ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 1

1. Να αποδειχθεί οτι για τις αποστάσεις d_p, $1 \leq p \leq \infty$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει οτι

$$d_\infty \leq d_p \leq n^{1/p} d_\infty, \quad p \geq 1.$$

Συνεπώς,

$$B_{d_\infty}(x, \frac{\epsilon}{n^{1/p}}) \subset B_{d_p}(x, \epsilon) \subset B_{d_\infty}(x, \epsilon)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\epsilon > 0$, και όλες οι d_p, $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$.

2. Να αποδειχθεί οτι ο τύπος

$$\rho(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

ορίζει μία απόσταση στο ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$. Να αποδειχθεί επίσης οτι η ρ ορίζει τα ίδια ανοιχτά σύνολα με τον περιορισμό της ευκλείδειας απόστασης από το $\mathbb{R}$.

3. Στο σύνολο $C[0, 1] = \{f | f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad \text{συνεχής}\}$ ορίζονται οι αποστάσεις

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : 0 \leq t \leq 1\} \quad \text{και}$$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Να αποδειχθεί οτι κάθε d_1-ανοιχτό σύνολο είναι d_∞-ανοιχτό, αλλά οι d_1 και d_∞ δεν ορίζουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα.

4. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) $f(0) = 0$ και $f(t) > 0$ για $t > 0$.
(β) $f(t + s) \leq f(t) + f(s)$ για κάθε t, $s \geq 0$.
(γ) Η f είναι αύξουσα.
Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}.$$

Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, να αποδειχθεί οτι η $\rho = f \circ d$ είναι μία νέα απόσταση στο σύνολο X που ορίζει τα ίδια ανοιχτά σύνολα με την d.

5. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται *φραγμένο* όταν

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in A\} < +\infty.$$

Συμβολίζουμε με $F(X)$ το σύνολο όλων των μη-κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του X. Να αποδειχθεί οτι ο τύπος

$$\rho(A, B) = \max\{\sup\{d(x, B) : x \in A\}, \sup\{d(y, A) : y \in B\}\}$$

ορίζει μία απόσταση στο $F(X)$. Η απόσταση αυτή λέγεται απόσταση Hausdorff.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 2

1. Είναι η οικογένεια $\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ μία τοπολογία στο $\mathbb{R}$;

2. Θεωρούμε το υποσύνολο

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$$

του $\mathbb{R}^2$. Να ευρεθούν τα A°, $\overline{A}$ και ∂A, ως προς τη συνηθισμένη ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}^2$.

3. Να δοθεί ένα παράδειγμα υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ για το οποίο $\partial(A^\circ) \neq \partial A$ και $\partial(\overline{A}) \neq \partial A$.

4. Μία οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται τοπικά πεπερασμένη αν κάθε σημείο $x \in X$ έχει μία ανοιχτή περιοχή U στον X τέτοια ώστε το σύνολο

$$\{A \in \mathcal{F} : U \cap A \neq \varnothing\}$$

είναι πεπερασμένο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε τοπικά πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X ισχύει η ισότητα

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}.$$

5. Αν G είναι μία προσθετική υποομάδα το $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι είτε η G είναι τετριμένη, δηλαδή $G = \{0\}$, είτε η G είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, είτε υπάρχει κάποιο $a > 0$ ώστε $G = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$.

6. Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_u$ σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία που έχει υποβάση την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, b], (a, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του $\mathbb{R}_u$ είναι λεπτότερη από την συνηθισμένη ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η οικογένεια $\mathcal{B} = \{(a, b] : a < b, b \in \mathbb{R}\}$ είναι μία βάση της τοπολογίας του $\mathbb{R}_u$ που αποτελείται από σύνολα τα οποία είναι ταυτοχρονα ανοιχτά και κλειστά στον $\mathbb{R}_u$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι πυκνό στον $\mathbb{R}_u$.
(δ) Να αποδιχθεί οτι ο χώρος $\mathbb{R}_u$ είναι 1ος αριθμήσιμος, αλλά δεν είναι 2ος αριθμήσιμος.
(Υπόδειξη για το (δ): Με απαγωγή στο άτοπο, αν υπάρχει μία αριθμήσιμη βάση $\mathcal{A}$ της τοπολογίας του $\mathbb{R}_u$, θεωρούμε το σύνολο

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}_u : x = \sup A, \quad \text{για κάποιο } A \in \mathcal{A}\}$$

που είναι αριθμήσιμο. Επειδή το $\mathbb{R}_u$ είναι υπεραριθήσιμο, υπάρχει $x \in \mathbb{R}_u \setminus \Gamma$. Υπάρχει τώρα $A \in \mathcal{A}$ ώστε $x \in A \subset (-\infty, x]$ και συνεπώς $x = \sup A$, αντίφαση.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 3

1. Να αποδειχθεί οτι μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}_u \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ για κάθε $b \in \mathbb{R}_u$.

2. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιομορφισμός.

3. Να αποδειχθεί οτι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλειστή απεικόνιση.
(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα οτι $\lim_{x\to\pm\infty} |p(x)| = +\infty$ και χρησιμοποιείστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass.)

4. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $p \geq 1$ ή $p = \infty$, η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to B_{d_p}(0,1)$ με

$$f(x) = \frac{1}{1 + d_p(0,x)} \cdot x$$

είναι ομοιομορφισμός.

5. Να αποδειχθεί οτι ο κύκλος $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ και ο «ρόμβος» $X = \{x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ (εφοδιασμένοι με τους αντίστοιχους περιορισμούς της ευκλείδειας απόστασης του $\mathbb{R}^2$) είναι ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι.

6. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : [0,+\infty) \to S^1$ με $f(t) = \left(\cos\frac{2\pi t^2}{1+t^2}, \sin\frac{2\pi t^2}{1+t^2}\right)$ είναι συνεχής, ένα-προς-ένα και επί, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός.

7. Να αποδειχθεί οτι ο κλειστός δίσκος $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ είναι ομοιμορφικός με το $[-1,1] \times [-1,1]$ και συνεπώς με $[0,1] \times [0,1]$. Και οι τρείς χώροι θεωρούνται εφοδιασμένοι με τους αντίστοιχους περιορισμούς της ευκλείδειας απόστασης του $\mathbb{R}^2$.
(Υπόδειξη: Ένας ομοιομορφισμός $h : D^2 \to [-1,1] \times [-1,1]$ δίνεται από τον τύπο

$$h(x,y) = \frac{1}{1 - \sqrt{x^2+y^2} + \max\{|x|,|y|\}} \cdot (x,y).)$$

8. Η 3-σφαίρα είναι το σύνολο $S^3 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία που ορίζει ο περιορισμός της ευκλείδειας απόστασης από τον $\mathbb{C}^2$. Στην ομάδα $SU(2)$ των μοναδιαίων 2×2 μιγαδικών πινάκων με ορίζουσα 1 θεωρούμε την τοπολογία που ορίζει ο περιορισμός της ευκλείδειας απόστασης από τον $\mathbb{C}^{2\times 2}$, τον οποίο ταυτίζουμε με τον $\mathbb{C}^4$.
(α) Να αποδειχθεί οτι

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : S^3 \to SU(2)$ με

$$f(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

είναι ομοιομορφισμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 4

1. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος γινόμενο $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ δεν είναι διακριτός, αλλά ο υπόχωρός του $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u : x + y = 1\}$ είναι διακριτός. Να αποδειχθεί επίσης οτι ο $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο, αλλά ο X δεν έχει κανένα.

2. Αν $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι η n-σφαίρα, $n \in \mathbb{Z}^+$, να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \cdot (2x, \|x\|^2 - 1)$$

είναι τοπολογική εμφύτευση. Ποιά είναι η αντίστροφη $f^{-1} : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$;

3. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $h : (0, +\infty) \times S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ με $h(t, x) = tx$ είναι ομοιομορφισμός.

4. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος με μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ και $p : X \to X/\sim$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλήκο. Έστω $A \subset X$ με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \sim a$.
(β) Για κάθε $B \subset A$ που είναι αναλλοίωτο ως προς τον περιορισμό της $\sim$ στο A και ανοιχτό στη σχετική τοπολογία του A το $p^{-1}(p(B))$ είναι ανοιχτό στον X.

Να αποδειχθεί οτι η ένθεση $i : A \to X$ επάγει έναν ομοιομορφισμό $i_* : A/\sim \to X/\sim$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p|_A"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A/\sim \arrow[r, "i_*"] & X/\sim \end{tikzcd}$$

5. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος.
(α) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $H(X) = \{h | h : X \to X \quad \text{ομοιομορφισμός}\}$ γίνεται ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.
(β) Έστω G μία υποομάδα της $H(X)$. Στον X θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ όταν υπάρχει $g \in G$ ώστε $y = g(x)$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας λέγονται τροχιές της G. Αν X/G είναι ο χώρος πηλήκο των τροχιών της G, να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πηλήκο $p : X \to X/G$ είναι ανοιχτή.

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος πηλήκο $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ είναι ομοιμορφικός με τον n-torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n φορές).

7. Ο πραγματικός n-διάστατος προβολικός χώρος για $n \in \mathbb{Z}^+$ είναι ο χώρος πηλήκο $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, όπου $x \sim y$ όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ώστε $y = \lambda x$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πηλήκο $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ είναι ανοιχτή.
(β) Στην n-σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim -x$. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πηλήκο $q : S^n \to S^n/\sim$ είναι ανοιχτή και επίσης η ένθεση $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ επάγει έναν ομοιομορφισμό $i_* : S^n/\sim \to \mathbb{R}P^n$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
S^n/\sim \arrow[r, "i_*"] & \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}
$$

(γ) Να αποδειχθεί οτι η πραγματική προβολική ευθεία $\mathbb{R}P^1$ είναι ομοιομορφικός χώρος με τον κύκλο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
(Υπόδειξη: Για το (γ) θεωρείστε την απεικόνιση $f : S^1 \to S^1$ με $f(z) = z^2$.)

8. Ο μιγαδικός n-διάστατος προβολικός χώρος για $n \in \mathbb{Z}^+$ είναι ο χώρος πιλήκο $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, όπου $z \sim w$ όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε $w = \lambda z$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πιλήκο $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ είναι ανοιχτή.
(β) Στην $(2n+1)$-σφαίρα $S^{2n+1} = \{(z_0, ... z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $z \sim w$ όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$ ώστε $w = \lambda z$. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πιλήκο $q : S^{2n+1} \to S^{2n+1}/\sim$ είναι ανοιχτή. Να αποδειχθεί επίσης οτι η ένθεση $i : S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ επάγει έναν ομοιομορφισμό $i_* : S^{2n+1}/\sim \to \mathbb{C}P^n$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
S^{2n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
S^{2n+1}/\sim \arrow[r, "i_*"] & \mathbb{C}P^n
\end{tikzcd}
$$

Η απεικόνιση πιλήκο $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ λέγεται Hopf fibration.

9. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση (κλασική Hopf fibration) $f : S^3 \to S^2$ που δίνεται από τον τύπο

$$f(z_0, z_1) = (2\mathrm{Re}(z_0\overline{z_1}), 2\mathrm{Im}(z_0\overline{z_1}), |z_0|^2 - |z_1|^2),$$

όπου $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, επάγει έναν ομοιομορφισμό $\tilde{f} : \mathbb{C}P^1 \to S^2$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
S^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \\
\mathbb{C}P^1 \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 5

1. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος $\mathbb{R}_u$ είναι ολικά-μη-συνεκτικός, δηλαδή τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολά του είναι τα μονοσύνολα.

2. Να αποδειχθεί οτι ένας τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός τότε και μόνο τότε όταν για κάθε ανοιχτό κάλυμα $\mathcal{U}$ του X και κάθε $U, V \in \mathcal{U}$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $U_0, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ ώστε $U_0 = U$, $U_n = V$ και $U_{i-1} \cap U_i \neq \varnothing$, $1 \leq i \leq n$.

3. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων του με την ιδιότητα $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι συνεκτικό.

4. Να αποδειχθεί οτι ο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ και η n-σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί χώροι για $n \geq 1$. Συνεπώς, οι προβολικοί χώροι $\mathbb{R}P^n$ και $\mathbb{C}P^n$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί για κάθε $n \geq 0$.

5. Να αποδειχθεί οτι τα διαστήματα $[-1, 1]$, $(-1, 1]$ και $(-1, 1)$ δεν είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους.

6. Να αποδειχθεί οτι ο κύκλος S^1 και η n-σφαίρα S^n για $n \geq 2$ δεν είναι ομοιομορφικοί χώροι.

7. Να αποδειχθεί οτι ο κύκλος S^1 και το διάστημα $[0, 1)$ δεν είναι ομοιομορφικοί χώροι.

8. Να αποδειχθεί οτι ο κύκλος $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ δεν είναι ομοιομορφικός με κανένα υπόχωρο του $\mathbb{R}$.

9. Έστω (X, d) ένας μη-κενός μετρικός χώρος που δεν είναι μονοσύνολο, δηλαδή περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Αν ο X είναι συνεκτικός χώρος, να αποδειχθεί οτι το σύνολο X είναι υπεραριθμήσιμο.
(Υπόδειξη: Αφού υποθέτουμε οτι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $x_0, x_1 \in X$ με $x_0 \neq x_1$, η συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{d(x, x_0)}{d(x, x_0) + d(x, x_1)}$$

είναι καλά ορισμένη, προφανώς συνεχής και $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$.)

10. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Αν το A είναι συνεκτικό, ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του X, να αποδειχθεί οτι το A είναι μία συνεκτική συνιστώσα του X. Είναι κάθε συνεκτική συνιστώσα του X ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του X;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 6

1. Εστω X ένας χώρος Hausdorff και $\{x_1, ..., x_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του X, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν ανά δύο ξένα ανοιχτά σύνολα U_1,..., $U_n \subset X$ με $x_1 \in U_1$,..., $x_n \in U_n$.

2. Να αποδειχθεί οτι οι προβολικοί χώροι $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{R}P^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, είναι χώροι Hausdorff.
(Υπόδειξη: Αν $[z_0, z_1, ..., z_n] \neq [w_0, w_1, ..., w_n]$, υπάρχουν $0 \leq j, k \leq n$ ώστε $z_j w_k \neq z_k w_j$. Τα σύνολα

$$U = \{[u_0, u_1, ..., u_n] \in \mathbb{C}P^n : |u_k z_j - u_j z_k| < |u_k w_j - u_j w_k|\},$$
$$W = \{[u_0, u_1, ..., u_n] \in \mathbb{C}P^n : |u_k z_j - u_j z_k| > |u_k w_j - u_j w_k|\}$$

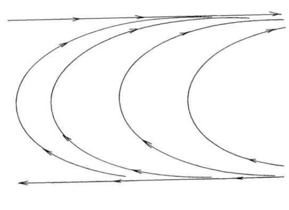
είναι ανοιχτά, ξένα μεταξύ τους και $[z_0, z_1, ..., z_n] \in U$, $[w_0, w_1, ..., w_n] \in W$.)

3. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται retract του X, αν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $r : X \to A$ τέτοια ώστε $r(x) = x$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή $r \circ i = id_A$, όπου $i : A \to X$ είναι η ένθεση. Η r λέγεται retraction του X στο A.
(α) Να αποδειχθεί οτι κάθε retract ενός χώρου Hausdorff X είναι κλειστό υποσύνολο του X.
(β) Να αποδειχθεί οτι η n-σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι retract του χώρου $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

4. Οι καμπύλες $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ και $x = \dfrac{1}{\cos y} + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι οι τροχιές στη λωρίδα $\mathbb{R} \times \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}^2$ του συστήματος συνήθων διαφορκών εξισώσεων

$$x' = \sin y, \quad y' = (\cos y)^2$$

και είναι ξένες μεταξύ τους (μοναδικότητα των λύσεων από τις αρχικές συνθήκες). Συνεπώς είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας μίας σχέσης ισοδυναμίας $\sim$. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος πιλήκο των τροχιών $\mathbb{R} \times \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] / \sim$ δεν είναι Hausdorff.



5. Έστω $\mathcal{B}$ η κλάση των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από τις d_2-ανοιχτές μπάλλες και τα σύνολα της μορφής $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2, y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$, $\quad R > 0$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η κλάση $\mathcal{B}$ είναι βάση μίας τοπολογίας $\mathcal{T}$ στο $\mathbb{R}^2$ που είναι λεπτότερη από την ευκλείδεια.
(β) Να αποδειχθεί οτι ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff, αλλά δεν είναι κανονικός.
(Υπόδειξη: Για το (β) δείξτε πρώτα οτι το σύνολο $F = \mathbb{R} \times \{0\} \setminus \{(0, 0)\}$ είναι $\mathcal{T}$-κλειστό και στη συνέχεια οτι δεν ξεχωρίζεται από το σημείο $(0, 0)$ με $\mathcal{T}$-ανοιχτά σύνολα.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 7

1. Εστω X ένας φυσιολογικός χώρος και $R \subset X \times X$ μία σχέση ισοδυναμίας. Αν η απεικόνιση πιλήκο $p : X \to X/R$ είναι κλειστή, να αποδειχθεί οτι ο χώρος πιλήκο X/R είναι φυσιολογικός.

2. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Συμβολίζουμε με X/A τον χώρο πιλήκο της σχέσης ισοδυναμίας στον X με κλάσεις ισοδυναμίας τα σύνολα A και $\{x\}$, $x \in X \setminus A$. Αν ο X είναι ένας φυσιολογικός χώρος και το A κλειστό υποσύνολο του X, να αποδειχθεί οτι ο χώρος πιλήκο X/A είναι φυσιολογικός.

3. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και A, $B \subset X$ τέτοια ώστε $\overline{A} \cap B = \varnothing$ και $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U, $V \subset X$ τέτοια ώστε $A \subset U$, $B \subset V$ και $U \cap V = \varnothing$.
(Υπόδειξη: $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ και $V = \{x \in X : d(x, A) > d(x, B)\}$.)

4. Να αποδειχθεί οτι ένας συνεκτικός φυσιολογικός χώρος που έχει τουλάχιστον δύο σημεία είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

5. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος $\mathbb{R}_u$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

6. Ένας χώρος Hausdorff X λέγεται χώρος Lindelöf αν κάθε ανοιχτό κάλυμα του X έχει ένα αριθμήσιμο υποκάλυμα του X.
(α) Να αποδειχθεί οτι οι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}_u$ είναι χώροι Lindelöf.
(β) Να αποδειχθεί οτι αν ο X είναι χώρος Lindelöf και το $A \subset X$ είναι ένα κλειστό σύνολο, τότε το A είναι επίσης χώρος Lindelöf.
(γ) Να αποδειχθεί οτι κάθε κανονικός χώρος Lindelöf είναι φυσιολογικός.
(δ) Να αποδειχθεί οτι αν ο X είναι ένας συνεκτικός κανονικός χώρος τότε το σύνολο X είναι υπεραριθμήσιμο ή μονοσύνολο. Αυτό δεν ισχύει για χώρους Hausdorff (Morton Brown, 1953).
(Υπόδειξη: Στο (α) ο χειρισμός του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{R}_u$ είναι ίδιος. Έστω $\mathcal{U}$ ένα ανοιχτό κάλυμα του $\mathbb{R}_u$. Επειδή $\mathbb{R}_u = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$, αρκεί να δείξουμε οτι κάθε (φραγμένο) κλειστό διάστημα καλύπτεται από μία αριθμήσιμη υποοικογένεια του $\mathcal{U}$. Έστω a, $b \in \mathbb{R}_u$, με $a < b$. Αν A είναι το σύνολο όλων των $x < b$ για τα οποία το διάστημα $[x, b]$ καλύπτεται από μία αριθμήσιμη υποοικογένεια του $\mathcal{U}$, αρκεί να δείξουμε οτι το A δεν είναι κάτω φραγμένο. Το A δεν είναι κενό, γιατί υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ με $b \in U$ και συνεπώς υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $(b - \epsilon, b] \subset U$, αφού το $U \subset \mathbb{R}_u$ είναι ανοιχτό, οπότε $(b - \epsilon, b) \subset A$. Αν το A είναι κάτω φραγμένο, υπάρχει το $s = \inf A < b$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s + \frac{1}{n_0} < b$ και για κάθε $n \geq n_0$ υπάρχει $a_n \in A$ ώστε $s \leq a_n < s + \frac{1}{n} < b$. Το διάστημα $[a_n, b]$ καλύπτεται από μία αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{U}_n$ του $\mathcal{U}$ και συνεπώς το διάστημα $(s, b]$ καλύπτεται από την αριθμήσιμη υποοικογένεια $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{U}_n$ του $\mathcal{U}$. Όμως υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ με $s \in U$ και υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(s - \delta, s] \subset U$. Συνεπώς, το διάστημα $[s - \frac{\delta}{2}, b]$ καλύπτεται από την αριθμήσιμη υποοικογένεια $\{U\} \cup \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{U}_n$, αντίφαση.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 8

1. Έστω X ένας συμαγής χώρος, Y ένας χώρος Hausdorff και $f : X \to Y$ μία συνεχής και επί απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του Y ταυτίζεται με την τοπολογία πιλήκο ως προς f.

2. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ για κάθε ανοιχτή περιοχή V του A στον X. Αν ο X είναι ένας συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι κάθε μη-πεπερασμένο υποσύνολο του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στον X.

3. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνεχής, κλειστή και επί απεικόνιση. Για κάθε $A \subset X$ θέτουμε $Y_A = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\}$ και $U_A = \bigcup\limits_{y \in Y_A} f^{-1}(y)$.
(α) Αν το $A \subset X$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, να αποδειχθεί οτι το U_A είναι επίσης ανοιχτό υποσύνολο του X.
(β) Αν ο X είναι χώρος Hausdorff και τα σύνολα στάθμης $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, είναι όλα συμπαγή, να αποδειχθεί οτι ο Y είναι χώρος Hausdorff.
(γ) Αν ο X είναι χώρος Hausdorff, τα σύνολα στάθμης $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, είναι όλα συμπαγή και ο Y είναι συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι ο X είναι συμπαγής.
(Υπόδειξη: Για το (α) παρατηρούμε οτι $U_A = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A))$.)

4. Να αποδειχθεί οτι ο μιγαδικός n-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{C}P^n$, καθώς και ο πραγματικός n-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, είναι συνεκτικός, συμπαγής, 2ος αριθμήσιμος και μετρικοποιήσιμος.

5. Να αποδειχθεί οτι η ορθογώνια ομάδα $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^t A = I_n\}$ και η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^t A = I_n \quad \text{και} \quad \det A = 1\}$ είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^{n\times n} \approx \mathbb{R}^{n^2}$.

6. Να αποδειχθεί οτι η μοναδιαία ομάδα $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \bar{A}^t A = I_n\}$ και η ειδική μοναδιαία ομάδα $SU(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \bar{A}^t A = I_n \quad \text{και} \quad \det A = 1\}$ είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}^{n\times n} \approx \mathbb{C}^{n^2}$.

7. Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο με μη-κενό εσωτερικό, να κατασκευαστεί ένας ομοιομορφισμός $h : K \to D^n$, με $h(\partial K) = S^{n-1}$, όπου $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.
(Υπόδειξη: Σταθεροποιούμε ένα σημείο $x_0 \in \mathrm{int}K$. Κάθε $x \in \partial K$ είναι το μοναδικό σημείο τομής με το ∂K της ημιευθείας με αρχή το x_0 που διέρχεται από το x, γιατί αλλιώς είτε το K δεν είναι κυρτό είτε $x_0 \notin \mathrm{int}K$. Η απεικόνιση $h : \partial K \to S^{n-1}$ με

$$h(x) = \frac{1}{\|x - x_0\|} \cdot (x - x_0)$$

είναι ένας ομοιομορφισμός που επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό $h : K \to D^n$ ορίζοντας

$$h\big((1-t)x_0 + tx\big) = \frac{t}{\|x - x_0\|} \cdot (x - x_0)$$

για κάθε $x \in \partial K$ και $0 \leq t \leq 1$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 9

1. Έστω (X, d) ένας συμαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μία απεικόνιση τέτοια ώστε $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε x, $y \in X$. Να αποδειχθεί οτι η f είναι επί.
(Υπόδειξη: Αν η f δεν είναι επί, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\epsilon = d(x, f(X)) > 0$. Συνεπώς, $d(f^n(x), f^m(x)) \geq \epsilon$ για κάθε $n \neq m$.)

2. Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μία απεικόνιση τέτοια ώστε $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ για κάθε x, $y \in X$. Αν η f είναι επί του X, να αποδειχθεί οτι η f είναι d-ισομετρία, δηλαδή $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε x, $y \in X$.
(Υπόδειξη: Για κάθε x, $y \in X$ υπάρχουν ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $f(x_{n+1}) = x_n$ και $f(y_{n+1}) = y_n$, όπου $x_1 = x$, $y_1 = y$, επειδή η f είναι επί.)

3. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος.
(α) Αν ο X είναι συνεκτικός χώρος, να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ και x, $y \in X$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και σημεία $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ ώστε $d(x_k, x_{k+1}) < \epsilon$ για $0 \leq k < n$.
(β) Αν ο X είναι συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι ισχύει και το αντίστροφο του (α).
(γ) Να δειχθεί με ένα παράδειγμα οτι στην περίπτωση που ο X δεν είναι συμπαγής ενδέχεται το αντίστροφο του (α) να μην ισχύει.

4. Να αποδειχθεί οτι ο μετρικός χώρος $(C[0, 1], d_\infty)$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.

5. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος $\mathbb{R}_u$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.

6. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ ένα retract του X με retraction $r : X \to A$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του A (ως υπόχωρος του X) ταυτίζεται με την τοπολογία πιλήκο ως προς r.
(β) Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι και ο A είναι τοπικά συμπαγής χώρος.

7. Έστω X ένας συμπαγής χώρος για τον οποίο υποθέτουμε οτι υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \times X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x, y) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $x = y$. Να αποδειχθεί οτι ο X είναι μετρικοποιήσιμος.
(Υπόδειξη: Για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$ θεωρούμε τα σύνολα

$$U(x, \epsilon) = \{y \in X : |f(x, y)| < \epsilon\}.$$

Λόγω της συμπάγειας, η οικογένεια $\{U(x, \frac{1}{n}) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση της τοπολογίας του X, από όπου προκύπτει οτι ο X είναι 2ος αριθμήσιμος.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 10

1. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to S^n$, $n \geq 1$, μια συνεχής απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι αν η f δεν είναι επί της S^n τότε είναι ομοτοπική με σταθερή.

2. Εστω $a : S^n \to S^n$, $n \geq 1$, η αντιποδική απεικόνιση $a(x) = -x$. Αν $f : S^n \to S^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση χωρίς σταθερά σημεία, να αποδειχθεί οτι η f είναι ομοτοπική με την a.

3. Να αποδειχθεί οτι ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός τότε και μόνον τότε όταν η διαγώνια απεικόνιση $\delta : X \to X \times X$, δηλαδή $\delta(x) = (x, x)$ για κάθε $x \in X$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

4. Αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός, να αποδειχθεί οτι για κάθε χώρο Y ο χώρος γινόμενο $X \times Y$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του Y.

5. Να αποδειχθεί οτι για κάθε τοπολογικό χώρο X το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $[X, S^1]$ γίνεται αβελιανή ομάδα, αν θέσουμε $[f] + [g] = [f \cdot g]$ για κάθε ζεύγος συνεχών απεικονίσεων $f, g : X \to S^1$.

6. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $X = \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\}$, να αποδειχθεί οτι η $f : S^n \to X$ με $f(x) = (x, x)$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

7. Η 3-σφαίρα είναι ο υπόχωρος $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ του $\mathbb{C}^2$. Αν $C \subset S^3$ είναι ο κύκλος $C = \{(z, 0) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\} \approx S^1$, να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $S^3 \setminus C$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του κύκλου S^1.
(Υπόδειξη: Η απεικόνιση $\phi : S^3 \setminus C \to \mathbb{C} \times S^1$ με

$$\phi(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|}\right)$$

είναι ομοιομορφισμός.)

8. Να αποδειχθεί οτι το $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$ είναι strong deformation retract του $D^n \times [0, 1]$, $n \geq 1$.
(Υπόδειξη: Περιγράψτε την απαιτούμενη ομοτοπία με ένα σχήμα.)

9. Να αποδειχθεί οτι η ορθογώνια ομάδα $O(n, \mathbb{R})$ έχει τον ομοτοπικό τύπο (είναι strong deformation retract) της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 1$ (ως υπόχωροι του $\mathbb{R}^{n^2}$).
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα της Πολικής Ανάλυσης από τη Γραμμική Άλγεβρα.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 11

1. Εστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος, $x_0,\, x_1 \in X$ και $u,\, v : [0,1] \to X$ δύο τόξα με $u(0) = v(0) = x_0$ και $u(1) = v(1) = x_1$.
(α) Αν $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, να αποδειχθεί οτι $\hat{u} = \hat{v} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$.
(β) Αν $u \simeq v \ \operatorname{rel}\{0,1\}$, να αποδειχθεί οτι $\hat{u} = \hat{v}$.

2. Εστω X ένας απλά συνεκτικός χώρος, $A \subset X$ και $f : A \to Y$ μία συνεχής απεικόνιση. Αν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε ο επαγόμενος ομομορφισμός $f_\sharp : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ να μην είναι ο τετριμένος, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει συνεχής επέκταση της f στον X.

3. Αν $p : [0,1] \to S^1$ είναι η $p(t) = e^{2\pi i t}$, να αποδειχθεί οτι η κλάση ομοτοπίας με σταθερά άκρα $[p]$ του τόξου p είναι γεννήτορας της $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Να αποδειχθεί οτι το $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$ είναι γεννήτορας τότε και μόνο τότε όταν $\gamma \simeq p \ \operatorname{rel}\{0,1\}$ ή $\gamma^{-1} \simeq p \ \operatorname{rel}\{0,1\}$.

4. Να αποδειχθεί οτι ο n-torus T^n δεν έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον m-torus T^m για $n \neq m$.

5. Εστω $L \subset \mathbb{R}^3$ μία ευθεία γραμμή. Να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $\mathbb{R}^3 \setminus L$ έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον κύκλο S^1 και συνεπώς $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L, x) \cong \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3 \setminus L$.
(Υπόδειξη: Θεωρώντας έναν ομοιομορφισμό του $\mathbb{R}^3$, που είναι σύνθεση μίας μεταφοράς και ενός γραμμικού ισομορφισμού, αναγόμαστε στην περίπτωση που η ευθεία είναι η $L = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ και τότε το $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \setminus \{(0,0,0)\}$ είναι (strong) deformation retract του $\mathbb{R}^3 \setminus L$.)

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ομομορφισμό ομάδων $h : \pi_1(T^2, (1,1)) \to \pi_1(T^2, (1,1))$ υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $f : T^2 \to T^2$ με $f(1,1) = (1,1)$ ώστε $f_\sharp = h$. Μάλιστα, αν ο h είναι ισομορφισμός, τότε η f μπορεί να επιλεγεί ομοιομορφισμός.

7. Εστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος. Να αποδειχθεί οτι ο X είναι απλά συνεκτικός χώρος τότε και μόνο τότε όταν κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^1 \to X$ είναι ομοτοπική με σταθερή.

8. Να αποδειχθεί οτι ο n-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος $\mathbb{C}P^n$ είναι απλά συνεκτικός για κάθε $n \geq 0$.
(Υπόδειξη: Ο $\mathbb{C}P^0$ είναι μονοσύνολο και ο $\mathbb{C}P^1$ είναι ομοιομορφικός με την 2-σφαίρα S^2, οπότε είναι απλά συνεκτικοί. Κάνουμε τώρα επαγωγή στο n.)