ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 1

1. Να αποδειχθεί οτι για τις αποστάσεις d_p, $1 \leq p \leq \infty$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει οτι

$$d_\infty \leq d_p \leq n^{1/p} d_\infty, \quad p \geq 1.$$

Συνεπώς,

$$B_{d_\infty}(x, \frac{\epsilon}{n^{1/p}}) \subset B_{d_p}(x, \epsilon) \subset B_{d_\infty}(x, \epsilon)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\epsilon > 0$, και όλες οι d_p, $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$.

2. Να αποδειχθεί οτι ο τύπος

$$\rho(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

ορίζει μία απόσταση στο ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$. Να αποδειχθεί επίσης οτι η ρ ορίζει τα ίδια ανοιχτά σύνολα με τον περιορισμό της ευκλείδειας απόστασης από το $\mathbb{R}$.

3. Στο σύνολο $C[0, 1] = \{f | f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad \text{συνεχής}\}$ ορίζονται οι αποστάσεις

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : 0 \leq t \leq 1\} \quad \text{και}$$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Να αποδειχθεί οτι κάθε d_1-ανοιχτό σύνολο είναι d_∞-ανοιχτό, αλλά οι d_1 και d_∞ δεν ορίζουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα.

4. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) $f(0) = 0$ και $f(t) > 0$ για $t > 0$.
(β) $f(t + s) \leq f(t) + f(s)$ για κάθε t, $s \geq 0$.
(γ) Η f είναι αύξουσα.
Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}.$$

Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, να αποδειχθεί οτι η $\rho = f \circ d$ είναι μία νέα απόσταση στο σύνολο X που ορίζει τα ίδια ανοιχτά σύνολα με την d.

Απάντηση. Είναι προφανές οτι η ρ είναι μία απόσταση στο X από τις ιδότητες που υποθέτουμε οτι έχει.

Για να δείξουμε οτι τα ρ-ανοιχτά σύνολα είναι d-ανοιχτά, αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_d(x, \delta) \subset B_\rho(x, \epsilon)$. Αυτό προκύπτει από τη συνέχεια της f στο 0. Πράγματι, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $0 \leq f(t) < \epsilon$, όταν $0 \leq t < \delta$. Συνεπώς, $\rho(x, y) = f(d(x, y)) < \epsilon$, όταν $d(x, y) < \delta$, που σημαίνει οτι $B_d(x, \delta) \subset B_\rho(x, \epsilon)$.

Για να δείξουμε οτι τα d-ανοιχτά σύνολα είναι ρ-ανοιχτά, αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\rho(x,\delta) \subset B_d(x,\epsilon)$. Αυτό προκύπτει από τον παρακάτω ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $t < \epsilon$, όταν $f(t) < \delta$.
Απόδειξη του ισχυρισμού. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και μία ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = 0$ και $t_n \geq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, επειδή υποθέτουμε οτι η f είναι αύξουσα, $f(t_n) \geq f(\epsilon) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι αντίφαση.

Από τον ισχυρισμό τώρα, άν $x \in X$ τότε $d(x,y) < \epsilon$, όταν $\rho(x,y) = f(d(x,y)) < \delta$, δηλαδή $B_\rho(x,\delta) \subset B_d(x,\epsilon)$.

Σχόλιο. Η άσκηση αυτή μοιάζει με το παράδειγμα 4.2 των αναρτημένων σημειώσεων. Για τη μία κατεύθυνση χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f στο 0 και για την άλλη ένα υποκατάστατο της συνέχειας της αντίστροφης του παραδείγματος, αφού δεν υποθέτουμε οτι η f έχει αντίστροφη, αλλά μόνο οτι $f(0) = 0$ και $f(t) > 0$ για $t > 0$.

5. Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται *φραγμένο* όταν

$$\sup\{d(x,y) : x, y \in A\} < +\infty.$$

Συμβολίζουμε με $F(X)$ το σύνολο όλων των μη-κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του X. Να αποδειχθεί οτι ο τύπος

$$\rho(A,B) = \max\{\sup\{d(x,B) : x \in A\}, \sup\{d(y,A) : y \in B\}\}$$

ορίζει μία απόσταση στο $F(X)$. Η απόσταση αυτή λέγεται απόσταση Hausdorff.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 2

1. Είναι η οικογένεια $\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ μία τοπολογία στο $\mathbb{R}$;

2. Θεωρούμε το υποσύνολο

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$$

του $\mathbb{R}^2$. Να ευρεθούν τα A°, $\overline{A}$ και ∂A, ως προς τη συνηθισμένη ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}^2$.

3. Να δοθεί ένα παράδειγμα υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ για το οποίο $\partial(A^\circ) \neq \partial A$ και $\partial(\overline{A}) \neq \partial A$.

4. Μία οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται τοπικά πεπερασμένη αν κάθε σημείο $x \in X$ έχει μία ανοιχτή περιοχή U στον X τέτοια ώστε το σύνολο

$$\{A \in \mathcal{F} : U \cap A \neq \varnothing\}$$

είναι πεπερασμένο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε τοπικά πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X ισχύει η ισότητα

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}.$$

Απάντηση. Είναι προφανές οτι $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A}$ για οποιαδήποτε οικογένεια $\mathcal{F}$. Για το αντίστροφο, έστω $x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A}$. Επειδή η $\mathcal{F}$ υποτίθεται τοπικά πεπερασμένη, υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή U του x στον X τέτοια ώστε το σύνολο $\mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} : U \cap A \neq \varnothing\}$ είναι πεπερασμένο. Τότε

$$x \notin \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0} A}$$

και αφού

$$x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A} = \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F}_0} A} \cup \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0} A},$$

κατ΄ ανάγκη

$$x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{F}_0} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}_0} \overline{A} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$$

γιατί το $\mathcal{F}_0$ είναι πεπερασμένο.

5. Αν G είναι μία προσθετική υποομάδα το $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι είτε η G είναι τετριμένη, δηλαδή $G = \{0\}$, είτε η G είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, είτε υπάρχει κάποιο $a > 0$ ώστε $G = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$.

6. Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_u$ σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία που έχει υποβάση την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, b], (a, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του $\mathbb{R}_u$ είναι λεπτότερη από την συνηθισμένη ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η οικογένεια $\mathcal{B} = \{(a, b] : a < b, b \in \mathbb{R}\}$ είναι μία βάση της τοπολογίας του $\mathbb{R}_u$ που αποτελείται από σύνολα τα οποία είναι ταυτοχρονα ανοιχτά και κλειστά στον $\mathbb{R}_u$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι πυκνό στον $\mathbb{R}_u$.
(δ) Να αποδιχθεί οτι ο χώρος $\mathbb{R}_u$ είναι 1ος αριθμήσιμος, αλλά δεν είναι 2ος αριθμήσιμος.
(Υπόδειξη για το (δ): Με απαγωγή στο άτοπο, αν υπάρχει μία αριθμήσιμη βάση $\mathcal{A}$ της τοπολογίας του $\mathbb{R}_u$, θεωρούμε το σύνολο

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}_u : x = \sup A, \quad \text{για κάποιο } A \in \mathcal{A}\}$$

που είναι αριθμήσιμο. Επειδή το $\mathbb{R}_u$ είναι υπεραριθήσιμο, υπάρχει $x \in \mathbb{R}_u \setminus \Gamma$. Υπάρχει τώρα $A \in \mathcal{A}$ ώστε $x \in A \subset (-\infty, x]$ και συνεπώς $x = \sup A$, αντίφαση.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 3

1. Να αποδειχθεί οτι μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}_u \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ για κάθε $b \in \mathbb{R}_u$.

2. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιομορφισμός.

3. Να αποδειχθεί οτι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλειστή απεικόνιση.
(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα οτι $\lim_{x \to \pm\infty} |p(x)| = +\infty$ και χρησιμοποιείστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass.)

4. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $p \geq 1$ ή $p = \infty$, η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to B_{d_p}(0,1)$ με

$$f(x) = \frac{1}{1 + d_p(0,x)} \cdot x$$

είναι ομοιομορφισμός.

5. Να αποδειχθεί οτι ο κύκλος $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ και ο «ρόμβος» $X = \{x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ (εφοδιασμένοι με τους αντίστοιχους περιορισμούς της ευκλείδειας απόστασης του $\mathbb{R}^2$) είναι ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι.

6. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : [0, +\infty) \to S^1$ με $f(t) = \left(\cos \frac{2\pi t^2}{1+t^2}, \sin \frac{2\pi t^2}{1+t^2}\right)$ είναι συνεχής, ένα-προς-ένα και επί, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός.

7. Να αποδειχθεί οτι ο κλειστός δίσκος $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ είναι ομοιομορφικός με το $[-1,1] \times [-1,1]$ και συνεπώς με $[0,1] \times [0,1]$. Και οι τρείς χώροι θεωρούνται εφοδιασμένοι με τους αντίστοιχους περιορισμούς της ευκλείδειας απόστασης του $\mathbb{R}^2$.
(Υπόδειξη: Ένας ομοιομορφισμός $h : D^2 \to [-1,1] \times [-1,1]$ δίνεται από τον τύπο

$$h(x,y) = \frac{1}{1 - \sqrt{x^2 + y^2} + \max\{|x|, |y|\}} \cdot (x,y).)$$

8. Η 3-σφαίρα είναι το σύνολο $S^3 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία που ορίζει ο περιορισμός της ευκλείδειας απόστασης από τον $\mathbb{C}^2$. Στην ομάδα $SU(2)$ των μοναδιαίων 2×2 μιγαδικών πινάκων με ορίζουσα 1 θεωρούμε την τοπολογία που ορίζει ο περιορισμός της ευκλείδειας απόστασης από τον $\mathbb{C}^{2\times 2}$, τον οποίο ταυτίζουμε με τον $\mathbb{C}^4$.
(α) Να αποδειχθεί οτι

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : S^3 \to SU(2)$ με

$$f(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

είναι ομοιομορφισμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 4

1. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος γινόμενο $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ δεν είναι διακριτός, αλλά ο υπόχωρός του $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u : x + y = 1\}$ είναι διακριτός. Να αποδειχθεί επίσης οτι ο $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο, αλλά ο X δεν έχει κανένα.

2. Αν $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι η n-σφαίρα, $n \in \mathbb{Z}^+$, να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \cdot (2x, \|x\|^2 - 1)$$

είναι τοπολογική εμφύτευση. Ποιά είναι η αντίστροφη $f^{-1} : S^n \setminus \{e_n\} \to \mathbb{R}^n$;

Απάντηση. Προφανώς $f(\mathbb{R}^n) = S^n \setminus \{e_{n+1}\}$, γιατί $\dfrac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Θα υπολογίσουμε κατ΄ ευθείαν την αντίστοφη $f^{-1} : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$.

Έστω $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $z = (z_1, ..., z_{n+1}) \in S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ με $z = f(x)$. Τότε,

$$z_{n+1} = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \quad \text{και} \quad z_k = \frac{2x_k}{1 + \|x\|^2}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς το $\|x\|^2$ βρίσκουμε οτι

$$1 - z_{n+1} = \frac{2}{1 + \|x\|^2}$$

και αντικαθιστώντας στις υπόλοιπες

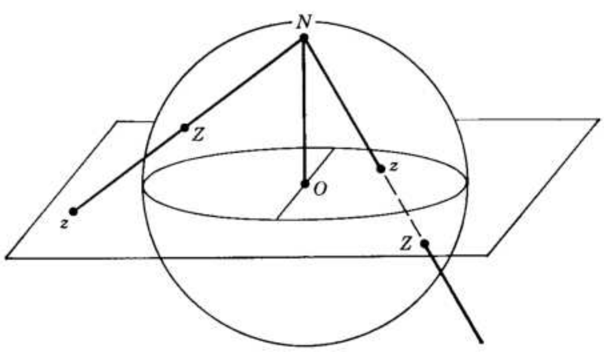
$$x_k = \frac{1}{1 - z_{n+1}} \cdot z_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Συνεπώς, η αντίστροφη δίνεται από τον τύπο

$$f^{-1}(z_1, ..., z_n, z_{n+1}) = \frac{1}{1 - z_{n+1}} \cdot (z_1, ..., z_n)$$

και είναι προφανώς συνεχής. Άρα η f είναι τοπολογική εμφύτευση, ως ομοιομορφισμός επί του $S^n \setminus \{e_{n+1}\}$.

Η f^{-1} είναι η στερεογραφική προβολή ως προς τον βόρειο πόλο $N = e_{n+1}$ και παρίσταται από το παρακάτω σχήμα.



3. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $h : (0, +\infty) \times S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ με $h(t, x) = tx$ είναι ομοιομορφισμός.

4. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος με μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ και $p : X \to X/\sim$ η αντίστοιχη απεικόνιση πιλήκο. Έστω $A \subset X$ με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \sim a$.
(β) Για κάθε $B \subset A$ που είναι αναλλοίωτο ως προς τον περιορισμό της $\sim$ στο A και ανοιχτό στη σχετική τοπολογία του A το $p^{-1}(p(A))$ είναι ανοιχτό στον X.

Να αποδειχθεί οτι η ένθεση $i : A \to X$ επάγει έναν ομοιομορφισμό $i_* : A/\sim \to X/\sim$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p|_A"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A/\sim \arrow[r, "i_*"] & X/\sim \end{tikzcd}$$

5. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος.
(α) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $H(X) = \{h | h : X \to X \quad \text{ομοιομορφισμός}\}$ γίνεται ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.
(β) Έστω G μία υποομάδα της $H(X)$. Στον X θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ όταν υπάρχει $g \in G$ ώστε $y = g(x)$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας λέγονται τροχιές της G. Αν X/G είναι ο χώρος πιλήκο των τροχιών της G, να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πιλήκο $p : X \to X/G$ είναι ανοιχτή.

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος πιλήκο $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ είναι ομοιομορφικός με τον n-torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n φορές).

7. Ο πραγματικός n-διάστατος προβολικός χώρος για $n \in \mathbb{Z}^+$ είναι ο χώρος πιλήκο $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, όπου $x \sim y$ όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ώστε $y = \lambda x$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πιλήκο $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ είναι ανοιχτή.
(β) Στην n-σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim -x$. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πιλήκο $q : S^n \to S^n/\sim$ είναι ανοιχτή και επίσης η ένθεση $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ επάγει έναν ομοιομορφισμό $i_* : S^n/\sim \to \mathbb{R}P^n$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ S^n/\sim \arrow[r, "i_*"] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

(γ) Να αποδειχθεί οτι η πραγματική προβολική ευθεία $\mathbb{R}P^1$ είναι ομοιομορφικός χώρος με τον κύκλο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
(Υπόδειξη: Για το (γ) θεωρείστε την απεικόνιση $f : S^1 \to S^1$ με $f(z) = z^2$.)

8. Ο μιγαδικός n-διάστατος προβολικός χώρος για $n \in \mathbb{Z}^+$ είναι ο χώρος πιλήκο $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, όπου $z \sim w$ όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε $w = \lambda z$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πιλήκο $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ είναι ανοιχτή.
(β) Στην $(2n+1)$-σφαίρα $S^{2n+1} = \{(z_0, ...z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ θεωρούμε

τη σχέση ισοδυναμίας $z \sim w$ όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$ ώστε $w = \lambda z$. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση πιλήκο $q : S^{2n+1} \to S^{2n+1}/\sim$ είναι ανοιχτή. Να αποδειχθεί επίσης οτι η ένθεση $i : S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ επάγει έναν ομοιομορφισμό $i_* : S^{2n+1}/\sim \to \mathbb{C}P^n$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ S^{2n+1}/\sim \arrow[r, "i_*"] & \mathbb{C}P^n \end{tikzcd}$$

Η απεικόνιση πιλήκο $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ λέγεται Hopf fibration.

9. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση (κλασική Hopf fibration) $f : S^3 \to S^2$ που δίνεται από τον τύπο

$$f(z_0, z_1) = (2\mathrm{Re}(z_0\overline{z_1}), 2\mathrm{Im}(z_0\overline{z_1}), |z_0|^2 - |z_1|^2),$$

όπου $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, επάγει έναν ομοιομορφισμό $\tilde{f} : \mathbb{C}P^1 \to S^2$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \\ \mathbb{C}P^1 \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 5

1. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος $\mathbb{R}_u$ είναι ολικά-μη-συνεκτικός, δηλαδή τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολά του είναι τα μονοσύνολα.

2. Να αποδειχθεί οτι ένας τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός τότε και μόνο τότε όταν για κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X και κάθε $U, V \in \mathcal{U}$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $U_0, U_1,..., U_n \in \mathcal{U}$ ώστε $U_0 = U$, $U_n = V$ και $U_{i-1} \cap U_i \neq \varnothing$, $1 \leq i \leq n$.

3. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων του με την ιδιότητα $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι συνεκτικό.

4. Να αποδειχθεί οτι ο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ και η n-σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί χώροι για $n \geq 1$. Συνεπώς, οι προβολικοί χώροι $\mathbb{R}P^n$ και $\mathbb{C}P^n$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί για κάθε $n \geq 0$.

5. Να αποδειχθεί οτι τα διαστήματα $[-1, 1]$, $(-1, 1]$ και $(-1, 1)$ δεν είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους.

6. Να αποδειχθεί οτι ο κύκλος S^1 και η n-σφαίρα S^n για $n \geq 2$ δεν είναι ομοιομορφικοί χώροι.

7. Να αποδειχθεί οτι ο κύκλος S^1 και το διάστημα $[0, 1)$ δεν είναι ομοιομορφικοί χώροι.

8. Να αποδειχθεί οτι ο κύκλος $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ δεν είναι ομοιομορφικός με κανένα υπόχωρο του $\mathbb{R}$.

9. Έστω (X, d) ένας μη-κενός μετρικός χώρος που δεν είναι μονοσύνολο, δηλαδή περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Αν ο X είναι συνεκτικός χώρος, να αποδειχθεί οτι το σύνολο X είναι υπεραριθμήσιμο.
(Υπόδειξη: Αφού υποθέτουμε οτι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία x_0, $x_1 \in X$ με $x_0 \neq x_1$, η συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{d(x, x_0)}{d(x, x_0) + d(x, x_1)}$$

είναι καλά ορισμένη, προφανώς συνεχής και $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$.)

10. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ μη-κενό. Αν το A είναι συνεκτικό, ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του X, να αποδειχθεί οτι το A είναι μία συνεκτική συνιστώσα του X. Είναι κάθε συνεκτική συνιστώσα του X ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του X;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 6

1. Εστω X ένας χώρος Hausdorff και $\{x_1, ..., x_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του X, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν ανά δύο ξένα ανοιχτά σύνολα U_1,..., $U_n \subset X$ με $x_1 \in U_1$,..., $x_n \in U_n$.

2. Να αποδειχθεί οτι οι προβολικοί χώροι $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{R}P^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, είναι χώροι Hausdorff.
(Υπόδειξη: Αν $[z_0, z_1, ..., z_n] \neq [w_0, w_1, ..., w_n]$, υπάρχουν $0 \leq j, k \leq n$ ώστε $z_j w_k \neq z_k w_j$. Τα σύνολα

$$U = \{[u_0, u_1, ..., u_n] \in \mathbb{C}P^n : |u_k z_j - u_j z_k| < |u_k w_j - u_j w_k|\},$$
$$W = \{[u_0, u_1, ..., u_n] \in \mathbb{C}P^n : |u_k z_j - u_j z_k| > |u_k w_j - u_j w_k|\}$$

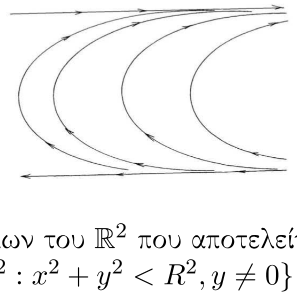
είναι ανοιχτά, ξένα μεταξύ τους και $[z_0, z_1, ..., z_n] \in U$, $[w_0, w_1, ..., w_n] \in W$.)

3. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται retract του X, αν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $r : X \to A$ τέτοια ώστε $r(x) = x$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή $r \circ i = id_A$, όπου $i : A \to X$ είναι η ένθεση. Η r λέγεται retraction του X στο A.
(α) Να αποδειχθεί οτι κάθε retract ενός χώρου Hausdorff X είναι κλειστό υποσύνολο του X.
(β) Να αποδειχθεί οτι η n-σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι retract του χώρου $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

4. Οι καμπύλες $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ και $x = \dfrac{1}{\cos y} + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι οι τροχιές στη λωρίδα $\mathbb{R} \times \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}^2$ του συστήματος συνήθων διαφορκών εξισώσεων

$$x' = \sin y, \quad y' = (\cos y)^2$$

και είναι ξένες μεταξύ τους (μοναδικότητα των λύσεων από τις αρχικές συνθήκες). Συνεπώς είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας μίας σχέσης ισοδυναμίας $\sim$. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος πιλήκο των τροχιών $\mathbb{R} \times \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] / \sim$ δεν είναι Hausdorff.



5. Έστω $\mathcal{B}$ η κλάση των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από τις d_2-ανοιχτές μπάλλες και τα σύνολα της μορφής $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2, y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$, $\quad R > 0$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η κλάση $\mathcal{B}$ είναι βάση μίας τοπολογίας $\mathcal{T}$ στο $\mathbb{R}^2$ που είναι λεπτότερη από την ευκλείδεια.
(β) Να αποδειχθεί οτι ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff, αλλά δεν είναι κανονικός.
(Υπόδειξη: Για το (β) δείξτε πρώτα οτι το σύνολο $F = \mathbb{R} \times \{0\} \setminus \{(0, 0)\}$ είναι $\mathcal{T}$-κλειστό και στη συνέχεια οτι δεν ξεχωρίζεται από το σημείο $(0, 0)$ με $\mathcal{T}$-ανοιχτά σύνολα.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 7

1. Εστω X ένας φυσιολογικός χώρος και $R \subset X \times X$ μία σχέση ισοδυναμίας. Αν η απεικόνιση πιλήκο $p : X \to X/R$ είναι κλειστή, να αποδειχθεί οτι ο χώρος πιλήκο X/R είναι φυσιολογικός.

2. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Συμβολίζουμε με X/A τον χώρο πιλήκο της σχέσης ισοδυναμίας στον X με κλάσεις ισοδυναμίας τα σύνολα A και $\{x\}$, $x \in X \setminus A$. Αν ο X είναι ένας φυσιολογικός χώρος και το A κλειστό υποσύνολο του X, να αποδειχθεί οτι ο χώρος πιλήκο X/A είναι φυσιολογικός.

3. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και A, $B \subset X$ τέτοια ώστε $\overline{A} \cap B = \varnothing$ και $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U, $V \subset X$ τέτοια ώστε $A \subset U$, $B \subset V$ και $U \cap V = \varnothing$.
(Υπόδειξη: $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ και $V = \{x \in X : d(x, A) > d(x, B)\}$.)

4. Να αποδειχθεί οτι ένας συνεκτικός φυσιολογικός χώρος που έχει τουλάχιστον δύο σημεία είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

5. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος $\mathbb{R}_u$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

6. Ένας χώρος Hausdorff X λέγεται χώρος Lindelöf αν κάθε ανοιχτό κάλυμα του X έχει ένα αριθμήσιμο υποκάλυμα του X.
(α) Να αποδειχθεί οτι οι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}_u$ είναι χώροι Lindelöf.
(β) Να αποδειχθεί οτι αν ο X είναι χώρος Lindelöf και το $A \subset X$ είναι ένα κλειστό σύνολο, τότε το A είναι επίσης χώρος Lindelöf.
(γ) Να αποδειχθεί οτι κάθε κανονικός χώρος Lindelöf είναι φυσιολογικός.
(δ) Να αποδειχθεί οτι αν ο X είναι ένας συνεκτικός κανονικός χώρος τότε το σύνολο X είναι υπεραριθμήσιμο ή μονοσύνολο. Αυτό δεν ισχύει για χώρους Hausdorff (Morton Brown, 1953).
(Υπόδειξη: Στο (α) ο χειρισμός του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{R}_u$ είναι ίδιος. Έστω $\mathcal{U}$ ένα ανοιχτό κάλυμα του $\mathbb{R}_u$. Επειδή $\mathbb{R}_u = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$, αρκεί να δείξουμε οτι κάθε (φραγμένο) κλειστό διάστημα καλύπτεται από μία αριθμήσιμη υποοικογένεια του $\mathcal{U}$. Έστω a, $b \in \mathbb{R}_u$, με $a < b$. Αν A είναι το σύνολο όλων των $x < b$ για τα οποία το διάστημα $[x, b]$ καλύπτεται από μία αριθμήσιμη υποοικογένεια του $\mathcal{U}$, αρκεί να δείξουμε οτι το A δεν είναι κάτω φραγμένο. Το A δεν είναι κενό, γιατί υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ με $b \in U$ και συνεπώς υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $(b - \epsilon, b] \subset U$, αφού το $U \subset \mathbb{R}_u$ είναι ανοιχτό, οπότε $(b - \epsilon, b) \subset A$. Αν το A είναι κάτω φραγμένο, υπάρχει το $s = \inf A < b$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s + \dfrac{1}{n_0} < b$ και για κάθε $n \geq n_0$ υπάρχει $a_n \in A$ ώστε $s \leq a_n < s + \dfrac{1}{n} < b$. Το διάστημα $[a_n, b]$ καλύπτεται από μία αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{U}_n$ του $\mathcal{U}$ και συνεπώς το διάστημα $(s, b]$ καλύπτεται από την αριθμήσιμη υποοικογένεια $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{U}_n$ του $\mathcal{U}$. Όμως υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ με $s \in U$ και υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(s - \delta, s] \subset U$. Συνεπώς, το διάστημα $[s - \dfrac{\delta}{2}, b]$ καλύπτεται από την αριθμήσιμη υποοικογένεια $\{U\} \cup \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{U}_n$, αντίφαση.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 8

1. Έστω X ένας συμπαγής χώρος, Y ένας χώρος Hausdorff και $f : X \to Y$ μία συνεχής και επί απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του Y ταυτίζεται με την τοπολογία πιλήκο ως προς f.

2. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ για κάθε ανοιχτή περιοχή V του A στον X. Αν ο X είναι ένας συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι κάθε μη-πεπερασμένο υποσύνολο του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στον X.

3. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνεχής, κλειστή και επί απεικόνιση. Για κάθε $A \subset X$ θέτουμε $Y_A = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\}$ και $U_A = \bigcup_{y \in Y_A} f^{-1}(y)$.
(α) Αν το $A \subset X$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, να αποδειχθεί οτι το U_A είναι επίσης ανοιχτό υποσύνολο του X.
(β) Αν ο X είναι χώρος Hausdorff και τα σύνολα στάθμης $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, είναι όλα συμπαγή, να αποδειχθεί οτι ο Y είναι χώρος Hausdorff.
(γ) Αν ο X είναι χώρος Hausdorff, τα σύνολα στάθμης $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, είναι όλα συμπαγή και ο Y είναι συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι ο X είναι συμπαγής.
(Υπόδειξη: Για το (α) παρατηρούμε οτι $U_A = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A))$.)

4. Να αποδειχθεί οτι ο μιγαδικός n-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{C}P^n$, καθώς και ο πραγματικός n-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, είναι συνεκτικός, συμπαγής, 2ος αριθμήσιμος και μετρικοποιήσιμος.

5. Να αποδειχθεί οτι η ορθογώνια ομάδα $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^t A = I_n\}$ και η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^t A = I_n \quad \text{και} \quad \det A = 1\}$ είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^{n\times n} \approx \mathbb{R}^{n^2}$.

6. Να αποδειχθεί οτι η μοναδιαία ομάδα $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \bar{A}^t A = I_n\}$ και η ειδική μοναδιαία ομάδα $SU(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \bar{A}^t A = I_n \quad \text{και} \quad \det A = 1\}$ είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}^{n\times n} \approx \mathbb{C}^{n^2}$.

7. Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο με μη-κενό εσωτερικό, να κατασκευαστεί ένας ομοιομορφισμός $h : K \to D^n$, με $h(\partial K) = S^{n-1}$, όπου $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.
(Υπόδειξη: Σταθεροποιούμε ένα σημείο $x_0 \in \text{int}K$. Κάθε $x \in \partial K$ είναι το μοναδικό σημείο τομής με το ∂K της ημιευθείας με αρχή το x_0 που διέρχεται από το x, γιατί αλλιώς είτε το K δεν είναι κυρτό είτε $x_0 \notin \text{int}K$. Η απεικόνιση $h : \partial K \to S^{n-1}$ με

$$h(x) = \frac{1}{\|x - x_0\|} \cdot (x - x_0)$$

είναι ένας ομοιομορφισμός που επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό $h : K \to D^n$ ορίζοντας

$$h\big((1-t)x_0 + tx\big) = \frac{t}{\|x - x_0\|} \cdot (x - x_0)$$

για κάθε $x \in \partial K$ και $0 \leq t \leq 1$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 9

1. Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μία απεικόνιση τέτοια ώστε $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε x, $y \in X$. Να αποδειχθεί οτι η f είναι επί.
(Υπόδειξη: Αν η f δεν είναι επί, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\epsilon = d(x, f(X)) > 0$. Συνεπώς, $d(f^n(x), f^m(x)) \geq \epsilon$ για κάθε $n \neq m$.)

2. Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μία απεικόνιση τέτοια ώστε $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ για κάθε x, $y \in X$. Αν η f είναι επί του X, να αποδειχθεί οτι η f είναι d-ισομετρία, δηλαδή $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε x, $y \in X$.
(Υπόδειξη: Για κάθε x, $y \in X$ υπάρχουν ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $f(x_{n+1}) = x_n$ και $f(y_{n+1}) = y_n$, όπου $x_1 = x$, $y_1 = y$, επειδή η f είναι επί.)

3. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος.
(α) Αν ο X είναι συνεκτικός χώρος, να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ και x, $y \in X$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και σημεία $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ ώστε $d(x_k, x_{k+1}) < \epsilon$ για $0 \leq k < n$.
(β) Αν ο X είναι συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι ισχύει και το αντίστροφο του (α).
(γ) Να δειχθεί με ένα παράδειγμα οτι στην περίπτωση που ο X δεν είναι συμπαγής ενδέχεται το αντίστροφο του (α) να μην ισχύει.

4. Να αποδειχθεί οτι ο μετρικός χώρος $(C[0, 1], d_\infty)$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.

5. Να αποδειχθεί οτι ο χώρος $\mathbb{R}_u$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.

6. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ ένα retract του X με retraction $r : X \to A$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του A (ως υπόχωρος του X) ταυτίζεται με την τοπολογία πιλήκο ως προς r.
(β) Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι και ο A είναι τοπικά συμπαγής χώρος.

7. Έστω X ένας συμπαγής χώρος για τον οποίο υποθέτουμε οτι υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \times X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x, y) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $x = y$. Να αποδειχθεί οτι ο X είναι μετρικοποιήσιμος.
(Υπόδειξη: Για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$ θεωρούμε τα σύνολα

$$U(x, \epsilon) = \{y \in X : |f(x, y)| < \epsilon\}.$$

Λόγω της συμπάγειας, η οικογένεια $\{U(x, \frac{1}{n}) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση της τοπολογίας του X, από όπου προκύπτει οτι ο X είναι 2ος αριθμήσιμος.)

8. Να αποδειχθεί οτι κάθε συμπαγές υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}_u$ είναι αριθμήσιμο.
(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα οτι αν το $K \subset \mathbb{R}_u$ είναι συμπαγές, τότε για κάθε $x \in K$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε $K \cap [x, x + \delta) = \{x\}$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 10

1. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to S^n$, $n \geq 1$, μια συνεχής απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι αν η f δεν είναι επί της S^n τότε είναι ομοτοπική με σταθερή.

2. Εστω $a : S^n \to S^n$, $n \geq 1$, η αντιποδική απεικόνιση $a(x) = -x$. Αν $f : S^n \to S^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση χωρίς σταθερά σημεία, να αποδειχθεί οτι η f είναι ομοτοπική με την a.

3. Να αποδειχθεί οτι ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός τότε και μόνον τότε όταν η διαγώνια απεικόνιση $\delta : X \to X \times X$, δηλαδή $\delta(x) = (x, x)$ για κάθε $x \in X$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

4. Αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός, να αποδειχθεί οτι για κάθε χώρο Y ο χώρος γινόμενο $X \times Y$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του Y.

5. Να αποδειχθεί οτι για κάθε τοπολογικό χώρο X το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $[X, S^1]$ γίνεται αβελιανή ομάδα, αν θέσουμε $[f] + [g] = [f \cdot g]$ για κάθε ζεύγος συνεχών απεικονίσεων $f, g : X \to S^1$.

6. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $X = \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\}$, να αποδειχθεί οτι η $f : S^n \to X$ με $f(x) = (x, x)$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

Απάντηση. Έστω $p : S^n \times S^n \to S^n$ η απεικόνιση προβολή στην πρώτη συντεταγμένη, δηλαδή $p(x, y) = x$. Προφανώς $p \circ f = id_{S^n}$. Η $f \circ (p|_X)$ δίνεται από τον τύπο

$$(f \circ (p|_X))(x, y) = (x, x).$$

Η $H : [0, 1] \times X \to X$ με

$$H_t(x, y) = \left(x, \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|} \right)$$

είναι καλά ορισμένη γιατί $(1-t)x + ty = 0$ ακριβώς τότε όταν $t = \dfrac{1}{2}$ και $x = -y$, όμως έχουμε $(x, y) \in X$, δηλαδή $x \neq -y$. Η H είναι προφανώς συνεχής και

$$H_0(x, y) = (x, x) = (f \circ (p|_X))(x, y),$$

$$H_1(x, y) = (x, y)$$

για κάθε $(x, y) \in X$. Με άλλα λόγια $H : f \circ (p|_X) \simeq id_X$. Αυτό δείχνει οτι η f είναι ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφο την $p|_X$.

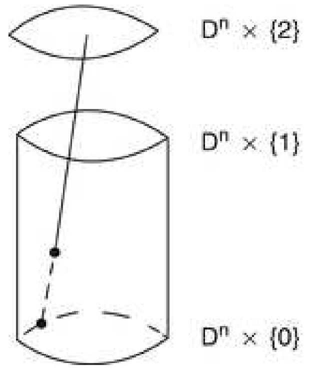
7. Η 3-σφαίρα είναι ο υπόχωρος $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ του $\mathbb{C}^2$. Αν $C \subset S^3$ είναι ο κύκλος $C = \{(z, 0) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\} \approx S^1$, να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $S^3 \setminus C$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του κύκλου S^1.
(Υπόδειξη: Η απεικόνιση $\phi : S^3 \setminus C \to \mathbb{C} \times S^1$ με

$$\phi(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|} \right)$$

είναι ομοιομορφισμός.)

8. Να αποδειχθεί οτι το $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$ είναι (strong) deformation retract του $D^n \times [0,1]$, $n \geq 1$.
(Υπόδειξη: Περιγράψτε την απαιτούμενη ομοτοπία με ένα σχήμα.)

Απάντηση. Για κάθε σημείο $(x,s) \in D^n \times [0,1]$ η ευθεία στον $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ που διέρχεται από το (x,s) και το σημείο $(0,2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ τέμνει το $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$ σε ένα μοναδικό σημείο $r(x,s)$. Η απεικόνιση $r : D^n \times [0,1] \to D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$ που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι retraction.



Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το (x,s) και το $r(x,s)$ περιέχεται στο $D^n \times [0,1]$, το οποίο είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Συνεπώς, ορίζεται η απεικόνιση $H : D^n \times [0,1] \to D^n \times [0,1]$ με

$$H(t,(x,s)) = (1-t) \cdot r(x,s) + t \cdot (x,s)$$

που είναι συνεχής, για την οποία έχουμε $H(0,(x,s)) = r(x,s)$ και $H(1,(x,s)) = (x,s)$. Δηλαδή, η H είναι μία ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{D^n \times [0,1]}$, όπου $i : D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1] \to D^n \times [0,1]$ είναι η ένθεση. Επιπλέον, αν $(x,s) \in D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$, οπότε $r(x,s) = (x,s)$, έχουμε $H(t,(x,s)) = (x,s)$. Συνεπώς, η H είναι μία strong deformation retraction του $D^n \times [0,1]$ στο $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$.

9. Να αποδειχθεί οτι η ορθογώνια ομάδα $O(n,\mathbb{R})$ είναι (strong) deformation retract της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n,\mathbb{R})$, $n \geq 1$ (ως υπόχωροι του $\mathbb{R}^{n^2}$).
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα της Πολικής Ανάλυσης από τη Γραμμική Άλγεβρα.)

Απάντηση. Σύμφωνα με το θεώρημα της Πολικής Ανάλυσης (βλ. K.M. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, Prentice Hall, 1971, Theorem 14, σελ. 342), για κάθε $A \in GL(n,\mathbb{R})$ υπάρχει ένας μοναδικός ορθογώνιος πίνακας $U \in O(n,\mathbb{R})$ και ένας μοναδικός θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας S ώστε $A = US$. Όπως δείχνει η απόδειξη του θεωρήματος της Πολικής Ανάλυσης, $S = (A^TA)^{1/2}$ και $U = A(A^TA)^{-1/2}$. Η απεικόνιση $r : GL(n,\mathbb{R}) \to O(n,\mathbb{R})$ με

$$r(A) = U = A(A^TA)^{-1/2}$$

είναι συνεχής και $r \circ i = id_{O(n,\mathbb{R})}$, δηλαδή η $O(n,\mathbb{R})$ είναι retract της $GL(n,\mathbb{R})$ με retraction την r, όπου $i : O(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ είναι η ένθεση. Θα κατασκευάσουμε μία ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{GL(n,\mathbb{R})}$.

Επειδή ο συμμετρικός πίνακας $A^T A$ είναι θετικά ορισμένος έχει θετικές πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, ..., \lambda_n > 0$$

(ενδεχομένως όχι διαφορετικές ανά δύο) και σύμφωνα με το Φασματικό Θεώρημα (βλ. K.M. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, Prentice Hall, 1971, Theorem 9, σελ 335), υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $R \in O(n, \mathbb{R})$ ώστε

$$A^T A = R^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} R$$

οπότε για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζεται καλά ο θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας

$$(A^T A)^s = R^{-1} \begin{pmatrix} (\lambda_1)^s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n)^s \end{pmatrix} R.$$

Ορίζεται λοιπόν καλά η $H : [0,1] \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ με

$$H(t, A) = A(A^T A)^{\frac{t-1}{2}}$$

που είναι προφανώς συνεχής και $H(0, A) = A(A^T A)^{-1/2}$, ενώ $H(1, A) = A$. Αυτό σημαίνει οτι $H : i \circ r \simeq id_{GL(n,\mathbb{R})}$. Επιπλέον, $H(t, U) = U$ για κάθε $U \in O(n, \mathbb{R})$ και συνεπώς η $O(n, \mathbb{R})$ είναι strong deformation retract της $GL(n, \mathbb{R})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 11

1. Εστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος, x_0, $x_1 \in X$ και u, $v : [0,1] \to X$ δύο τόξα με $u(0) = v(0) = x_0$ και $u(1) = v(1) = x_1$.
(α) Αν $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, να αποδειχθεί οτι $u_+ = v_+ : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$.
(β) Αν $u \simeq v \ \mathrm{rel}\{0,1\}$, να αποδειχθεί οτι $u_+ = v_+$.

2. Εστω X ένας απλά συνεκτικός χώρος, $A \subset X$ και $f : A \to Y$ μία συνεχής απεικόνιση. Αν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε ο επαγόμενος ομομορφισμός $f_\sharp : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ να μην είναι ο τετριμένος, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει συνεχής επέκταση της f στον X.

Απάντηση. Έστω $i : A \to X$ η ένθεση. Αν υπάρχει συνεχής επέκταση $F : X \to Y$ της f, αυτό σημαίνει οτι $f = F \circ i$. Παίρνοντας τους επαγόμενους ομομορφισμούς στις θεμελιώδεις ομάδες $f_\sharp = F_\sharp \circ i_\sharp$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A,x_0) \arrow[rr, "i_\sharp"] \arrow[dr, "f_\sharp"'] & & \pi_1(X,x_0) \arrow[dl, "F_\sharp"] \\ & \pi_1(Y,f(x_0)) & \end{tikzcd}$$

Αν ο X είναι απλά συνεκτικός, $\pi_{(}X, x_0) = \{1\}$ και συνεπώς $F_\sharp = 1$, δηλαδή είναι τετριμένος. Συνακόλουθα, ο $f_\sharp = F_\sharp \circ i_\sharp$ είναι τετριμένος.

3. Αν $p : [0,1] \to S^1$ είναι η $p(t) = e^{2\pi i t}$, να αποδειχθεί οτι η κλάση ομοτοπίας με σταθερά άκρα $[p]$ του τόξου p είναι γεννήτορας της $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Να αποδειχθεί οτι το $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$ είναι γεννήτορας τότε και μόνο τότε όταν $\gamma \simeq p \ \mathrm{rel}\{0,1\}$ ή $\gamma^{-1} \simeq p \ \mathrm{rel}\{0,1\}$.

4. Να αποδειχθεί οτι ο n-torus T^n δεν έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον m-torus T^m για $n \neq m$.

5. Εστω $L \subset \mathbb{R}^3$ μία ευθεία γραμμή. Να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $\mathbb{R}^3 \setminus L$ έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον κύκλο S^1 και συνεπώς $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L, x) \cong \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3 \setminus L$.
(Υπόδειξη: Θεωρώντας έναν ομοιομορφισμό του $\mathbb{R}^3$, που είναι σύνθεση μίας μεταφοράς και ενός γραμμικού ισομορφισμού, αναγόμαστε στην περίπτωση που η ευθεία είναι η $L = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ και τότε το $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \setminus \{(0,0,0)\}$ είναι (strong) deformation retract του $\mathbb{R}^3 \setminus L$.)

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ομομορφισμό ομάδων $h : \pi_1(T^2, (1,1)) \to \pi_1(T^2, (1,1))$ υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $f : T^2 \to T^2$ με $f(1,1) = (1,1)$ ώστε $f_\sharp = h$. Μάλιστα, αν ο h είναι ισομορφισμός, τότε η f μπορεί να επιλεγεί ομοιομορφισμός.

Απάντηση. Όπως ξέρουμε, $T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (από την άσκηση 6 του 4ου φύλλου) και συνεπώς $\pi_1(T^2, (1,1)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Το $e_1 = (1,0)$ αντιστοιχεί στην κλάση ομοτοπίας του τόξου $\gamma_1(t) = (e^{2\pi i t}, 1)$ και το $e_2 = (0,1)$ αντιστοιχεί στην κλάση ομοτοπίας (με σταθερά πάντα άκρα) του τόξου $\gamma_2(t) = (1, e^{2\pi i t})$, $0 \leq t \leq 1$.

Κάθε ομομορφισμός $h : \pi_1(T^2, (1,1)) \to \pi_1(T^2, (1,1))$ παριστάνεται λοιπόν από έναν πίνακα

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$$

όπου $h(e_1) = h(1,0) = (a,c) = ae_1 + ce_2$ και $h(e_2) = h(0,1) = (b,d) = be_1 + de_2$. Αν τώρα $f : T^2 \to T^2$ είναι η απεικόνιση με τύπο $f(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ ή πιο αναλυτικά

$$f(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{2\pi i(ax+by)}, e^{2\pi i(cx+dy)}),$$

τότε $f_\sharp = h$.

Στην πραγματικότητα η f επάγεται από την γραμμική απεικόνιση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που έχει τον παραπάνω πίνακα (ως προς την κανονική βάση), δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p"] \\ T^2 \arrow[r, "f"] & T^2 \end{tikzcd}$$

όπου η $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ είναι η συνηθισμένη απεικόνιση πιλήκο (και απεικόνιση επικάλυψης) $p(x,y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$.

Ο h είναι ισομορφισμός τότε και μόνον τότε όταν η ορίζουσα του πίνακα του είναι ± 1, δηλαδή $ad - bc = \pm 1$. Από αυτό προκύπτει οτι στην περίπτωση αυτή η f είναι ομοιομορφισμός. Ο αντίστροφος f^{-1} ορίζεται με ανάλογο τρόπο από τον h^{-1}.

7. Εστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος. Να αποδειχθεί οτι ο X είναι απλά συνεκτικός χώρος τότε και μόνο τότε όταν κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^1 \to X$ είναι ομοτοπική με σταθερή.

8. Να αποδειχθεί οτι ο n-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος $\mathbb{C}P^n$ είναι απλά συνεκτικός για κάθε $n \geq 0$.
(Υπόδειξη: Ο $\mathbb{C}P^0$ είναι μονοσύνολο και ο $\mathbb{C}P^1$ είναι ομοιομορφικός με την 2-σφαίρα S^2, οπότε είναι απλά συνεκτικοί. Κάνουμε τώρα επαγωγή στο n.)

Απάντηση. Προχωρούμε με επαγωγή στο n. Για $n = 0$, ο $\mathbb{C}P^0$ είναι μονοσύνολο και συνεπώς είναι απλά συνεκτικός. Σύμφωνα με την άσκηση 9 του 4ου φύλλου ο $\mathbb{C}P^1$ είναι ομοιομορφικός με την 2-σφαίρα S^2 και συνεπώς είναι απλά συνεκτικός, αλλά δεν θα μας χρειαστεί αυτό το γεγονός. Υποθέτουμε οτι ο $\mathbb{C}P^{n-1}$ είναι απλά συνεκτικός και θα δείξουμε οτι ο $\mathbb{C}P^n$ είναι επίσης απλά συνεκτικός. Το σύνολο

$$E = \mathbb{C}P^n \setminus \{[0, ..., 0, 1]\}$$

είναι ανοιχτό στον $\mathbb{C}P^n$ και $\mathbb{C}P^n = E \cup V$, όπου V είναι το ανοιχτό σύνολο

$$V = \{[z_0, ..., z_{n-1}, z_n] \in \mathbb{C}P^n : z_n \neq 0\}.$$

Επιπλέον, η $\phi : V \to \mathbb{C}^n$ με

$$\phi([z_0, ..., z_{n-1}, z_n]) = \Big(\frac{z_0}{z_n}, ..., \frac{z_{n-1}}{z_n}\Big)$$

είναι ομοιομορφισμός με αντίστροφη που δίνεται από τον τύπο

$$\phi^{-1}(t_0, ..., t_{n-1}) = [t_0, ..., t_{n-1}, 1].$$

Συνεπώς το V είναι απλά συνεκτικό.

Από την άλλη μεριά, η $j : \mathbb{C}P^{n-1} \to E$ με $j([z_0, ..., z_{n-1}]) = [z_0, ..., z_{m-1}, 0]$ είναι τοπολογική εμφύτευση και το $j(\mathbb{C}P^{n-1})$ είναι strong deformation retract του E. Πράγματι, η $r : E \to \mathbb{C}P^{n-1}$ με

$$r([z_0, ..., z_{n-1}, z_n]) = [z_0, ..., z_{m-1}]$$

είναι συνεχής και $r \circ j = id_{\mathbb{C}P^{n-1}}$. Επίσης, η συνεχής απεικόνιση $H : [0, 1] \times E \to E$ με

$$H(t, [z_0, ..., z_{n-1}, z_n]) = [z_0, ..., z_{n-1}, tz_n]$$

είναι μία ομοτοπία $H : j \circ r \simeq id_E$ (με την επιπλέον ιδιότητα $H(t, [z_0, ..., z_{n-1}, 0] = [z_0, ..., z_{n-1}, 0]$ για κάθε $t \in [0, 1]$ και $[z_0, ..., z_{m-1}] \in \mathbb{C}P^{n-1}$). Άρα οι χώροι E και $\mathbb{C}P^{n-1}$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο και ο E είναι κατά τόξα συνεκτικός, αφού ο $\mathbb{C}P^{n-1}$ είναι. Από την επαγωγική υπόθεση, προκύπτει τώρα οτι και ο E είναι απλά συνεκτικός. Τέλος, έχουμε

$$\phi(E \cap V) = \phi(V \setminus \{[0, ..., 0, 1]\}) = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

οπότε το $E \cap V$ είναι κατά τόξα συνεκτικό. Εφαρμόζοντας τώρα το Corollary 59.2 της σελίδας 369 του βιβλίου του Munkres προκύπτει οτι ο $\mathbb{C}P^n$ είναι απλά συνεκτικός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Φύλλο 12

1. Να αποδειχθεί οτι οι ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, δεν είναι ομοιομορφικοί.

2. Εστω $p : \widetilde{X} \to X$ μία απεικόνιση επικάλυψης κατά τόξα συνεκτικών και τοπικά κατά τόξα συνεκτικών χώρων. Αν ο $\widetilde{X}$ είναι συσταλτός χώρος, να αποδειχθεί οτι για κάθε απλά συνεκτικό και τοπικά κατά τόξα συνεκτικό χώρο Y κάθε συνεχής απεικόνιση $f : Y \to X$ είναι ομοτοπική με σταθερή.

3. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^n \to T^n$, $n \geq 2$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

4. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R}P^n \to S^1$, $n \geq 2$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

5. Εστω $n > 1$ ένας ακέραιος. Ποιά απεικόνιση επικάλυψης $p : S^1 \to S^1$ έχει χαρακτηριστική ομάδα την υποομάδα $n\mathbb{Z}$ της $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$;

6. Εστω Εστω $p : \widetilde{X} \to X$ μία απεικόνιση κανονικής επικάλυψης κατά τόξα συνεκτικών και τοπικά κατά τόξα συνεκτικών χώρων. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ με $p \circ h = p$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή αυτομορφισμός της επικάλυψης.