_0 = 0$ ή $x_0 = 1$. Έστω λοιπόν ότι $f(0) \neq 0$ και $f(1) \neq 1$, δηλαδή $0 < f(0) \leq 1$ και $0 \leq f(1) < 1$



Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1] \quad \text{με} \quad \gamma(x) = (x, f(x))$$

Η γ είναι συνεχής, αφού η f είναι και συνεπώς το $\gamma([0,1])$

 117

είναι συνεκτικό. Θέτουμε:

$A = \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x<y\}$ και $B = \{(x,y)\in[0,1]^2 : x>y\}$

Τα A, B είναι ανοιχτά στο $[0,1]\times[0,1]$, μη κενά αφού $\gamma(0)\in A$, $\gamma(1)\in B$ και $A\cap B=\emptyset$. Αν δεν υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=x_0$ τότε $(A\cup B)\cap\gamma([0,1])=\gamma([0,1])$, που σημαίνει ότι το $\gamma([0,1])$ δεν είναι συνεκτικό, αντίφαση.

<u>2.3 Ορισμός</u> Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται <u>κατά τόξα συνεκτικός</u> αν για κάθε $x,y\in X$ υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $\gamma:[0,1]\longrightarrow X$ με $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$. Η γ λέγεται <u>τόξο</u> απ' το x στο y.

<u>2.4 Λήμμα.</u> Ο χώρος X είναι κατά τόξα συνεκτικός αν και μόνο αν υπάρχει ένα $x_0\in X$ ώστε για κάθε $x\in X$ να υπάρχει ένα τόξο απ' το x_0 στο x.

<u>Απόδειξη.</u> Μόνο το αντίστροφο χρειάζεται απόδειξη. Αν $x_1,x_2\in X$ και $\gamma_i:[0,1]\to X$, $i=1,2$ είναι δύο τόξα με $\gamma_i(0)=x_0$, $\gamma_1(1)=x_1$, $\gamma_2(1)=x_2$ τότε η $\gamma:[0,1]\longrightarrow X$ με

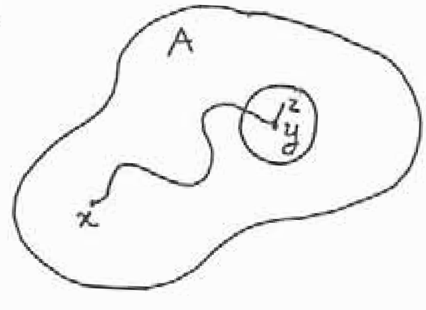
$$\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(1-2t), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

είναι ένα τόξο από το $x_1=\gamma(0)=\gamma_1(1)$ στο $\gamma_2(1)=\gamma(1)=x_2$.

<u>2.5 Πόρισμα.</u> Κάθε κατά τόξα συνεκτικός χώρος είναι συνεκτικός

2.6. Θεώρημα. Ένα ανοιχτό υποσύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$ είναι συνεκτικό τότε και μόνο τότε όταν είναι κατά τόξα συνεκτικό.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο και $x_0 \in A$. Θεωρούμε το σύνολο $K_x = \{ y \in A :$ υπάρχει τόξο από το x στο y μέσα στο $A \}$



Αν $y \in K_x$ τότε επειδή το A είναι ανοιχτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(y,\varepsilon) \subset A$, όπου $S(y,\varepsilon)$ είναι η ανοιχτή ανοιχτή μπάλα στην ευκλείδια μετρική. Όμως για κάθε $z \in S(y,\varepsilon)$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα y, z βρίσκεται μέσα στο $S(y,\varepsilon)$ και συνεπώς $z \in K_x$. Άρα $S(y,\varepsilon) \subset K_x$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $x \in A$, το K_x είναι ανοιχτό υποσύνολο του A. Επίσης το K_x είναι και κλειστό στο A γιατί αν $y_n \longrightarrow y$ με $y_n \in K_x$ και $y \in A$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(y,\varepsilon) \subset A$ και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $y_n \in S(y,\varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$. Όμοια, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα y_{n_0} και y βρίσκεται μέσα στο $S(y,\varepsilon) \subset A$ και αφού $y_{n_0} \in K_x$ έχουμε και $y \in K_x$. Άρα το K_x είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του A και μη κενό αφού $x \in K_x$. Επειδή το A είναι συνεκτικό, αναγκαστικά $K_x = A$. ο.ε.δ.

<u>2.7 Θεώρημα</u>. Για κάθε $n > 1$ το $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό.
<u>Απόδειξη:</u> Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει ένα τόξο (μάλιστα τεθλασμένη γραμμή) από το $(0,\dots,0,1)$ στο x. Άρα ο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός και συνεπώς συνεκτικός.

<u>2.8. Πόρισμα</u> Οι ευκλείδιοι χώροι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$, $n>1$ δεν είναι ομοιομορφικοί

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Τότε το $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό, ενώ το $h(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ που είναι ομοιομορφικό του δεν είναι συνεκτικό, αντίφαση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.

1) Δείξτε ότι η n-σφαίρα S^n είναι συνεκτικός χώρος για $n \geq 1$.

2) Δείξτε ότι το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι συνεκτικός χώρος.

3) Έστω X ένα άπειρο σύνολο και $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ πεπερασμένο}\}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X. Δείξτε ότι ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός.

4) Έστω X ένα σύνολο με δύο τοπολογίες $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Αν ο $(X, \mathcal{T}_2)$ είναι συνεκτικός, δείξτε ότι και ο $(X, \mathcal{T}_1)$ είναι συνεκτικός.

5) Έστω $\{A_i : i \in I\}$ μία οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων ενός χώρου X. Αν υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο $A \subset X$ ώστε $A \cap A_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$, δείξτε ότι το $A \cup \bigcup_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό.

6) Έστω $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων ενός χώρου X ώστε $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι συνεκτικό.

7) Έστω X ένας φυσιολογικός χώρος με $|X| \geq 2$. Αν ο X είναι συνεκτικός, δείξτε ότι $|X| \geq |\mathbb{R}|$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Λήμμα του Urysohn).

120

8) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Αν το $C \subset X$ είναι συνεκτικό και $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, δείξτε ότι $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

9) Είναι ο χώρος $\mathbb{R}_n$ συνεκτικός;

10) Δείξτε ότι οι χώροι S^1 και S^n, $n>1$ δεν είναι ομοιομορφικοί

11) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και R η διμελής σχέση στον X που ορίζεται ως εξής: $x R y \Leftrightarrow$ υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο $C \subset X$ με $x, y \in C$.

Δείξτε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας. Ποιές είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας;

12) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και $K(x)$ η τομή όλων των ανοιχτών και κλειστών υποσυνόλων του X που περιέχουν το x. Δείξτε ότι $C(x) \subset K(x)$, όπου $C(x)$ είναι η συνεκτική συνιστώσα του X που περιέχει το x. Το $K(x)$ λέγεται η ψευδοσυνεκτική συνιστώσα του X που περιέχει το x.

13) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $C \subset X$ ένα συνεκτικό σύνολο. Αν το C είναι ανοιχτό και κλειστό στον X, δείξτε ότι το C είναι μία συνεκτική συνιστώσα του X. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση 12).

14) Δείξτε μ' ένα παράδειγμα ότι οι συνεκτικές συνιστώσες δεν είναι πάντα ανοιχτά σύνολα.

15) Έστω $\{X_i : i \in I\}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$. Δείξτε ότι $C((x_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} C(x_i)$

16) Δείξτε ότι το σύνολο το Cantor C είναι ολικά μη-συνεκτικό (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ασκ. 15 και το ότι $C \approx [0,2]^{\mathbb{N}}$).

17) Δείξτε ότι κάθε κυρτό σύνολο στο $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό

18) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο. Δείξτε ότι:

(α) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του A είναι ανοιχτό σύνολο

(β) Το A έχει το πολύ αριθμήσιμες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες

(γ) Αν C είναι μία συνεκτική συνιστώσα του A, τότε $A \cap \partial C = \emptyset$.

(Υπόδειξη: Για το (β) χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος).

19) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι συνεκτικός, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ και $x,y \in X$ υπάρχουν σημεία $x=x_0, x_1, \dots, x_n=y$ στον X ώστε $d(x_i,x_{i+1})<\varepsilon$ για κάθε $0 \le i \le n-1$

(β) Αν ο X είναι συμπαγής, τότε ισχύει και το αντίστροφο του (α)

(γ) Δείξτε μ' ένα παράδειγμα ότι το αντίστροφο του (α) δεν ισχύει πάντα όταν ο X δεν είναι συμπαγής.

20) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Για κάθε $\varepsilon>0$ θεωρούμε την διμελή σχέση R_ε ως εξής:

$$x R y \Leftrightarrow \text{υπάρχουν } x=x_0, x_1, \dots, x_n=y \text{ ώστε } d(x_i,x_{i+1})<\varepsilon \text{ για κάθε } 0 \le i \le n-1$$

(α) Δείξτε ότι η R_ε είναι σχέση ισοδυναμίας στον X και οι κλάσεις ισοδυναμίας της $R_\varepsilon(x)$, $x \in X$ είναι ανοιχτά και κλειστά σύνολα στον X.

(β) Αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, δείξτε ότι

$$C(x) = K(x) = R(x) \quad \text{για κάθε } x \in X$$

όπου $C(x)$ είναι η συνεκτική συνιστώσα του x, $K(x)$ η ψευδοσυνεκτική συνιστώσα του x και $R(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} R_\varepsilon(x)$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Κλασικά θεωρήματα της τοπολογίας στην διάσταση 2

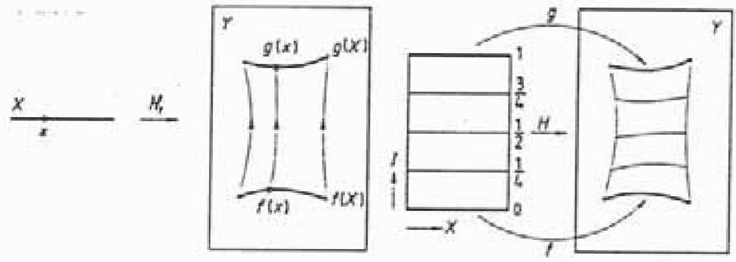
Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών

1. Ομοτοπία

Η έννοια της ομοτοπίας είναι μία από τις πιο σημαντικές στην Τοπολογία. Ολα τα χρήσιμα τοπολογικά αναλλοίωτα είναι ομοτοπικά αναλλοίωτα.

1.1. Ορισμός. Εστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι. Δύο συνεχείς απεικονίσεις f, g : $X \to Y$ λέγονται *ομοτοπικές* αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $H : [0,1] \times X \to Y$ ώστε $H(0,x) = f(x)$ και $H(1,x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Η H λέγεται *ομοτοπία* από την f στην g και συνήθως γράφουμε $H : f \simeq g$ για συντομία. Επίσης με $H_t : X \to Y$ συμβολίζουμε την ενδιάμεση απεικόνιση $H_t(x) = H(t,x)$, $0 \le t \le 1$.



Σύμφωνα με τον ορισμό η f είναι ομοτοπική με την g, αν η g λαμβάνεται από την f με μια συνεχή μεταβολή. Οι ενδιάμεσες απεικονίσεις είναι οι H_t, $0 \le t \le 1$. Για να δείξει κάποιος οτι δύο δεδομένες συνεχείς απεικονίσεις είναι ομοτοπικές πρέπει να κατασκευάσει μία ομοτοπία μεταξύ τους. Για να γίνει αυτό χρειάζεται να έχει όσο το δυνατόν καλύτερη γεωμετρική εποπτεία των χώρων στους οποίους οι απεικονίσεις ορίζονται. Αν θέλουμε να αποδείξουμε οτι οι απεικονίσεις δεν είναι ομοτοπικές, τότε πρέπει να αποδείξουμε οτι δεν υπάρχει καμία ομοτοπία μεταξύ τους. Αυτό είναι αρκετά δύσκολο και ένας από τους βασικούς στόχους της Αλγεβρικής Τοπολογίας είναι η ανάπτυξη μεθόδων με τις οποίες μπορεί κάποιος να ανακαλύψει, αν δύο συνεχείς απεικονίσεις δεν είναι ομοτοπικές.

1.2. Παραδείγματα. (α) Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $Y \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σύνολο. Αν f, $g : X \to Y$ είναι δύο συνεχείς απεικονίσεις, τότε η f είναι ομοτοπική με την g. Μία ομοτοπία $H : f \simeq g$ δίνεται από τον τύπο $H(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

Από την άλλη μεριά, κάθε συνεχής απεικόνιση $h : Y \to X$ είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση. Αν $y_0 \in Y$, μια ομοτοπία $G : h \simeq h(y_0)$ δίνεται από τον τύπο $G(t,y) = h((1-t)y + ty_0)$.

(β) Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και f, $g : X \to S^n$ δύο συνεχείς απεικονίσεις, όπου $S^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \|z\| = 1\}$ είναι η n-σφαίρα, $n \ge 1$. Αν $f(x) \ne -g(x)$ για κάθε $x \in X$, τότε $f \simeq g$. Μια ομοτοπία είναι η $H : [0,1] \times X \to S^n$ με τύπο

$$H(t,x) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}.$$

(γ) Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to S^n$, που δεν είναι επί, είναι ομοτοπική με μια σταθερή, γιατί υπάρχει $z_0 \in S^n$ ώστε $f(x) \ne -(-z_0)$ για κάθε $x \in X$, οπότε από το παράδειγμα (β) έχουμε $f \simeq -z_0$.

(δ) Αν $f : S^1 \to S^1$ είναι μια συνεχής απεικόνιση και $z_0 \in S^1$, τότε $f \simeq z_0 \cdot f$ (μιγαδικός πολλαπλασιασμός). Μια τέτοια ομοτοπία είναι η $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ με τύπο $H(t,z) = f(z) \cdot e^{2\pi i t\theta}$, όπου το $0 \le \theta < 1$ είναι τέτοιο ώστε $z_0 = e^{2\pi i\theta}$. Ειδικά, αν $f = id$, τότε η $z_0 \cdot id$ είναι η στροφή του κύκλου κατά γωνία $2\pi\theta$. Συνεπώς, οι στροφές του κύκλου είναι ομοτοπικές με την ταυτοτική απεικόνιση του κύκλου.

(ε) Εστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και y, $z \in Y$. Οι σταθερές απεικονίσεις με τιμές y και z, αντίστοιχα, είναι ομοτοπικές μεταξύ τους τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει ένα τόξο στον Y από το y στο z. Πράγματι, αν $\gamma : [0,1] \to Y$ είναι ένα τόξο με $\gamma(0) = y$ και $\gamma(1) = z$, τότε η $H : [0,1] \times X \to Y$ με $H(t,x) = \gamma(t)$ είναι μια ομοτοπία από την σταθερή απεικόνιση με τιμή y στην σταθερή απεικόνιση με τιμή z. Αντίστροφα, αν υπάρχει μια τέτοια ομοτοπία H, τότε για οποιοδήποτε $x \in X$ η $\gamma(t) = H(t,x)$ είναι ένα τόξο από το y στο z. Συνεπώς, αν ο Y είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε όλες οι σταθερές απεικονίσεις με τιμές στον Y είναι ομοτοπικές μεταξύ τους.

(στ) Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $f : S^n \to X$ μια συνεχής απεικόνιση, όπου $n \geq 1$. Η f είναι ομοτοπική με σταθερή τότε και μόνον τότε όταν έχει μια συνεχή επέκταση $F : D^{n+1} \to X$ στην κλειστή μοναδιαία μπάλλα $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$. Πράγματι, αν υπάρχει τέτοια επέκταση, τότε η $H : [0,1] \times S^n \to X$ με $H(t,x) = F((1-t)x)$ είναι ομοτοπία της f με την σταθερή απεικόνιση της S^n στον X με τιμή $F(0)$. Αντίστροφα, αν υπάρχει $x_0 \in X$ και $H : f \simeq x_0$, τότε η απεικόνιση $F : D^{n+1} \to X$ με

$$F(x) = \begin{cases} H(1 - \|x\|, \dfrac{x}{\|x\|}), & \text{αν } x \neq 0 \\ x_0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

ορίζεται καλά και είναι συνεχής επέκταση της f.

1.3. Πρόταση. *Η σχέση ομοτοπίας είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων ενός τοπολογικού χώρου X σ' έναν τοπολογικό χώρο Y.*

Απόδειξη. Εστω οτι οι f, g, $h : X \to Y$ είναι συνεχείς απεικονίσεις. Τότε η $H(t,x) = f(x)$, $(t,x) \in [0,1] \times X$, είναι μια ομοτοπία $H : f \simeq f$. Αν τώρα $G : f \simeq g$, τότε η $G'(t,x) = G(1-t,x)$, $(t,x) \in [0,1] \times X$, είναι μια ομοτοπία $G' : g \simeq f$. Τέλος, αν $H_1 : f \simeq g$ και $H_2 : g \simeq h$, τότε η $H_3 : [0,1] \times X \to Y$ με

$$H_3(t,x) = \begin{cases} H_1(2t,x), & \text{αν } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ H_2(2t-1,x), & \text{αν } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

είναι μια ομοτοπία $H_3 : f \simeq h$. □

1.4. Πρόταση. *Αν οι f_i, $g_i : X_i \to X_{i+1}$, είναι συνεχείς απεικονίσεις με $f_i \simeq g_i$ $i = 1,2$, τότε $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.*

Απόδειξη. Εστω οτι $H_i : f_i \simeq g_i$, $i = 1,2$. Θεωρούμε την $F_1 : [0,1] \times X_1 \to X_3$ με $F_1(t,x) = f_2(H_1(t,x))$ και την $F_2 : [0,1] \times X_1 \to X_3$ με $F_2(t,x) = H_2(t, g_1(x))$. Τότε $F_1 : f_2 \circ f_1 \simeq f_2 \circ g_1$ και $F_2 : f_2 \circ g_1 \simeq g_2 \circ g_1$. Από την πρόταση 1.3 έχουμε λοιπόν $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$. □

Η κλάση ομοτοπίας μίας συνεχούς απεικόνισης $f : X \to Y$ συμβολίζεται με $[f]$ και το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας συνεχών απεικονίσεων του X στον Y με $[X, Y]$. Από την πρόταση 1.4 προκύπτει οτι ορίζεται καλά η σύνθεση κλάσεων ομοτοπίας με

$[g] \circ [f] = [g \circ f]$. Η σύνθεση κλάσεων ομοτοπίας έχει όμοιες ιδιότητες με την σύνθεση απεικονίσεων. Συγκεκριμένα, ισχύει $([h] \circ [g]) \circ [f] = [h] \circ ([g] \circ [f])$ και $[id_Y] \circ [f] = [f]$, $[f] \circ [id_X] = [f]$. Ετσι από την κατηγορία των τοπολογικών χώρων και των συνεχών απεικονίσεων, που είναι οι μορφισμοί τους, παίρνουμε την ομοτοπική κατηγορία με αντικείμενα τους τοπολογικούς χώρους και μορφισμούς τις κλάσεις ομοτοπίας συνεχών απεικονίσεων.

1.5. Ορισμός. Δύο τοπολογικοί χώροι X, Y λέμε οτι έχουν τον ίδιο *ομοτοπικό τύπο* αν είναι ισόμορφοι στα πλαίσια της ομοτοπικής κατηγορίας, δηλαδή αν υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ ώστε $g \circ f \simeq id_X$ και $f \circ g \simeq id_Y$. Οι f, g λέγονται ομοτοπικές ισοδυναμίες. Αν οι X, Y έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο, γράφουμε $X \simeq Y$.

Προφανώς, δύο ομοιομορφικοί χώροι έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο, όχι όμως αντίστροφα.

1.6. Παραδείγματα. (α) Ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει τον ομοτοπικό τύπο μονοσυνόλου. Αν $i : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ είναι η ένθεση $i(0) = 0$ και $r : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ η σταθερή απεικόνιση, τότε $r \circ i = id_{\{0\}}$ και η $H : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $H(t,x) = tx$ είναι μια ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^n}$. Ενας τοπολογικός χώρος με τον ομοτοπικό τύπο σημείου λέγεται *συσταλτός*.

(β) Η n-σφαίρα S^n έχει τον ομοτοπικό τύπο του $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Αν $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ είναι η ένθεση $i(z) = z$ και $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ η απεικόνιση $r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, τότε $r \circ i = id_{S^n}$ και η $H : [0,1] \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ με

$$H(t,x) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$$

είναι μια ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$.

2. Η ομάδα Bruschlinsky ενός τοπολογικού χώρου

Οπως είναι γνωστό, ο μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ είναι αβελιανή ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Μάλιστα, τόσο ο πολλαπλασιασμός, όσο και η απεικόνιση του αντίστροφου είναι συνεχείς. Για κάθε τοπολογικό χώρο X το σύνολο $C(X, S^1) = \{f | f : X \to S^1 \text{ συνεχής}\}$ γίνεται αβελιανή ομάδα με τον προφανή τρόπο, δηλαδή $(\alpha \cdot \beta)(x) = \alpha(x)\beta(x)$, για κάθε $x \in X$. Το αντίστροφο του α είναι το $1/\alpha$, ενώ το μοναδιαίο στοιχείο είναι η σταθερή συνάρτηση 1.

Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ επάγει τον ομομορφισμό ομάδων $f^* : C(Y, S^1) \to C(X, S^1)$ με $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$. Προφανώς, αν η $g : Y \to Z$ είναι συνεχής, τότε $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, ενώ $(id_X)^* = id$. Προκύπτει τώρα οτι αν η f είναι ομοιομορφισμός, τότε η $f^* : C(Y, S^1) \to C(X, S^1)$ είναι ισομορφισμός ομάδων, αφού $(f^{-1})^* \circ f^* = (f^{-1} \circ f)^* = (id_X)^* = id$ και $f^* \circ (f^{-1})^* = id$. Με άλλα λόγια η ομάδα $C(X, S^1)$ είναι τοπολογικό αναλλοίωτο του χώρου X. Το πρόβλημα όμως είναι οτι η ομάδα αυτή είναι τεράστια και δεν μπορεί να υπολογιστεί. Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε μια ομάδα πηλίκο αυτής της ομάδας, την οποία μπορούμε να χειριστούμε, τουλάχιστον για κάποιες μεγάλες κλάσεις τοπολογικών χώρων.

2.1. Λήμμα. *Αν α, α', β, $\beta' \in C(X, S^1)$ και $\alpha \simeq \alpha'$, $\beta \simeq \beta'$, τότε $\alpha \cdot \alpha' \simeq \beta \cdot \beta'$.*

Απόδειξη. Αν $H : \alpha \simeq \alpha'$ και $G : \beta \simeq \beta'$, τότε η $F : [0,1] \times X \to S^1$ με $F(t,x) = H(t,x)G(t,x)$ είναι μια ομοτοπία $F : \alpha \cdot \alpha' \simeq \beta \cdot \beta'$. □

Ετσι στο σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $[X, S^1]$ ορίζεται η πράξη $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$, που από το λήμμα 2.1 δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων των κλάσεων ομοτοπίας. Με αυτόν τον τρόπο το $[X, S^1]$ γίνεται αβελιανή ομάδα. Σημειώνουμε οτι για κάθε $[\alpha] \in [X, S^1]$ έχουμε $-[\alpha] = [1/\alpha]$ και το ουδέτερο στοιχείο 0 στην $[X, S^1]$ αναπαρίσταται από οποιαδήποτε σταθερή απεικόνιση του X στον S^1, αφού ο τελευταίος είναι κατά τόξα συνεκτικός. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $H^1(X) = [X, S^1]$.

Οπως εύκολα βλέπουμε, το σύνολο

$$B(X, S^1) = \{f | f : X \to S^1 \text{ συνεχής ομοτοπική με σταθερή}\}$$

είναι υποομάδα της $C(X, S^1)$ και $H^1(X) = C(X, S^1)/B(X, S^1)$.

Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ επάγει τον ομομορφισμό $f^* : H^1(Y) \to H^1(X)$ με $f^*([\alpha]) = [\alpha \circ f]$. Αν η $h : X \to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση ομοτοπική με την f και $H : f \simeq h$, τότε για κάθε $\alpha \in C(X, S^1)$ έχουμε $\alpha \circ H : \alpha \circ f \simeq \alpha \circ h$ και συνεπώς $f^*([\alpha]) = h^*([\alpha])$. Ετσι $f^* = h^*$, που σημαίνει οτι ο ομομορφισμός f^* εξαρτάται μόνον από την κλάση ομοτοπίας $[f]$. Προφανώς, αν η $g : Y \to Z$ είναι συνεχής, τότε $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, ενώ $(id_X)^* = id$. Προκύπτει τώρα οτι αν η f είναι ομοιομορφισμός, τότε η $f^* : H^1(Y) \to H^1(X)$ είναι ισομορφισμός ομάδων, αφού $(f^{-1})^* \circ f^* = (f^{-1} \circ f)^* = (id_X)^* = id$ και $f^* \circ (f^{-1})^* = id$. Με άλλα λόγια η ομάδα $H^1(X)$ είναι τοπολογικό αναλλοίωτο του χώρου X. Η αβελιανή ομάδα $H^1(X)$ λέγεται *ομάδα Bruschlinsky* του χώρου X.

Πρέπει να σημειώσουμε οτι η αβελιανή ομάδα $C(X, S^1)$ περιέχει περισσότερες πληροφορίες για τον X από την $H^1(X)$. Οπως δείχνει η επόμενη πρόταση, η $H^1(X)$ είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο του X και συνεπώς περιέχει πληροφορίες μόνον για το «διακριτό μέρος» του X.

2.2. Πρόταση. *Αν οι τοπολογικοί χώροι X, Y έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο, τότε $H^1(X) \cong H^1(Y)$.*

Απόδειξη. Εστω οτι οι $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ είναι αντίστροφες ομοτοπικές ισοδυναμίες, δηλαδή $g \circ f \simeq id_X$ και $f \circ g \simeq id_Y$. Τότε $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (id_X)^* = id$ και όμοια $g^* \circ f^* = id$. Αρα η $f^* : H^1(Y) \to H^1(X)$ είναι ισομορφισμός. □

Ο υπολογισμός της ομάδας Bruschlinsky ενός τοπολογικού χώρου δεν είναι τετριμένο πρόβλημα. Βέβαια, όπως ξέρουμε, $H^1(K) = \{0\}$ για κάθε κυρτό σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$. Γενικότερα, η ομάδα Bruschlinsky κάθε συσταλτού χώρου είναι τετριμένη. Στην επόμενη παράγραφο θα υπολογίσουμε την ομάδα $H^1(S^1)$, που δεν είναι τετριμένη. Από τον υπολογισμό αυτόν θα προκύψουν μερικά από τα κλασικά θεωρήματα της τοπολογίας του $\mathbb{R}^2$, όπως επίσης και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας.

3. Η ομάδα Bruschlinsky του κύκλου και εφαρμογές

Είναι φανερό οτι για τον υπολογισμό της ομάδας Bruschlinsky ενός χώρου X είναι απαραίτητο να ξέρουμε την υποομάδα $B(X, S^1)$ της $C(X, S^1)$. Μια παράσταση των στοιχείων της $B(X, S^1)$, όταν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, δίνει το θεώρημα του S. Eilenberg.

3.1. Λήμμα. *Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση, ώστε $|f(x) - 1| < 1$ για κάθε $x \in X$. Τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f = e^{2\pi i\phi}$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση προκύπτει οτι $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$. Συνεπώς η συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{\mathrm{Im}f(x)}{\mathrm{Re}f(x)}$$

είναι καλά ορισμένη, συνεχής και $f = e^{2\pi i\phi}$.

3.2. Θεώρημα. (S. Eilenberg) *Εστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση. Η f είναι ομοτοπική με σταθερή τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f = e^{2\pi i\phi}$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, αν $f = e^{2\pi i\phi}$ για κάποια συνεχή συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$, τότε η $H : [0,1] \times X \to S^1$ με $H(t, x) = e^{2\pi i t\phi(x)}$ είναι συνεχής και προφανώς $H : 1 \simeq f$, όπου με 1 συμβολίζουμε την σταθερή συνάρτηση με τιμή $1 \in S^1$.

Εστω τώρα οτι η f είναι ομοτοπική με σταθερή. Επειδή ο S^1 είναι κατά τόξα συνεκτικός, υπάρχει μια ομοτοπία $H : 1 \simeq f$. Επειδή ο (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, η H είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ετσι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|H(t, x) - H(s, y)| < 1$$

για κάθε x, $y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ και t, $s \in [0,1]$ με $|t - s| < \delta$. Εστω $P = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1\}$ μια διαμέριση του $[0,1]$ με $t_{k+1} - t_k < \delta$, $k = 0, 1, ..., n - 1$. Τότε έχουμε

$$\left| \frac{H(t_{k+1}, x)}{H(t_k, x)} - 1 \right| < 1$$

για κάθε $x \in X$ και $k = 0, 1, ..., n - 1$. Από το λήμμα 3.1, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi_k : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{H(t_{k+1}, x)}{H(t_k, x)} = e^{2\pi i\phi_k(x)}$$

για κάθε $x \in X$. Ετσι προκύπτει οτι

$$f(x) = H(t_n, x) = \frac{H(t_n, x)}{H(t_{n-1}, x)} \cdot \frac{H(t_{n-1}, x)}{H(t_{n-2}, x)} \cdots \frac{H(t_1, x)}{H(t_0, x)} = e^{2\pi i(\phi_0(x) + ... + \phi_{n-1}(x))}$$

αφού $H(t_0, x) = 1$. Θέτοντας λοιπόν $\phi = \phi_0 + ... + \phi_{n-1}$ έχουμε $f = e^{2\pi i\phi}$. □

3.3. Πόρισμα. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to S^1$ υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : [0,1] \to S^1$ ώστε $g = e^{2\pi i\phi}$.*

Απόδειξη. Αφού το $[0,1]$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχουμε $g \simeq 1$. Ετσι το συμπέρασμα είναι άμεσο από το θεώρημα του Eilenberg. □

3.4. Πόρισμα. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^1 \to S^1$ υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση $\phi : [0,1] \to S^1$ με $\phi(0) = 0$, ώστε $f(e^{2\pi i t}) = f(1)e^{2\pi i \phi(t)}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Ο ακέραιος αριθμός $\deg f = \phi(1)$ λέγεται βαθμός της f.*

Απόδειξη. Από το πόρισμα 3.3 υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\psi : [0,1] \to S^1$ ώστε $f(e^{2\pi i t}) = f(1)e^{2\pi i \psi(t)}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Για $t = 0$ έχουμε $f(1) = f(1)e^{2\pi i \psi(0)}$ και συνεπώς $\psi(0) \in \mathbb{Z}$. Θέτουμε τώρα $\phi = \psi - \psi(0)$. Για την μοναδικότητα, αν υπάρχει μια ακόμα συνεχής συνάρτηση $\phi' : [0,1] \to S^1$ με $\phi'(0) = 0$, ώστε $f(e^{2\pi i t}) = f(1)e^{2\pi i \phi'(t)}$ για κάθε $t \in [0,1]$, τότε $\phi(t) - \phi'(t) \in \mathbb{Z}$. Αφού το $[0,1]$ είναι συνεκτικό, πρέπει $\phi(t) - \phi'(t) = \phi(0) - \phi'(0) = 0$. □

3.5. Παράδειγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η συνεχής απεικόνιση $f_n : S^1 \to S^1$ με τύπο $f_n(z) = z^n$ έχει βαθμό n. Πράγματι, αν η $\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $\phi_n(t) = nt$, τότε $\phi_n(0) = 0$ και $f_n(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i n t} = e^{2\pi i \phi_n(t)}$. Άρα $\deg f_n = \phi_n(1) = n$.

3.6. Θεώρημα. *Δύο συνεχείς απεικονίσεις $f, g : S^1 \to S^1$ έχουν τον ίδιο βαθμό τότε και μόνον τότε όταν είναι ομοτοπικές.*

Απόδειξη. Εστω οτι $\deg f = \deg g$. Αν οι $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι οι συνεχείς συναρτήσεις με $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $f(e^{2\pi i t}) = f(1)e^{2\pi i \phi(t)}$ και $g(e^{2\pi i t}) = g(1)e^{2\pi i \psi(t)}$ για κάθε $t \in [0,1]$, τότε $\phi(1) = \psi(1)$. Η απεικόνιση $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ με

$$H(s, e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i[(1-s)\phi(t)+s\psi(t)]}$$

ορίζεται καλά, γιατί για $t = 0$ έχουμε $(1-s)\phi(0) + s\psi(0) = 0$ και για $t = 1$ έχουμε $(1-s)\phi(1) + s\psi(1) \in \mathbb{Z}$. Η H είναι προφανώς συνεχής και $f(1)H(0, e^{2\pi i t}) = f(e^{2\pi i t})$, ενώ $g(1)H(1, e^{2\pi i t}) = g(e^{2\pi i t})$. Δηλαδή,

$$H : \frac{1}{f(1)} f \simeq \frac{1}{g(1)} g$$

και κατά συνέπεια $f \simeq g$, από το παράδειγμα 1.2(δ).

Αντίστροφα, έστω οτι υπάρχει μια ομοτοπία $H : f \simeq g$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $h : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ με

$$h(s,t) = \frac{H(s, e^{2\pi i t})}{H(s,1)}.$$

Επειδή το $[0,1] \times [0,1]$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, η h είναι ομοτοπική με σταθερή και από το θεώρημα του Eilenberg υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\psi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$H(s, e^{2\pi i t}) = H(s,1)e^{2\pi i \psi(s,t)}$$

για κάθε $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$. Ειδικά για $t = 0$ έχουμε $\psi(s,0) \in \mathbb{Z}$. Θέτοντας $\phi(s,t) = \psi(s,t) - \psi(s,0)$ παίρνουμε μια συνεχή συνάρτηση $\phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi(s,0) = 0$, ώστε

$$H(s, e^{2\pi i t}) = H(s,1)e^{2\pi i \phi(s,t)}$$

για κάθε $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$. Ειδικά για $t = 1$ έχουμε $\phi(s,1) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $s \in [0,1]$. Επειδή το $[0,1]$ είναι συνεκτικό, προκύπτει οτι όλοι οι ακέραιοι $\phi(s,1) \in \mathbb{Z}$, $s \in [0,1]$, είναι ίσοι μεταξύ τους. Αρα $\deg f = \phi(0,1) = \phi(1,1) = \deg g$. □.

Από το θεώρημα 3.6 και το παράδειγμα 3.5 προκύπτει αμέσως οτι η απεικόνιση $\deg : H^1(S^1) \to \mathbb{Z}$ είναι καλά ορισμένη, είναι ένα προς ένα και επί. Επιπλέον η deg είναι ομομορφισμός ομάδων. Πράγματι, αν α, $\beta \in H^1(S^1)$ και $\deg(\alpha) = n$, $\deg(\beta) = m$, τότε από το θεώρημα 3.6 και το παράδειγμα 3.5 έχουμε $\alpha = [f_n]$ και $\beta = [f_m]$. Συνεπώς,

$$\deg(\alpha + \beta) = \deg(f_n \cdot f_m) = \deg(f_{n+m}) = n + m = \deg(\alpha) + \deg(\beta).$$

Ετσι αποδείξαμε το επόμενο.

3.7. Θεώρημα. *Η απεικόνιση* $\deg : H^1(S^1) \to \mathbb{Z}$ *είναι ισομορφισμός.* □

3.8. Πόρισμα. *Ο* S^1 *δεν είναι συσταλτός χώρος.* □

Στην συνέχεια θα δούμε μερικές εφαρμογές των προηγουμένων. Εστω $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, οπότε $S^1 = \partial D^2$.

3.9. Πρόταση. *Δεν υπάρχει καμία συνεχής συνάρτηση* $r : D^2 \to S^1$ *τέτοια ώστε* $r(z) = z$ *για κάθε* $z \in S^1$.

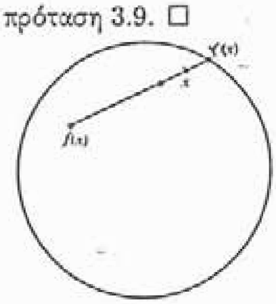
Απόδειξη. Αν υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση, τότε ορίζεται η $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ με $H(t,z) = r(tz)$, που είναι συνεχής και $H(0,z) = r(0)$, $H(1,z) = z$ για κάθε $z \in S^1$. Δηλαδή, $H : r(0) \simeq id_{S^1}$. Από το θεώρημα 3.6 έχουμε λοιπόν $0 = \deg(r(0)) = \deg(id_{S^1}) = 1$, αντίφαση. □

3.10. Θεώρημα. (L. E. J. Brouwer) *Κάθε συνεχής απεικόνιση* $f : D^2 \to D^2$ *έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Εστω οτι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in D^2$. Τότε τα σημεία $f(x)$, x ορίζουν μια ημιευθεία με αρχή το $f(x)$. Εστω $r(x)$ το σημείο τομής της ημιευθείας αυτής με τον μοναδιαίο κύκλο S^1, μετά το $f(x)$. Η απεικόνιση $r : D^2 \to S^1$, που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο είναι συνεχής, αφού η f είναι συνεχής, και $r(x) = x$ για κάθε $x \in S^1$. Μάλιστα το $r(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$r(x) = x + \Big[\sqrt{1 - |x|^2 + \langle x, \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}\rangle^2} - \langle x, \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}\rangle\Big] \cdot \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}.$$

Αυτό όμως αντιφάσκει με την πρόταση 3.9. □



Μια δεύτερη εφαρμογή είναι το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας, που θα αποδείξουμε τώρα.

3.11. Θεώρημα. *Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ με $n > 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Εστω οτι $f(x) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε ορίζεται η συνεχής συνάρτηση $F : [0, +\infty) \times S^1 \to S^1$ με

$$F(s, z) = \frac{f(sz)}{|f(sz)|}.$$

Ετσι για κάθε $s \geq 0$ έχουμε $F_s \simeq F_0$. Για $\rho = 1 + |a_{n-1}| + ... + |a_0|$ και κάθε $z \in S^1$ έχουμε

$$|f(\rho z) - \rho^n z^n| \leq \rho^{n-1}|a_{n-1}| + ... + \rho|a_1| + |a_0| \leq \rho^{n-1}(|a_{n-1}| + ... + |a_1| + |a_0|) < |\rho^n z^n|.$$

Δηλαδή, το $f(\rho z)$ βρίσκεται μέσα στον ανοιχτό δίσκο με κέντρο το $\rho^n z^n$ και ακτίνα $|\rho^n z^n|$. Ορίζεται λοιπόν η συνεχής συνάρτηση $H : [0, 1] \times S^1 \to S^1$ με

$$H(t, z) = \frac{(1-t)f(\rho z) + t\rho^n z^n}{|(1-t)f(\rho z) + t\rho^n z^n|}.$$

Προφανώς $H : F_\rho \simeq f_n$, οπότε από το θεώρημα 3.6 έχουμε

$$n = \deg f_n = \deg F_\rho = \deg F_0 = 0,$$

αφού η F_0 είναι σταθερή, αντίφαση. □

4. Δυϊσμός Alexander στο $\mathbb{R}^2$ και το θεώρημα του Jordan

Εστω $X \subset \mathbb{C}$, το οποίο $\mathbb{C}$ ταυτίζεται τοπολογικά με το $\mathbb{R}^2$. Εστω $\delta : (\mathbb{C} \setminus X) \times X \to S^1$ η συνεχής συνάρτηση με

$$\delta(z, x) = \frac{x - z}{|x - z|}.$$

Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus X$, η συνάρτηση $\delta_z = \delta(z, .) : X \to S^1$ είναι συνεχής. Αν $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus X$ είναι ένα τόξο, τότε η $H_\gamma : [0, 1] \times X \to S^1$ με $H_\gamma(t, x) = \delta(\gamma(t), x)$ είναι συνεχής, δηλαδή ομοτοπία.

Εστω επιπλέον οτι το X είναι συμπαγές, οπότε το $\mathbb{C} \setminus X$ είναι ανοιχτό και συνεπώς οι συνεκτικές του συνιστώσες ταυτίζονται με τις κατά τόξα συνεκτικές του συνιστώσες. Αν τα z_0, $z_1 \in \mathbb{C} \setminus X$ ανήκουν στην ίδια κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$, τότε υπάρχει τόξο $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus X$ με $\gamma(0) = z_0$ και $\gamma(1) = z_1$. Προφανώς, $H_\gamma : \delta_{z_0} \simeq \delta_{z_1}$. Αν λοιπόν Σ είναι το σύνολο των κατά τόξα συνεκτικών συνιστωσών του $\mathbb{C} \setminus X$, τότε ορίζεται καλά η συνάρτηση $\Delta : \Sigma \to H^1(X)$ με $\Delta[z] = [\delta_z]$, όπου $[z]$ είναι η κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$ που περιέχει το σημείο z.

4.1. Λήμμα. *Αν το $z \in \mathbb{C} \setminus X$ βρίσκεται στην μη-φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$, τότε η δ_z είναι ομοτοπική με σταθερή, δηλαδή $[\delta_z] = 0$.*

Απόδειξη. Αφού το X είναι συμπαγές, υπάρχει $R > 0$ ώστε $X \subset S(0, R)$. Εστω $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{S(0, R)}$. Αν υπάρχει $x \in X$ ώστε $\delta_{z_0}(x) = \dfrac{z_0}{|z_0|}$, τότε $x|z_0| = z_0(|x - z_0| + |z_0|)$, οπότε $|x| = |x - z_0| + |z_0| > |z_0|$, που είναι αντίφαση, αφού $|x| < R < |z_0|$. Κατά συνέπεια, $\delta_{z_0}(x) \neq \frac{z_0}{|z_0|}$, για κάθε $x \in X$. Ετσι η δ_{z_0} δεν είναι επί και άρα είναι ομοτοπική με σταθερή, από το παράδειγμα 1.2(γ). □

Εστω τώρα $H_0(\mathbb{C} \setminus X)$ η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από το Σ. Τότε η Δ επεκτείνεται γραμμικά σ' έναν μοναδικό ομομορφισμό ομάδων, που συμβολίζουμε πάλι με $\Delta : H_0(\mathbb{C} \setminus X) \to H^1(X)$. Εστω A η μη-φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$ και $< A >$ η (άπειρη) κυκλική υποομάδα της $H_0(\mathbb{C} \setminus X)$ που αυτή παράγει. Σύμφωνα με το λήμμα 4.1 έχουμε $< A > \leq \mathrm{Ker}\Delta$ και συνεπώς ορίζεται καλά ο ομομορφισμός ομάδων $D_X : \tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \to H^1(X)$ με

$$D_X(\sigma + < A >) = \Delta(\sigma),$$

όπου $\tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) = H_0(\mathbb{C} \setminus X)/ < A >$.

4.2. Θεώρημα. (J. W. Alexander) *Για κάθε συμπαγές σύνολο $X \subset \mathbb{C}$ ο $D_X : \tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \to H^1(X)$ είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος του Alexander σημειώνουμε οτι ο ομομορφισμός D_X είναι φυσικός, δηλαδή ανεξάρτητος του X, όπως δείχνει ο ορισμός του. Αυτό διατυπώνεται από το παρακάτω λήμμα, που είναι άμεσο από τους ορισμούς.

4.3. Λήμμα. *Αν $Y \subset X$ είναι δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και $i : Y \to X$, $j : \mathbb{C} \setminus X \to \mathbb{C} \setminus Y$ είναι οι ενθέσεις, τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.* □

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) & \xrightarrow{j_*} & \tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus Y) \\ \downarrow{\scriptstyle D_X} & & \downarrow{\scriptstyle D_Y} \\ H^1(X) & \xrightarrow{i^*} & H^1(Y) \end{array}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος του Alexander βασίζεται στην παρακάτω πρόταση.

4.4. Πρόταση. *Εστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα συμπαγές σύνολο. Τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to S^1$ έχει μια συνεχή επέκταση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus E \to S^1$, όπου το $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι κάποιο πεπερασμένο σύνολο.*

Απόδειξη. Εστω $R > 0$ με $A \subset S(0, R)$ και $g_1 : A \cup (\mathbb{R}^2 \setminus S(0, 2R)) \to \mathbb{R}^2$ η συνεχής συνάρτηση με

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{όταν } x \in A \\ x, & \text{όταν } x \in \mathbb{R}^2 \setminus S(0, 2R). \end{cases}$$

Από το θεώρημα επέκτασης του Tietze, η g_1 επεκτείνεται σε μια συνεχή συνάρτηση $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ετσι έχουμε $g_2|A = f$ και $g_2(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S(0, 2R)$. Τό σύνολο $B = g_2^{-1}(0) \subset \overline{S(0, 2R)}$ είναι συμπαγές και προφανώς $A \cap B = \varnothing$. Θέτουμε

$$\epsilon = \frac{1}{2} \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\} > 0$$

και εστω $c > 0$ ώστε $A \cup B \subset [-c, c] \times [-c, c]$. Θεωρούμε μια διαμέριση του τετραγώνου $Q = [-c, c] \times [-c, c]$ σε ίσα τετράγωνα με πλευρά μικρότερη από ϵ. Τότε κάποιο από τα τεράγωνα της διαμέρισης δεν τέμνει το A και το B ταυτόχρονα. Θεωρούμε το σύνολο

$$Y = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{int}Q) \cup \{\text{κορυφές, πλευρές, τετράγωνα της διαμέρισης, που δεν τέμνουν το } B\}.$$

Προφανώς $A \subset Y$. Θα κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \setminus E \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, για κάποιο κατάλληλο πεπερασμένο σύνολο $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ και θα θέσουμε $\bar{f} = F/\|F\|$. Ορίζουμε κατ' αρχήν την F στο Y να είναι η g_2, δηλαδή $F(x) = g_2(x)$ για κάθε $x \in Y$. Αν το x είναι μια κορυφή της διαμέρισης εκτός του Y, τότε ορίζουμε το $F(x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με οποιονδήποτε τρόπο. Οι κορυφές εκτός του Y αποτελούν πεπερασμένο σύνολο και αυτό είναι δυνατόν, ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια. Εστω K μια πλευρά της διαμέρισης εκτός του Y. Τότε η F έχει οριστεί στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος K. Επειδή το $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικό, η F επεκτείνεται στο K. Εστω τώρα P ένα τετράγωνο της διαμέρισης εκτός του Y. Τότε η F έχει ήδη οριστεί στο ∂P, όπου είναι και συνεχής. Αρκεί να επεκτείνουμε συνεχώς την F στο P ώστε να παίρνει την τιμή 0 το πολύ σε ένα σημείο. Εστω m_P το κέντρο του τετραγώνου P. Τότε για κάθε $x \in P$ υπάρχουν $0 < t \leq 1$ και $z \in \partial P$ ώστε $x = m_P + t(z - m_P)$. Ορίζουμε τώρα $F(m_P) = 0$ και $F(x) = tF(z)$. Η F είναι καλά ορισμένη, συνεχής επέκταση, αφού τα t και z είναι μοναδικά για την παραπάνω παράσταση του $x \neq m_P$. Προφανώς $(F|P)^{-1}(0) = \{m_P\}$. Μ' αυτόν τον τρόπο έχει οριστεί μια συνεχής συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \setminus E \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, με $F|A = f$, όπου το E είναι το πεπερασμένο σύνολο των κέντρων των τετραγώνων της διαμέρισης του Q που δεν περιέχονται στο Y. □.

Απόδειξη του θεωρήματος του Alexander. Θα δείξουμε πρώτα οτι ο D_X είναι μονομορφισμός. Εστω $\sum_{j=1}^{k} n_j[z_j] + < A > \in \mathrm{Ker}D_X$, όπου $z_j \in \mathbb{C} \setminus X$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq k$. Αυτό σημαίνει οτι η συνάρτηση $f : X \to S^1$ με

$$f(x) = \prod_{j=1}^{k} \frac{(x - z_j)^{n_j}}{|x - z_j|^{n_j}}$$

είναι ομοτοπική με σταθερή. Εστω U_j η κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$ που περιέχει το z_j. Η f έχει μια συνεχή επέκταση $f_j : X \cup (U_j \setminus \{z_j\}) \to S^1$ με τον ίδιο τύπο. Επειδή η f είναι ομοτοπική με σταθερή, επεκτείνεται συνεχώς στο $\mathbb{C}$. Πραγματι, από το θεώρημα του Eilenberg υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ με $f = e^{2\pi i\phi}$. Από το θεώρημα επέκτασης του Tietze, η ϕ επεκτείνεται σε μια συνεχή συνάρτηση $\bar{\phi} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Η $e^{2\pi i\bar{\phi}} : \mathbb{C} \to S^1$ επεκτείνει τώρα συνεχώς την f. Υπάρχει λοιπόν μια συνεχής επέκταση $g_j : \mathbb{C} \setminus U_j \to S^1$ της f. Αφού $f|X = g_j|X$, ορίζεται η συνεχής συνάρτηση $F_j : \mathbb{C} \setminus \{z_j\} \to S^1$ με $F_j|X \cup (U_j \setminus \{z_j\}) = f_j$ και $F|\mathbb{C} \setminus U_j = g_j$. Επειδή το U_j είναι φραγμένο, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $\partial S(z_j, \epsilon) \subset \mathbb{C} \setminus U_j$, οπότε η $F_j|\partial S(z_j, \epsilon) = g_j|\partial S(z_j, \epsilon)$ είναι ομοτοπική με σταθερή, αφου η g_j είναι. Από την άλλη μεριά, υπάρχει $\epsilon' > 0$ ώστε $\overline{S(z_j, \epsilon')} \subset U_j$, οπότε $F_j|\partial S(z_j, \epsilon') = f_j|\partial S(z_j, \epsilon')$. Η $f_j : \partial S(z_j, \epsilon') \to S^1$ έχει βαθμό n_j, γιατί για $i \neq j$ οι παράγοντες του γινομένου στον τύπο της f_j είναι ομοτοπικοί με σταθερές και συνεπώς δεν συνεισφέρουν στον βαθμό, επειδή επεκτείνονται συνεχώς στον δίσκο $\overline{S(z_j, \epsilon')}$. Αφού τώρα

$$f_j|\partial S(z_j, \epsilon') = F_j|\partial S(z_j, \epsilon') \simeq F_j|\partial S(z_j, \epsilon) = g_j|\partial S(z_j, \epsilon),$$

που είναι ομοτοπική με σταθερή, πρέπει $n_j = 0$. Αυτό δείχνει οτι $\mathrm{Ker}D_X = 0$.

Για να δείξουμε οτι ο D_X είναι επιμορφισμός, θα χρησιμοποιήσουμε την φυσικότητα. Εστω $[f] \in H^1(X)$. Από την πρόταση 4.4, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $E \subset \mathbb{C} \setminus X$ και μια συνεχής επέκταση $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \setminus E \to S^1$ της f. Εστω οτι $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Εστω $R_1,...,R_n > 0$ ώστε $\overline{S(a_j, R_j)} \subset \mathbb{C} \setminus X$ και $R > 0$ ώστε

$$X \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{S(a_j, R_j)} \subset S(0, R).$$

Ετσι η f έχει μια συνεχή επέκταση

$$F : \overline{S(0,R)} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} S(a_j, R_j) \to S^1.$$

Αν $M = \overline{S(0,R)} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} S(a_j, R_j)$, αρκεί να δείξουμε οτι η D_M είναι επιμορφισμός, από το λήμμα 4.3, γιατί $i^*[F] = [f]$, δηλαδή $[f] \in \mathrm{Im} i^*$, όπου $i : X \to M$ είναι η ένθεση. Εστω λοιπόν $g : M \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $G : M \to S^1$ με

$$G(x) = \prod_{j=1}^{k} \frac{(x - a_j)^{d_j}}{|x - a_j|^{d_j}}$$

όπου d_j είναι ο βαθμός της $g|\partial S(a_j, R_j)$. Αρκεί να δείξουμε οτι $g \simeq G$. Προφανώς ο βαθμός της $G|\partial S(a_j, R_j)$ είναι d_j και συνεπώς η $\frac{g}{G}|\partial S(a_j, R_j)$ επεκτείνεται συνεχώς στον δίσκο $\overline{S(a_j, R_j)}$, αφού έχει βαθμό $d_j - d_j = 0$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $1 \leq j \leq n$, συμπεραίνουμε οτι η g/G επεκείνεται συνεχώς στον $\overline{S(0,R)}$. Αρα η g/G είναι ομοτοπική με σταθερή, δηλαδή $g \simeq G$. □

4.5. Πόρισμα. *Αν το $X \subset \mathbb{C}$ είναι ένα απλό τόξο, δηλαδή ομοιομορφικό με το $[0,1]$, τότε το $\mathbb{C} \setminus X$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Οπως ξέρουμε $H^1([0,1]) = \{0\}$ και από το θεώρημα του Alexander $\tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \cong H^1(X) \cong H^1([0,1]) = \{0\}$. Αρα $H_0(\mathbb{C} \setminus X) \cong \mathbb{Z}$, δηλαδή το $\mathbb{C} \setminus X$ είναι (κατά τόξα) συνεκτικό. □

4.6. Θεώρημα. (C. Jordan) *Αν το $X \subset \mathbb{C}$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη, δηλαδή ομοιομορφικό με S^1, τότε το $\mathbb{C} \setminus X$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, των οποίων μάλιστα είναι το κοινό σύνορο.*

Απόδειξη. Οπως ξέρουμε $H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, και από το θεώρημα του Alexander $\tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \cong H^1(X) \cong H^1(S^1) = \mathbb{Z}$. Αρα $H_0(\mathbb{C} \setminus X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Αυτό σημαίνει οτι το $\mathbb{C} \setminus X$ αποτελείται από δύο (κατά τόξα) συνεκτικές συνιστώσες U_1, U_2. Προφανώς $\partial U_1 \subset X$. Αν $\partial U_1 \neq X$, τότε το ∂U_1 περιέχεται σε ένα απλό τόξο $I \subset X$. Το U_1 είναι μη-κενό, ανοιχτό, αλλά και κλειστό στο $\mathbb{C} \setminus I$, γιατί

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C} \setminus I}(U_1) = \overline{U_1} \cap (\mathbb{C} \setminus I) = U_1 \cup (\partial U_1 \cap (\mathbb{C} \setminus I)) = U_1.$$

Συνεπώς το $\mathbb{C} \setminus I$ δεν είναι συνεκτικό. Αυτό όμως αντιφάσκει με το πόρισμα 4.5. Πρέπει λοιπόν $\partial U_1 = X$, και όμοια $\partial U_2 = X$. □.

Ασκήσεις

1. Εστω $n \geq 1$ και $X = \{(x,y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\}$. Να αποδειχθεί οτι η $f : S^n \to X$ με $f(x) = (x,x)$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

2. Εστω $P(z)$ ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, ώστε $P(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S^1$. Να αποδειχθεί οτι αν $f : S^1 \to S^1$ είναι η συνεχής συνάρτηση με $f(z) = P(z)/|P(z)|$, τότε

$$\deg f = \#\{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0 \text{ και } |z| < 1\}.$$

3. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^1 \to S^1$ με $\deg f \neq 1$ έχει σταθερό σημείο.

4. Εστω $f, g : S^1 \to S^1$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Να αποδειχθεί οτι $\deg(g \circ f) = (\deg f) \cdot (\deg g)$.

5. Εστω X ένας συνεκτικός, συμπαγής μετρικός χώρος και $a \in H^1(X)$. Αν υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ με $n \neq 0$ και $n \cdot a = 0$, να αποδειχθεί οτι $a = 0$.

6. Εστω $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$ μια ένα προς ένα, συνεχής απεικόνιση.
(α) Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{R}^2 \setminus f(D^2)$ είναι συνεκτικό.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $f(\text{int}D^2)$ είναι η φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$.

7. Εστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : U \to \mathbb{R}^2$ μια ένα προς ένα, συνεχής απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι το $f(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και η f είναι τοπολογική εμφύτευση.

Βιβλιογραφία για παραπέρα μελέτη

1. G. Bredon, Topology and Geometry, Springer-Verlag, 1993.
2. J. Dugundji, Topology, Allyn Bacon, 1966.
3. S. T. Hu, Homotopy theory, Academic Press, 1959.
4. W. S. Massey, Algebraic Topology: An introduction, Hartcourt, Brace and World, 1967.
5. J. W. Milnor, Topology from a differentiable viewpoint, University Press of Virginia, 1965.
6. J. Munkres, Topology, Addison Wesley, 1966.
7. E. Spanier, Algebraic Topology, McGraw Hill, 1966.
8. C. T. C. Wall, A geometric introduction to Topology, Addison Wesley, 1972.