

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1977



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μέ απόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τὰ δι-
δακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυ-
κείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὅργανισμό Ἐκδόσεως
Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

Τό βιβλίον μεταγλωτίστηκε ἀπό τήν καθαρεύουσα στή δημοτική γλῶσσα,
ἀπό τοὺς φιλολόγους κ. κ. Θεοδωρακόπουλο Βασίλειο, Ζορμπᾶ Ἀπόστολο
καί τό Συγγραφέα.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1977

Τά κεφάλαια, οί παράγραφοι καί οί ομάδες άσκήσεων πού έχουν άστερίσκο δέ θά διδαχτούν στούς μαθητές τών τμημάτων κλασικής κατευθύνσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

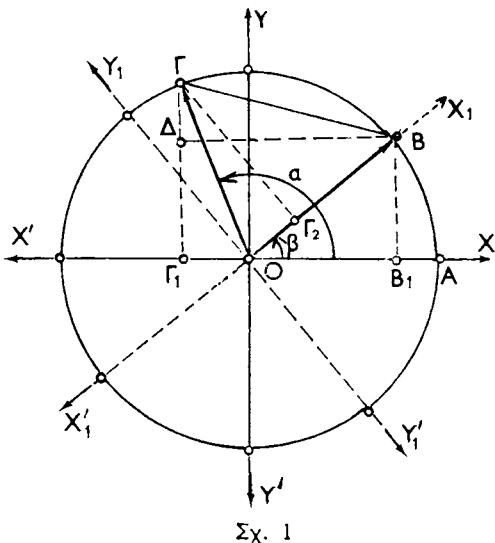
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΤΟΣΩΝ

● 1. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν προσανατολισμένων τόξων α καὶ β νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $\alpha - \beta$ καὶ $\alpha + \beta$.

Α) Ὑπολογισμὸς τοῦ $\sin(\alpha - \beta)$.
Ἔχουμε τὸν τριγωνομετρικὸ κύκλον (Ο) καὶ τοὺς πρωτεύοντες ἄξονες $X'OX$ καὶ $Y'OY$ τῶν συννημιτόνων καὶ ἡμιτόνων, ἀντιστοίχως.

* Ἀς πάρουμε $\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{AB}$ δύο τόξα ἴσα πρὸς τὰ α καὶ β , ὅπου Α ἡ κοινὴ ἀρχὴ τους. Οἱ συντεταγμένες τῶν Γ καὶ Β ὡς πρὸς τοὺς ἄξονες $X'X$ καὶ $Y'Y$ εἶναι, ἀντιστοίχως:

$$\begin{aligned} x &= \overline{O\Gamma_1} = \sin \alpha \\ y &= \overline{\Gamma_1\Gamma} = \eta\mu \alpha \\ \text{καὶ} \quad x' &= \overline{OB_1} = \sin \beta \\ y' &= \overline{B_1B} = \eta\mu \beta \end{aligned}$$



Φέρνουμε τὴ ΒΔ κάθετη πρὸς τὴ $\Gamma_1\Gamma$. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= BD^2 + \Delta\Gamma^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \\ \text{ἢ} \quad B\Gamma^2 &= (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\eta\mu \alpha - \eta\mu \beta)^2 \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta + \eta\mu^2 \alpha + \eta\mu^2 \beta - 2 \eta\mu \alpha \eta\mu \beta \\ &= 2 - 2 (\sin \alpha \sin \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta) \end{aligned} \quad (\alpha')$$

Ἡ τιμὴ τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ εἶναι: $\alpha - \beta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Φέρνουμε τὴν εὐθεΐα X'_1OBX_1 καί, ἐπάνω σ' αὐτή, τὴν κάθετο Y'_1OY_1 ,

τίς ὁποῖες θεωροῦμε ὡς πρωτεύοντες ἄξονες γιὰ τὸ τόξο $(\widehat{B\Gamma}) = \alpha - \beta$. Ἀπὸ τὸ Γ φέρνουμε τὴν κάθετη $\Gamma\Gamma_2$ πρὸς τὴ X'_1X καὶ τότε οἱ συντεταγμένες τῶν Β καὶ Γ θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \overline{OB} = 1 \\ y'_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{καὶ} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \overline{O\Gamma_2} = \sin(\alpha - \beta) \\ y_1 &= \overline{\Gamma_2\Gamma} = \eta\mu(\alpha - \beta) \end{aligned} \right\}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma_2\Gamma$ θά έχουμε:

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= B\Gamma_2^2 + \Gamma_2\Gamma^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 0)^2 \\ &= [\sin(\alpha - \beta) - 1]^2 + \eta\mu^2(\alpha - \beta) \\ &= \sin^2(\alpha - \beta) + 1 - 2\sin(\alpha - \beta) + \eta\mu^2(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2\sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (\alpha'')$$

Από τις σχέσεις (α'') και (α') , τώρα, έχουμε:

$$2 - 2\sin(\alpha - \beta) = 2 - 2(\sin\alpha\sin\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta). \text{ Άρα:}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin\alpha\sin\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta} \quad (1)$$

★ Δεύτερος τρόπος. Κατά το θεώρημα του Chasles είναι:

$$\overrightarrow{\gamma\omega\nu}(\vec{O\Gamma}, \vec{O\beta}) = \overrightarrow{\gamma\omega\nu}(\vec{O\chi}, \vec{O\beta}) - \overrightarrow{\gamma\omega\nu}(\vec{O\chi}, \vec{O\Gamma}) + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

όπου οι τιμές των γωνιών αυτών εκφράζονται σε ακτίνια. Άρα:

$$\overrightarrow{\gamma\omega\nu}(\vec{O\Gamma}, \vec{O\beta}) = \beta - \alpha + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{O\Gamma}$ και $\vec{O\beta}$ είναι:

$$\vec{O\Gamma} \cdot \vec{O\beta} = |\vec{O\Gamma}| \cdot |\vec{O\beta}| \sin(\vec{O\Gamma}, \vec{O\beta})$$

Επειδή όμως είναι και

$$\left. \begin{aligned} |\vec{O\Gamma}| &= |\vec{O\beta}| = 1 \\ \sin(\vec{O\Gamma}, \vec{O\beta}) &= \sin(\beta - \alpha) = \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \right\}$$

ή προηγούμενη ισότητα γίνεται:

$$\vec{O\Gamma} \cdot \vec{O\beta} = \sin(\alpha - \beta). \quad (\alpha_1)$$

Στο ορθοκανονικό όμως σύστημα αξόνων είναι:

$$\vec{O\Gamma} \cdot \vec{O\beta} = xx' + yy' = \sin\alpha\sin\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \quad (\alpha_2)$$

Από τις σχέσεις (α_1) και (α_2) συμπεραίνουμε ότι:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin\alpha\sin\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta.}$$

δηλαδή προκύπτει πάλι ο τύπος (1).

Β) Ύπολογισμός του $\sin(\alpha + \beta)$. Επειδή ο τύπος (1) ισχύει για κάθε τόξο α και β , θά ισχύει και όταν στη θέση του β βάλουμε τό $-\beta$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &\equiv \sin\alpha\sin(-\beta) + \eta\mu\alpha\eta\mu(-\beta) \\ &\equiv \sin\alpha\sin\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \end{aligned}$$

γιατί $\sin(-\beta) = \sin\beta$ και $\eta\mu(-\beta) = -\eta\mu\beta$. Άρα:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\sin(\alpha + \beta) \equiv \sin\alpha\sin\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta} \quad (2)$$

★ Μπορεί να μη διδαχθεί ο τρόπος αυτός.

Γ) 'Υπολογισμός του $\eta\mu(\alpha + \beta)$. 'Αν στόν τύπο (1), όπου α βάλουμε $\frac{\pi}{2} - \alpha$, θά έχουμε:

$$\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu\beta \quad (1)$$

$$\text{'Αλλά } \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \equiv \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \eta\mu(\alpha + \beta) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv \eta\mu\alpha \text{ καί } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv \sin\alpha. \end{cases}$$

όποτε η ισότητα (1) γίνεται:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\eta\mu(\alpha + \beta) \equiv \eta\mu\alpha \sin\beta + \eta\mu\beta \sin\alpha} \quad (3)$$

Δ) 'Υπολογισμός του $\eta\mu(\alpha - \beta)$. 'Αν στόν τύπο (3), όπου β βάλουμε $-\beta$, θά έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha - \beta) &\equiv \eta\mu\alpha \sin(-\beta) + \eta\mu(-\beta) \sin\alpha \\ &\equiv \eta\mu\alpha \sin\beta - \eta\mu\beta \sin\alpha. \end{aligned}$$

'Αρα:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\eta\mu(\alpha - \beta) \equiv \eta\mu\alpha \sin\beta - \eta\mu\beta \sin\alpha} \quad (4)$$

Ε) 'Υπολογισμός της $\epsilon\varphi(\alpha + \beta)$. 'Αν υποθέσουμε ότι: $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$, πού ισχύει για $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, θά έχουμε

$$\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\eta\mu\alpha \sin\beta + \eta\mu\beta \sin\alpha}{\sin\alpha \sin\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta} \quad (1)$$

'Αν $\sin\alpha \sin\beta \neq 0$, πού ισχύει για:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \quad \text{καί} \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

τότε η ισότητα (1) γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \epsilon\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\eta\mu\alpha \sin\beta + \eta\mu\beta \sin\alpha}{\sin\alpha \sin\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta} + \frac{\eta\mu\beta \sin\alpha}{\sin\alpha \sin\beta}}{\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta} - \frac{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta}{\sin\alpha \sin\beta}} = \\ &= \frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\eta\mu\beta}{\sin\beta}}{1 - \frac{\eta\mu\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\eta\mu\beta}{\sin\beta}} = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha \epsilon\varphi\beta}. \end{aligned}$$

*Αρα:

$$\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha \epsilon\varphi\beta}$$

(5)

Στ) 'Υπολογισμός της $\epsilon\varphi(\alpha - \beta)$. *Αν στόν τύπο (5) βάλουμε όπου β τό $-\beta$ καί υποθέσουμε ότι $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε:

$$\epsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi(-\beta)}{1 - \epsilon\varphi\alpha \epsilon\varphi(-\beta)} = \frac{\epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi\beta}{1 + \epsilon\varphi\alpha \epsilon\varphi\beta}$$

γιατί $\epsilon\varphi(-\beta) = -\epsilon\varphi\beta$.

*Αρα:

$$\epsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi\beta}{1 + \epsilon\varphi\alpha \epsilon\varphi\beta}$$

(6)

Ζ) 'Υπολογισμός της $\sigma\varphi(\alpha + \beta)$. *Αν υποθέσουμε ότι:

$\eta\mu(\alpha + \beta) \neq 0$, πού ισχύει για $\alpha + \beta \neq k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$

καί $\eta\mu\alpha \eta\mu\beta \neq 0$, πού ισχύει για $\alpha \neq k_1\pi$ καί $\beta \neq k_2\pi$,

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,

θά έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \sigma\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha} = \\ &= \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta} - \frac{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta}}{\frac{\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta} + \frac{\eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta}} = \frac{\sigma\varphi\alpha \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta} \end{aligned}$$

*Αρα:

$$\sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}$$

(7)

Η) 'Υπολογισμός της $\sigma\varphi(\alpha - \beta)$. *Αν στόν τύπο (7) βάλουμε όπου β τό $-\beta$, θά έχουμε:

$$\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \sigma\varphi(-\beta) - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi(-\beta)} = \frac{-\sigma\varphi\alpha \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta} = \frac{\sigma\varphi\alpha \sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$$

*Αρα:

$$\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$$

(8)

άν $\alpha - \beta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ καί $\alpha \neq k_1\pi$ καί $\beta \neq k_2\pi$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Μερικές περιπτώσεις. Αν $\beta = \frac{\pi}{4}$, τότε $\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$ και γιὰ

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}, \quad k, k_1 \in \mathbb{Z}$$

και γιὰ

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \neq -\frac{\pi}{4} + k_2\pi \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_3\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}, \quad k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ώστε:} \quad \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}, \quad \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha} \quad (9)$$

μέ τούς παραπάνω περιορισμούς.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

● 1. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ και $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta = \frac{9}{41}$, νά υπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

$$\eta\mu(\alpha - \beta), \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta), \quad \varepsilon\varphi(\alpha - \beta), \quad \sigma\varphi(\alpha + \beta).$$

Λύση. Ἐπειδή εἶναι $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ καί $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ θά ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = -\sqrt{1 - \eta\mu^2\beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2} = -\frac{40}{41},$$

ὁπότε θά εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}, \quad \varepsilon\varphi\beta = \frac{9}{41} : \left(-\frac{40}{41}\right) = -\frac{9}{40}, \quad \sigma\varphi\alpha = \frac{4}{3}, \quad \sigma\varphi\beta = -\frac{40}{9}$$

καί, ἔπομένως:

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{40}{41}\right) - \frac{9}{41} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{156}{205},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{40}{41}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{41} = -\frac{187}{205},$$

$$\epsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi\beta}{1 + \epsilon\varphi\alpha \epsilon\varphi\beta} = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{9}{40}\right)}{1 + \frac{3}{4} \left(-\frac{9}{40}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{9}{40}}{1 - \frac{27}{160}} = \frac{156}{133},$$

$$\sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{40}{9}\right) - 1}{\frac{4}{3} + \left(-\frac{40}{9}\right)} = \frac{187}{84}.$$

● 2. Νά υπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων 15° καί 75° .

Λύση. Ἐπειδὴ $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$, θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned}\eta\mu 15^\circ = \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ = \eta\mu 75^\circ &= \eta\mu(45^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 45^\circ \cos 30^\circ + \eta\mu 30^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\epsilon\varphi 15^\circ = \sigma\varphi 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{6 - 2} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\sigma\varphi 15^\circ = \epsilon\varphi 75^\circ = \frac{\eta\mu 75^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{6 - 2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Ἀνακεφαλαίωση.

$\eta\mu 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\epsilon\varphi 15^\circ = \sigma\varphi 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$
$\sin 15^\circ = \eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\sigma\varphi 15^\circ = \epsilon\varphi 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

(10)

● 3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) \equiv \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta \equiv \sin^2\beta - \sin^2\alpha.$$

Ἀπόδειξη. ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \beta) \eta\mu(\alpha - \beta) &\equiv (\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha) (\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha) \\ &\equiv \eta\mu^2\alpha \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ &\equiv \eta\mu^2\alpha(1 - \eta\mu^2\beta) - \eta\mu^2\beta(1 - \eta\mu^2\alpha) \\ &\equiv \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha \eta\mu^2\beta \\ &\equiv \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta \\ &\equiv 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta) \equiv \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha.\end{aligned}$$

● 4. Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\Sigma \equiv \alpha\eta\mu(B - \Gamma) + \beta\eta\mu(\Gamma - A) + \gamma\eta\mu(A - B) = 0.$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδὴ $\alpha = 2R\eta\mu A = 2R\eta\mu(B + \Gamma)$, θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha\eta\mu(B - \Gamma) &= 2R\eta\mu(B + \Gamma)\eta\mu(B - \Gamma) = 2R(\eta\mu^2B - \eta\mu^2\Gamma) \\ \text{καί μέ κυκλική ἑναλλαγή τῶν γραμμάτων } \alpha, \beta, \gamma \text{ καί } A, B, \Gamma \text{ θά ἔχουμε:} \\ \Sigma &\equiv 2R(\eta\mu^2B - \eta\mu^2\Gamma) + 2R(\eta\mu^2\Gamma - \eta\mu^2A) + 2R(\eta\mu^2A - \eta\mu^2B) = \\ &= 2R(\eta\mu^2B - \eta\mu^2\Gamma + \eta\mu^2\Gamma - \eta\mu^2A + \eta\mu^2A - \eta\mu^2B) = 2R \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

● 5. Ἐάν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, καί $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ἢ $\beta \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}$ ἢ $\gamma \neq k^2\pi + \frac{\pi}{2}$, νά ἀποδειχθεῖ ἡ σχέση:

$$\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\gamma = \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta \epsilon\phi\gamma.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τή σχέση $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma$ καί ἐπομένως:

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \epsilon\phi(\pi - \gamma) = -\epsilon\phi\gamma \Rightarrow \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta} = -\epsilon\phi\gamma \Rightarrow$$

$$\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\gamma = \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta \epsilon\phi\gamma.$$

Ἀντιστρόφως:

● 6. Ἐάν οἱ γωνίες α, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:

$$(1) \quad \epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\gamma = \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta \epsilon\phi\gamma \quad (12)$$

μέ ποιὰ σχέση συνδέονται αὐτές οἱ γωνίες;

Λύση. Ἀπὸ τή σχέση (1) ἔχουμε:

$$\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta = -\epsilon\phi\gamma(1 - \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta) \quad (2)$$

Ἐάν εἶναι $1 - \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta = 1$, τότε ἀπὸ τή (2) $\Rightarrow$

$$\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi\alpha = -\epsilon\phi\beta,$$

ἡ ὁποία ἰσότητα δέ συμβιβάζεται μέ τήν $\epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta = 1$. Ἄρα:

$$1 - \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta \neq 0,$$

οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta} = -\epsilon\phi\gamma \Leftrightarrow \epsilon\phi(\alpha + \beta) = -\epsilon\phi\gamma = \epsilon\phi(\pi - \gamma) \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta = (\pi - \gamma) + \nu\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi + \nu\pi = (\nu + 1)\pi = k\pi \text{ με } \nu, k \in \mathbb{Z}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι γωνίες α, β, γ συνδέονται με τη σχέση $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

● 7. "Αν οι γωνίες α, β, γ ικανοποιούν την ισότητα $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, τότε:

$$\text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma + 2\text{συνα συν}\beta \text{ συν}\gamma = 1 \quad (13)$$

Απόδειξη. Έχουμε $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma$ και επομένως:

$$\begin{aligned} \text{συν}(\alpha + \beta) &= \text{συν}(\pi - \gamma) = -\text{συν}\gamma \Leftrightarrow \text{συνα συν}\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta = -\text{συν}\gamma \Leftrightarrow \\ &\text{συνα συν}\beta + \text{συν}\gamma = \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \end{aligned}$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας στο τετράγωνο, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{συν}^2\alpha \text{ συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma + 2\text{συνα συν}\beta \text{ συν}\gamma &= \eta\mu^2\alpha \eta\mu^2\beta = \\ &= (1 - \text{συν}^2\alpha)(1 - \text{συν}^2\beta) = 1 - \text{συν}^2\alpha - \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\alpha \text{ συν}^2\beta \Leftrightarrow \\ \text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma + 2\text{συνα συν}\beta \text{ συν}\gamma &= 1. \end{aligned}$$

Αντιστροφή:

★ ● 8. "Αν ισχύει ο τύπος (13), πώς συνδέονται οι γωνίες α, β, γ ;

Λύση: Ο τύπος (13) γράφεται:

$$\text{συν}^2\gamma + 2\text{συνα συν}\beta \text{ συν}\gamma + \text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta - 1 = 0 \quad (1)$$

και μπορεί να θεωρηθεί το πρώτο μέλος ως δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $\text{συν}\gamma$. "Αν Δ είναι η διακρίνουσά του, θα έχουμε:

$$\frac{\Delta}{4} = \text{συν}^2\alpha \text{ συν}^2\beta - \text{συν}^2\alpha - \text{συν}^2\beta + 1 = (1 - \text{συν}^2\alpha)(1 - \text{συν}^2\beta) = \eta\mu^2\alpha \eta\mu^2\beta,$$

και επομένως οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι:

$$\text{συν}\gamma = -\text{συνα συν}\beta \pm \eta\mu\alpha \eta\mu\beta = -\text{συν}(\alpha \pm \beta),$$

οπότε θα έχουμε:

$$\alpha \pm \beta = \pm(\pi - \gamma) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow \alpha \pm \beta \pm \gamma = (2k + 1)\pi, \text{ με } k \in \mathbb{Z}.$$

ΣΗΜ. Τα διπλά σημεία είναι άνεξάρτητα τό ένα από τό άλλο.

Με όμοια εργασία βρίσκουμε ότι:

★ "Αν οι γωνίες α, β, γ επαληθεύουν την ισότητα:

$$\text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma - 2\text{συνα συν}\beta \text{ συν}\gamma = 1 \quad (14)$$

τότε οι γωνίες α, β, γ συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\alpha \pm \beta \pm \gamma = k \cdot 2\pi, \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}$$

- 9. "Αν μεταξύ τῶν κυρίων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ὑπάρχει ἡ σχέση:

$$a = 2\beta \text{ συν } \Gamma, \quad (1)$$

τότε τὸ τρίγωνο αὐτό θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξη. Ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$2R\eta\mu A = 2 \cdot 2R\eta\mu B \text{ συν } \Gamma \Leftrightarrow \eta\mu A = 2\eta\mu B \text{ συν } \Gamma \quad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ $A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow \eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$ καὶ ἡ (2) γίνεται:

$$\eta\mu(B + \Gamma) = 2\eta\mu B \text{ συν } \Gamma \Leftrightarrow \eta\mu B \text{ συν } \Gamma + \eta\mu\Gamma \text{ συν } B = 2\eta\mu B \text{ συν } \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu B \text{ συν } \Gamma - \eta\mu\Gamma \text{ συν } B = 0 \Leftrightarrow \eta\mu(B - \Gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$B - \Gamma = k \cdot \pi, \quad \delta\piου \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως B καὶ Γ εἶναι γωνίες τριγώνου, πρέπει $k = 0$.

Ἀρα $B - \Gamma = 0$, ὁπότε $B = \Gamma$. Δηλαδή τὸ τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Πρώτη ομάδα

1. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 105° .

2. "Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ καὶ $\eta\mu \alpha = \frac{3}{5}$, $\text{συν } \beta = \frac{9}{41}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ

παραστάσεις:

$$\eta\mu(\alpha - \beta), \text{ συν }(\alpha + \beta), \text{ εφ }(\alpha - \beta), \text{ σφ }(\alpha + \beta).$$

3. "Αν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ καὶ $\eta\mu \alpha = \frac{15}{17}$, $\text{συν } \beta = \frac{12}{13}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ

παραστάσεις:

$$\eta\mu(\alpha + \beta), \text{ συν }(\alpha - \beta), \text{ εφ }(\alpha + \beta), \text{ σφ }(\alpha - \beta).$$

4. "Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ καὶ $\text{συν } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{συν } \beta = -\frac{3}{5}$, νά ὑπολογισθοῦν

οἱ παραστάσεις:

$$\eta\mu(\alpha + \beta), \text{ συν }(\alpha - \beta), \text{ εφ }(\alpha - \beta), \text{ σφ }(\alpha + \beta).$$

5. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ταυτότητες:

1. $\eta\mu(\alpha - \beta)\text{συν } \beta + \eta\mu\beta \text{συν }(\alpha - \beta) \equiv \eta\mu\alpha.$
2. $\text{συν }(\alpha - \beta)\text{συν }(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta)\eta\mu(\alpha + \beta) \equiv \text{συν } 2\alpha.$
3. $\eta\mu(60^\circ - \alpha)\text{συν}(30^\circ + \alpha) + \eta\mu(30^\circ + \alpha)\text{συν}(60^\circ - \alpha) \equiv 1.$
4. $\text{συν}(\alpha + \beta)\text{συν}(\alpha - \beta) \equiv \text{συν}^2\alpha - \eta\mu^2\beta \equiv \text{συν}^2\beta - \eta\mu^2\alpha.$
5. $\text{εφ}(\beta - \gamma) + \text{εφ}(\gamma - \alpha) + \text{εφ }(\alpha - \beta) = \text{εφ}(\beta - \gamma)\text{εφ}(\gamma - \alpha)\text{εφ}(\alpha - \beta).$

Γιὰ ποιές τιμές τῶν α, β, γ δέν ἔχουν ἔννοια τὰ μέλη τῆς 5;

6. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\text{συν } \alpha \text{συν } \beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\text{συν } \beta \text{συν } \gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\text{συν } \gamma \text{συν } \alpha} = 0.$
2. $\frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu\beta \eta\mu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu\gamma \eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta} = 0.$
3. $\frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\text{συν}(\alpha + \beta) + \text{συν}(\alpha - \beta)} = \text{εφ } \alpha + \text{εφ } \beta.$
4. $\frac{\text{εφ}^2 2\alpha - \text{εφ}^2 \alpha}{1 - \text{εφ}^2 2\alpha \text{εφ}^2 \alpha} = \text{εφ } 3\alpha \text{εφ } \alpha.$

7. Νά αποδειχθεί ότι:

1. $\sin^2 x + \sin^2(120^\circ + x) + \sin^2(120^\circ - x) \equiv \frac{3}{2}$.
2. "Αν $\alpha + \beta = 45^\circ$, τότε: $(1 + \epsilon\phi\alpha)(1 + \epsilon\phi\beta) = 2$.
3. $\sin^2\alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) \equiv \frac{3}{2}$.

★ Δεύτερη ομάδα

8. "Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, νά αποδειχθεί ότι:

1. $\sigma\phi \frac{\alpha}{2} + \sigma\phi \frac{\beta}{2} + \sigma\phi \frac{\gamma}{2} = \sigma\phi \frac{\alpha}{2} \sigma\phi \frac{\beta}{2} \sigma\phi \frac{\gamma}{2}$.
2. $\sigma\phi\alpha \sigma\phi\beta + \sigma\phi\beta \sigma\phi\gamma + \sigma\phi\gamma \sigma\phi\alpha = 1$.
3. $\frac{\sin\alpha}{\eta\mu\beta \eta\mu\gamma} + \frac{\sin\beta}{\eta\mu\gamma \eta\mu\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta} = 2$.
4. $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma - 2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 2$.
5. $\epsilon\phi 2\alpha + \epsilon\phi 2\beta + \epsilon\phi 2\gamma = \epsilon\phi 2\alpha \epsilon\phi 2\beta \epsilon\phi 2\gamma$.

9. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά αποδειχθεί ότι:

1. $\frac{\alpha^2 \eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu B + \eta\mu \Gamma} + \frac{\beta^2 \eta\mu(\Gamma-A)}{\eta\mu \Gamma + \eta\mu A} + \frac{\gamma^2 \eta\mu(A-B)}{\eta\mu A + \eta\mu B} = 0$.
2. $\frac{\alpha^2 \eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu A} + \frac{\beta^2 \eta\mu(\Gamma-A)}{\eta\mu B} + \frac{\gamma^2 \eta\mu(A-B)}{\eta\mu \Gamma} = 0$.
3. $(\beta + \gamma) \sin A + (\gamma + \alpha) \sin B + (\alpha + \beta) \sin \Gamma = \alpha + \beta + \gamma$.
4. $\eta\mu A \eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu B \eta\mu(\Gamma-A) + \eta\mu \Gamma \eta\mu(A-B) = 0$.

10. "Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, νά αποδειχθεί ότι:

1. $\sigma\phi^2\alpha + \sigma\phi^2\beta + \sigma\phi^2\gamma \geq 1$.
2. $\epsilon\phi \frac{2\alpha}{2} + \epsilon\phi \frac{2\beta}{2} + \epsilon\phi \frac{2\gamma}{2} \geq 1$.
3. "Αν $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, τότε: $\epsilon\phi^2\alpha + \epsilon\phi^2\beta + \epsilon\phi^2\gamma \geq 1$.
4. "Αν $\frac{\epsilon\phi(\alpha-\beta)}{\epsilon\phi\alpha} + \frac{\eta\mu^2\gamma}{\eta\mu^2\alpha} = 1$, τότε: $\epsilon\phi^2\gamma = \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta$.

★ ● 10. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. "Από τούς τριγωνομετρικούς αριθμούς τῶν προσανατολισμένων τόξων α, β, γ νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \beta + \gamma$.

Α) Ὑπολογισμός τοῦ $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) &\equiv \eta\mu[(\alpha + \beta) + \gamma] \equiv \eta\mu(\alpha + \beta) \sin \gamma + \eta\mu \gamma \sin(\alpha + \beta) \equiv \\ &\equiv (\eta\mu\alpha \sin\beta + \eta\mu\beta \sin\alpha) \sin \gamma + \eta\mu \gamma (\sin\alpha \sin\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta) \\ &\equiv \eta\mu\alpha \sin\beta \sin \gamma + \eta\mu\beta \sin\alpha \sin \gamma + \eta\mu \gamma \sin\alpha \sin\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \eta\mu \gamma\end{aligned}$$

"Ωστε, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, εἶναι:

$$\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) \equiv \eta\mu\alpha \sin\beta \sin \gamma + \eta\mu\beta \sin \gamma \sin\alpha + \eta\mu \gamma \sin\alpha \sin\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \eta\mu \gamma$$

καί πτό σύντομα:

$\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) \equiv \Sigma \eta\mu\alpha \sin\beta \sin \gamma - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \eta\mu \gamma$

(15)

Β) 'Υπολογισμός τοῦ συν(α + β + γ). Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\text{συν}(\alpha + \beta + \gamma) &\equiv \text{συν}[(\alpha + \beta) + \gamma] \equiv \text{συν}(\alpha + \beta)\text{συν}\gamma - \eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu\gamma \equiv \\ &\equiv (\text{συν}\alpha \text{συν}\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta)\text{συν}\gamma - (\eta\mu\alpha \text{συν}\beta + \eta\mu\beta \text{συν}\alpha)\eta\mu\gamma \\ &\equiv \text{συν}\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \text{συν}\gamma - \eta\mu\alpha \eta\mu\gamma \text{συν}\beta - \eta\mu\beta \eta\mu\gamma \text{συν}\alpha.\end{aligned}$$

Ὡστε, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, εἶναι:

$$\text{συν}(\alpha + \beta + \gamma) \equiv \text{συν}\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \text{συν}\gamma - \eta\mu\beta \eta\mu\gamma \text{συν}\alpha - \eta\mu\gamma \eta\mu\alpha \text{συν}\beta$$

καί συντομότερα:

$$\boxed{\text{συν}(\alpha + \beta + \gamma) \equiv \text{συν}\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma - \Sigma \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \text{συν}\gamma} \quad (16)$$

Γ) 'Υπολογισμός τῆς εφ(α + β + γ). Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\phi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)}{\text{συν}(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\Sigma \eta\mu\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \eta\mu\gamma}{\text{συν}\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma - \Sigma \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \text{συν}\gamma}, \quad (1)$$

ὅταν εἶναι $\text{συν}(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$, πού ἰσχύει γιὰ $\alpha + \beta + \gamma \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ἄν ὁμως εἶναι καί $\text{συν}\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma \neq 0$, πού ἰσχύει γιὰ:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi, \quad \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k_3\pi \quad \text{σύγχρονα} \quad (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z})$$

διαιρώντας καί τούς δύο ὁρους τοῦ κλάσματος (1) τοῦ δεύτερου μέλους μέ $\text{συν}\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma$, ἔχουμε:

$$\boxed{\varepsilon\phi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\Sigma \varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\alpha \varepsilon\phi\beta \varepsilon\phi\gamma}{1 - \Sigma \varepsilon\phi\alpha \varepsilon\phi\beta}} \quad (17)$$

$$\eta \quad \varepsilon\phi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta + \varepsilon\phi\gamma - \varepsilon\phi\alpha \varepsilon\phi\beta \varepsilon\phi\gamma}{1 - \varepsilon\phi\alpha \varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\beta \varepsilon\phi\gamma - \varepsilon\phi\gamma \varepsilon\phi\alpha}$$

Δ) 'Υπολογισμός τῆς σφ(α + β + γ). Ἄν $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$, πού ἰσχύει γιὰ $\alpha + \beta + \gamma \neq k\pi$, ὅπου $k \in \mathbb{Z}$, ἔχουμε διαδοχικά:

$$\sigma\phi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\text{συν}(\alpha + \beta + \gamma)}{\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\text{συν}\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma - \Sigma \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \text{συν}\gamma}{\Sigma \eta\mu\alpha \text{συν}\beta \text{συν}\gamma - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \eta\mu\gamma} \quad (1)$$

Ἄν ὁμως εἶναι καί $\eta\mu\alpha \eta\mu\beta \eta\mu\gamma \neq 0$, πού ἰσχύει γιὰ $\alpha \neq k_1\pi$ καί $\beta \neq k_2\pi$ καί $\gamma \neq k_3\pi$, ὅπου $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, διαιρώντας τούς ὁρους τοῦ κλάσματος (1) μέ $\eta\mu\alpha \eta\mu\beta \eta\mu\gamma$, βρίσκουμε τόν τύπο:

$$\sigma\phi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sigma\phi\alpha \sigma\phi\beta \sigma\phi\gamma - \Sigma \sigma\phi\alpha}{\Sigma \sigma\phi\beta \sigma\phi\gamma - 1} \quad 18$$

$$\boxed{\sigma\phi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sigma\phi\alpha \sigma\phi\beta \sigma\phi\gamma - \sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta - \sigma\phi\gamma}{\sigma\phi\beta \sigma\phi\gamma + \sigma\phi\gamma \sigma\phi\alpha + \sigma\phi\alpha \sigma\phi\beta - 1}}$$

Παράδειγμα. "Αν $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{12}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{2}{5}$, $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{1}{3}$, νά αποδειχθεί ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ἀπόδειξη. Στόν τύπο (17) ἀντικαθιστώντας τίς δεδομένες τιμές, βρίσκουμε μετὰ τήν ἐκτέλεση τῶν σχετικῶν πράξεων:

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma) = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}. \text{ Ἄρα: } \alpha + \beta + \gamma = \pi/4 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ομάδα

11. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\eta\mu(\beta + \gamma - \alpha),$ | $\eta\mu(\gamma + \alpha - \beta),$ | $\eta\mu(\alpha + \beta - \gamma).$ |
| 2. $\sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma - \alpha),$ | $\sigma\upsilon\nu(\gamma + \alpha - \beta),$ | $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta - \gamma).$ |
| 3. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta - \gamma),$ | $\sigma\upsilon\nu(\beta - \alpha - \gamma),$ | $\sigma\upsilon\nu(\gamma - \alpha - \beta).$ |

12. 1. "Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ καί $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{4}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{8}{15}$, $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{5}{12}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἀθροισμάτων $\alpha \pm \beta \pm \gamma$.

2. "Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ καί $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta = \frac{12}{13}$, $\eta\mu\gamma = \frac{7}{25}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$, $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma)$, $\sigma\varphi(\alpha + \beta - \gamma)$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ ΤΟΞΩΝ

● 11. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Ἀπό τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς ἐνός τόξου α νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων:

$$2\alpha, 3\alpha, \dots, \nu\alpha \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

A) Ὑπολογισμός τοῦ $\eta\mu 2\alpha$. "Αν στό γνωστό τύπο:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) \equiv \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha$$

βάλουμε ἀντί β τό α , θά ἔχουμε:

$$\eta\mu(\alpha + \alpha) \equiv \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$$

ἢ

$$\eta\mu 2\alpha \equiv 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$$

(19)

B) Ὑπολογισμός τοῦ $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$. "Αν στό γνωστό τύπο:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \equiv \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta,$$

Βάλουμε όπου β τό α , θά έχουμε διαδοχικά:

$$\text{συν}2\alpha \equiv \text{συν}^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv 1 - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

καί $\text{συν}2\alpha \equiv \text{συν}^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv \text{συν}^2\alpha - (1 - \text{συν}^2\alpha) \equiv 2\text{συν}^2\alpha - 1.$

Ώστε:

$$\boxed{\text{συν}2\alpha \equiv 1 - 2\eta\mu^2\alpha \equiv 2\text{συν}^2\alpha - 1 \equiv \text{συν}^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} \quad (20)$$

Γ) 'Υπολογισμός της $\epsilon\phi 2\alpha$. Από τό γνωστό τύπο:

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta}, \text{ αν βάλουμε όπου } \beta \text{ τό } \alpha, \text{ έχουμε:}$$

$$\epsilon\phi(\alpha + \alpha) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\alpha} = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha} \quad \eta \quad \boxed{\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}} \quad (21)$$

Ο τύπος (21) ισχύει γιά:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + k_1 \cdot \pi, \text{ όπου } k, k_1, \in \mathbb{Z}.$$

Δ) 'Υπολογισμός της $\sigma\phi 2\alpha$. Από τό γνωστό τύπο:

$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}, \text{ όταν } \beta = \alpha, \text{ έχουμε:}$$

$$\sigma\phi(\alpha + \alpha) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\alpha - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\alpha} = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha} \quad \eta \quad \boxed{\sigma\phi 2\alpha = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha}} \quad (22)$$

Ο τύπος (22) ισχύει γιά $\alpha \neq k\pi$ καί $\alpha \neq \pi/2 + k_1 \cdot \pi$, όπου $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

● 12. Οί τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου 3α . Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \eta\mu 3\alpha &= \eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha \text{συν}\alpha + \eta\mu\alpha \text{συν}2\alpha = \\ &= 2\eta\mu\alpha \text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\alpha + \eta\mu\alpha(1 - 2\eta\mu^2\alpha) = \\ &= 2\eta\mu\alpha \text{συν}^2\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = \\ &= 2\eta\mu\alpha(1 - \eta\mu^2\alpha) + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = \\ &= 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^2\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{συν}3\alpha &= \text{συν}(2\alpha + \alpha) = \text{συν}2\alpha \text{συν}\alpha - \eta\mu 2\alpha \eta\mu\alpha = \\ &= (2\text{συν}^2\alpha - 1)\text{συν}\alpha - 2\eta\mu^2\alpha \text{συν}\alpha = 2\text{συν}^3\alpha - \text{συν}\alpha - 2(1 - \text{συν}^2\alpha)\text{συν}\alpha = \\ &= 2\text{συν}^3\alpha - \text{συν}\alpha - 2\text{συν}\alpha + 2\text{συν}^3\alpha = 4\text{συν}^3\alpha - 3\text{συν}\alpha. \end{aligned}$$

$$\epsilon\phi 3\alpha = \epsilon\phi(2\alpha + \alpha) = \frac{3\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi^3\alpha}{1 - 3\epsilon\phi^2\alpha}, \quad \sigma\phi 3\alpha = \sigma\phi(2\alpha + \alpha) = \frac{\sigma\phi^3\alpha - 3\sigma\phi\alpha}{3\sigma\phi^2\alpha - 1}$$

Ὡστε, τελικά, θά ἔχουμε:

$\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$
$\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

(23) καί

$\varepsilon\varphi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha}$
$\sigma\varphi 3\alpha = \frac{\sigma\varphi^3\alpha - 3\sigma\varphi\alpha}{3\sigma\varphi^2\alpha - 1}$

(24)

ΣΗΜ. Οἱ τύποι (23) καί (24) προκύπτουν ἀπὸ τοὺς τύπους 15 - 18, ἂν ἐκεῖ βάλουμε ὅπου $\beta = \gamma = \alpha$ καί ἐκτελέσουμε τίς πράξεις.

Ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς τύπους (24) ἔχει ἔννοια, ὅταν

$$3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{6} + k_1\pi, \quad \text{ὅπου} \quad k, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Ὁ δεύτερος ἀπὸ τοὺς τύπους (24) ἔχει ἔννοια, ὅταν:

$$3\alpha \neq k_2\pi \Rightarrow \alpha \neq k_2 \cdot \frac{\pi}{3} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{3} + k_3\pi, \quad \text{ὅπου} \quad k_2, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

★ • 13. Τύποι τοῦ Simpson. Προφανῶς εἶναι:

$$\left. \begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) &\equiv 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) &\equiv 2\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta \end{aligned} \right\}.$$

Ἐπομένως:

$$\left. \begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \beta) &\equiv 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha - \beta) \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) &\equiv 2\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \end{aligned} \right\}.$$

καί ἂν βάλουμε ὅπου α τό $\mu\alpha$ καί ὅπου β τό α , βρίσκουμε τοὺς τύπους:

$\eta\mu(\mu + 1)\alpha \equiv 2\eta\mu(\mu\alpha) \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu(\mu - 1)\alpha$	(25)
--	------

$\sigma\upsilon\nu(\mu + 1)\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu(\mu\alpha) \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu(\mu - 1)\alpha$	(26)
--	------

Ἀπὸ τοὺς τύπους (25), (26) γιὰ $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ βρίσκουμε ἀντιστοίχως τοὺς τύπους:

$\eta\mu 2\alpha \equiv \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$
$\eta\mu 3\alpha \equiv 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 3\alpha \equiv 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\eta\mu 4\alpha \equiv (4\eta\mu\alpha - 8\eta\mu^3\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 4\alpha \equiv 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$
$\eta\mu 5\alpha \equiv 5\eta\mu\alpha - 20\eta\mu^3\alpha + 16\eta\mu^5\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 5\alpha \equiv 16\sigma\upsilon\nu^5\alpha - 20\sigma\upsilon\nu^3\alpha + 5\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\eta\mu 6\alpha \equiv (6\eta\mu\alpha - 32\eta\mu^3\alpha + 32\eta\mu^5\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 6\alpha \equiv 32\sigma\upsilon\nu^6\alpha - 48\sigma\upsilon\nu^4\alpha + 18\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$
.....	

• 14. ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$.

$$\begin{aligned}
 \text{Λύση. } & \text{Έχουμε διαδοχικά: } 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow 36^\circ = 90^\circ - 54^\circ \Leftrightarrow \\
 & \eta\mu 36^\circ \equiv \eta\mu(90^\circ - 54^\circ) \equiv \sigma\upsilon\nu 54^\circ \Leftrightarrow \eta\mu(2 \cdot 18^\circ) \equiv \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 18^\circ) \Leftrightarrow \\
 & 2\eta\mu 18^\circ \sigma\upsilon\nu 18^\circ \equiv 4\sigma\upsilon\nu^3 18^\circ - 3\sigma\upsilon\nu 18^\circ \Leftrightarrow \\
 & 2\eta\mu 18^\circ \equiv 4\sigma\upsilon\nu^2 18^\circ - 3 \Leftrightarrow 4\eta\mu^2 18^\circ + 2\eta\mu 18^\circ \equiv 1 \Leftrightarrow \\
 & 4\eta\mu^2 18^\circ + 2\eta\mu 18^\circ + \frac{1}{4} \equiv \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(2\eta\mu 18^\circ + \frac{1}{2} \right)^2 \equiv \frac{5}{4} \Leftrightarrow \\
 & 2\eta\mu 18^\circ + \frac{1}{2} \equiv \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu 18^\circ + \frac{1}{2} \equiv \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0,3090
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu^2 18^\circ = 1 - \eta\mu^2 18^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\text{όπότε } \epsilon\phi 18^\circ = \frac{\eta\mu 18^\circ}{\sigma\upsilon\nu 18^\circ} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}.$$

Άπό τόν τύπο $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \alpha$, γιά $\alpha = 18^\circ$, έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 36^\circ = 1 - 2\eta\mu^2 18^\circ = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\text{καί } \eta\mu^2 36^\circ = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 36^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} \right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \text{ ή } \eta\mu 36^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\text{καί άρα: } \epsilon\phi 36^\circ = \frac{\eta\mu 36^\circ}{\sigma\upsilon\nu 36^\circ} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Καί έπειδή $18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$ καί $36^\circ + 54^\circ = 90^\circ$, συμπεραίνουμε:

$$\begin{array}{ll}
 \eta\mu 72^\circ = \sigma\upsilon\nu 18^\circ & \eta\mu 54^\circ = \sigma\upsilon\nu 36^\circ \\
 \sigma\upsilon\nu 72^\circ = \eta\mu 18^\circ & \sigma\upsilon\nu 54^\circ = \eta\mu 36^\circ \\
 \epsilon\phi 72^\circ = \sigma\phi 18^\circ & \text{καί} \quad \epsilon\phi 54^\circ = \sigma\phi 36^\circ \\
 \sigma\phi 72^\circ = \epsilon\phi 18^\circ & \sigma\phi 54^\circ = \epsilon\phi 36^\circ
 \end{array}$$

Άνακεφαλαιώνοντας έχουμε:

$\eta\mu 18^\circ = \sigma\upsilon\nu 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\eta\mu 36^\circ = \sigma\upsilon\nu 54^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10-2\sqrt{5}}$	(28)
$\sigma\upsilon\nu 18^\circ = \eta\mu 72^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \eta\mu 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$	
$\epsilon\phi 18^\circ = \sigma\phi 72^\circ = \frac{1}{5} \sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\epsilon\phi 36^\circ = \sigma\phi 54^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$	
$\sigma\phi 18^\circ = \epsilon\phi 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sigma\phi 36^\circ = \epsilon\phi 54^\circ = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$	

Πρώτη ομάδα

13. *Αν $\eta\mu\alpha = 0,4$ και $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, νά υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί:
 $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\varphi 2\alpha$, $\sigma\varphi 2\alpha$

14. *Αν $\eta\mu\alpha = \frac{1}{3}$, $\eta\mu\beta = \frac{1}{2}$ και $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, νά υπολογισθεί τό $\eta\mu(2\alpha + \beta)$.

15. *Αν $4\eta\mu^2\alpha - 2(1 + \sqrt{3})\eta\mu\alpha + \sqrt{3} = 0$, νά υπολογισθούν οι αριθμοί:
 $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\varphi 2\alpha$.

16. *Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{3}$, νά υπολογισθεί τό $\sigma\upsilon\nu 3\alpha$.

17. *Αν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, νά υπολογισθεί τό $\eta\mu 3\alpha$.

18. *Αν $\epsilon\varphi\alpha = 3$, νά υπολογισθεί ή $\epsilon\varphi 3\alpha$.

19. Νά αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

$$1. \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \epsilon\varphi\alpha, \quad 5. \frac{1 + \sigma\varphi^2\alpha}{2\sigma\varphi\alpha} = \sigma\tau\epsilon\mu 2\alpha,$$

$$2. \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha, \quad 6. \frac{\sigma\varphi^2\alpha + 1}{\sigma\varphi^2\alpha - 1} = \tau\epsilon\mu 2\alpha,$$

$$3. \sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu 2\alpha, \quad 7. \epsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}.$$

$$4. \sigma\varphi\alpha - \epsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi 2\alpha.$$

Πότε έχουν έννοια τά μέλη τών παραπάνω ασκήσεων;

20. Νά αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

$$1. \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \equiv \eta\mu 2\alpha.$$

$$2. \epsilon\varphi(45^\circ + \alpha) - \epsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = 2\epsilon\varphi 2\alpha.$$

$$3. \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha} = 2\epsilon\varphi 2\alpha.$$

$$4. \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\varphi\alpha.$$

★ Δεύτερη ομάδα

21. Νά αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

$$1. \frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2. \quad 2. \frac{3\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha}{3\eta\mu\alpha - \eta\mu 3\alpha} = \sigma\varphi^2\alpha,$$

$$3. \frac{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu^3\alpha}{\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \sigma\varphi\alpha. \quad 4. \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu^3\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} = 3.$$

$$5. 4\eta\mu^3\alpha \sigma\upsilon\nu 3\alpha + 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha \eta\mu 3\alpha \equiv 3\eta\mu 4\alpha.$$

$$6. 4\eta\mu\alpha \eta\mu(60^\circ + \alpha) \eta\mu(60^\circ - \alpha) \equiv \eta\mu 3\alpha.$$

$$7. \epsilon\varphi 3\alpha - \epsilon\varphi 2\alpha - \epsilon\varphi\alpha = \epsilon\varphi 3\alpha \epsilon\varphi 2\alpha \epsilon\varphi\alpha.$$

$$8. \frac{\sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi 3\alpha} + \frac{\epsilon\varphi\alpha}{\epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi 3\alpha} = 1.$$

● 15. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. 'Από τήν εφα ενός τόξου α νά υπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 2α.

Λύση. 'Από τίς ισότητες:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha} \quad \text{καί} \quad \eta \mu^2 \alpha = \frac{\varepsilon \varphi^2 \alpha}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha}, \quad \text{ἂν } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ἔχουμε διαδοχικά:

$$\eta \mu 2\alpha = 2\eta \mu \alpha \sin \alpha = 2\varepsilon \varphi \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 2\varepsilon \varphi \alpha \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha} = \frac{2\varepsilon \varphi \alpha}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha},$$

$$\sin 2\alpha = \sin^2 \alpha - \eta \mu^2 \alpha = \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha} - \frac{\varepsilon \varphi^2 \alpha}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha} = \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 \alpha}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha},$$

$$\varepsilon \varphi 2\alpha = \frac{\eta \mu 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\varepsilon \varphi \alpha}{1 - \varepsilon \varphi^2 \alpha}, \quad \text{ἂν } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k_1 \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + k_2 \pi$$

$$\sigma \varphi 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 \alpha}{2\varepsilon \varphi \alpha}, \quad \text{ἂν } \alpha \neq (2k_3 + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_4 \pi,$$

ὅπου οἱ $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

'Ανακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

$\eta \mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon \varphi \alpha}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha}$	$\varepsilon \varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon \varphi \alpha}{1 - \varepsilon \varphi^2 \alpha}$
$\sin 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 \alpha}{1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha}$	$\sigma \varphi 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon \varphi^2 \alpha}{2\varepsilon \varphi \alpha}$

(29)

Στούς τύπους (29) παρατηροῦμε ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ $\eta \mu 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\varepsilon \varphi 2\alpha$, $\sigma \varphi 2\alpha$ εἶναι ρητές συναρτήσεις τῆς $\varepsilon \varphi \alpha$.

★● 16. Γεωμετρικὴ ἐρμηνεία τῶν τύπων (29). 'Ας ὑποθέσουμε ὅτι Ο εἶναι τὸ κέντρο τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων καὶ ΑΖ ὁ ἄξονας τῶν ἐφαπτομένων.

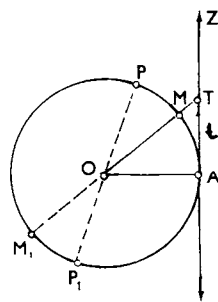
'Αν $t = \varepsilon \varphi \alpha = AT$ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στὰ δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα Μ καὶ M_1 τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (Ο), τότε τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐφαπτομένη $t = AT$, περατώνονται στὸ σημεῖο Μ ἢ τὸ M_1 .

'Αρα οἱ τιμὲς τους θά εἶναι:

$$x = \alpha + k \cdot \pi, \quad \text{ὅπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Τὰ διπλάσια τόξα θά ἔχουν τιμὲς:

$$2x = 2(\alpha + k \cdot \pi) = 2\alpha + k \cdot 2\pi$$



Σχ. 2

καί θά περατώνονται στό σημείο P ἢ P₁. Ἐν, λοιπόν, γνωρίζουμε τό σημείο T, εἶναι ἀμέσως γνωστό καί τό σημείο P. Ἐρα οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου $\widehat{AP}$ εἶναι τελείως ὁρισμένοι.

Ἀντιστρόφως, ἂν εἶναι γνωστό τό σημείο P, εἶναι ἀμέσως γνωστό καί τό σημείο T, ὁπότε εἶναι γνωστή καί ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\widehat{AM}$. Δηλαδή ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου 2α εἶναι γνωστή ἡ εφ.

Ἐτσι εἶναι:

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}.$$

● 17. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τήν $\epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου α.

Λύση. Ἐν στούς γνωστούς τύπους (29) ἀντικαταστήσουμε τή γωνία α μέ τή γωνία $\frac{\alpha}{2}$, θά βροῦμε τούς ἀκόλουθους τύπους:

$\eta\mu\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}}$	$\epsilon\phi\alpha = \frac{2\epsilon\phi \frac{\alpha}{2}}{1 - \epsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}}$
$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1 - \epsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}}$	$\sigma\phi\alpha = \frac{1 - \epsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2}}{2\epsilon\phi \frac{\alpha}{2}}$

(30)

Στούς τύπους (30) παρατηροῦμε ὅτι οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας α ἐκφράζονται ὡς ρητές συναρτήσεις τῆς $\epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$.

Οἱ τύποι τῆς πρώτης στήλης ἔχουν ἔννοια, ἂν

$$\alpha \neq \pm\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ἐ πρῶτος τῆς δεύτερης στήλης ἔχει ἔννοια, ἂν

$$\alpha \neq (2k_1 + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Ἐ δεύτερος τῆς δεύτερης στήλης ἔχει ἔννοια, ἂν

$$\alpha \neq (k_3 + 1)\pi \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pi + 2k_4\pi, \quad k_4, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

● 18. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τό $\sin 2\alpha$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας α.

Λύση. 'Από τούς γνωστούς τύπους:

$$\sin 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha \text{ και } \sin 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1,$$

έχουμε αντίστοιχως:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2} \Leftrightarrow |\eta\mu\alpha| = \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}}$$

και $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2} \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu\alpha| = \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}}$

Δηλαδή, αντίστοιχως:

$$\eta\mu\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}}$$

Θά είναι ακόμα:

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \Leftrightarrow |\varepsilon\varphi\alpha| = \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}}, \text{ με } \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$$

και $\sigma\varphi^2\alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \Leftrightarrow |\sigma\varphi\alpha| = \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}}, \text{ με } \alpha \neq k_1\pi$

και $\alpha \neq 2k_2\pi$, όπου $k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

'Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

$\eta\mu\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}}$	$\varepsilon\varphi\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}}$
$\sigma\upsilon\nu\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}}$	$\sigma\varphi\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}}$

(31)

'Από τούς τύπους (31) φαίνεται ότι τό πρόβλημα έχει τής εξής λύσεις:

$$1. \begin{cases} \eta\mu\alpha = + \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha = + \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \eta\mu\alpha = - \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha = - \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \eta\mu\alpha = + \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha = - \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \eta\mu\alpha = - \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha = + \sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}} \end{cases}$$

(31α)

★ ● 19. Γεωμετρική έρμηνεία τών λύσεων αυτών. Τό διπλό πρόσημο τών παραπάνω τύπων εξηγείται ως εξής:

*Ας δεχθοῦμε ὅτι: $\sin 2\alpha = \mu = \overline{OP}$ (σχ. 3) καί $\widehat{AM} = \theta$ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο, τοῦ ὁποίου τό συνημίτονο εἶναι μ .

*Αν M_1 εἶναι τό συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τόν ἄξονα $A'OA$, τότε καί τό τόξο $\widehat{AM_1}$ ἔχει τό ἴδιο συνημίτονο $\mu = \overline{OP}$. Ἡ τιμή κάθε ἄλλου τόξου, τό ὁποῖο ἔχει ἀρχή τό A καί τέλος τό σημεῖο M ἢ M_1 , θά εἶναι:

$$2\alpha = \pm \theta + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Αρα: $\alpha = \pm \frac{\theta}{2} + k \cdot \pi \quad (1)$

*Αν $k = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\alpha = \pm \frac{\theta}{2} + 2\nu \cdot \pi$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα περατώνονται στά σημεῖα N καί N_1 , ὅπου N καί N_1 τά μέσα τών τόξων $\widehat{AM}$ καί $\widehat{AM_1}$.

*Αν $k = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{Z}$, τότε ἡ σχέση (1) γίνεται :

$$\alpha = \pm \frac{\theta}{2} + (2\nu + 1)\pi = \pm \frac{\theta}{2} + \pi + 2\nu\pi \quad (2)$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα περατώνονται στά σημεῖα N_3 καί N_2 , ἀντιδιαμετρικά τών N καί N_1 ἀντιστοίχως. Τά ἡμίτονα τών τόξων $\widehat{AN}$, $\widehat{AN_2}$, $\widehat{AN_3}$, $\widehat{AN_1}$ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τά συνημίτονά τους.

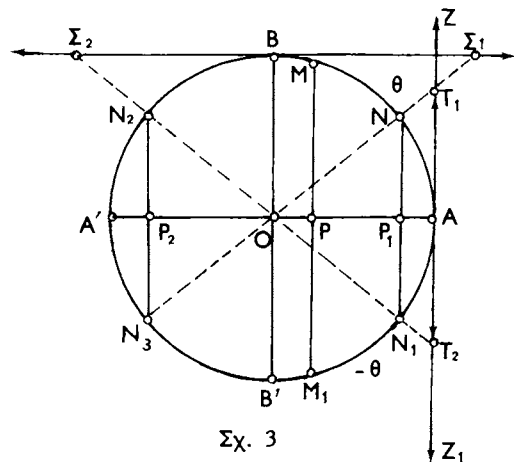
Τά τόξα $\widehat{AN}$, $\widehat{AN_2}$ καθώς καί τά $\widehat{AN_3}$, $\widehat{AN_1}$ ἔχουν ἴσα ἡμίτονα καί ἀντίθετα συνημίτονα.

Τά τόξα $\widehat{AN}$ καί $\widehat{AN_3}$ ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη $\overline{AT_1}$ καί τήν ἴδια συνεφαπτομένη $\overline{B\Sigma_1}$, ἐνῶ τά τόξα $\widehat{AN_2}$ καί $\widehat{AN_1}$ ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη $\overline{AT_2}$ (ἀρνητική) καί τήν ἴδια συνεφαπτομένη $\overline{B\Sigma_2}$ (ἀρνητική).

Τά διανύσματα $\overrightarrow{AT_1}$ καί $\overrightarrow{AT_2}$ εἶναι ἀντίρροπα, καθώς καί τά $\overrightarrow{B\Sigma_1}$ καί $\overrightarrow{B\Sigma_2}$ μέ ἀλγεβρικές τιμές ἀντίθετες ἀντιστοίχως.

● 20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τό συνα νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας α .

Λύση. *Αν στούς τύπους (31) βάλουμε ἀντί γιά τή γωνία α τή γωνία $\frac{\alpha}{2}$, ἔχουμε τούς τύπους:



Σχ. 3

$\eta\mu \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$	$\epsilon\phi \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}}$
$\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$	$\sigma\phi \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}}$

(32)

Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς φαίνεται πάλι ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει τέσσερις λύσεις, τὶς ἑξῆς:

$$\begin{array}{ll}
 1. \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu \frac{\alpha}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{array} \right. & 3. \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu \frac{\alpha}{2} = - \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} = - \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{array} \right. \\
 2. \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu \frac{\alpha}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} = - \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{array} \right. & 4. \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu \frac{\alpha}{2} = - \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Ἡ γεωμετρικὴ ἐρμηνεία τῶν διπλῶν σημείων τῶν τύπων αὐτῶν γίνεται μετὰ τὸν τρόπον ποὺ ἔγινε καὶ στὴ προηγούμενη παράγραφῳ καὶ μετὰ τὸ ἴδιον σχῆμα.

Παράδειγμα I. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $22^\circ,5$.

Λύση. Ἐπειδὴ $0^\circ < 22^\circ,5 < 90^\circ$, συμπεραίνουμε ὅτι ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $22^\circ,5$ εἶναι θετικοί. Ἀρα:

$$\eta\mu 22^\circ,5 = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (\sqrt{2}:2)}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$\sigma\upsilon\nu 22^\circ,5 = \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (\sqrt{2}:2)}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$\epsilon\phi 22^\circ,5 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4 - 2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = \sqrt{2} - 1, \quad \text{καὶ}$$

$$\sigma\phi 22^\circ,5 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

★ Παράδειγμα II. Νά υπολογισθεῖ ἡ εφ $7^\circ 30'$.

Λύση. Ἐπειδὴ εἶναι:

$$\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}, (\alpha \neq k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{θὰ ἔχουμε:} \quad \varepsilon\varphi 7^\circ 30' = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\eta\mu 15^\circ} \quad (1)$$

$$\text{'Αλλά } \sigma\upsilon\nu 15^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ καὶ } \eta\mu 15^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

καὶ ἡ σχέση (1) γίνεταί:

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi 7^\circ 30' &= \frac{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \\ &= \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 8}{4} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Ὡστε:} \quad \varepsilon\varphi 7^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$

Νά βρεῖτε μόνοι σας τώρα τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας $7^\circ 30'$.

★ Παράδειγμα III. Νά υπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 165° .

Λύση. Ἐπειδὴ $270^\circ < 330^\circ < 360^\circ$, συμπεραίνουμε ὅτι $135^\circ < 165^\circ < 180^\circ$ καὶ ἄρα τό τόξο 165° ἔχει τό τέλος του στό δεῦτερο τεταρτημόριο. Θὰ ἔχει ἀκόμη θετικό ἡμίτονο καὶ ἀρνητικό συνημίτονο.

Ἔτσι θὰ ἔχουμε:

$$\eta\mu 165^\circ = + \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 330^\circ}{2}} = + \sqrt{\frac{1 - (\sqrt{3}:2)}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$\sigma\upsilon\nu 165^\circ = - \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 330^\circ}{2}} = - \sqrt{\frac{1 + (\sqrt{3}:2)}{2}} = - \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}},$$

$$\varepsilon\varphi 165^\circ = \frac{\eta\mu 165^\circ}{\sigma\upsilon\nu 165^\circ} = \sqrt{3} - 2 \text{ καὶ } \sigma\varphi 165^\circ = -(2 + \sqrt{3}).$$

Σημείωση. Έπειδή $165^\circ + 15^\circ = 180^\circ$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu 165^\circ = \eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 165^\circ = -\sigma\upsilon\nu 15^\circ = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\epsilon\phi 165^\circ = -\epsilon\phi 15^\circ = -(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2$$

$$\kappa\alpha\iota \sigma\phi 165^\circ = -\sigma\phi 15^\circ = -(2 + \sqrt{3})$$

★ **Παράδειγμα IV.** Νά αποδειχθεί ή αλήθεια της ισότητας:

$$A \equiv \eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Απόδειξη. Έπειδή $\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \pi$ και $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$,

προκύπτει ότι:

$$\eta\mu \frac{7\pi}{8} = \eta\mu \frac{\pi}{8} \quad \kappa\alpha\iota \quad \eta\mu \frac{5\pi}{8} = \eta\mu \frac{3\pi}{8}$$

επομένως ή (1) μᾶς δίνει διαδοχικά:

$$\begin{aligned} A &\equiv 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} + 2\eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} = 2 \left\{ \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}{2} \right\}^2 + 2 \left\{ \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4}}{2} \right\}^2 = \\ &= 2 \cdot \left\{ \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right\}^2 + 2 \left\{ \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right\}^2 = 2 \cdot \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{16} + 2 \cdot \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{16} = \\ &= \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{8} + \frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

★ **Παράδειγμα V.** Νά αποδειχθεί ότι ή παράσταση:

$$B \equiv \sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha + 120^\circ) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha - 120^\circ). \quad (1)$$

είναι ανεξάρτητη από τό τόξο α .

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} B &\equiv \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu(2\alpha + 240^\circ)}{2} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu(2\alpha - 240^\circ)}{2} = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu(2\alpha + 240^\circ) + \sigma\upsilon\nu(2\alpha - 240^\circ) \right] = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha \sigma\upsilon\nu 240^\circ \right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha (-\sigma\upsilon\nu 60^\circ) \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 2 \cdot \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2\alpha \right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

● 21. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας $\frac{\alpha}{2}$ νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας α .

Λύση. Ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς τύπους:

$$\begin{aligned}\eta\mu 2\alpha &\equiv 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha, \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &\equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv 1 - 2\eta\mu^2\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1, \\ \varepsilon\varphi 2\alpha &= \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\varphi 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{2\varepsilon\varphi\alpha},\end{aligned}$$

ἂν ὅπου α βάλουμε τό $\frac{\alpha}{2}$, θά ἔχουμε τοὺς τύπους:

$\eta\mu\alpha \equiv 2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}}$
$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu\alpha &\equiv \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \\ &\equiv 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \\ &\equiv 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} - 1\end{aligned}$	$\sigma\varphi\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}}{2\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}$

(33)

Πότε τὰ μέλη τῶν τύπων τῆς δευτέρας στήλης δέν ἔχουν ἔννοια;

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:

$$A \equiv \frac{1 + \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi \frac{\theta}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικὰ:

$$\begin{aligned}A &\equiv \frac{1 + 2\eta\mu \frac{\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} - \left(1 - 2\eta\mu^2 \frac{\theta}{2}\right)}{1 + 2\eta\mu \frac{\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} + \left(2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2} - 1\right)} = \frac{2\eta\mu \frac{\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} + 2\eta\mu^2 \frac{\theta}{2}}{2\eta\mu \frac{\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2}} = \\ &= \frac{\eta\mu \frac{\theta}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} + \eta\mu \frac{\theta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} \left(\eta\mu \frac{\theta}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\eta\mu \frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}} = \varepsilon\varphi \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

ἂν ἰσχύουν: $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ καὶ $\theta \neq 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}$, γιὰτί; $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

2. Νά αποδειχθεί ή αλήθεια τής ισότητας:

$$\epsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta}, \quad (1)$$

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \epsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) &= \frac{\left(\epsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \epsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1 - \epsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \epsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\left(1 + \epsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1 - \epsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{\eta\mu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}\right)^2}{\left(1 - \frac{\eta\mu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}\right)^2} = \\ &= \frac{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} + \eta\mu\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} - \eta\mu\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} + \eta\mu^2\frac{\theta}{2} + 2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} + \eta\mu^2\frac{\theta}{2} - 2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}} = \frac{1 + \eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ομάδα

22. Νά αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

$$1. \frac{\sigma\varphi\frac{\theta}{2} + 1}{\sigma\varphi\frac{\theta}{2} - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \eta\mu\theta}$$

$$2. \tau\epsilon\mu\alpha - \epsilon\varphi\alpha = \epsilon\varphi\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$3. \epsilon\varphi\alpha + \tau\epsilon\mu\alpha = \sigma\varphi\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$4. \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha + \eta\mu\frac{\alpha}{2}} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2}.$$

$$5. \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2}, \quad 6. \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi\frac{\alpha}{2}.$$

$$7. \sigma\varphi\frac{\alpha}{2} - \epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = 2\sigma\varphi\alpha,$$

$$8. \epsilon\varphi\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \eta\mu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha}},$$

23. Νά αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες:

$$1. (\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 \equiv 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$2. (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 \equiv 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$3. (\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 \equiv 4\eta\mu^2\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$4. \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \equiv \sqrt{2}\eta\mu\alpha.$$

★ Δεύτερη ομάδα

24. Νά αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

$$1. \quad \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4}, \quad 2. \quad \eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$3. \quad \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

$$4. \quad \left(1 + \sin \frac{\pi}{8}\right) \left(1 + \sin \frac{3\pi}{8}\right) \left(1 + \sin \frac{5\pi}{8}\right) \left(1 + \sin \frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$

$$5. \quad \text{Αν } \sin x = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \quad \sin y = \frac{\beta}{\gamma + \alpha}, \quad \sin \omega = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}, \quad \text{τότε:}$$

$$\epsilon\varphi^2 \frac{x}{2} + \epsilon\varphi^2 \frac{y}{2} + \epsilon\varphi^2 \frac{\omega}{2} = 1.$$

25. Νά αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

$$1. \quad \epsilon\varphi\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{3}\right) + \epsilon\varphi\left(\beta - \gamma + \frac{\pi}{3}\right) + \epsilon\varphi\left(\gamma - \alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \\ = \epsilon\varphi\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{3}\right) \epsilon\varphi\left(\beta - \gamma + \frac{\pi}{3}\right) \epsilon\varphi\left(\gamma - \alpha + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$2. \quad \Sigma\sigma\varphi(\gamma + \alpha - \beta) \sigma\varphi(\alpha + \beta - \gamma) = 1, \quad \text{αν } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

$$3. \quad \Sigma\sigma\varphi(2\alpha + \beta - 3\gamma) \sigma\varphi(2\beta + \gamma - 3\alpha) = 1.$$

$$4. \quad \Sigma x(1 - y^2)(1 - \omega^2) = 4xy\omega, \quad \text{αν } xy + y\omega + \omega x = 1.$$

$$5. \quad \eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) < \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma, \quad \text{αν } 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$6. \quad \text{Νά αποδειχθεί ότι:}$$

$$1 + \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta > \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta.$$

★ ● 22. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 'Από την εφ α νά υπολογισθεῖ ἡ εφ $\frac{a}{2}$

Λύση. 'Από τή γνωστή ισότητα:

$$\epsilon\varphi\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1 - \epsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ἔχουμε τήν: } \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2} + 2\epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} - \epsilon\varphi\alpha = 0 \quad (\alpha)$$

ἀπό τήν ὁποία βρίσκουμε:

$$\boxed{\epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}}{\epsilon\varphi\alpha}} \quad (34)$$

Διερεύνηση. 'Από τόν τύπο (34) φαίνεται ὅτι τό πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Σέ μιά τιμή τῆς εφ α, πού ἀντιστοιχεῖ στό διάνυσμα $\vec{AT}$, πού ἔχει μήκος $\overline{AT}$,

ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{A'M_1}$, συμμετρικά ὡς πρὸς τὸ κέντρο O τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 4), τῶν ὁποίων οἱ τιμές εἶναι:

$$\alpha = \theta + k\pi \quad (1) \quad k \in \mathbb{Z}$$

ὅπου $\widehat{AM} = \theta$ τὸ ἐλάχιστο θετικό τόξο. Ἀρα

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

A) Ἐάν $k = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, ἡ (2) γράφεται:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + \nu\pi \quad (3)$$

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν τὸ τέλος τους στὰ σημεία N καὶ N_1 καὶ ἔχουν τὴν ἴδια ἐφαπτομένη, πού παριστάνεται ἀπὸ τὸ τμήμα AT_1 .

B) Ἐάν $k = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{Z}$, ἡ (2) γράφεται:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} + \nu\pi \quad (4)$$

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν τὸ τέλος τους στὰ σημεία M_2 καὶ M_3 καὶ ἔχουν ἐφαπτομένη τὸ μήκος $\overline{AT_2}$.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνο T_1OT_2 εἶναι ὀρθογώνιο στό O , θά ἔχουμε:

$$\overline{AT_1} \cdot \overline{AT_2} = -OA^2 = -OB^2 \quad \eta \quad \frac{\overline{AT_1}}{OB} \cdot \frac{\overline{AT_2}}{OB} = -1 \quad (5)$$

Τὸ γινόμενο τῶν ριζῶν x' , x'' τῆς ἐξίσωσως (α) εἶναι:

$$x'x'' = - \frac{\epsilon\varphi\alpha}{\epsilon\varphi\alpha} = -1$$

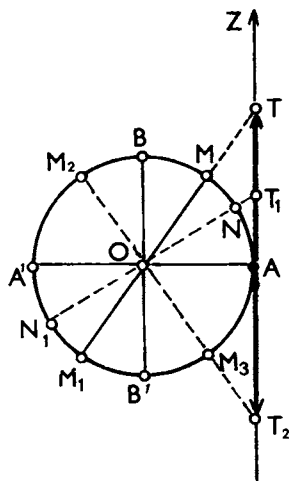
καὶ ἀπὸ ἐδῶ φαίνεται ὅτι ἀληθεύει ἡ (5).

Ἐάν, ἀντὶ γιὰ τὴν $\epsilon\varphi\alpha$, δοθεῖ τὸ τόξο α , τότε ἡ παράσταση $\sqrt{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ μονάδα, ὅταν $\epsilon\varphi\alpha \neq 0$. Ἀρα:

$$1. \text{ Ἐάν } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ τότε: } \begin{cases} \epsilon\varphi\alpha > 0 \\ \epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}}{\epsilon\varphi\alpha}$$

$$2. \text{ Ἐάν } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \text{ τότε: } \begin{cases} \epsilon\varphi\alpha < 0 \\ \epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}}{\epsilon\varphi\alpha}$$

$$3. \text{ Ἐάν } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \text{ τότε: } \begin{cases} \epsilon\varphi\alpha > 0 \\ \epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \epsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}}{\epsilon\varphi\alpha}$$



Σχ. 4

$$4. \text{ "Αν } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \text{ τότε: } \begin{cases} \varepsilon\varphi\alpha < 0 \\ \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}$$

★ **Παράδειγμα.** Από την $\varepsilon\varphi 4800^\circ = -\sqrt{3}$, νά υπολογισθεί ή $\varepsilon\varphi 2400^\circ$.

Λύση. Για νά βρούμε τό τέλος του τόξου 2400° , γράφουμε:

$$2400^\circ = 360^\circ \cdot 6 + 240^\circ.$$

"Αρα τό τόξο 2400° έχει τό τέλος του στό τρίτο τεταρτημόριο.

Ή έφαπτομένη του είναι θετική. Δηλαδή:

$$\varepsilon\varphi 2400^\circ = \frac{-1 - \sqrt{1 + 3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-1 - 2}{-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Μπορούμε, όμως, νά εργαστούμε καί ως εξής:

$$\varepsilon\varphi 2400^\circ = \varepsilon\varphi (360^\circ \cdot 6 + 240^\circ) = \varepsilon\varphi 240^\circ = \varepsilon\varphi (180^\circ + 60^\circ) = \varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$$

καί έπομένως:

$$\sigma\upsilon\nu 2400^\circ = \frac{1}{-\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 2400^\circ}} = \frac{1}{-\sqrt{1 + 3}} = -\frac{1}{2},$$

$$\eta\mu 2400^\circ = \frac{\varepsilon\varphi 2400^\circ}{-\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 2400^\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{1 + 3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

● 23. Μετασχηματισμός άθροίσματος ή διαφορᾶς δύο δμώνυμων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων σέ γινόμενο ή πηλίκο.

α) Ἀπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \beta) &\equiv \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha, & \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) &\equiv \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta, \\ \eta\mu(\alpha - \beta) &\equiv \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha, & \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) &\equiv \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \eta\mu\beta, \end{aligned}$$

προσθέτοντας καί ἀφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) \equiv 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta, \quad (1)$$

$$\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta) \equiv 2\eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha, \quad (2)$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \equiv 2\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta, \quad (3)$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \equiv 2\eta\mu\alpha \eta\mu\beta = 2\eta\mu\alpha \eta\mu(-\beta) \quad (4)$$

καί ἄν βάλουμε:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= A \\ \alpha - \beta &= B \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 2\alpha &= A + B \\ 2\beta &= A - B \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{A + B}{2} \\ \beta &= \frac{A - B}{2} \end{aligned} \quad \text{καί} \quad -\beta = \frac{B - A}{2}$$

οἱ (1), (2), (3), (4) γίνονται:

$\eta\mu A + \eta\mu B = 2 \eta\mu \frac{A + B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2}$	(35)
---	------

$\eta\mu A - \eta\mu B \equiv 2 \eta\mu \frac{A - B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{2}$	(36)
--	------

$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B \equiv 2 \sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2}$	(37)
--	------

$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B \equiv 2\eta\mu \frac{A + B}{2} \eta\mu \frac{B - A}{2}$	(38)
---	------

β) Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} + \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B \sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu(A + B)}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B},$$

ἀφοῦ θά εἶναι $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ καί $B \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi$ μέ $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

$$\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} - \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu B \sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu(A - B)}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B \sigma\upsilon\nu A + \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A \eta\mu B} = \frac{\eta\mu(A + B)}{\eta\mu A \eta\mu B}$$

άφοϋ θά είναι $A \neq (k_2 + 1)\pi$ καί $B \neq (k_3 + 1)\pi$, μέ $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$,

$$\text{καί } \sigma\varphi A - \sigma\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} - \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B \sigma\upsilon\nu A - \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A \eta\mu B} = \frac{\eta\mu(B - A)}{\eta\mu A \eta\mu B}$$

Άνακεφαλαιώνοντας έχουμε:

$$(39) \quad \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A + B)}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\eta\mu(A + B)}{\eta\mu A \eta\mu B} \quad (41)$$

$$(40) \quad \varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A - B)}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\varphi A - \sigma\varphi B = \frac{\eta\mu(B - A)}{\eta\mu A \eta\mu B} \quad (42)$$

● 24. Ειδικές περιπτώσεις. Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha) \quad \eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu A + \eta\mu(90^\circ - A) \equiv 2\eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu(A - 45^\circ) \quad (1)$$

$$\text{καί έπειδιή } 2\eta\mu 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ καί:}$$

$$\sigma\upsilon\nu(A - 45^\circ) \equiv \sigma\upsilon\nu(45^\circ - A) \equiv \eta\mu(45^\circ + A), \text{ ή (1) γίνεται:}$$

$$\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \equiv \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ - A) \equiv \sqrt{2} \eta\mu(45^\circ + A) \quad (43)$$

$$\beta) \quad \eta\mu A - \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu A - \eta\mu(90^\circ - A) \equiv 2\eta\mu(A - 45^\circ)\sigma\upsilon\nu 45^\circ \equiv \\ \equiv \sqrt{2} \eta\mu(A - 45^\circ) \equiv -\sqrt{2} \eta\mu(45^\circ - A) \equiv -\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ + A).$$

Ωστε θά είναι:

$$\eta\mu A - \sigma\upsilon\nu A \equiv -\sqrt{2} \eta\mu(45^\circ - A) \equiv -\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ + A) \quad (44)$$

$$\gamma) \quad 1 + \eta\mu A \equiv \eta\mu 90^\circ + \eta\mu A \equiv 2\eta\mu\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

καί έπειδιή είναι:

$$\eta\mu\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \equiv \sigma\upsilon\nu\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right), \text{ θά έχουμε:}$$

$$1 + \eta\mu A \equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) \quad (45)$$

δ) 'Επίσης θά είναι καί:

$$\begin{aligned} 1 - \eta\mu A &\equiv \eta\mu 90^\circ - \eta\mu A \equiv 2\eta\mu \left(45^\circ - \frac{A}{2} \right) \sigma\upsilon\nu \left(45^\circ + \frac{A}{2} \right) \equiv \\ &\equiv 2\eta\mu^2 \left(45^\circ - \frac{A}{2} \right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2 \left(45^\circ + \frac{A}{2} \right) \end{aligned}$$

δηλαδή:

$$\boxed{1 - \eta\mu A \equiv 2\eta\mu^2 \left(45^\circ - \frac{A}{2} \right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2 \left(45^\circ + \frac{A}{2} \right)} \quad (46)$$

ε) 'Επίσης είναι:

$$\begin{aligned} 1 + \sigma\upsilon\nu A &\equiv \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\sigma\upsilon\nu \frac{0^\circ + A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{0^\circ - A}{2} \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2}, \\ 1 - \sigma\upsilon\nu A &\equiv \sigma\upsilon\nu 0^\circ - \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\eta\mu \frac{0^\circ + A}{2} \eta\mu \frac{A - 0^\circ}{2} \equiv 2\eta\mu^2 \frac{A}{2} \end{aligned}$$

*Αρα:

$$\boxed{1 + \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2}} \quad \boxed{1 - \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\eta\mu^2 \frac{A}{2}} \quad (47)$$

στ) *Αν $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, μέ $k \in \mathbb{Z}$, θά έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 + \epsilon\phi A &= \epsilon\phi 45^\circ + \epsilon\phi A = \frac{\eta\mu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu A} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \eta\mu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{καί} \quad 1 - \epsilon\phi A &= \epsilon\phi 45^\circ - \epsilon\phi A = \frac{\eta\mu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu A} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \eta\mu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu A} \end{aligned}$$

*Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

$$\boxed{1 + \epsilon\phi A = \frac{\sqrt{2} \eta\mu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu A}} \quad (48)$$

$$\boxed{1 - \epsilon\phi A = \frac{\sqrt{2} \eta\mu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu A}} \quad (49)$$

ζ) *Αν $A \neq (k + 1)\pi$, μέ $k \in \mathbb{Z}$ καί μέ ὅμοια ἔργασία βρίσκουμε:

$$\boxed{1 + \sigma\phi A = \frac{\sqrt{2} \eta\mu(45^\circ + A)}{\eta\mu A} = \frac{\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ - A)}{\eta\mu A}} \quad (50)$$

$$\boxed{1 - \sigma\phi A = -\frac{\sqrt{2} \eta\mu(45^\circ - A)}{\eta\mu A} = -\frac{\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)}{\eta\mu A}} \quad (51)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

α) Νά άπλοποιηθεϊ ή παράσταση:

$$A \equiv \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu3\alpha)(\eta\mu8\alpha + \eta\mu2\alpha)}{(\eta\mu5\alpha - \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu4\alpha - \sigma\upsilon\nu6\alpha)}.$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{2\eta\mu \frac{\alpha + 3\alpha}{2} \cdot \eta\mu \frac{3\alpha - \alpha}{2} \cdot 2\eta\mu \frac{8\alpha + 2\alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{8\alpha - 2\alpha}{2}}{2\eta\mu \frac{5\alpha - \alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{5\alpha + \alpha}{2} \cdot 2\eta\mu \frac{4\alpha + 6\alpha}{2} \cdot \eta\mu \frac{6\alpha - 4\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2\eta\mu 2\alpha \cdot \eta\mu\alpha \cdot 2\eta\mu5\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 3\alpha}{2\eta\mu2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu3\alpha \cdot 2\eta\mu5\alpha \cdot \eta\mu\alpha} = 1, \text{ άν ισχύουν:} \end{aligned}$$

$$\alpha \neq k\pi, \alpha \neq k_1 \cdot \frac{\pi}{5}, \alpha \neq k_2 \cdot \frac{\pi}{2}, \alpha \neq (2k_3 + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

β) Νά άπλοποιηθεϊ τό κλάσμα:

$$B \equiv \frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu5\alpha + \eta\mu9\alpha - \eta\mu13\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu5\alpha - \sigma\upsilon\nu9\alpha + \sigma\upsilon\nu13\alpha}.$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} B &\equiv \frac{(\eta\mu 9\alpha + \eta\mu\alpha) - (\eta\mu13\alpha + \eta\mu5\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu5\alpha) - (\sigma\upsilon\nu9\alpha - \sigma\upsilon\nu13\alpha)} = \frac{2\eta\mu5\alpha \sigma\upsilon\nu4\alpha - 2\eta\mu9\alpha \sigma\upsilon\nu4\alpha}{2\eta\mu 3\alpha \eta\mu2\alpha - 2\eta\mu 11\alpha \eta\mu2\alpha} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu4\alpha(\eta\mu5\alpha - \eta\mu9\alpha)}{\eta\mu2\alpha(\eta\mu3\alpha - \eta\mu11\alpha)} = \frac{\sigma\upsilon\nu4\alpha \cdot 2\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu7\alpha}{\eta\mu2\alpha \cdot 2\eta\mu4\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu7\alpha} = \sigma\phi4\alpha, \end{aligned}$$

άν υπάρχουν οι σχέσεις:

$$\eta\mu2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 2\alpha \neq k\pi \Leftrightarrow \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ μέ } k \in \mathbb{Z},$$

$$\eta\mu4\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 4\alpha \neq k_1\pi \Leftrightarrow \alpha \neq k_1 \cdot \frac{\pi}{4}, \text{ μέ } k_1 \in \mathbb{Z},$$

$$\sigma\upsilon\nu7\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 7\alpha \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq k_2 \cdot \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \text{ μέ } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

γ) Νά γίνει γινόμενο ή παράσταση:

$$A \equiv \eta\mu x + \eta\mu y + \eta\mu\omega - \eta\mu(x + y + \omega).$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv 2\eta\mu \frac{x + y}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x - y}{2} + 2\eta\mu \frac{\omega - x - y - \omega}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\omega + x + y + \omega}{2} =$$

$$\begin{aligned}
&\equiv 2\eta\mu \frac{x+y}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x-y}{2} - 2\eta\mu \frac{x+y}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\omega+x+y}{2} \\
&\equiv 2\eta\mu \frac{x+y}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{x-y}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{2\omega+x+y}{2} \right] \\
&\equiv 2\eta\mu \frac{x+y}{2} \cdot 2\eta\mu \frac{x-y+2\omega+x+y}{4} \cdot \eta\mu \frac{2\omega+x+y-x+y}{4} \\
&\equiv 4\eta\mu \frac{x+y}{2} \cdot \eta\mu \frac{x+\omega}{2} \cdot \eta\mu \frac{\omega+y}{2}. \quad \text{Άρα:}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\eta\mu x + \eta\mu y + \eta\mu \omega - \eta\mu(x+y+\omega) \equiv 4\eta\mu \frac{x+y}{2} \eta\mu \frac{y+\omega}{2} \eta\mu \frac{\omega+x}{2}} \quad (52)$$

Σημείωση. Αν οι γωνίες x, y, ω είναι, αντίστοιχως, οι γωνίες A, B, Γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$, τότε θα έχουμε από τον τύπο (52):

$$\begin{aligned}
\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma - \eta\mu(A+B+\Gamma) &\equiv \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma - \eta\mu 180^\circ \equiv \\
&\equiv \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma \equiv 4\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{B+\Gamma}{2} \eta\mu \frac{\Gamma+A}{2} \equiv \\
&\equiv 4\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2},
\end{aligned}$$

γιατί $\frac{A+B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^\circ$, άρα $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}, \dots$ Άρα:

Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\boxed{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma \equiv 4\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}} \quad (52a)$$

δ) Νά γίνει γινόμενο ή παράσταση:

$$B \equiv \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu \omega + \sigma\upsilon\nu(x+y+\omega).$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
B &\equiv 2\sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x-y}{2} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\omega+x+y+\omega}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\omega-x-y-\omega}{2} \\
&\equiv 2\sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x-y}{2} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x+y+2\omega}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv 2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{x+y+2\omega}{2}\right] \\
&\equiv 2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} \cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{x-y+x+y+2\omega}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y-x-y-2\omega}{4} \\
&\equiv 4\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{y+\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega+x}{2}.
\end{aligned}$$

*Αρα :

$$\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu \omega + \sigma\upsilon\nu(x+y+\omega) \equiv 4\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{y+\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega+x}{2} \quad (53)$$

Σημείωση. *Αν οι γωνίες x, y, ω είναι, αντίστοιχως, οι γωνίες A, B, Γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$, τότε:

$$\sigma\upsilon\nu(x+y+\omega) = \sigma\upsilon\nu(A+B+\Gamma) = \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$$

καί $\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} = \eta\mu\frac{\Gamma}{2}, \dots$ καί ο τύπος (53) γίνεται για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$:

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad (53a)$$

★ ε) *Νά γίνει γινόμενο παραγόντων ή παράσταση:*

$$\Gamma \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2.$$

Λύση. *Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta &\equiv \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\beta}{2} \equiv 1 + \frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\beta \right] \equiv \\
&\equiv 1 + \frac{1}{2} \cdot 2\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \equiv 1 + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta).
\end{aligned}$$

*Επίσης είναι:

$$\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu^2\gamma + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha + \beta + \gamma) &\equiv \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\gamma}{2} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2(\alpha + \beta + \gamma)}{2} \equiv \\
&\equiv 1 + \frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu 2\gamma + \sigma\upsilon\nu 2(\alpha + \beta + \gamma) \right] \equiv 1 + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + 2\gamma).
\end{aligned}$$

*Αρα θά είναι:

$$\begin{aligned}
\Gamma &\equiv \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + 2\gamma) \equiv \\
&\equiv \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) [\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + 2\gamma)] \equiv \\
&\equiv \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot 2\sigma\upsilon\nu(\alpha + \gamma) \sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma) \equiv \\
&\equiv 2\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma) \sigma\upsilon\nu(\gamma + \alpha).
\end{aligned}$$

Ώστε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2 \equiv 2\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma)\sigma\upsilon\nu(\gamma + \alpha) \quad (54)$$

Σημείωση. Αν οι γωνίες α, β, γ , αντίστοιχως, είναι οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε ο τύπος (54) γίνεται:

$$\sigma\upsilon\nu^2\text{Α} + \sigma\upsilon\nu^2\text{Β} + \sigma\upsilon\nu^2\text{Γ} = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\text{Α} \sigma\upsilon\nu\text{Β} \sigma\upsilon\nu\text{Γ} \quad (54\alpha)$$

Ο τύπος (54α) γράφεται συντομότερα και ως εξής:

$$\Sigma\sigma\upsilon\nu^2\text{Α} = 1 - 2\Pi\sigma\upsilon\nu\text{Α}$$

μὲ

$$\text{Α} + \text{Β} + \text{Γ} = 180^\circ$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Πρώτη ομάδα

26. Νά γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

- | | |
|---|---|
| 1. $\eta\mu 4\alpha + \eta\mu\alpha,$ | 2. $\eta\mu 7\alpha - \eta\mu 5\alpha,$ |
| 3. $\sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha,$ | 4. $\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha.$ |

27. Νά αποδειχθεί ή αλήθεια τῶν ισοτήτων:

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu 5\alpha - \eta\mu 3\alpha} = \epsilon\varphi 4\alpha,$ | 3. $\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2},$ |
| 2. $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha - \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\varphi 3\alpha,$ | 4. $\frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha - \eta\mu 4\alpha} = \epsilon\varphi \frac{5\alpha}{2}.$ |

28. Νά γίνουν γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

- | | |
|---|---|
| 1. $\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha,$ | 4. $\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu 7\alpha \therefore \sigma\upsilon\nu 15\alpha,$ |
| 2. $\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 7\alpha + \eta\mu 10\alpha,$ | 5. $\eta\mu 7\alpha - \eta\mu 5\alpha - \eta\mu 3\alpha + \eta\mu\alpha,$ |
| 3. $\sigma\upsilon\nu 7\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha,$ | 6. $\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha.$ |

29. Νά αποδειχθεί ή αλήθεια τῶν ισοτήτων:

- | |
|---|
| 1. $\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 5\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi 2\alpha,$ |
| 2. $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu 7\alpha} = \epsilon\varphi 4\alpha.$ |
| 3. $\frac{\sigma\upsilon\nu 7\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu 7\alpha - \eta\mu 3\alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu\alpha} = \sigma\varphi 2\alpha.$ |
| 4. $\frac{\eta\mu\text{Α} - \eta\mu\text{Β}}{\sigma\upsilon\nu\text{Α} + \sigma\upsilon\nu\text{Β}} = \epsilon\varphi \frac{\text{Α} - \text{Β}}{2}.$ |

Πότε δέν έχουν έννοια τά μέλη τῶν παραπάνω ισοτήτων;

✱ Δεύτερη ομάδα

30. Νά γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

- | |
|---|
| 1. $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma + \eta\mu(\alpha - \beta - \gamma)) + \eta\mu(\alpha + \beta - \gamma) + \eta\mu(\alpha - \beta + \gamma),$ |
| 2. $\sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma - \alpha) - \sigma\upsilon\nu(\gamma + \alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta - \gamma) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma).$ |
| 3. $\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 2\beta + \eta\mu 2\gamma - \eta\mu 2(\alpha + \beta + \gamma),$ |
| 4. $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta - \eta\mu(\alpha + \beta) = 4\eta\mu \frac{\alpha}{2} \eta\mu \frac{\beta}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \beta}{2},$ |
| 5. $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^22\theta + \sigma\upsilon\nu^23\theta + \sigma\upsilon\nu^24\theta - 2.$ |

● 25. Μετασχηματισμός γινομένων σε άθροίσματα ή διαφορές.

Άπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu(A + B),$$

καί

$$\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu B \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu(A - B),$$

μέ πρόσθεση καί άφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε, άντιστοιχώς:

$$2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \equiv \eta\mu(A + B) + \eta\mu(A - B) \quad (54)$$

καί

$$2\eta\mu B \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu(A + B) - \eta\mu(A - B) \quad (55)$$

Έπίσης άπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A \eta\mu B \equiv \sigma\upsilon\nu(A + B),$$

καί

$$\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A \eta\mu B \equiv \sigma\upsilon\nu(A - B),$$

μέ πρόσθεση καί άφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε, άντιστοιχώς:

$$2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \equiv \sigma\upsilon\nu(A + B) + \sigma\upsilon\nu(A - B) \quad (56)$$

καί

$$2\eta\mu A \eta\mu B \equiv \sigma\upsilon\nu(A - B) - \sigma\upsilon\nu(A + B) \quad (57)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

α) Νά άπλοποιηθεϊ τό κλάσμα:

$$A \equiv \frac{\eta\mu 8\alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu 6\alpha \sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu 3\alpha \eta\mu 4\alpha}$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{2\eta\mu 8\alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - 2\eta\mu 6\alpha \sigma\upsilon\nu 3\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 2\alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - 2\eta\mu 3\alpha \eta\mu 4\alpha} = \frac{(\eta\mu 9\alpha + \eta\mu 7\alpha) - (\eta\mu 9\alpha + \eta\mu 3\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu \alpha) - (\sigma\upsilon\nu \alpha - \sigma\upsilon\nu 7\alpha)} = \\ &= \frac{\eta\mu 7\alpha - \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 7\alpha} = \frac{2\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu 5\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 5\alpha \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\phi 2\alpha, \end{aligned}$$

$$\acute{\alpha}\nu \alpha \neq (2k + 1) \frac{\pi}{10} \text{ καί } \alpha \neq (2k_1 + 1) \frac{\pi}{4}, \quad k, k_1 \in \mathbb{Z}. \text{ Γιατί;}$$

β) Νά άποδειχθεϊ ότι:

$$A \equiv \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τὸ γνωστό τύπο:

$$\eta\mu 2x = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x, \text{ ἔχουμε: } \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu x}$$

καὶ ἐπομένως:

$$A \equiv \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{4\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{2\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{6\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{3\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{8\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{4\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{10\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{5\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{12\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{6\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{14\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{7\pi}{15}} = \frac{1}{2^7},$$

$$\text{γιατί εἶναι: } \eta\mu \frac{\pi}{15} = \eta\mu \frac{14\pi}{15}, \eta\mu \frac{3\pi}{15} = \eta\mu \frac{12\pi}{15}, \eta\mu \frac{5\pi}{15} = \eta\mu \frac{10\pi}{15}$$

★ γ) *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος :*

$$A \equiv \eta\mu 20^\circ \cdot \eta\mu 40^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ \cdot \eta\mu 80^\circ = \frac{3}{16}. \quad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἰσότης (1) γράφεται:

$$2 \cdot 2\eta\mu 20^\circ \eta\mu 40^\circ \cdot 2\sigma\upsilon\nu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ = \frac{3}{2}. \quad (2)$$

Ἄν ὀνομάσουμε Β τὸ πρῶτο μέλος τῆς (2), θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned} B &\equiv 2(\sigma\upsilon\nu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ)(\sigma\upsilon\nu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 40^\circ) = \\ &= 2(\sigma\upsilon\nu^2 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 40^\circ - \sigma\upsilon\nu 40^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ) = \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2 20^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + 2\sigma\upsilon\nu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 40^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 40^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \\ &= 1 + \sigma\upsilon\nu 40^\circ - (\sigma\upsilon\nu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ) + (\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ) - (\sigma\upsilon\nu 100^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ) = \\ &= 1 - (\sigma\upsilon\nu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 100^\circ) + \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \\ &= 1 - 2\sigma\upsilon\nu 90^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ + \frac{1}{2} = 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{καὶ ἄρα } A = \frac{3}{16}.$$

★ ● 26. *Νά μετασχηματισθεῖ σέ γινόμενο τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων ν τόξων, πού ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴ πρόοδος.*

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τὸ ἄθροισμα:

$$S = \eta\mu \alpha + \eta\mu(\alpha + \omega) + \eta\mu(\alpha + 2\omega) + \dots + \eta\mu[\alpha + (n-1)\omega] \quad (1)$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) μὲ $2\eta\mu \frac{\omega}{2}$, ἔχουμε:

$$2S\eta\mu \frac{\omega}{2} = 2\eta\mu \alpha \eta\mu \frac{\omega}{2} + 2\eta\mu(\alpha + \omega)\eta\mu \frac{\omega}{2} + \dots + 2\eta\mu[\alpha + (n-1)\omega]\eta\mu \frac{\omega}{2}$$

$$\text{Ἀλλά: } 2\eta\mu \alpha \eta\mu \frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$2\eta\mu(\alpha + \omega)\eta\mu \frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{3\omega}{2}\right),$$

$$2\eta\mu(\alpha + 2\omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{3\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$2\eta\mu\left[\alpha + (v-1)\omega\right]\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{2v-3}{2}\omega\right] - \sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{2v-1}{2}\omega\right]$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις Ισότητες αυτές έχουμε:

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{2v-1}{2}\omega\right] = 2\eta\mu\left[\alpha + \frac{v-1}{2}\omega\right]\eta\mu\frac{v\omega}{2},$$

άπ' όπου, τελικά, βρίσκουμε:

$$S = \frac{\eta\mu\left[\alpha + \frac{v-1}{2}\omega\right]\eta\mu\frac{v\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}} \quad (58)$$

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι τό άθροισμα:

$$S' = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \omega) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\omega) + \dots + \sigma\upsilon\nu[\alpha + (v-1)\omega]$$

είναι:

$$S' = \frac{\sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{v-1}{2}\omega\right]\eta\mu\frac{v\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}} \quad (59)$$

Τό αποτέλεσμα αυτό βγαίνει από τόν τύπο (58), άν αντικαταστήσουμε τό α μέ $\frac{\pi}{2} - \alpha$ καί τό ω μέ $-\omega$.

*Αν $\omega = \alpha$ οί τύποι (58) καί (59) γίνονται:

$$S_1 = \eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha + \dots + \eta\mu(v\alpha) = \frac{\eta\mu\frac{(v+1)}{2}\alpha \cdot \eta\mu\frac{v\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \quad (60)$$

καί

$$S_2 = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \dots + \sigma\upsilon\nu(v\alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{(v+1)}{2}\alpha \cdot \eta\mu\frac{v\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \quad (61)$$

*Αν άμωσ βάλουμε $\omega = 2\alpha$, έχουμε τούς τύπους:

$$S_3 = \eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha + \dots + \eta\mu(2v-1)\alpha = \frac{\eta\mu^2(v\alpha)}{\eta\mu\alpha} \quad (62)$$

$$\text{καί} \quad S_4 = \sigma\upsilon\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \dots + \sigma\upsilon\nu(2\nu-1)\alpha = \frac{\eta\mu 2(\nu\alpha)}{2\eta\mu\alpha} \quad (63)$$

★ **Παράδειγμα.** *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος:*

$$S = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{17} + \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{17} + \dots + \sigma\upsilon\nu \frac{15\pi}{17} = \frac{1}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Τά τόξα $\frac{\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \dots, \frac{15\pi}{17}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόσοδο μέ λόγο $\frac{2\pi}{17}$. Τό πλῆθος τῶν ὄρων τῆς προκύπτει ἀπό τόν τύπο:

$$\tau = \alpha + (\nu - 1)\omega \Rightarrow \nu = \frac{\tau - \alpha}{\omega} + 1 = 8.$$

Μέ τή βοήθεια τῶρα τοῦ τύπου (59), βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{17} + \frac{8-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{17} \right) \eta\mu \frac{8\pi}{17}}{\eta\mu \frac{\pi}{17}} = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{8\pi}{17} \cdot \eta\mu \frac{8\pi}{17}}{\eta\mu \frac{\pi}{17}} = \\ &= \frac{2\eta\mu \frac{8\pi}{17} \sigma\upsilon\nu \frac{8\pi}{17}}{2\eta\mu \frac{\pi}{17}} = \frac{\eta\mu \frac{16\pi}{17}}{2\eta\mu \frac{\pi}{17}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{γιατί} \quad \eta\mu \frac{16\pi}{17} = \eta\mu \frac{\pi}{17}, \quad \text{ἀφοῦ} \quad \frac{\pi}{17} + \frac{16\pi}{17} = \pi.$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο βρίσκουμε ὅτι:

$$S = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{23} + \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{23} + \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{23} + \dots + \sigma\upsilon\nu \frac{21\pi}{23} = \frac{1}{2}.$$

★ ● 27. *Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα :*

$$S_a = \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2(\alpha + \omega) + \eta\mu^2(\alpha + 2\omega) + \dots + \eta\mu^2[\alpha + (\nu - 1)\omega]$$

Λύση. Ἄν στή γνωστή μας ταυτότητα

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1}{2} (1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha)$$

ἀντικαταστήσουμε τό α μέ τό $\alpha + \omega$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1}{2} (1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha),$$

$$\eta\mu^2(\alpha + \omega) = \frac{1}{2} \left[1 - \sigma\upsilon\nu 2(\alpha + \omega) \right],$$

• • • • •

καί μέ πρόσθεση κατά μέλη:

ὥστε :

*Αν στον τύπο (64) βάλουμε $\omega = \alpha$, έχουμε:

Καί ἂν βάλουμε $\omega = 2\alpha$, βρίσκουμε ὅτι:

Μέ τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και όταν αντί για ήμίτονο έχουμε συν-
ημίτονο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ομάδα

31. Νά μετασχηματισθοῦν σέ ἄθροισμα ἢ διαφορά οἱ παραστάσεις:

1. 2ημ2α συνα,
2. 2ημα συν4α,
3. 2ημ4α συν8α,
4. 2ημα ημ3α,
5. 2συν5α συν7α,
6. 2ημ3α ημ5α.

32. Νά βρεθεί η αριθμητική τιμή τῶν παραστάσεων:

1. 2ουνν60° ημ30°,
2. ημ45° συν75°,
3. 2ουνν150° συν30°,
4. 2ημ36° συν54°.

33. Να αποδειχθεί ότι:

1. $\sin 2\alpha \sin \alpha - \eta \mu 4\alpha \eta \mu \alpha = \sin 3\alpha \sin 2\alpha,$
2. $\sin 5\alpha \sin 2\alpha - \sin 4\alpha \sin 3\alpha = -\eta \mu 2\alpha \eta \mu \alpha,$
3. $\eta \mu 4\alpha \sin \alpha - \eta \mu 3\alpha \sin 2\alpha = \eta \mu \alpha \sin 2\alpha.$

34. Νά αποδειχθεί ότι:

1. $\sin(36^\circ - \alpha) \sin(36^\circ + \alpha) + \sin(54^\circ + \alpha) \sin(54^\circ - \alpha) = \sin 2\alpha$,
2. $\sin \alpha \eta \mu(\beta - \gamma) + \sin \beta \eta \mu(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \eta \mu(\alpha - \beta) = 0$,
3. $\eta \mu \alpha \eta \mu(\beta - \gamma) + \eta \mu \beta \eta \mu(\gamma - \alpha) + \eta \mu \gamma \eta \mu(\alpha - \beta) = 0$,
4.
$$\frac{\eta \mu \alpha \eta \mu 2\alpha + \eta \mu 3\alpha \eta \mu 6\alpha + \eta \mu 4\alpha \eta \mu 13\alpha}{\eta \mu \alpha \sin 2\alpha + \eta \mu 3\alpha \sin 6\alpha + \eta \mu 4\alpha \sin 13\alpha} = \epsilon \phi 9\alpha.$$

Δεύτερη ομάδα

35. Νά αποδειχθεί ότι:

1. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{16}$,
2. $\epsilon \phi 20^\circ \epsilon \phi 40^\circ \epsilon \phi 60^\circ \epsilon \phi 80^\circ = 3$,
3. $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$,
4. $\eta \mu^4 \frac{\pi}{16} + \eta \mu^4 \frac{3\pi}{16} + \eta \mu^4 \frac{5\pi}{16} + \eta \mu^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$.

36. Νά υπολογισθούν τά ακόλουθα άθροίσματα, πού τό καθένα τους έχει n προσθετέους:

1. $\eta \mu 2\alpha + \eta \mu 4\alpha + \eta \mu 6\alpha + \dots$
2. $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \dots$
3. $\eta \mu \alpha - \eta \mu 2\alpha + \eta \mu 3\alpha - \dots$
4. $\sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \dots$

37. Νά αποδειχθεί ότι:

1. $\sin \frac{\pi}{19} + \sin \frac{3\pi}{19} + \sin \frac{5\pi}{19} + \dots + \sin \frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$,
2. $\sin \frac{2\pi}{21} + \sin \frac{4\pi}{21} + \sin \frac{6\pi}{21} + \dots + \sin \frac{20\pi}{21} = -\frac{1}{2}$,
3. $\eta \mu \frac{\pi}{9} + \eta \mu \frac{2\pi}{v} + \eta \mu \frac{3\pi}{v} + \dots = \sigma \phi \frac{\pi}{2v}$, όπου τό πλήθος τών όρων

είναι $v - 1$.

4. $\sin \frac{\pi}{v} + \sin \frac{3\pi}{v} + \sin \frac{5\pi}{v} + \dots = -\sin \frac{\pi}{v}$, όπου τό πλήθος τών

όρων είναι $2v - 1$.

**ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ
ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ — ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ
Ή ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ**

- 28. Τριγωνομετρικές σχέσεις ανάμεσα στις γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$.
Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

$$A + B + \Gamma = \pi \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

*Αρα θά έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$\eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma$ $\eta\mu \frac{A + B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$	$\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$ $\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}$	$\eta\mu(\Gamma + A) = \eta\mu B$ $\eta\mu \frac{\Gamma + A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2}$
$\sigma\upsilon\nu(A + B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$ $\sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$	$\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A$ $\sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2} = \eta\mu \frac{A}{2}$	$\sigma\upsilon\nu(\Gamma + A) = -\sigma\upsilon\nu B$ $\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma + A}{2} = \eta\mu \frac{B}{2}$

Μέ τή βοήθεια τῶν ταυτοτήτων αὐτῶν καί μέ τή χρήση τῶν τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν ἀποδεικνύονται διάφορες χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις ἀνάμεσα στίς γωνίες A, B, Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καί στά μισά αὐτῶν τῶν γωνιῶν. Οἱ κυριότερες εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

- 29. Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι :

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$$

*Απόδειξη. *Έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma &= 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = \\ &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \right] = \\ &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \right] = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \cdot 2\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \\ &= 4\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}. \end{aligned}$$

*Αρα :

$A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow$	$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$	(67)
------------------------------------	---	------

‘Ο τύπος (67) βρέθηκε καί στην παράγραφο (γ) σελίδα 37 μέ άλλο τρόπο.

Παρατήρηση. *Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi$, μέ $\nu \in \mathbb{Z}^+$, τότε :

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1} \cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2} \cdot \eta\mu\frac{\beta}{2} \cdot \eta\mu\frac{\gamma}{2}$$

‘Απόδειξη. ‘Από τή σχέση:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ καί } \frac{\alpha + \beta}{2} = \nu\pi - \frac{\gamma}{2}.$$

‘Αλλά: $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha + \beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2} = 2\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2}$ (1)

καί : $\eta\mu\gamma = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2} = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ (2)

‘Επειδή ό ν μπορεί νά είναι άρτιος ή περιττός, θά έχουμε:

$$\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = \pm \eta\mu\frac{\gamma}{2} \text{ καί } \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \pm \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

*Αρα σέ όλες τίς περιπτώσεις θά είναι:

$$\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = (-1)^{\nu-1} \eta\mu\frac{\gamma}{2} \text{ καί } \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = -(-1)^{\nu-1} \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

*Αρα οι Ισότητες (1) καί (2) γίνονται:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = (-1)^{\nu-1} 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ καί } \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1} \left[-2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2} \right],$$

καί μέ πρόσθεση αὐτῶν τῶν Ισοτήτων κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma &= (-1)^{\nu-1} \cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2} \left[\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2} \right] = \\ &= (-1)^{\nu-1} \cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2} \cdot 2\eta\mu\frac{\alpha}{2} \eta\mu\frac{\beta}{2} = (-1)^{\nu-1} \cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2} \eta\mu\frac{\beta}{2} \eta\mu\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

‘Ωστε :

$\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \Rightarrow$	$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1} \cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2} \eta\mu\frac{\beta}{2} \eta\mu\frac{\gamma}{2}$	(67a)
---	---	-------

*Αν όμως είναι:

$\alpha + \beta + \gamma = (2\nu - 1)\pi \Rightarrow$	$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^\nu \cdot 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$	(67β)
---	---	-------

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ τύπου (67β) γίνεται μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ἔγινε καί ἡ ἀπόδειξη τοῦ τύπου (67α).

● 30. Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 + 4\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} = \\ &= 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} - 2\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} + 1 = 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} - \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \right] + 1 = \\ &= 1 + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \right] = 1 + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \cdot 2\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} = \\ &= 1 + 4\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}. \end{aligned}$$

Ἀρα θά ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:

$A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow$	$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 + 4\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$	(68)
------------------------------------	--	------

Ὁ τύπος (68) βρέθηκε καί μέ ἄλλο τρόπο στήν παράγραφο (δ) σελίδα 38.

Παρατήρηση. Ἄν ἀληθεύει ἡ ἰσότητα :

$$\sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu \beta + \sigma\upsilon\nu \gamma = 1 + 4\eta\mu \frac{\alpha}{2} \eta\mu \frac{\beta}{2} \eta\mu \frac{\gamma}{2}$$

νά βρεῖτε πῶς συνδέονται οἱ γωνίες α, β καί γ .

Λύση. Ἡ δεδομένη ἰσότητα γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\beta+\gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\beta-\gamma}{2} &= 1 + 2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{\beta-\gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\beta+\gamma}{2} \right] \\ \eta\mu \frac{\alpha}{2} \left[\eta\mu \frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\beta-\gamma}{2} \right] - \sigma\upsilon\nu \frac{\beta+\gamma}{2} \left[\eta\mu \frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\beta-\gamma}{2} \right] &= 0 \\ \left[\eta\mu \frac{\alpha}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\beta+\gamma}{2} \right] \left[\eta\mu \frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\beta-\gamma}{2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Ἡ ἰσότητα αὕτη ἐπαληθεύεται:

$$\begin{aligned} \text{Io: Μέ } \eta\mu \frac{\alpha}{2} &= \sigma\upsilon\nu \frac{\beta+\gamma}{2} = \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2} & (1) \\ \frac{\alpha}{2} = (2k_1+1)\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$2o : \text{Μέ } \eta\mu\frac{\alpha}{2} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2} = \eta\mu\left(\frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 2k_2\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} = (2k_3+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Άπό τις (1), (2), (3), (4) βρίσκουμε εύκολα τις σχέσεις:

$\alpha \pm \beta \pm \gamma = (4\lambda + 1)\pi$ $\alpha \pm \beta \pm \gamma = (4\lambda - 1)\pi$	όπου $k, k_1, k_2, k_3, \lambda \in \mathbb{Z}$.
---	---

Αν όμως είναι:

$\alpha + \beta + \gamma = 2n\pi \Rightarrow$	$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = -1 + (-1)^n \cdot 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$	(68a)
---	--	-------

Η απόδειξη γίνεται όπως και στην παράγραφο (29).

Αν, τέλος, είναι:

$\alpha + \beta + \gamma = (2n+1)\pi \Rightarrow$	$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 1 + (-1)^n \cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2} \eta\mu\frac{\beta}{2} \eta\mu\frac{\gamma}{2}$	(68β)
---	---	-------

● 31. Σέ κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ή ισότητα :

$$\epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma.$$

Απόδειξη. Έχουμε: $A + B + \Gamma = \pi$, οπότε:

$$A + B = \pi - \Gamma \text{ και } \epsilon\phi(A + B) = \epsilon\phi(\pi - \Gamma) = -\epsilon\phi \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{\epsilon\phi A + \epsilon\phi B}{1 - \epsilon\phi A \epsilon\phi B} = -\epsilon\phi \Gamma \Leftrightarrow \epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma.$$

Ωστε, μέ $A \neq \frac{\pi}{2}$ ή $B \neq \frac{\pi}{2}$ ή $\Gamma \neq \frac{\pi}{2}$, και $A + B + \Gamma = \pi$, ισχύει:

$\epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma$	(69)
---	------

Αντιστρόφως : Αν τρεις γωνίες A, B, Γ διαφορετικές από τό $\frac{\pi}{2}$, ικανοποιούν την Ισότητα (69), τότε θά είναι:

$$\epsilon\phi A + \epsilon\phi B = \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma - \epsilon\phi \Gamma = -\epsilon\phi \Gamma (1 - \epsilon\phi A \epsilon\phi B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\epsilon\phi A + \epsilon\phi B}{1 - \epsilon\phi A \epsilon\phi B} = -\epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow \epsilon\phi(A + B) = \epsilon\phi(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$A + B = n\pi + \pi - \Gamma \Leftrightarrow A + B + \Gamma = (n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

● 32. Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ή ισότητα:

$$\sigma\phi A \sigma\phi B + \sigma\phi B \sigma\phi \Gamma + \sigma\phi \Gamma \sigma\phi A = 1.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση $A + B + \Gamma = \pi$ ἔχουμε:

$$A + B = \pi - \Gamma \Rightarrow \sigma\phi(A + B) = \sigma\phi(\pi - \Gamma) = -\sigma\phi \Gamma \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma\phi A \sigma\phi B - 1}{\sigma\phi A + \sigma\phi B} = -\sigma\phi \Gamma. \text{ Ἀπό ἐδῶ προκύπτει ὅτι:}$$

$$\boxed{\sigma\phi A \sigma\phi B + \sigma\phi B \sigma\phi \Gamma + \sigma\phi \Gamma \sigma\phi A = 1} \quad (70)$$

Ἀντιστρόφως. Ἄν τρεῖς γωνίες A, B, Γ ικανοποιοῦν τήν ισότητα (70), τότε θά ἔχουμε:

$$\sigma\phi A \sigma\phi B - 1 = -\sigma\phi \Gamma (\sigma\phi A + \sigma\phi B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma\phi A \sigma\phi B - 1}{\sigma\phi A + \sigma\phi B} = -\sigma\phi \Gamma \Leftrightarrow \sigma\phi(A + B) = -\sigma\phi \Gamma = \sigma\phi(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$A + B = n\pi + (\pi - \Gamma), \text{ μέ } n \in \mathbb{Z}. \text{ Ἄρα: } A + B + \Gamma = (n + 1)\pi$$

● 33. Ἄν οἱ γωνίες ἑνός τριγώνου $AB\Gamma$ ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο καί συγχρόνως ισχύει ή ισότητα:

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2, \quad (1)$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ πλευρές αὐτοῦ τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογες μέ τούς ἀριθμούς $2, \sqrt{3}$ καί 1 .

Ἀπόδειξη. Ἡ δεδομένη σχέση (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} 1 - \sigma\upsilon\nu^2 A + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 B + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma &= 2 \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Ἀφοῦ εἶναι $A + B + \Gamma = \pi$, κατὰ τόν τύπο (13), θά ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 \quad (3)$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) βρίσκουμε τή σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu A = 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}, \\ \text{ἢ } \sigma\upsilon\nu B = 0 \Rightarrow B = \frac{\pi}{2}, \\ \text{ἢ } \sigma\upsilon\nu \Gamma = 0 \Rightarrow \Gamma = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι:

$$A = \frac{\pi}{2}, \text{ ὁπότε } B + \Gamma = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

Επειδή από την υπόθεση οι γωνίες Α, Β, Γ αποτελούν αριθμητική πρόοδο, θα ισχύει η σχέση:

$$2B = \Gamma + A = \Gamma + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2B - \Gamma = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) βρίσκουμε:

$$B + \Gamma = 2B - \Gamma \Leftrightarrow B = 2\Gamma \text{ και ή (4) γίνεται:}$$

$$2\Gamma + \Gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3\Gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Gamma = \frac{\pi}{6} \text{ και άρα } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Ώστε είναι: } A = \frac{\pi}{2}, B = \frac{\pi}{3}, \Gamma = \frac{\pi}{6}.$$

Αν α, β, γ είναι, αντίστοιχως, η υποτείνουσα και οι κάθετες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε, επειδή:

$$\Gamma = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2} \text{ και άρα } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{\alpha} \Rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{2}. \text{ Άρα: } \boxed{\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\gamma}{1}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ομάδα

38. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά αποδειχθούν οι Ισότητες:

1. $\eta\mu A + \eta\mu B - \eta\mu\Gamma = 4\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2},$
2. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma = -1 + 4\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2},$
3. $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 4\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma,$
4. $\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma = -1 - 4\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma,$
5. $\epsilon\varphi 2A + 2\epsilon\varphi 2B + \epsilon\varphi 2\Gamma = \epsilon\varphi 2A \epsilon\varphi 2B \epsilon\varphi 2\Gamma,$
6. $\epsilon\varphi \frac{A}{2} \epsilon\varphi \frac{B}{2} + \epsilon\varphi \frac{B}{2} \epsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} + \epsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} \epsilon\varphi \frac{A}{2} = 1.$

39. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ Ισχύουν οι Ισότητες:

1. $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2 + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma,$
2. $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B - \eta\mu^2 \Gamma = 2\eta\mu A \eta\mu B \sigma\upsilon\nu\Gamma,$
3. $\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B - \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1 - 2\eta\mu A \eta\mu B \sigma\upsilon\nu\Gamma,$
4. $\eta\mu(B + \Gamma - A) + \eta\mu(\Gamma + A - B) + \eta\mu(A + B - \Gamma) = 4\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma.$

40. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά αποδειχθεί ότι:

1. $\eta\mu 4A + \eta\mu 4B + \eta\mu 4\Gamma = -4\eta\mu 2A \eta\mu 2B \eta\mu 2\Gamma,$
2. $\sigma\upsilon\nu 4A + \sigma\upsilon\nu 4B + \sigma\upsilon\nu 4\Gamma = -1 + 4\sigma\upsilon\nu 2A \sigma\upsilon\nu 2B \sigma\upsilon\nu 2\Gamma,$
3. $\eta\mu^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{B}{2} + \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} = 1 - 2\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2},$
4. $\frac{\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma}{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma} = 8\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2},$

$$5. \frac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}{(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma)^2} = -\frac{\varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}}{2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

41. *Αν $A + B + \Gamma = 180^\circ$, νά γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

1. $\eta\mu 3A + \eta\mu 3B + \eta\mu 3\Gamma$,
2. $\eta\mu 6A + \eta\mu 6B + \eta\mu 6\Gamma$,
3. $\varepsilon\varphi(kA) + \varepsilon\varphi(kB) + \varepsilon\varphi(k\Gamma)$, αν $k \in \mathbb{N}$.

42. Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ νά αποδειχθεί ή αλήθεια καθεμιάς από τίς παρακάτω ισότητες:

1. $\eta\mu \frac{A}{2} + \eta\mu \frac{B}{2} + \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = 1 + 4\eta\mu \frac{\pi-A}{4} \eta\mu \frac{\pi-B}{4} \eta\mu \frac{\pi-\Gamma}{4}$,
2. $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = 4\sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma+A}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{4}$,
3. $\eta\mu^2 \frac{A}{4} + \eta\mu^2 \frac{B}{4} + \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{4} = \frac{3}{2} - 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi-A}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi-B}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi-\Gamma}{4}$,
4. $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{4} = \frac{3}{2} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi-A}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi-B}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi-\Gamma}{4}$.

★ Δεύτερη ομάδα

43. Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ νά αποδειχθεί ότι:

1. $\Sigma\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma$,
2. $\Sigma\sigma\upsilon\nu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma = 1 + \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma$,
3. $\Sigma\eta\mu A \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = 4\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma$,
4. $\Sigma\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = 1 + 4\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma$,
5. $\Sigma\eta\mu^3 A \eta\mu(B-\Gamma) = 0$,
6. $\Sigma\eta\mu^3 A \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - 3\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma = 0$,
7. $\Sigma\eta\mu 3A \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = 0$,
8. $\Sigma\eta\mu 3A \eta\mu^3(B-\Gamma) = 0$.

44. Σέ κάθε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ νά αποδειχθεί ότι:

1. $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma + \eta\mu\Delta = 4\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{B+\Gamma}{2} \eta\mu \frac{\Gamma+A}{2}$,
2. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma + \sigma\upsilon\nu\Delta = 4\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma+A}{2}$.

45. *Αν σέ κάποιο τρίγωνο $AB\Gamma$ αληθεύει καθεμιά από τίς ισότητες:

1. $\sigma\varphi \frac{B}{2} = \frac{\eta\mu A + \eta\mu\Gamma}{\eta\mu B}$,
2. $\eta\mu A = \frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}$
3. $\eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B$,

νά αποδειχθεί ότι τό τρίγωνο αυτό είναι ὀρθογώνιο καί ἀντιστρόφως.

46. *Αν σέ κάποιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ἰσχύει καθεμιά από τίς ισότητες:

1. $\Sigma\varepsilon\varphi \frac{A}{2} + \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = 2$,
2. $\Sigma\sigma\upsilon\nu^2 A = 1$,
3. $\eta\mu 2A + \eta\mu 2\Gamma = \eta\mu 2B$,
4. $\Sigma\eta\mu 4A = 0$,

νά αποδειχθεί ότι τό τρίγωνο αυτό είναι ὀρθογώνιο καί ἀντιστρόφως.

47. *Αν σέ τρίγωνο $AB\Gamma$ ἰσχύει ή ισότητα

$$\eta\mu 3A + \eta\mu 3B + \eta\mu 3\Gamma = 0,$$

νά αποδειχθεί ότι μία γωνία του τριγώνου είναι 60° .

48. "Αν $\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu^3 \frac{B}{2} = \eta\mu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu^3 \frac{A}{2}$, τότε το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

Επίσης, αν $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \eta\mu B \eta\mu \Gamma$.

49. "Αν $\sigma\upsilon\nu 3A + \sigma\upsilon\nu 3B + \sigma\upsilon\nu 3\Gamma = 1$, τότε μία γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 120° .

50. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ νά αποδειχθεί ότι:

$$1 + \sum \frac{\eta\mu\Gamma \sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A \eta\mu^2 B} = (\sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi \Gamma)^2.$$

51. "Αν $x + y + \omega = xy\omega$, νά αποδειχθεί ότι:

1. $\sum \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2\omega}{1-\omega^2}.$

2. $\sum \frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \cdot \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \cdot \frac{3\omega-\omega^3}{1-3\omega^2}.$

3. $\Sigma x(1-y^2)(1-\omega^2) = 4xy\omega.$

52. "Αν $A + B + \Gamma = 180^\circ$ και $v \in \mathbb{Z}$, νά αποδειχθεί ότι:

$$\eta\mu(2vA) + \eta\mu(2vB) + \eta\mu(2v\Gamma) = 4(-1)^{v-1} \eta\mu(vA) \eta\mu(vB) \eta\mu(v\Gamma).$$

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ
ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ**

● 34. ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ MOLLWEIDE. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{\beta - \gamma}{\alpha} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B - \Gamma}{2}, \quad \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2},$$

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \sigma\phi \frac{A}{2} = \epsilon\phi \frac{B - \Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\beta > \gamma$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} &= \frac{2R\eta\mu B - 2R\eta\mu \Gamma}{2R\eta\mu A} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu B - \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \\ &= \frac{2\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}}{2\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{A}{2}} = \eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \eta\mu \frac{A}{2} &= \frac{2R\eta\mu B + 2R\eta\mu \Gamma}{2R\eta\mu A} \cdot \eta\mu \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu B + \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A} \cdot \eta\mu \frac{A}{2} = \\ &= \frac{2\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2}}{2\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}} \cdot \eta\mu \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}} = \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Με διαίρεση τώρα κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2), βρίσκουμε :

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \sigma\phi \frac{A}{2} = \epsilon\phi \frac{B - \Gamma}{2} \quad (3)$$

καὶ μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν α, β, γ , ($\alpha > \beta > \gamma$) καὶ A, B, Γ βρίσκουμε τοὺς τύπους τοῦ Mollweide.

(71)	$\frac{\alpha - \beta}{\gamma} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = \eta\mu \frac{A - B}{2}$
	$\frac{\beta - \gamma}{\alpha} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B - \Gamma}{2}$
	$\frac{\alpha - \gamma}{\beta} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \eta\mu \frac{A - \Gamma}{2}$

(72)	$\frac{\beta + \gamma}{\alpha} \eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2}$
	$\frac{\gamma + \alpha}{\beta} \eta\mu \frac{B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma - A}{2}$
	$\frac{\alpha + \beta}{\gamma} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = \varepsilon\varphi \frac{A - B}{2} \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \sigma\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \frac{B - \Gamma}{2} \\ \frac{\gamma - \alpha}{\gamma + \alpha} \sigma\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\Gamma - A}{2} \end{aligned}} \quad (73)$$

• 35. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπὸ τὶς πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν μισῶν γωνιῶν του.

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι α, β, γ εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ 2τ ἡ περίμετρος του. Τότε θὰ ἔχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\tau \Rightarrow \begin{cases} \beta + \gamma - \alpha = 2\tau - 2\alpha = 2(\tau - \alpha), \\ \gamma + \alpha - \beta = 2\tau - 2\beta = 2(\tau - \beta), \\ \alpha + \beta - \gamma = 2\tau - 2\gamma = 2(\tau - \gamma). \end{cases}$$

Ἀπὸ τὸ νόμο τῶν συνημιτόνων ἔχουμε τὸν τύπο:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν}A \Leftrightarrow \text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \quad (1)$$

Εἶναι ὁμως καὶ

$$2\text{συν}^2 \frac{A}{2} = 1 + \text{συν}A \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad 2\eta\mu^2 \frac{A}{2} = 1 - \text{συν}A \quad (3)$$

Ἐπομένως μέ τή βοήθεια τῶν (1) καὶ (2) θὰ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} 2\text{συν}^2 \frac{A}{2} = 1 + \text{συν}A = 1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} &= \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \\ = \frac{(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} &= \frac{(\beta + \gamma + \alpha)(\beta + \gamma - \alpha)}{2\beta\gamma} = \frac{2\tau \cdot 2(\tau - \alpha)}{2\beta\gamma} = \frac{2\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma} \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ ὁμως $-\frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{συν} \frac{A}{2} > 0$ καὶ θὰ ἔχουμε:

$$\text{συν} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο ἀπὸ τὶς (1) καὶ (3) βρίσκουμε: $\eta\mu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta\gamma}}$

Τέλος, μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν α, β, γ καὶ A, B, Γ βρίσκουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{συν} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}} \\ \text{συν} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\tau(\tau - \beta)}{\gamma\alpha}} \\ \text{συν} \frac{\Gamma}{2} &= \sqrt{\frac{\tau(\tau - \gamma)}{\alpha\beta}} \end{aligned}} \quad (74)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta\gamma}} \\ \eta\mu \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(\tau - \gamma)(\tau - \alpha)}{\gamma\alpha}} \\ \eta\mu \frac{\Gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}{\alpha\beta}} \end{aligned}} \quad (75)$$

Διαιρώντας έπειτα κατά μέλη, αντίστοιχως, τούς τύπους (75) με τούς τύπους (74) βρίσκουμε τούς τύπους:

$$(76) \quad \begin{array}{l} \varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} \\ \varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}} \\ \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sigma\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \\ \sigma\varphi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}} \\ \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}} \end{array} \quad (77)$$

★ Διερεύνηση: Για να υπάρχουν οι γωνίες A, B, Γ, πρέπει:

$$\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)} > 0 \text{ ή } (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) > 0, \text{ αφού } \tau > 0$$

Για να είναι όμως $(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) > 0$, πρέπει ή όλοι οι παράγοντες να είναι θετικοί ή ένας θετικός και οι άλλοι δύο αρνητικοί. *Αν δύο παράγοντες είναι αρνητικοί, π.χ. οι

$$\left. \begin{array}{l} \tau-\beta < 0 \\ \tau-\gamma < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\tau-\beta-\gamma < 0 \Leftrightarrow \alpha < 0, \text{ πράγμα που είναι άτοπο.}$$

*Αρα: $\tau-\alpha > 0 \Leftrightarrow \tau > \alpha \Leftrightarrow 2\tau > 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha < 2\tau \Leftrightarrow \alpha < \beta + \gamma$. Όμοίως (1)

$$\tau-\beta > 0 \Leftrightarrow \beta < \gamma + \alpha \quad (2) \text{ και } \tau-\gamma > 0 \Rightarrow \gamma < \alpha + \beta \quad (3)$$

*Από τις σχέσεις (2) και (3) βρίσκουμε:

$$\left. \begin{array}{l} -\alpha < \gamma - \beta \\ \gamma - \beta < \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow -\alpha < \gamma - \beta < \alpha \Leftrightarrow |\gamma - \beta| < \alpha < \beta + \gamma$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε: $|\alpha - \gamma| < \beta < \alpha + \gamma$ και $|\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta$

*Αν όμως α είναι ή μεγαλύτερη πλευρά, τότε αρκεί $\alpha < \beta + \gamma$.

Παρατήρηση. *Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο στους τύπους (74) ή (75), θα έχουμε:

$$0 < \frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} < 1, \text{ δηλαδή } 0 < \frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} \text{ και } \frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} < 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{ή } \tau(\tau-\alpha) > 0 & \text{ και } \tau(\tau-\alpha) < \beta\gamma, \\ \text{ή } \tau-\alpha > 0 & \text{ » } (\beta + \gamma + \alpha)(\beta + \gamma - \alpha) < 4\beta\gamma, \\ \text{ή } \tau > \alpha & \text{ » } (\beta - \gamma)^2 - \alpha^2 < 0, \\ \text{ή } \alpha < \beta + \gamma & \text{ » } (\beta - \gamma + \alpha)(\beta - \gamma - \alpha) < 0 \end{array} \quad (4)$$

Τό πρώτο μέλος της (4) είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς β. Για να είναι τό τριώνυμο αυτό αρνητικό, δηλαδή να έχει σημείο αντίθετο από τό σημείο του συντελεστοῦ τοῦ β², πρέπει καί ἀρκεί ὁ β νά βρίσκεται ανάμεσα στίς ρίζες τοῦ τριωνύμου. Δηλαδή πρέπει:

$$\gamma - \alpha < \beta < \gamma + \alpha, \text{ ἀπ' ὅπου: } \gamma < \alpha + \beta \text{ καί } \beta < \alpha + \gamma.$$

Έπομένως θα έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha < \beta + \gamma, \\ \beta < \gamma + \alpha, \\ \gamma < \alpha + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma, \\ |\gamma - \alpha| < \beta < \gamma + \alpha, \\ |\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta. \end{array} \right.$$

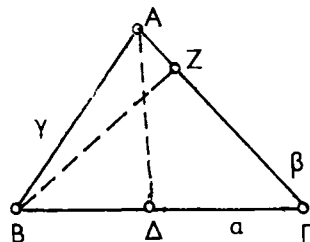
● 36. Έμβασό τριγώνου. Ἐς ὑποθέσουμε ὅτι α, β, γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ E τὸ ἔμβασό του. Φέρνουμε τὰ ὕψη του AD καὶ BZ .

Ἀπὸ τὸ σχῆμα 5 ἔχουμε:

$$AD = \beta \eta \mu \Gamma, AD = \gamma \eta \mu B \quad \text{καὶ} \quad BZ = \gamma \eta \mu A.$$

Τὸ ἔμβασό τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \beta \cdot BZ = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot AD = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu A \\ &= \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu \Gamma = \frac{1}{2} \alpha \gamma \eta \mu B. \end{aligned}$$



Σχ. 5

Ὡστε :

$$E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu A = \frac{1}{2} \gamma \alpha \eta \mu B = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu \Gamma \quad (78)$$

Οἱ σχέσεις (78) δείχνουν ὅτι : Τὸ ἔμβασό κάθε τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισό τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἡμίτονο τῆς γωνίας, ἡ ὁποία περιέχεται σ' αὐτές τὶς πλευρές.

Συνέπεια : Ἐπειδὴ εἶναι $\eta \mu \Gamma = \frac{\gamma}{2R}$, θά ἔχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu \Gamma = \frac{1}{2} \alpha \beta \cdot \frac{\gamma}{2R} = \frac{\alpha \beta \gamma}{4R} \Leftrightarrow \boxed{\alpha \beta \gamma = 4ER} \quad (79)$$

● 37. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπὸ τίς πλευρές ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ νά ὑπολογισθεῖ τὸ ἔμβασό του.

Λύση. Ἐχουμε διαδοχικὰ:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu A = \frac{1}{2} \beta \gamma \cdot 2 \eta \mu \frac{A}{2} \text{ συν } \frac{A}{2} = \beta \gamma \eta \mu \frac{A}{2} \text{ συν } \frac{A}{2} = \\ &= \beta \gamma \cdot \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\beta \gamma}} \cdot \sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta \gamma}} = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} \end{aligned}$$

Ὡστε:

$$\boxed{E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}} \quad (80)$$

Ὁ τύπος αὐτός καλεῖται τύπος τοῦ Ἡρώου.

● 38. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπὸ τίς πλευρές ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Λύση. 'Από τούς γνωστούς τύπους:

$$\alpha\beta\gamma = 4ER \text{ και } E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

μέ άπαλοιφή τοῦ Ε βρίσκουμε:

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \quad (81)$$

● **39. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** 'Από τά ήμίτονα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου $AB\Gamma$ καί τήν ακτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου.

Λύση. 'Από τίς γνωστές σχέσεις:

$$\alpha = 2R\eta\mu A, \beta = 2R\eta\mu B, \gamma = 2R\eta\mu\Gamma$$

καί τόν τύπο: $\alpha\beta\gamma = 4ER$, ἔχουμε διαδοχικά:

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \frac{2R\eta\mu A \cdot 2R\eta\mu B \cdot 2R\eta\mu\Gamma}{4R} = 2R^2\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma$$

Ὡστε:

$$E = 2R^2\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma \quad (82)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

α) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες B καί Γ ἑνός τριγώνου $AB\Gamma$ ἀπό τά γνωστά στοιχεῖα του:

$$A = 60^\circ \text{ καί } a = (\beta - \gamma) \sqrt{3},$$

Λύση. 'Από τό δεύτερο τύπο τοῦ Mollweide ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu \frac{B-\Gamma}{2} &= \frac{\beta-\gamma}{\alpha} \text{ συν } \frac{A}{2} = \frac{\beta-\gamma}{(\beta-\gamma)\sqrt{3}} \text{ συν } \frac{60^\circ}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ συν } 30^\circ = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} = \eta\mu 30^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{"Άρα θά εἶναι: } \frac{B-\Gamma}{2} = 30^\circ \Rightarrow B-\Gamma = 60^\circ \quad (1)$$

$$\text{"Επειδή ὁμως: } B+\Gamma = 180^\circ - A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad (2)$$

ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει: $B = 90^\circ$ καί $\Gamma = 30^\circ$.

Συμπέρασμα: Τό τρίγωνο $AB\Gamma$ ἔχει: $A = 60^\circ$, $B = 90^\circ$, $\Gamma = 30^\circ$, δηλαδή εἶναι ὀρθογώνιο στήν κορυφή B .

β) Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ἀληθεύει ἡ σχέση:

$$\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B = 4E$$

"Απόδειξη. "Εχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B &= 2\beta^2\eta\mu\Gamma \text{ συν}\Gamma + 2\gamma^2\eta\mu B \text{ συν}B = \\ &= 2\beta^2\eta\mu\Gamma \text{ συν}\Gamma + 2\gamma \cdot \beta\eta\mu\Gamma \text{ συν}B = 2\beta\eta\mu\Gamma (\beta \text{ συν}\Gamma + \gamma \text{ συν}B) = \\ &= 2\beta\eta\mu\Gamma \cdot \alpha = 2\alpha\beta\eta\mu\Gamma = 4E, \end{aligned}$$

ἀφοῦ ξέρουμε ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ὅτι εἶναι:

$$\alpha = \beta \text{ συν}\Gamma + \gamma \text{ συν}B, \gamma\eta\mu B = \beta\eta\mu\Gamma, \alpha\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu A.$$

γ) Ἐάν οἱ πλευρές α, β, γ καί ἡ γωνία B ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ἱκανοποιῶν τὴν ἰσότητα:

$$\alpha + \gamma = \beta \sigma\varphi \frac{B}{2} \quad (1)$$

νά βρεθεῖ τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου.

Λύση. Ἡ ἰσότητα (1) γράφεται:

$$2R\eta\mu A + 2R\eta\mu\Gamma = 2R\eta\mu B \sigma\varphi \frac{B}{2} \Leftrightarrow \eta\mu A + \eta\mu\Gamma = \eta\mu B \sigma\varphi \frac{B}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu \frac{A+\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-\Gamma}{2} = 2\eta\mu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2}}{\eta\mu \frac{B}{2}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{A-\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \quad (2)$$

$$\text{Ἄρα θὰ εἶναι: } \frac{B}{2} = \frac{A-\Gamma}{2} \Leftrightarrow B + \Gamma = A \Leftrightarrow A = 90^\circ$$

$$\text{ἢ } \frac{B}{2} = \frac{\Gamma-A}{2} \Leftrightarrow B + A = \Gamma \Leftrightarrow \Gamma = 90^\circ.$$

Ἄρα τὸ τρίγωνο $AB\Gamma$ θὰ εἶναι ὀρθογώνιο ἢ στὴν κορυφή A ἢ στὴν κορυφή Γ .

Ἀπὸ τὴ σχέση (2) θὰ μποροῦσε νὰ προκύψει ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\frac{B}{2} = \frac{\Gamma-A}{2} + k \cdot 360^\circ \quad \text{ἢ} \quad \frac{B}{2} = \frac{A-\Gamma}{2} + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z},$$

οἱ ὁποῖες ὁμῶς ἀπορρίπτονται, γιατί:

$$\frac{B}{2} < 90^\circ \quad \text{καί} \quad \frac{|A-\Gamma|}{2} < 90^\circ. \quad \text{Ἄρα } k = 0.$$

δ) Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ἀληθεύει ἡ σχέση:

$$(\alpha + \beta + \gamma) \left(\varepsilon\varphi \frac{A}{2} + \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \right) = 2\gamma \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$(\alpha + \beta + \gamma) \left(\varepsilon\varphi \frac{A}{2} + \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \right) = 2R(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma) \cdot \frac{\eta\mu \frac{A+B}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2}} =$$

$$= 2R \cdot 4\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2}} = 8R \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} =$$

$$= 8R \cdot \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\Gamma}{2}} = 8R\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\Gamma}{2}} =$$

$$= 2R \cdot 2 \cdot 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \cdot \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = 2 \cdot 2R\eta\mu\Gamma \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = 2\gamma\sigma\phi \frac{\Gamma}{2}.$$

ε) *Αν οί πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ικανοποιούν τήν ισότητα:

$$\alpha + \gamma = 2\beta, \text{ τότε } \sigma\phi \frac{A}{2} + \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = 2\sigma\phi \frac{B}{2}$$

καί αντίστροφως.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση:

$$\alpha + \gamma = 2\beta \Leftrightarrow 2\tau - (\alpha + \gamma) = 2\tau - 2\beta \Leftrightarrow (\tau - \alpha) + (\tau - \gamma) = 2(\tau - \beta)$$

διαιρώντας τά μέλη της μέ τήν παράσταση

$$\sqrt{\frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau}}$$

βρίσκουμε τή σχέση:

$$\sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}} + \sqrt{\frac{\tau(\tau - \gamma)}{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\tau(\tau - \beta)}{(\tau - \gamma)(\tau - \alpha)}}$$

ἀπό τήν ὁποία, μέ βάση τούς τύπους (77), βρίσκουμε:

$$\sigma\phi \frac{A}{2} + \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = 2\sigma\phi \frac{B}{2}.$$

Ἡ ἀντίστροφη πρόταση ἀποδεικνύεται εὐκόλα, ἀφοῦ ὅλες οἱ προηγούμενες πράξεις εἶναι ἀντιστρεπτές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ομάδα

53. *Αν σ' ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι $\Gamma = 120^\circ$ καί $2\alpha = \beta(\sqrt{3} - 1)$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

54. *Αν σ' ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι $3\alpha = (\beta + \gamma)\sqrt{3}$ καί $A = 60^\circ$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

55. *Αν σ' ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι $\beta = 2\gamma$ καί $A = 60^\circ$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

56. *Αν σ' ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι $\beta = \alpha(\sqrt{3} - 1)$ καί $\Gamma = 30^\circ$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

57. *Αν σ' ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι $\alpha = 2$, $\gamma = \sqrt{2}$, $B = 15^\circ$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

58. Σέ κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

$$1. \alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu B) = \beta^2 - \gamma^2,$$

$$2. \alpha(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma) = 2(\beta + \gamma)\eta\mu^2 \frac{A}{2}.$$

$$3. (\beta + \gamma - \alpha) \left(\sigma\varphi \frac{B}{2} + \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} \right) = 2\alpha\sigma\varphi \frac{A}{2},$$

$$4. \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2} \eta\mu 2A + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\beta^2} \eta\mu 2B + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2} \eta\mu 2\Gamma = 0.$$

★ Δεύτερη ομάδα

59. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι ισότητες:

$$1. \frac{\alpha\eta\mu(B-\Gamma)}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{\beta\eta\mu(\Gamma-A)}{\gamma^2 - \alpha^2} = \frac{\gamma\eta\mu(A-B)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$2. \Sigma(\beta - \gamma) \sigma\varphi \frac{A}{2} = 0,$$

$$3. \Sigma(\beta^2 - \gamma^2) \sigma\varphi A = 0,$$

$$4. \Sigma(\alpha + \beta) \epsilon\varphi \frac{A+B}{2} = 0,$$

$$5. \Sigma \frac{\beta}{\alpha\eta\mu \Gamma} = 2 \sigma\varphi A,$$

$$6. \Sigma \alpha \sigma\upsilon\nu A = \frac{2E}{R},$$

$$7. \Sigma \frac{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B}{\alpha\beta} = \frac{1}{4R^2},$$

$$8. \Sigma(\alpha - \beta) \epsilon\varphi \frac{A+B}{2} = 0,$$

$$9. \Sigma \alpha \eta\mu \frac{B-\Gamma}{2} \sigma\tau\epsilon\mu \frac{A}{2} = 0.$$

60. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ νά αποδειχθεί ότι:

$$1. \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E \sigma\varphi A,$$

$$2. 2E(\sigma\varphi B - \sigma\varphi A) = \alpha^2 - \beta^2,$$

$$3. \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4E \Sigma \sigma\varphi A,$$

$$4. 1 - \epsilon\varphi \frac{A}{2} \epsilon\varphi \frac{B}{2} = \frac{\gamma}{\tau}.$$

61. "Αν σέ τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι σχέσεις:

$$1. \alpha = 2\beta \eta\mu \frac{A}{2},$$

$$2. \eta\mu A = 2\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma,$$

$$3. \alpha = 2\beta \sigma\upsilon\nu \Gamma,$$

$$4. (\tau - \beta) \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = \tau \epsilon\varphi \frac{B}{2},$$

$$5. 2u_a = \alpha \sigma\varphi \frac{A}{2},$$

$$6. 4E = \alpha^2 \sigma\varphi \frac{A}{2},$$

$$7. \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2E} = \sigma\varphi \frac{A}{2} + 3\epsilon\varphi \frac{A}{2},$$

$$8. \alpha \epsilon\varphi A + \beta \epsilon\varphi B = (\alpha + \beta) \epsilon\varphi \frac{A+B}{2}$$

νά αποδειχθεί ότι τό τρίγωνο αυτό είναι ίσοσκελές.

62. "Αν σέ τρίγωνο ABΓ είναι:

$$\eta\mu \Gamma (\sigma\upsilon\nu A + 2\sigma\upsilon\nu \Gamma) = \eta\mu B (\sigma\upsilon\nu A + 2\sigma\upsilon\nu B),$$

νά αποδειχθεί ότι τό τρίγωνο αυτό είναι ίσοσκελές ή ὀρθογώνιο.

63. Σ' ένα τρίγωνο ABΓ είναι: $(1 - \sigma\varphi \Gamma) [1 + \sigma\varphi(45^\circ - B)] = 2$. Νά αποδειχθεί ότι αυτό είναι ὀρθογώνιο.

64. "Αν σέ τρίγωνο ABΓ είναι $A = 90^\circ$ καί $4E = \alpha^2$, τό τρίγωνο αυτό θά είναι ίσοσκελές.

65. "Αν σ' ένα τρίγωνο ABΓ είναι:

$$\beta^3 + \gamma^2 - \alpha^2 = \alpha^2(\beta + \gamma - \alpha) \text{ καί } 4\eta\mu B \eta\mu \Gamma = 3,$$

τό τρίγωνο αυτό είναι ισόπλευρο.

66. "Αν σ' ένα τρίγωνο ABΓ είναι $A = 120^\circ$, νά αποδειχθεί ότι:

$$\gamma(\alpha^2 - \gamma^2) = \beta(\alpha^2 - \beta^2).$$

67. "Αν οι πλευρές ενός τριγώνου αποτελούν αριθμητική πρόοδο, νά αποδειχθεί ότι τά ἡμίτονα τῶν γωνιῶν πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς πλευρές αὐτές ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο.

68. "Αν σ' ένα τρίγωνο ABΓ είναι $\alpha^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$, νά αποδειχθεί ότι:

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi \Gamma = 2\sigma\varphi B$$

καί ἀντιστρόφως.

69. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha + \gamma = 2\beta$. Νά αποδειχθεί ότι:

$$1. \quad \text{συν} A \sigma\phi \frac{A}{2} + \text{συν} \Gamma \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = 2 \text{συν} B \sigma\phi \frac{B}{2},$$

$$2. \quad \alpha \text{συν}^2 \frac{\Gamma}{2} + \gamma \text{συν}^2 \frac{A}{2} = \frac{3\beta}{2},$$

$$3. \quad \sigma\phi \frac{A}{2} + \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = 2 \sigma\phi \frac{B}{2},$$

$$4. \quad \epsilon\phi \frac{A}{2} \epsilon\phi \frac{\Gamma}{2} = \frac{1}{3}.$$

Ίσχύουν τὰ αντίστροφα των;

70. *Αν οι πλευρές α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ αποτελούν άρμονική πρόοδο, νά αποδειχθεί ότι καί οι άριθμοί

$$\eta\mu^2 \frac{A}{2}, \quad \eta\mu^2 \frac{B}{2}, \quad \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}$$

αποτελούν άρμονική πρόοδο.

71. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha + \gamma = 2\beta$ καί $A - \Gamma = 90^\circ$. Νά αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{7} + 1} = \frac{\beta}{7} = \frac{\gamma}{\sqrt{7} - 1}$$

72. *Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma = 60^\circ$, νά αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha + \gamma} + \frac{1}{\beta + \gamma} = \frac{3}{\alpha + \beta + \gamma}$$

καί αντίστροφως.

73. *Αν $\text{συν} A = \text{συν} \alpha \eta\mu \beta$, $\text{συν} B = \text{συν} \beta \eta\mu \gamma$, $\text{συν} \Gamma = \text{συν} \gamma \eta\mu \alpha$ καί $A + B + \Gamma = \pi$, νά αποδειχθεί ότι:

$$\epsilon\phi \alpha \epsilon\phi \beta \epsilon\phi \gamma = 1.$$

74. *Αν $\text{συν} A = \epsilon\phi \beta \epsilon\phi \gamma$, $\text{συν} B = \epsilon\phi \gamma \epsilon\phi \alpha$, $\text{συν} \Gamma = \epsilon\phi \alpha \epsilon\phi \beta$ καί $A + B + \Gamma = \pi$, νά αποδειχθεί ότι:

$$\eta\mu^2 \alpha + \eta\mu^2 \beta + \eta\mu^2 \gamma = 1.$$

75. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά αποδειχθεί ότι:

$$\sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi \Gamma \geq \sqrt{3}.$$

76. *Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ άληθεύει ή ισότητα:

$$\eta\mu 4A + \eta\mu 4B + \eta\mu 4\Gamma = 0,$$

νά αποδειχθεί ότι αυτό είναι όρθογώνιο.

77. *Αφού αποδειχθεί ή ταυτότητα:

$$\epsilon\phi x = \sigma\phi x - 2 \sigma\phi 2x,$$

νά αποδειχθεί άκολουθως ότι:

$$S_n = \frac{1}{2} \epsilon\phi \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \epsilon\phi \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \epsilon\phi \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sigma\phi \frac{x}{2^n} - \sigma\phi x,$$

όπου $0 < x < \frac{\pi}{2}$

78. Νά αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο άριθμοί x καί y , τέτοιοι ώστε:

$$\sigma\tau\epsilon\mu \alpha = x \epsilon\phi \frac{\alpha}{2} + y \sigma\phi \alpha,$$

όποιοδήποτε καί άν είναι τό α . *Ακολουθως δείξτε ότι:

$$S_n = \sigma\tau\epsilon\mu \alpha + \sigma\tau\epsilon\mu 2\alpha + \sigma\tau\epsilon\mu 4\alpha + \dots + \sigma\tau\epsilon\mu 2^n \alpha = \sigma\phi \frac{\alpha}{2} - \epsilon\phi 2^n \alpha.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

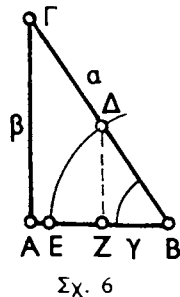
● 40. **Ἀνάγκη τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.** Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται γιὰ τὴν ἐκπλήρωση τοῦ σκοποῦ τῆς Τριγωνομετρίας. Γιὰ νὰ γίνῃ αὐτὸ ἀντιληπτὸ ἀπὸ τώρα, λύνουμε τὸ ἀκόλουθο πρόβλημα.

● 41. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Ἐνα ὀρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ἔχει $a = 20\text{ m}$ καὶ $\beta = 12\text{ m}$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία τὸν B .

Λύση. Μὲ κέντρο τὸ B καὶ ἀκτὶνὰ $B\Delta = 1$ γράφουμε κύκλο, ποὺ κόβει τὴν ὑποτείνουσα $B\Gamma$ στὸ Δ καὶ τὴν κάθετη πλευρὰ AB στὸ E . Φέρνουμε τὴ ΔZ κάθετη στὴν AB . Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα $BZ\Delta$ καὶ $B\Delta\Gamma$ ἔχουμε :

$$\frac{\beta}{Z\Delta} = \frac{\alpha}{B\Delta} = \frac{\alpha}{1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad (1)$$



Ἀπὸ τὴ σχέση αὐτὴ φαίνεται ὅτι γνωρίζουμε τὸ $\eta\mu B$, ὄχι ὅμως καὶ τὴ γωνία B .

Γιὰ τὸν ὑπολογισμό τῆς γωνίας B ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παίρνουμε τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἔχουμε:

$$\log \eta\mu B = \log 0,6 = \overline{1,77815}.$$

Ἄν, λοιπόν, ἔχουμε πίνακα, ποὺ νὰ περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν, μπορούμε νὰ βροῦμε τὴ γωνία B , τῆς ὁποίας τὸ ἡμίτονο ἔχει λογάριθμο τὸν ἀριθμὸ $\overline{1,77815}$. Τέτοιοι πίνακες ὑπάρχουν διαφόρων εἰδῶν.

Ἐνας περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης μὲ 7 δεκαδικὰ ψηφία, ἄλλος μὲ 11 δεκαδικὰ ψηφία, ἄλλος μὲ 20 δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἄλλος μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία.

Γιὰ τίς συνηθισμένες ὅμως ἐφαρμογές ἀρκεῖ ὁ πενταψήφιος πίνακας, τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν καὶ ἑλληνικὲς ἐκδόσεις κατὰ τὸ σύστημα Dupuis.

Ἐναν τέτοιο πίνακα θὰ περιγράψουμε μὲ συντομία καὶ θὰ ἐκθέσουμε καὶ τὸν τρόπο τῆς χρήσεώς του.

● 42. Περιγραφή των λογαριθμικῶν πινάκων Dupuis.

Οἱ πίνακες τοῦ Dupuis περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης, τῆς συνεφαπτομένης καὶ τοῦ συνημιτόνου τῶν τόξων ἀπὸ 0° μέχρις 90° , τὰ ὁποῖα αὐξάνουν κατὰ $1'$.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν ἀναγράφεται ἔξω ἀπὸ τὸ πλαίσιο τοῦ πίνακα. Γιά τὰ τόξα πού ἔχουν λιγότερες ἀπὸ 45° , ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν γράφεται στὸ ἐπάνω μέρος τῆς σελίδας. Γιά τὰ ἄλλα τόξα ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν γράφεται στὸ κάτω μέρος τῆς σελίδας.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν στὰ τόξα τὰ μικρότερα ἀπὸ 45° ἀναγράφονται στὴν πρώτη στήλη ἀριστερά, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα μιὰ ὀξεῖα ($'$), ἐνῶ στὰ ἄλλα τόξα γράφεται στὴν πρώτη στήλη ἀπὸ τὰ δεξιά.

Στὴν ἀριστερὴ στήλη τὰ πρῶτα λεπτά αὐξάνονται ἀπὸ πάνω πρὸς τὰ κάτω, ἐνῶ στὴ δεξιὰ αὐξάνονται ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ πάνω.

Μετὴν παραπάνω διάταξη οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν δύο συμπληρωματικῶν τόξων βρίσκονται στὴν ἴδια ὀριζόντια γραμμὴ. Οἱ λογάριθμοι τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἐνὸς τόξου, πού εἶναι μικρότερο ἀπὸ 45° , καὶ δὲν περιέχει δεύτερα λεπτά, βρίσκεται στὴ διασταύρωση τῆς ἀντίστοιχης ὀριζόντιας γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα τὸν τριγωνομετρικὸ ἀριθμὸ.

*Ἄν ὅμως τὸ τόξο περιέχεται μεταξύ 45° καὶ 90° καὶ δὲν ἔχει δεύτερα λεπτά, ὁ λογάριθμος καθενὸς τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ βρίσκεται στὴ διασταύρωση τῆς ἀντίστοιχης γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῆς στήλης, ἡ ὁποία στὸ κάτω μέρος τῆς ἔχει τὴν ὀνομασίαν τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$\log \eta \mu \quad (18^\circ 25') = \bar{1},49958$ $\log \eta \mu \quad (39^\circ 56') = \bar{1},80746$	$\log \eta \mu \quad (67^\circ 16') = \bar{1},96488$ $\log \eta \mu \quad (78^\circ 33') = \bar{1},99127$
$\log \sigma \nu \quad (24^\circ 12') = \bar{1},96005$ $\log \sigma \nu \quad (43^\circ 52') = \bar{1},85791$	$\log \sigma \nu \quad (62^\circ 10') = \bar{1},66922$ $\log \sigma \nu \quad (56^\circ 53') = \bar{1},73747$
$\log \epsilon \phi \quad (30^\circ 14') = \bar{1},76551$ $\log \epsilon \phi \quad (39^\circ 27') = \bar{1},91533$	$\log \epsilon \phi \quad (61^\circ 58') = 0,27372$ $\log \epsilon \phi \quad (48^\circ 19') = 0,05039$
$\log \sigma \phi \quad (29^\circ 39') = 0,24471$ $\log \sigma \phi \quad (44^\circ 51') = 0,00227$	$\log \sigma \phi \quad (52^\circ 11') = \bar{1},88994$ $\log \sigma \phi \quad (77^\circ 38') = \bar{1},34095$

Ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία τους, αὐτὰ γράφονται μόνο στὸν πρῶτο καὶ στὸν τελευταῖο λογάριθμο. Γιά τοὺς ἐνδιάμεσους λογαρίθμους τὰ δύο αὐτὰ ψηφία δέ γράφονται, ἀλλὰ ἐννοοῦνται.

*Αν οι λογάριθμοι αυτοί βρίσκονται σέ περισσότερες σελίδες, τά δύο ὅμοια ψηφία ἀναγράφονται καί στήν ἀρχή καί στό τέλος αὐτῶν τῶν σελίδων.

*Αν στό μεταξύ μεταβληθεῖ τό ἓνα ἀπό τά δύο πρῶτα ψηφία, ὁ λογάριθμος ἀναγράφεται ὁλόκληρος, ὅπως καί ὁ προηγούμενός του.

Μετά ἀπό τίς στήλες τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καί τῶν συνημιτόνων, ὑπάρχουν στήλες μέ ἐπικεφαλίδα τό γράμμα Δ (διαφορά). Στά ἀντίστοιχα τετραγωνίδια ἀναγράφονται σέ μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε'.δ.τ.) οἱ διαφορές τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καί συνημιτόνων δύο διαδοχικῶν τόξων.

Ἐπίσης ὅμοια στήλη ὑπάρχει καί ἀνάμεσα στίς στήλες Εφ καί Σφ πού περιέχουν τίς κοινές διαφορές τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καί συνεφαπτομένων δύο διαδοχικῶν τόξων.

Ἀπό τίς,ισότητες:

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{\sigma\phi\alpha} \quad \text{καί} \quad \epsilon\phi\beta = \frac{1}{\sigma\phi\beta}$$

ἔχουμε:

$$\log \epsilon\phi \alpha = - \log \sigma\phi \alpha \quad \text{καί} \quad \log \epsilon\phi \beta = - \log \sigma\phi \beta$$

καί ἐπομένως:

$$\log \epsilon\phi \alpha - \log \epsilon\phi \beta = \log \sigma\phi \beta - \log \sigma\phi \alpha$$

Στά δεξιά τῶν συνημιτόνων δέν ὑπάρχει στήλη διαφορῶν γιά τα τόξα πού εἶναι μικρότερα ἀπό 18° ἢ μεγαλύτερα ἀπό 71°, γιατί οἱ διαφορές αὐτές εἶναι μικρότερες ἀπό τό 5 καί βρίσκονται εὐκολα ἀπό μνήμης.

Στίς σελίδες τῶν τόξων ἀπό 6° ἕως 83° καί ἔξω ἀπό τό πλαίσιο, ὑπάρχουν μερικά πινακίδια. Καθένα ἀπό τά πινακίδια αὐτά ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα μιὰ ἀπό τίς διαφορές πού εἶπαμε πιο πάνω καί διαιρεῖται σέ δύο στήλες. Ἡ πρώτη στήλη περιέχει τούς μονοψηφίους ἀριθμούς (1 - 9), οἱ ὅποιοι φανερώνουν δεύτερα λεπτά, καί ἡ ἄλλη τίς ἀντίστοιχες μεταβολές τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Τό πινακίδιο π.χ. μέ ἐπικεφαλίδα 23 δείχνει ὅτι, ἂν ἡ διαφορά τῶν λογαρίθμων τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ δύο διαδοχικῶν τόξων εἶναι 23 μ.ε'.δ.τ., σέ αὐξησῇ τοῦ τόξου κατὰ

$$1'' \quad \text{ἢ} \quad 2'' \quad \text{ἢ} \quad 3'' \quad \text{ἢ} \quad \dots \quad \text{ἢ} \quad 9''$$

ἀντιστοιχεῖ αὐξησῇ ἢ ἐλάττωσῇ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἴδιου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ:

$$0,38 \quad \text{ἢ} \quad 0,77 \quad \text{ἢ} \quad 1,15 \quad \text{ἢ} \quad \dots \quad \text{ἢ} \quad 3,45 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

			Ημ	Δ	Εφ	Δ	Σφ	Συν	Δ	
1''	0,52	0	1,67161	24	1,72567	31	0,27433	1,94593	6	60
2	1,03	1	7185	23	2598	30	7402	4587	7	59
3	1,55	2	7208	24	2628	31	7372	4580	7	58
4	2,07	3	7232	24	2659	30	7341	4573	6	57
5	2,58	4	7256		2689		7311	4567		56
6	3,10	—	—	24	—	31	—	—	7	—
7	3,62	5	7280	23	2720	30	7280	4560	7	55
8	4,13	6	7303	24	2750	30	7250	4553	7	54
9	4,65	7	7327	23	2780	31	7220	4546	6	53
30		8	7350	24	2811	30	7189	4540	7	52
1	0,5	9	7374		2841		7159	4533		51
2	1,0	—	—	24	—	31	—	—	7	—
3	1,5	10	7398	23	2872	30	7128	4526	7	50
4	2,0	11	7421	24	2902	30	7098	4519	6	49
5	2,5	12	7445	23	2932	31	7068	4513	7	48
6	3,0	13	7468	24	2963	30	7037	4506	7	47
7	3,5	14	7492		2993		7007	4499		46
8	4,0	—	—	23	—	30	—	—	7	—
9	4,5	15	7515	24	3023	31	6977	4492	7	45
24		16	7539	23	3054	30	6946	4485	6	44
1	0,4	17	7562	24	3084	30	6916	4479	7	43
2	0,8	18	7586	23	3114	30	6886	4472	7	42
3	1,2	19	7609		3144		6856	4465		41
4	1,6	—	—	24	—	31	—	—	7	—
5	2,0	20	7633	23	3175	30	6825	4458	7	40
6	2,4	21	7656	24	3205	30	6795	4451	6	39
7	2,8	22	7680	23	3235	30	6765	4445	7	38
8	3,2	23	7703	23	3265	30	6735	4438	7	37
9	3,6	24	7726		3295		6705	4431		36
23		—	—	24	—	31	—	—	7	—
1	0,38	25	7750	23	3326	30	6674	4424	7	35
2	0,77	26	7773	23	3356	30	6644	4417	7	34
3	1,15	27	7796	24	3386	30	6614	4410	6	33
4	1,53	28	7820	23	3416	30	6584	4404	7	32
5	1,92	29	7843		3446		6554	4397		31
6	2,30	—	—	23	—	30	—	—	7	—
7	2,68	30	1,67866		1,73476		0,26524	1,94390		30
8	3,07									
9	3,45									
			Συν		Σφ		Εφ	Ημ		

	Ημ	Δ	Εφ	Δ	Σφ	Συν	Δ		30
30	1,67866	24	1,73476	31	0,26524	1,94390	7	30	1'' 0,5
31	7890	23	3507	30	6493	4383	7	29	2 1,0
32	7913	23	3537	30	6463	4376	7	28	3 1,5
33	7936	23	3567	30	6433	4369	7	27	4 2,0
34	7959	23	3597	30	6403	4362	7	26	5 2,5
—	—	23	—	30	—	—	7	—	6 3,0
35	7982	24	3627	30	6373	4355	6	25	7 3,5
36	8006	23	3657	30	6343	4349	7	24	8 4,0
37	8029	23	3687	30	6313	4342	7	23	9 4,5
38	8052	23	3717	30	6283	4335	7	22	29
39	8075	23	3747	30	6253	4328	7	21	1 0,48
—	—	23	—	30	—	—	7	—	2 0,97
40	8098	23	3777	30	6223	4321	7	20	3 1,45
41	8121	23	3807	30	6193	4314	7	19	4 1,93
42	8144	23	3837	30	6163	4307	7	18	5 2,42
43	8167	23	3867	30	6133	4300	7	17	6 2,90
44	8190	23	3897	30	6103	4293	7	16	7 3,38
—	—	23	—	30	—	—	7	—	8 3,87
45	8213	24	3927	30	6073	4286	7	15	9 4,35
46	8237	23	3957	30	6043	4279	6	14	23
47	8260	23	3987	30	6013	4273	7	13	1 0,38
48	8283	22	4017	30	5983	4266	7	12	2 0,77
49	8305	23	4047	30	5953	4259	7	11	3 1,15
—	—	23	—	30	—	—	7	—	4 1,53
50	8328	23	4077	30	5923	4252	7	10	5 1,92
51	8351	23	4107	30	5893	4245	7	9	6 2,30
52	8374	23	4137	29	5863	4238	7	8	7 2,68
53	8397	23	4166	30	5834	4231	7	7	8 3,07
54	8420	23	4196	30	5804	4224	7	6	9 3,45
—	—	23	—	30	—	—	7	—	
55	8443	23	4226	30	5774	4217	7	5	22
56	8466	23	4256	30	5744	4210	7	4	1 0,39
57	8489	23	4286	30	5714	4203	7	3	2 0,73
58	8512	22	4316	29	5684	4196	7	2	3 1,10
59	8534	23	4345	30	5655	4189	7	1	4 1,47
—	—	23	—	30	—	—	7	—	6 2,20
60	1,68557		1,74375		0,25625	1,94182		0	7 2,57
—	—		—		—	—		—	8 2,93
	Συν		Σφ		Εφ	Ημ			9 3,30

● **43. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν τριγ. πινάκων.** Τούς λογαριθμικούς τριγωνομετρικούς πίνακες τούς χρησιμοποιοῦμε γιά τήν ἐπίλυση τῶν ἀκόλουθων προβλημάτων.

● **44. ΠΡΟΒΛΗΜΑ I.** *Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος ὁρισμένου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ ἐνός δεδομένου τόξου.*

Λύση. α) *Αν τό δεδομένο τόξο δέν ἔχει δεύτερα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος βρίσκεται στή σελίδα τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καί στή διασταύρωση τῆς ὀριζόντιας γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καί τῆς στήλης πού ἔχει τήν ὀνομασία τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ. *Ἐτσι βρίσκουμε:

$$\begin{array}{l|l} \log \eta \mu (19^{\circ} 38') = 1,52634 & \log \sigma \nu (65^{\circ} 51') = 1,61186 \\ \log \epsilon \phi (26^{\circ} 17') = 1,69361 & \log \sigma \phi (56^{\circ} 23') = 1,82270 \text{ κλπ.} \end{array}$$

β) *Αν τό τόξο περιέχει καί δεύτερα λεπτά, ἐργαζόμαστε ὡς ἐξῆς (γιατί οἱ πίνακες δέν περιέχουν δεύτερα λεπτά):

1ο. *Ὁ $\log \eta \mu (29^{\circ} 15' 18'')$ δέν ὑπάρχει στούς πίνακες. Γιά νά τόν βροῦμε παρατηροῦμε ὅτι:

$$29^{\circ} 15' < 29^{\circ} 15' 18'' < 29^{\circ} 16'$$

$$\begin{array}{l} \text{καί ἄρα:} \quad \eta \mu (29^{\circ} 15') < \eta \mu (29^{\circ} 15' 18'') < \eta \mu (29^{\circ} 16') \\ \text{καί} \quad \log \eta \mu (29^{\circ} 15') < \log (29^{\circ} 15' 18'') < \log (29^{\circ} 16'), \\ \text{ἢ} \quad 1,68897 < \log (29^{\circ} 15' 18'') < 1,68920. \end{array}$$

Δηλαδή ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\overline{1,68897}$ καί $\overline{1,68920}$, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατά 23 μ.ε'.δ.τ.

*Από τόν πίνακα βλέπουμε πῶς σέ αὔξηση τοῦ τόξου κατά 1' ἀντιστοιχεῖ ἡ ἴδια αὔξηση τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου του, ἀρκεῖ τό τόξο νά μή διαφέρει πολὺ ἀπό τό $(29^{\circ} 15')$. Μποροῦμε, λοιπόν, νά θεωρήσουμε τήν αὔξηση περίπου ἀνάλογη μέ τήν αὔξηση τῶν τόξων καί νά ὑπολογίσουμε πόσο πρέπει νά αὔξηθεῖ ὁ $\log \eta \mu (29^{\circ} 15) = \overline{1,68897}$, γιά νά προκύψει ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

*Ὁ ὑπολογισμός γίνεται ὡς ἐξῆς:

*Αν αὔξηθεῖ τό τόξο κατά $1' = 60''$, θά ἔχουμε αὔξηση τοῦ $\log$. κατά 23 μ.ε'.δ.τ.
» » » » 18'', » » » » x ;

$$\text{*Ἀρα} \quad x = 23 \cdot \frac{18}{60} = \frac{414}{60} = 6,9 \text{ ἢ } 7 \text{ μ.ε'.δ.τ. μέ ὑπεροχή.}$$

*Ἐπομένως:

$$\log \eta \mu (29^{\circ} 15' 18'') = 1,68897 + 0,00007 = 1,68904.$$

Οἱ παραπάνω πράξεις γράφονται καί ὡς ἐξῆς:

$$\begin{array}{r|l} \log \eta\mu (29^\circ 16') = 1,68920 & 60'' \quad 23 \mu.\epsilon'.\delta.\tau. \\ \log \eta\mu (29^\circ 15') = 1,68897 & 18'' \quad x ; \\ \hline \Delta = 23 & x = 23 \cdot \frac{18}{60} = 6,9 \text{ ή } 7 \mu.\epsilon'.\delta.\tau. \end{array}$$

*Αρα: $\log \eta\mu (29^\circ 15' 18'') = 1,68897 + 0,00007 = 1,68904.$

2ο. Κατά τόν ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για να βρούμε και τό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης δεδομένου τόξου. Ἔτσι, γιά τήν εὑρεση τοῦ $\log \epsilon\phi (60^\circ 45' 23'')$ γράφουμε:

$$\begin{array}{r|l} \log \epsilon\phi (60^\circ 46') = 0,25209 & 60'' \quad 30 \mu.\epsilon'.\delta.\tau. \\ \log \epsilon\phi (60^\circ 45') = 0,25179 & 23'' \quad x ; \\ \hline \Delta = 30 & x = 30 \cdot \frac{23}{60} = \frac{23}{2} = 11,5 \text{ ή } 12 \mu.\epsilon'.\delta.\tau., \end{array}$$

*Αρα: $\log \epsilon\phi (60^\circ 45' 23'') = 0,25179 + 0,00012 = 0,25191.$

3ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βρούμε τό $\log \sigma\upsilon\nu (60^\circ 48' 28'')$.

Γνωρίζουμε ὅτι, ὅταν αὐξάνεται τό τόξο ἀπό 0 ἕως 90° , τό $\sigma\upsilon\nu\eta\mu\acute{\iota}\tau\omicron\nu$ καί ἡ $\sigma\upsilon\nu\epsilon\phi\alpha\pi\tau\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ ἐλαττώνονται. Ἔτσι σέ αὐξηση τοῦ τόξου ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωση τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Στήν περίπτωση μας:

Ἐπειδὴ $60^\circ 48' < 60^\circ 48' 28'' < 60^\circ 49'$
 θά εἶναι $\sigma\upsilon\nu(60^\circ 48') > \sigma\upsilon\nu(60^\circ 48' 28'') > \sigma\upsilon\nu(60^\circ 49')$
 ἄρα καί $\log \sigma\upsilon\nu(60^\circ 48') > \log \sigma\upsilon\nu(60^\circ 48' 28'') > \log \sigma\upsilon\nu(60^\circ 49')$
 ἢ $1,68829 > \log \sigma\upsilon\nu(60^\circ 48' 28'') > 1,68807.$

Παρατηροῦμε, λοιπόν, ὅτι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται ἀνάμεσα στοὺς ἀριθμούς 1,68829 καί 1,68807, οἱ ὅποιοι διαφέρουν κατὰ $22 \mu.\epsilon'.\delta.\tau.$

Γράφουμε τήν πράξη ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} \log \sigma\upsilon\nu (60^\circ 48') = 1,68829 & 60'' \quad 22 \mu.\epsilon'.\delta.\tau. \\ \log \sigma\upsilon\nu (60^\circ 49') = 1,68807 & 28'' \quad x ; \\ \hline \Delta = 22 & x = 22 \cdot \frac{28}{60} = 10,26 \text{ ή } 10 \mu.\epsilon'.\delta.\tau. \end{array}$$

*Αρα: $\log \sigma\upsilon\nu (60^\circ 48' 28'') = 1,68829 - 0,00010 = 1,68819.$

4ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βρούμε τό $\log \sigma\phi (36^\circ 54' 38'')$

Γράφουμε τήν πράξη ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} \log \sigma\phi (36^\circ 54') = 0,12446 & 60'' \quad 26 \mu.\epsilon'.\delta.\tau. \\ \log \sigma\phi (36^\circ 55') = 0,12420 & 38'' \quad x ; \\ \hline \Delta = 26 & x = 26 \cdot \frac{38}{60} = 16,46 \text{ ή } 16 \mu.\epsilon'.\delta.\tau. \end{array}$$

*Αρα: $\log \sigma\phi (36^\circ 54' 38'') = 0,12446 - 0,00016 = 0,12430.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79. Νά βρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀκόλουθων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\eta\mu (15^\circ 27')$, | 5. $\epsilon\varphi (20^\circ 16')$, | 9. $\eta\mu (25^\circ 10' 18'')$, |
| 2. $\sigma\upsilon\nu (36^\circ 12')$, | 6. $\epsilon\varphi (53^\circ 6')$, | 10. $\eta\mu (55^\circ 26' 39'')$, |
| 3. $\sigma\upsilon\nu (58^\circ 10')$, | 7. $\sigma\varphi (14^\circ 36')$, | 11. $\sigma\upsilon\nu (33^\circ 17' 25'')$, |
| 4. $\eta\mu (65^\circ 25')$, | 8. $\sigma\varphi (70^\circ 14')$, | 12. $\sigma\upsilon\nu (66^\circ 14' 52'')$, |
| 13. $\epsilon\varphi (18^\circ 56' 10'')$, | 16. $\sigma\varphi (24^\circ 19' 10'')$, | |
| 14. $\epsilon\varphi (48^\circ 10' 50'')$, | 17. $\sigma\varphi (70^\circ 34' 15'')$, | |
| 15. $\sigma\varphi (29^\circ 33' 48'')$, | 18. $\eta\mu (123^\circ 56' 10'')$. | |

80. Ἐπίσης τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:

- | | |
|---|--|
| 1. $\eta\mu \frac{3\pi}{7}$, | 3. $\epsilon\varphi \frac{3\pi}{11}$, |
| 2. $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{17}$, | 4. $\sigma\varphi \frac{5\pi}{17}$. |

● 45. ΠΡΟΒΛΗΜΑ II. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο, ἄν δοθεῖ ὁ λογάριθμος ἑνός τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ του.

1ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x , γιά τό ὁποῖο εἶναι:

$$\log \eta\mu x = \bar{1},73940.$$

Λύση. Βρίσκουμε πρῶτα στόν πίνακα ὅτι:

$$\log \eta\mu 45^\circ = \bar{1},84949.$$

Καί ἐπειδή:

$$\bar{1},73940 < \bar{1},84949, \text{ θά ἔχουμε:}$$

$$\eta\mu x < \eta\mu 45^\circ \text{ καί ἄρα } x < 45^\circ.$$

Πρέπει, λοιπόν, νά ἀναζητήσουμε τόν ἀριθμό $\bar{1},73940$ στίς στήλες, τῶν ἡμιτόνων. Τόν βρίσκουμε στή σελίδα τῶν 33° καί στήν ὀριζόντια γραμμή τῶν $17'$. Εἶναι, λοιπόν:

$$\log \eta\mu x = \bar{1},73940^\circ = \log \eta\mu (33^\circ 17')$$

καί ἄρα:

$$x = 33^\circ 17'.$$

Ἄν ὁμως εἶναι: $\log \eta\mu x = \bar{1},68129$, παρατηροῦμε ὅτι:

$$\bar{1},68121 < \bar{1},68129 < \bar{1},68144$$

καί ἐπομένως:

$$28^\circ 41' < x < 28^\circ 42'$$

Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι:

$$\Delta = \bar{1},68144 - \bar{1},68121 = 23 \text{ μ.ε' .δ.τ.,}$$

$$\delta = \bar{1},68129 - \bar{1},68121 = 8 \text{ μ.ε' .δ.τ.}$$

καί καταρτίζουμε τή διάταξη ὡς ἑξῆς:

Αὔξηση λογαρίθμου κατά 23 φέρνει αὔξηση τοῦ τόξου κατά $60''$

» » » 8 » » » » y ;

Ἐπομένως:

$$y = 60'' \cdot \frac{8}{23} = \frac{480''}{23} = 20'', 88.$$

Θά είναι λοιπόν: $x = 28^\circ 41' 20'',88$.

Συντομότερα ἡ πράξις γράφεται ὡς ἑξῆς:

1,68129	1,68144	28° 42'	23	60''
1,68121	1,68121	28° 41'	8	y;
Διαφορές:	8	23	1' = 60''	$y = 60'' \cdot \frac{8}{23} = 20'',88$.

*Άρα: $x = 28^\circ 41' 20'',88$.

2ο. *Αν $\log \epsilon\phi x = 1,85360$, νά ὑπολογισθεῖ ὁ x .

Διάταξη τῶν πράξεων:

1,85360	1,85380	35° 32'	26	60''
1,85354	1,85354	35° 41'	6	y;
Διαφορές:	6	26	1' = 60''	$y = 60'' \cdot \frac{6}{26} = 13'',84$.

*Άρα: $x = 35^\circ 31' 13'',84$.

3ο. *Αν $\log \sigma\upsilon\nu x = 1,85842$, νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x .

Στούς πίνακες παρατηροῦμε ὅτι:

$$1,85851 > 1,85842 > 1,85839$$

καί ἄρα

$$43^\circ 47' < x < 43^\circ 48'.$$

Ἐπομένως, γιά νά βροῦμε τό τόξο x κάνουμε τήν ἀκόλουθη διάταξη:

1,85842	1,85851	43° 47'	12	60''
1,85839	1,85839	43° 48'	3	y;
Διαφορές:	3	12	1' = 60''	$y = 60'' \cdot \frac{3}{12} = 15''$.

Ἐπειδή ὁμως, ὅταν αὐξάνεται τό τόξο ἐλαττώνεται τό συνημίτονο, θά βροῦμε τό τόξο x ὡς ἑξῆς:

$$x = (43^\circ 48') - 15'' = (43^\circ 47' 60'') - 15'' = 43^\circ 47' 45''.$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε καί ὅταν δοθεῖ ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης ἑνός τόξου x .

★ Σημείωση. Οἱ λογάριθμοι στούς πενταψήφιους πίνακες ἔχουν γραφεῖ μέ προσέγγιση 0,00005. Ἐπομένως τά τόξα πού ὑπολογίζονται μέ αὐτούς τούς πίνακες δέν εἶναι μαθηματικά ἀκριβή. Χρειάζεται, λοιπόν, νά ξέρομε σέ ποιά περίπτωση βρίσκουμε τήν ἀκριβέστερη τιμή τοῦ τόξου.

Γιά τοῦτο σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: *Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό μέτρο ἑνός ἀπό τά τόξα πού εἶναι γραμμένα στούς πίνακες εἶναι α . Τότε τό μέτρο τοῦ ἀμέσως μεγαλύτερου του εἶναι $\alpha + 1' = \alpha + 60''$.

Ἀπό τίς σχέσεις:

$$\epsilon\phi(\alpha + 60'') = \frac{\eta\mu(\alpha + 60'')}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + 60'')} \text{ καὶ } \epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$\log \epsilon\phi(\alpha + 60'') = \log \eta\mu(\alpha + 60'') - \log \sigma\upsilon\nu(\alpha + 60'')$$

$$\text{καὶ} \quad \log \epsilon\phi\alpha = \log \eta\mu\alpha - \log \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Γι' αὐτό καί:

$$\log \epsilon\phi(\alpha + 60'') - \log \epsilon\phi\alpha = [\log \eta\mu(\alpha + 60'') - \log \eta\mu\alpha] + [\log \sigma\upsilon\nu\alpha - \log \sigma\upsilon\nu(\alpha + 60'')] \quad (1)$$

Ἄν παραστήσουμε:

$$\left. \begin{aligned} \log \epsilon\phi(\alpha + 60'') - \log \epsilon\phi\alpha &= \delta \\ \log \eta\mu(\alpha + 60'') - \log \eta\mu\alpha &= \delta_1 \\ \log \sigma\upsilon\nu\alpha - \log \sigma\upsilon\nu(\alpha + 60'') &= \delta_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{ἢ (1) γίνεται:} \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

$$\text{καὶ ἐπομένως} \quad \delta > \delta_1 \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad \delta > \delta_2 \quad (3)$$

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἀριθμοὶ δ , δ_1 καὶ δ_2 , ἀφοῦ ἀναφέρονται σὲ πενταψήφιους λογαρίθμους, παριστάνουν ἑκατοντάκισ χιλιοστά (ἐ.χ.).

Ἔτσι, σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα, ἂν πάρουμε ἀντὶ γιὰ τὸ $\log \epsilon\phi(\alpha + 60'')$ τὸ $\log \epsilon\phi\alpha$, κάνουμε λάθος ἴσο μὲ:

$$\log \epsilon\phi(\alpha + 60'') - \log \epsilon\phi\alpha = \delta \quad \text{ἐ.χ.}$$

Ἀλλὰ τότε ἀντὶ γιὰ τὸ τόξο $\alpha + 60''$, θά πάρουμε τὸ α . Ἔτσι τὸ ἀντιστοιχο λάθος στὸ τόξο θά εἶναι ἴσο μὲ $60''$.

Δηλαδή, λάθος δ ἐ.χ. πού συμβαίνει στὸ λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης, προκαλεῖ στὸ τόξο λάθος $60''$.

Ἀπὸ αὐτὸ συμπεραίνουμε ὅτι λάθος k ἐ.χ. στὸ λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης, θά προκαλέσει στὸ τόξο λάθος $60'' \cdot \frac{k}{\delta}$. Ὅμοια σκεπτόμενοι βρίσκουμε ὅτι λάθος k ἐ.χ. στὸ λογάριθμο τοῦ ἡμιτόνου ἢ τοῦ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου, προκαλεῖ στὸ τόξο ἀντίστοιχο λάθος

$$60'' \cdot \frac{k}{\delta_1} \quad \text{ἢ} \quad 60'' \cdot \frac{k}{\delta_2}$$

Ἔχοντας ὁμως ὑπόψη μας καὶ τίς (2), (3) συνάγουμε ὅτι:

$$60'' \cdot \frac{k}{\delta_1} > 60'' \cdot \frac{k}{\delta} \quad \text{καὶ} \quad 60'' \cdot \frac{k}{\delta_2} > 60'' \cdot \frac{k}{\delta}$$

Ἀπὸ αὐτὸ προκύπτει ὅτι κάποιο τόξο προσδιορίζεται ἀκριβέστερα ἀπὸ τὸ λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης παρά ἀπὸ τὸ λογάριθμο τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἢ τοῦ συνημιτόνου του.

81. Νά υπολογισθούν οι μεταξύ 0° και 90° τιμές του τόξου x , οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις:

1. $\log \eta \mu x = \bar{1},84439,$

4. $\log \sigma \varphi x = \bar{1},59183,$

2. $\log \sigma \nu x = \bar{1},65190,$

5. $\log \sigma \varphi x = 0,21251,$

3. $\log \epsilon \varphi x = \bar{1},26035,$

6. $\log \epsilon \varphi x = 1,18954,$

7. $\log \tau \epsilon \mu x = 0,02830.$

● 46. ΠΡΟΒΛΗΜΑ III. Νά βρεθεί τό ελάχιστο θετικό τόξο x από εκείνα πού ἔχουν δεδομένο τριγωνομετρικό ἀριθμό.

Λύση. Ὡς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ελάχιστο θετικό τόξο x , πού ικανοποιεῖ μιὰ ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\eta \mu x = \alpha, \quad \sigma \nu x = \beta, \quad \epsilon \varphi x = \gamma$$

ὅπου $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$. Θά εἶναι:

$$\log \eta \mu x = \log \alpha, \quad \log \sigma \nu x = \log \beta, \quad \log \epsilon \varphi x = \log \gamma.$$

Ἀπό τήν Ἀλγεβρα γνωρίζουμε ὅτι, ἂν δύο θετικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, τότε καί οἱ λογάριθμοί τους θά εἶναι ἴσοι.

Ἄν ὅμως ἕνας ἀπό τοὺς α, β, γ εἶναι ἀρνητικός, τότε αὐτός δέν ἔχει λογάριθμο. Στήν περίπτωση αὕτη ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α') Ἄν $\alpha < 0$, τότε ἀπό τήν $\eta \mu x = \alpha$, παίρνουμε:

$$\eta \mu(x - 180^\circ) = -\alpha > 0.$$

Ἀπό αὐτή τώρα ὀρίζεται τό τόξο $x - 180^\circ$, ἄρα καί τό x .

Παράδειγμα 1ο. Ὡς ὑποθέσουμε ὅτι: $\eta \mu x = -\frac{3}{5}$.

Λύση. Τό ελάχιστο θετικό τόξο πού λήγει στό γ' τεταρτημόριο ὑπερβαίνει τό θετικό ἡμικύκλιο κατὰ κάποιο τόξο y , δηλαδή θά εἶναι:

$$x = 180^\circ + y. \quad \text{Ἄρα: } \eta \mu y = -\eta \mu x = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\log \eta \mu y = \log \frac{3}{5} = \log 3 - \log 5 = 0,47712 - 0,69897 = \bar{1},77815,$$

ἀπ' ὅπου κατὰ τὰ γνωστά:

$$y = 36^\circ 52' 10'',58 \quad \text{καί} \quad \text{ἄρα} \quad x = 180^\circ + y = 216^\circ 52' 10'',58.$$

β') Ἄν $\gamma < 0$, τότε ἀπό τήν

$$\epsilon \varphi x = \gamma < 0 \Leftrightarrow -\epsilon \varphi x = -\gamma > 0 \Leftrightarrow \epsilon \varphi(180^\circ - x) = -\gamma > 0.$$

Παράδειγμα 2ο. Ὡς δεχθοῦμε ὅτι $\epsilon \varphi x = -3$.

Λύση. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\epsilon\phi x = -3 &\Leftrightarrow -\epsilon\phi x = 3 \Leftrightarrow \epsilon\phi(180^\circ - x) = 3 \Rightarrow \\ \log \epsilon\phi(180^\circ - x) &= \log 3 = 0,47712\end{aligned}$$

καί κατά τά γνωστά:

$$180^\circ - x = 71^\circ 31' 54'' \Leftrightarrow x = 108^\circ 26' 6''.$$

γ) Αν $\beta < 0$, τότε από τή:

$$\sigma\upsilon\nu x = \beta < 0 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x = -\beta > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = -\beta > 0.$$

Παράδειγμα 3ο. Άς δεχθοῦμε ὅτι: $\sigma\upsilon\nu x = -0,6$.

Λύση. Έχουμε διαδοχικά:

$$-\sigma\upsilon\nu x = 0,6 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\log \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = \log 3 - \log 5 = 0,47712 - 0,69897 = \bar{1},77815,$$

καί κατά τά γνωστά βρίσκουμε ἀπό ἐδῶ ὅτι:

$$180^\circ - x = 53^\circ 7' 49'',42 \Leftrightarrow x = 126^\circ 52' 10'',58.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

82. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ μεταξύ 0° καί 90° ρίζες τῶν παρακάτω ἐξισώσεων:

- | | | |
|----------------------------------|---|---|
| 1. $\eta\mu x = -\frac{3}{5}$ | 4. $\sigma\phi x = \sigma\upsilon\nu 42^\circ,$ | 7. $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} = \epsilon\phi 150^\circ,$ |
| 2. $\sigma\upsilon\nu x = -0,7,$ | 5. $\tau\epsilon\mu x = -1,8,$ | 8. $\eta\mu 2x = 0,58,$ |
| 3. $\epsilon\phi x = -3,$ | 6. $\sigma\tau\epsilon\mu x = -\frac{4}{3}$ | 9. $\epsilon\phi \left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = -\frac{17}{9}$ |

★ ● **47.** Χρήση τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων γιά τόξα μικρότερα ἀπό 4° καί μεγαλύτερα ἀπό 85° .

Παράδειγμα 1ο. Νά βρεθεῖ ὁ $\log \eta\mu(12' 40'')$.

Λύση. Στούς πίνακες βρίσκουμε ὅτι:

$$\log \eta\mu 12' = \bar{3},54291.$$

Ἐξετάζοντες τίς διαφορές στήν οἰκεία στήλη, βλέπουμε ὅτι σέ κάθε αὔξηση ἢ ἐλάττωση τοῦ τόξου κατά $1'$ δέν ἔχουμε πάντοτε καί τήν ἴδια αὔξηση ἢ τήν ἴδια μείωση τοῦ ἀντίστοιχου λογαρίθμου· οἱ διαφορές εἶναι δυσανάλογες.

Δέν ὑπάρχει λοιπόν οὔτε κατά προσέγγιση ἀναλογία ἀνάμεσα στήν αὔξηση τῶν τόξων καί στήν αὔξηση τοῦ λογαρίθμου. Αὐτό συμβαίνει γιά τούς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς συνεφαπτομένης τῶν τόξων ἐκείνων πού εἶναι μικρότερα ἀπό 4° καί γιά τούς λογαρίθμους τοῦ συνημιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς συνεφαπτομένης τῶν τόξων ἐκείνων πού εἶναι μεγαλύτερα ἀπό 85° . Γι' αὐτό τό λόγο δέν μπορούμε νά ἐφαρμόσουμε στίς περιπτώσεις αὐτές τήν ἀναλογική μέθοδο, τήν ὁποία ἐφαρμόσαμε στά προηγούμενα προβλήματα.

Στις περιπτώσεις αυτές ή λύση τῶν σχετικῶν προβλημάτων γίνεται μέ τήν ἀκόλουθη εἰδική μέθοδο.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$\eta\mu x = x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \quad \text{καί} \quad \epsilon\phi x = x \cdot \frac{\epsilon\phi x}{x}$$

καί ἔπομένως:

$$\log \eta\mu x = \log x + \log \frac{\eta\mu x}{x} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \log \epsilon\phi x = \log x + \log \frac{\epsilon\phi x}{x} \quad (2)$$

*Αν x παριστάνει δεύτερα λεπτά, ὁ $\log x$ βρίσκεται ἀπό τοὺς πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν. Ἐξάλλου ὁ λογάριθμος τῶν λόγων $\frac{\eta\mu x}{x}$ καί $\frac{\epsilon\phi x}{x}$ ἀναγράφεται στό πάνω μέρος τῆς α' σελίδας καί στό κάτω καί ἔξω ἀπό τό πλαίσιο καθεμιᾶς ἀπό τίς ἄλλες σελίδες τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν καί ἔξω ἀπό τό πλαίσió τους. Γιά διάκριση, ὁ $\log \frac{\eta\mu x}{x}$ σημειώνεται μέ τό S , ἐνῶ ὁ $\log \frac{\epsilon\phi x}{x}$ σημειώνεται μέ τό T . Δηλαδή:

$$\log \frac{\eta\mu x}{x} = S \quad \text{καί} \quad \log \frac{\epsilon\phi x}{x} = T.$$

*Αν λοιπόν ἐφαρμόσουμε τήν ἰσότητα (1) στό τόξο $12' 40'' = 760''$ βρίσκουμε ὅτι:

$$\log \eta\mu(12' 40'') = \log 760 + S = 2,88081 + 6,68557 = 3,56638.$$

Παράδειγμα 2ο. *Νά βρεθεῖ ὁ $\log \epsilon\phi (1^\circ 5' 32'')$.*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι $1^\circ 5' 32'' = 3932''$, σύμφωνα μέ τήν ιδιότητα (2) θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \log \epsilon\phi(1^\circ 5' 32'') &= \log \epsilon\phi(3932'') = \\ &= \log 3932 + T = 3,5941 + \bar{6},68563 = \bar{2},28024. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3ο. *Νά βρεθεῖ ὁ $\log \sigma\phi (15' 20'')$.*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$\sigma\phi(15' 20'') = \frac{1}{\epsilon\phi(15' 20'')} \Leftrightarrow \log \sigma\phi(15' 20'') = -\log \epsilon\phi(15' 20'').$$

Ἀλλά:

$$\log \epsilon\phi(15' 20'') = \log 920 + T = 2,96379 + \bar{6},68558 = \bar{3},64937.$$

*Αρα $\log \sigma\phi(15' 20'') = -(\bar{3},64937) = \bar{3},64937 = 2,35063.$

Παράδειγμα 4ο. *Νά βρεθεῖ ὁ $\log \sigma\upsilon\nu (88^\circ 40' 25'')$.*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$90^\circ - (88^\circ 40' 25'') = 1^\circ 19' 35'' = 4775'',$$

θά έχουμε:

$$\log \text{ συν } (88^\circ 40' 25'') = \log \eta\mu (4775'') = 2,36451.$$

Παράδειγμα 5ο. *Νά βρεθῇ ὁ λογ εφ (89° 3' 40'').*

Λύση. Ἐπειδὴ εἶναι: $90^\circ - (89^\circ 3' 40'') = 56' 20'',$ θά εἶναι καί:

$$\varepsilon\varphi(89^\circ 3' 40'') = \sigma\varphi(56' 20'') = \frac{1}{\varepsilon\varphi(56' 20'')}$$

καί ἄρα: $\log \varepsilon\varphi(89^\circ 3' 40'') = -\log \varepsilon\varphi(56' 20'') = -(2,21453) = 1,78547.$

Παράδειγμα 6ο. *Νά βρεθῇ ὁ λογ σφ (88° 50' 25'').*

Λύση. Ἐπειδὴ εἶναι:

$$90^\circ - (88^\circ 50' 25'') = 1^\circ 9' 35''$$

θά εἶναι καί:

$$\log \sigma\varphi(88^\circ 50' 25'') = \log \varepsilon\varphi(1^\circ 9' 35'') = \bar{2},30629.$$

Παράδειγμα 7ο. *Νά βρεθῇ τὸ ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιὰ τὸ ὁποῖο εἶναι :*

$$\log \eta\mu x = \bar{3},72960.$$

Λύση. Ἄν ἀναζητήσουμε τὸ δεδομένο λογάριθμο στὴν ἀντίστοιχη στήλη τῶν λογαριθμικῶν πινάκων, παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸς περιέχεται μεταξύ τῶν 3,71900 καί 3,74248. Εἶναι δηλαδή:

$$\bar{3},71900 < \bar{3},72960 < \bar{3},74248$$

$$\eta \quad \log \eta\mu(18') < \log \eta\mu x < \log \eta\mu(19')$$

$$\eta \quad 18' < x < 19' \Leftrightarrow 1080'' < x < 1140'',$$

καί ἐπομένως $S = \bar{6},68557$. Γι' αὐτὸ ἀπὸ τὴν (1) θά ἔχουμε:

$$\bar{3},72960 = \log x + \bar{6},68557 \Leftrightarrow$$

$$\log x = 3,04403 = \log(1106'', 69) \Leftrightarrow$$

$$x = 1106'', 69 = 18' 28'', 69.$$

Παράδειγμα 8ο. *Νά βρεθῇ τὸ ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιὰ τὸ ὁποῖο εἶναι :*

$$\log \varepsilon\varphi x = \bar{2},45777.$$

Λύση. Ἀπὸ τοὺς πίνακες ἔχουμε:

$$\bar{2},45507 < \bar{2},45777 < \bar{2},45958 \Leftrightarrow$$

$$1^\circ 38' < x < 1^\circ 39' \Leftrightarrow$$

$$5880'' < x < 5940''$$

καί ἐπομένως: $T = \bar{6},68569$ καί ἄρα ἀπὸ τῆς (2):

$$\bar{2},45777 = \log x + \bar{6},68569 \Leftrightarrow$$

$$\log x = 3,77208 = \log(5916'', 7) \Leftrightarrow x = 1^\circ 38' 36'', 7.$$

Παράδειγμα 9ο. *Νά βρεθῇ τὸ ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιὰ τὸ ὁποῖο εἶναι :*

$$\log \text{ συν } x = \bar{2},16833.$$

Λύση. Από τούς πίνακες βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 2,17128 > 2,16833 > 2,16268 & \Leftrightarrow \\ 89^{\circ} 9' < x < 89^{\circ} 10' & \Leftrightarrow \\ 90^{\circ} - (89^{\circ} 9') > 90^{\circ} - x > 90^{\circ} - (89^{\circ} 10') & \Leftrightarrow \\ 51' > 90^{\circ} - x > 50' & \Leftrightarrow \\ 3060'' > 90^{\circ} - x > 3000'' & \end{aligned}$$

Άρα, για τό τόξο $90^{\circ} - x$ είναι: $S = 6,68556$ και
 $\log \eta\mu(90^{\circ} - x) = \log \sigma\upsilon\nu x = 2,16833$.

Έτσι ή (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} 2,16833 &= \log \eta\mu(90^{\circ} - x) + \bar{6},68556 \Leftrightarrow \\ \log \eta\mu(90^{\circ} - x) &= 3,48277 = \log \eta\mu(3039'',29) \Leftrightarrow \\ 90^{\circ} - x &= 3039'',29 = 50' 39'',29 \Leftrightarrow \\ x &= 89^{\circ} 9' 20'',7. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 10ο. Νά βρεθεί τό ελάχιστο θετικό τόξο x , για τό όποίο είναι:
 $\log \sigma\phi x = \bar{3},92888$.

Λύση. Από τούς πίνακες παρατηρούμε ότι :

$$\begin{aligned} \bar{3},94086 > \bar{3},92888 > \bar{3},92619 & \Leftrightarrow \\ 89^{\circ} 30' < x < 89^{\circ} 31' & \Leftrightarrow \\ 30' > 90^{\circ} - x > 29' & \Leftrightarrow \\ 1800'' < 90^{\circ} - x < 1740'' & \text{καί άρα } T = \bar{6},68558. \end{aligned}$$

Έξάλλου: $\log \epsilon\phi(90^{\circ} - x) = \log \sigma\phi x = \bar{3},92888$,

όπότε ή (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} \bar{3},92888 &= \log(90^{\circ} - x)'' + \bar{6},68558 \Leftrightarrow \\ (90^{\circ} - x)'' &= 1751'' = 29' 11' \Leftrightarrow \\ x &= 89^{\circ} 30' 49''. \end{aligned}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

83. Νά βρεθεί τό ελάχιστο θετικό τόξο x , για τό όποίο είναι:

- | | |
|--|---|
| 1. $\log \eta\mu x = \bar{3},72835$, | 4. $\log \sigma\upsilon\nu x = \bar{2},69231$, |
| 2. $\log \epsilon\phi x = \bar{2},77213$, | 5. $\log \epsilon\phi x = 2,48739$, |
| 3. $\log \sigma\phi x = 1,53421$, | 6. $\log \sigma\phi x = 2,53298$. |

84. Νά βρεθεί τό ελάχιστο θετικό τόξο x , για τό όποίο είναι:

$$\sigma\phi x = \frac{\sqrt[3]{\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu A}}{\eta\mu 5A \cdot \epsilon\phi B},$$

όπου $\alpha = -0,08562$, $A = 131^{\circ} 49' 25''$, $B = 36^{\circ} 43' 26''$.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

● 48. Χρησιμότητα μετατροπής παραστάσεων σε άλλες λογαριθμίσιμες.

*Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της παραστάσεως

$$y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \quad \text{αν } x = 24^\circ 36'.$$

θα έχουμε:
$$y = \frac{1 + \sin(24^\circ 36')}{1 - \sin(24^\circ 36')} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι για να βρούμε τον y πρέπει να βρούμε τό $\sin(24^\circ 36')$ και να εκτελέσουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος της (1).

*Από τούς πίνακες βρίσκουμε ότι είναι:

$$\log \sin(24^\circ 36') = \bar{1},95868. \quad \text{*Αρα } \sin(24^\circ 36') = 0,90922$$

και επομένως:

$$y = \frac{1 + 0,90922}{1 - 0,90922} = \frac{1,90922}{0,09078} = 21,031.$$

*Επειδή όμως $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \varphi^2 \frac{x}{2}$, θα έχουμε $y = \varphi^2 \frac{x}{2}$ και άρα :

$$y = \varphi^2(12^\circ 18') \Leftrightarrow \log y = 2 \log \varphi(12^\circ 18') = 2 \cdot 0,66147 = 1,32394$$

από όπου έχουμε: $y = 21,031.$

*Από τὰ παραπάνω διαπιστώνουμε ότι με τό δεύτερο τρόπο τό ζητούμενο βρέθηκε εύκολότερα και με λιγότερες πράξεις. Αυτό οφείλεται στο ότι ή δεδομένη παράσταση αντικαταστάθηκε με την ισοδύναμή της $\varphi^2(12^\circ 18')$, της οποίας τό λογάριθμο βρίσκουμε αν εφαρμόσουμε τή γνωστή ιδιότητα του λογαρίθμου μιᾶς δυνάμεως. Για τό λόγο αυτό ή τελευταία αυτή παράσταση ονομάζεται λογαριθμίσιμη.

*Από τό παράδειγμα αυτό και από άλλα ὅμοια βλέπουμε ότι είναι πολύ χρήσιμο να ξέρουμε πῶς να μετατρέπουμε τριγωνομετρικές παραστάσεις σε άλλες ισοδύναμες και λογαριθμίσιμες.

Στά προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι μερικές παραστάσεις μετατρέπονται σε άλλες ισοδύναμες με μορφή γινομένου ή πηλίκου. *Ετσι είδαμε ότι οί παραστάσεις:

$$\left. \begin{array}{l} \eta\mu\alpha \sin\beta \pm \eta\mu\beta \sin\alpha \\ \sin\alpha \sin\beta \pm \eta\mu\alpha \eta\mu\beta \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \eta\mu A \pm \eta\mu B \\ \sin A \pm \sin B \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon\varphi A \pm \epsilon\varphi B \\ \sigma\varphi A \pm \sigma\varphi B \end{array} \right\} \text{ κλπ.}$$

μετατρέπονται σε μονώνυμα.

Έπαναλαμβάνουμε μερικές γνωστές παραστάσεις που είναι απαραίτητο να τις ξέρουμε.

$1 + \sigma \nu \alpha \equiv 2 \sigma \nu^2 \frac{\alpha}{2}$	(1)	$1 + \eta \mu \alpha \equiv 2 \sigma \nu^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$	(2)
$1 - \sigma \nu \alpha \equiv 2 \eta \mu^2 \frac{\alpha}{2}$	(3)	$1 - \eta \mu \alpha \equiv 2 \eta \mu^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$	(4)
$1 \pm \epsilon \varphi \alpha = \frac{\sqrt{2} \eta \mu (45^\circ \pm \alpha)}{\sigma \nu \alpha}$	(5)	$1 \pm \sigma \varphi \alpha = \frac{\sqrt{2} \eta \mu (\alpha \pm 45^\circ)}{\eta \mu \alpha}$	(6)
$1 - \sigma \nu^2 \alpha \equiv \eta \mu^2 \alpha$	(7)	$1 - \eta \mu^2 \alpha \equiv \sigma \nu^2 \alpha$	(8)
$\frac{1 + \epsilon \varphi \alpha}{1 - \epsilon \varphi \alpha} = \epsilon \varphi (45^\circ + \alpha)$	(9)	$\frac{1 - \epsilon \varphi \alpha}{1 + \epsilon \varphi \alpha} = \epsilon \varphi (45^\circ - \alpha)$	(10)
$1 + \epsilon \varphi^2 \alpha = \frac{1}{\sigma \nu^2 \alpha}$	(11)	$1 + \sigma \varphi^2 \alpha = \frac{1}{\eta \mu^2 \alpha}$	(12)
$\frac{1 + \sigma \nu \alpha}{1 - \sigma \nu \alpha} = \sigma \varphi^2 \frac{\alpha}{2}$	(13)	$\frac{1 - \sigma \nu \alpha}{1 + \sigma \nu \alpha} = \epsilon \varphi^2 \frac{\alpha}{2}$	(14)

● 49. Χρήση βοηθητικής γωνίας. Πολλές φορές διευκολυνόμαστε στη μετατροπή μιᾶς παραστάσεως σέ ἄλλη λογιστή μέ τούς λογαρίθμους, ἂν χρησιμοποιοῦσουμε κατάλληλη βοηθητική γωνία. Ἐτσι:

α) Ἐν $k \in \mathbb{R}^+$, τότε ὑπάρχει γωνία ὀξεία φ , τέτοια ὥστε:

$$\epsilon \varphi \varphi = k \quad \eta \sigma \varphi^2 \varphi = k \quad \eta \epsilon \varphi^2 \varphi = k \quad \eta \sigma \varphi \varphi = k.$$

Ἐν $0 < k < 1$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \eta \mu \varphi \quad \eta \quad k = \sigma \varphi \varphi \quad \eta \quad k = \eta \mu^2 \varphi \quad \eta \quad k = \sigma \nu^2 \varphi.$$

β) Ἐν $k \in \mathbb{R}$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \epsilon \varphi \varphi \quad \eta \quad k = \sigma \varphi \varphi.$$

Ἐν $|k| < 1$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \eta \mu \varphi \quad \eta \quad k = \sigma \nu \varphi.$$

γ) Διαλέγουμε πάντοτε ὡς τιμή τῆς γωνίας φ τήν ἐλάχιστη θετική τῆς ἐξισώσεως που δόθηκε ὡς πρὸς φ . Ἐν $k > 0$, τότε ἡ γωνία φ εἶναι ὀξεία.

Οἱ συνηθέστερες προτάσεις στίς ὁποῖες γίνεται χρήση τῆς μεθόδου (βοηθητικής γωνίας) αὐτῆς ἔχουν τίς ἀκόλουθες μορφές.

● 50. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:

$$y_1 = a + \beta \quad \text{καί} \quad y_2 = a - \beta$$

Λύση. Ἐδῶ ὑποτίθεται ὅτι $\alpha > 0$, $\beta > 0$ καί οἱ λογάριθμοί τους εἶναι γνωστοί.

10. "Ας δεχθούμε ότι $\log \alpha > \log \beta$. "Αρα $\alpha > \beta$. "Ετσι γράφουμε:

$$\alpha \pm \beta = \alpha \left(1 \pm \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

α') "Επειδή $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$, μπορούμε νά βάλουμε:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sin \varphi \quad \eta \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon \varphi^2 \varphi \quad \eta \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon \varphi \varphi,$$

οπότε θά έχουμε αντίστοιχως:

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \sin \varphi) = 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \varepsilon \varphi^2 \varphi) = \frac{\alpha}{\sin^2 \varphi},$$

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \varepsilon \varphi \varphi) = \frac{\alpha \sqrt{2} \eta \mu (45^\circ + \varphi)}{\sin \varphi}$$

β') "Αν βάλουμε:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sin \varphi \quad \eta \quad \frac{\beta}{\alpha} = \eta \mu^2 \varphi \quad \eta \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon \varphi \varphi$$

καί υποθέσουμε ότι $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$ καί $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$, τότε θά έχουμε, αντι-
στοίχως:

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 - \sin \varphi) = 2\alpha \eta \mu^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 - \eta \mu^2 \varphi) = \alpha \sin^2 \varphi,$$

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 + \varepsilon \varphi \varphi) = \frac{\alpha \sqrt{2} \eta \mu (45^\circ - \varphi)}{\sin \varphi}$$

20. "Αν $\log \alpha < \log \beta$, τότε $\alpha < \beta$. "Ετσι γράφουμε:

$$\alpha + \beta = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad \text{καί} \quad \alpha - \beta = \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

καί εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

Παρατήρηση. Γιά νά κάνουμε λογαριθμισμό την παράσταση:

$$x = \alpha - \beta + \gamma - \delta,$$

βάζουμε $\alpha - \beta = A$, $B = A + \gamma$ καί $\Gamma = B - \delta$, καί εργαζόμαστε όπως καί προηγουμένως.

● 51. ΠΡΟΒΛΗΜΑ II. Νά γίνει λογαριθμίσμη ή παράσταση:

$$x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}. \quad (1)$$

Λύση. *Ας υποθέσουμε ότι $\alpha > \beta$. *Αν βάλουμε όπου $\frac{\beta}{\alpha} = \epsilon\phi\phi$,

τότε θα έχουμε :

$$x = \frac{\alpha - \alpha \epsilon\phi\phi}{\alpha + \alpha \epsilon\phi\phi} = \frac{1 - \epsilon\phi\phi}{1 + \epsilon\phi\phi} = \epsilon\phi(45^\circ - \phi),$$

καί αν $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$, μπορούμε να βάλουμε όπου $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\phi$, τότε:

$$x = \frac{\alpha - \alpha \sigma\upsilon\nu\phi}{\alpha + \alpha \sigma\upsilon\nu\phi} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\phi}{1 + \sigma\upsilon\nu\phi} = \epsilon\phi^2 \frac{\phi}{2}.$$

*Αν $\alpha < \beta$, τότε υπολογίζουμε την παράσταση $y = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}$

★ ● 52. ΠΡΟΒΛΗΜΑ III. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οι παραστάσεις:

$$x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{καί} \quad y = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Λύση. 'Η δεύτερη παράσταση, προφανώς, έχει έννοια, όταν $\alpha > \beta$.

α') *Αν βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \epsilon\phi\phi$, ή πρώτη παράσταση γίνεται:

$$x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \alpha \sqrt{1 + \epsilon\phi^2\phi} = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\phi}$$

β') *Αν βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \eta\mu\phi$, τότε ή δεύτερη παράσταση γίνεται:

$$y = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \alpha \sqrt{1 - \eta\mu^2\phi} = \alpha \sigma\upsilon\nu\phi.$$

● 53. ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV. Νά γίνει λογαριθμίσιμη ή παράσταση:

$$y = \alpha \sigma\upsilon\nu x \pm \beta \eta\mu x. \quad (1)$$

Λύση. Έδω υποτίθεται ότι $\alpha\beta \neq 0$ καί $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

*Αν $\frac{\beta}{\alpha} = \epsilon\phi\phi = \frac{\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi}$, ή παράσταση (1) γράφεται:

$$y = \alpha \left(\sigma\upsilon\nu x \pm \frac{\beta}{\alpha} \eta\mu x \right) = \alpha \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi} \eta\mu x \right) = \frac{\alpha \sigma\upsilon\nu(x \mp \phi)}{\sigma\upsilon\nu\phi}$$

$$\text{*Ωστε:} \quad y = \frac{\alpha \sigma\upsilon\nu(x \mp \phi)}{\sigma\upsilon\nu\phi},$$

ή οποία είναι λογαριθμίσιμη.

Παρατήρηση. Θα μπορούσαμε να βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\phi\phi$ ή αν βγει κοι- νός παράγοντας δ β , να βάλουμε :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \epsilon\phi\phi \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \sigma\phi\phi.$$

Παράδειγμα 1ο 'Η παράσταση $y = 3\sigma\eta\chi + 4\eta\mu\chi$ νά γραφεί μέ τή μορφή:

$$y = A\sigma\eta(\chi - \varphi).$$

Λύση. 'Η δεδομένη παράσταση γράφεται:

$$y = 5\left(\frac{3}{5}\sigma\eta\chi + \frac{4}{5}\eta\mu\chi\right) \quad (1)$$

*Αν όμως $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, τότε $\sigma\eta\varphi = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$. *Αρα $\epsilon\varphi\varphi = \frac{4}{3}$

καί έπομένως:

$$y = 5(\sigma\eta\varphi\sigma\eta\chi + \eta\mu\varphi\eta\mu\chi) = 5\sigma\eta(\chi - \varphi) \quad (2)$$

'Η παράσταση (2) είναι τής ζητούμενης μορφής μέ

$$A = 5 \quad \text{καί} \quad \varphi = 53^\circ 7' 48'', 4,$$

γιατί από τήν $\epsilon\varphi\varphi = \frac{4}{3}$ παίρνουμε:

$$\log \epsilon\varphi\varphi = \log 4 - \log 3 = 0,60206 - 0,47712 = 0,12494 = \log \epsilon\varphi(53^\circ 7' 48'', 4).$$

★ **Παράδειγμα 2ο.** Νά γίνει λογαριθμίσιμη ή παράσταση:

$$y = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\eta A} \quad (1)$$

Λύση. Θεωρούμε τούς άριθμούς β καί γ θετικούς μέ $\beta > \gamma$ καί ότι:

$$0^\circ < A < 180^\circ.$$

Τό ύπόρριζο γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\eta A &= (\beta^2 + \gamma^2)\left(\sigma\eta^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{A}{2}\right) - 2\beta\gamma\left(\sigma\eta^2\frac{A}{2} - \eta\mu^2\frac{A}{2}\right) = \\ &= (\beta^2 + \gamma^2)\eta\mu^2\frac{A}{2} + (\beta - \gamma)^2\sigma\eta^2\frac{A}{2} = (\beta^2 + \gamma^2)\eta\mu^2\frac{A}{2}\left[1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\right)^2\sigma\varphi^2\frac{A}{2}\right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$y = (\beta + \gamma)\eta\mu\frac{A}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\right)^2\sigma\varphi^2\frac{A}{2}} \quad (2)$$

*Αν γράψουμε $\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2} = \epsilon\varphi\varphi$, ή (2) γίνεται:

$$y = (\beta + \gamma)\eta\mu\frac{A}{2}\sqrt{1 + \epsilon\varphi^2\varphi} = \frac{\beta + \gamma}{\sigma\eta\varphi}\eta\mu\frac{A}{2}$$

*Ωστε :

$$y = \frac{\beta + \gamma}{\sigma\eta\varphi}\eta\mu\frac{A}{2}$$

★● **54. ΠΡΟΒΛΗΜΑ V.** Νά γίνονν λογαριθμίσιμες οί ρίζες τής δευτεροβάθμιας έξισώσεως:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

Λύση. 'Η κανονική μορφή μιās δευτεροβάθμιας έξισώσεως είναι ή :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (1)$$

*Αν $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$, οι μή μηδενικές ρίζες τῆς εξίσωσης—αν αὐτὴ ἐπιδέχεται τέτοιες—εἶναι λογαριθμίσιμες.

*Αν ἐπίσης $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, πάλι οἱ ρίζες τῆς εξίσωσης εἶναι λογαριθμίσιμες.

Παραλείποντας τὶς περιπτώσεις αὐτές, μένει νὰ ἐξετάσουμε τὴν περίπτωση πού ἡ ἐξίσωση εἶναι πλήρης καὶ ἐπιδέχεται ρίζες πραγματικές καὶ διαφορετικές ἀπὸ τὸ μηδέν.

*Υποτίθεται πάντα $\alpha > 0$. Ἄρα ἡ (1) μπορεῖ νὰ ἔχει τὶς ἀκόλουθες μορφές:

$$\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0 \quad (2) \qquad \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \quad (4)$$

$$\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \qquad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (5)$$

Προφανῶς, οἱ ρίζες τῶν εξισώσεων (4) καὶ (5) εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετες μὲ τὶς ρίζες τῶν εξισώσεων (2) καὶ (3).

Ἄρκει, λοιπόν, νὰ θεωρήσουμε μόνο τὶς εξισώσεις (2) καὶ (3).

α') Ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0$. Στὴν ἐξίσωση αὕτὴ εἶναι $\alpha\gamma < 0$ καὶ ἐπομένως οἱ ρίζες τῆς εἶναι:

$$x_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

*Αν βάλουμε $\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \varepsilon\varphi^2$, ἡ παράσταση $\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}$ γράφεται διαδοχικὰ:

$$\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma} = \beta \sqrt{1 + \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}} = \beta \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2} = \frac{\beta}{\sin\varphi},$$

$$\text{*Αρα: } x_1 = \frac{1}{2\alpha} \left(\beta - \frac{\beta}{\sin\varphi} \right) = \frac{\beta}{2\alpha \sin\varphi} (\sin\varphi - 1) = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\eta\mu^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} \quad (6)$$

$$\text{καὶ } x_2 = \frac{1}{2\alpha} \left(\beta + \frac{\beta}{\sin\varphi} \right) = \frac{\beta}{2\alpha \sin\varphi} (\sin\varphi + 1) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} \quad (7)$$

*Απὸ τὴν $\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \varepsilon\varphi^2 \Leftrightarrow \beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\varepsilon\varphi}$, ὁπότε οἱ (6) καὶ (7) γίνονται:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \sigma\varphi \frac{\varphi}{2}$$

δηλαδή παραστάσεις λογαριθμίσιμες.

β') Ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$. Ἄν εἶναι:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > 4\alpha\gamma,$$

τότε καὶ ἡ ἐξίσωση ἐπιδέχεται ρίζες θετικές, ἐπειδὴ τὸ γινόμενό τους εἶναι θετικό, ὅπως καὶ τὸ ἄθροισμά τους εἶναι θετικό. Αὐτές εἶναι:

$$x_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Έπειδή $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, θά είναι $0 < \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} < 1$ και μπορούμε νά βάλουμε:

$$\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \eta\mu^2\varphi \Leftrightarrow \beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\eta\mu\varphi}$$

Άρα ή παράσταση $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ γράφεται διαδοχικά:

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \beta \sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}} = \beta \sqrt{1 - \eta\mu^2\varphi} = \beta \sigma\upsilon\nu\varphi$$

και έπομένως:

$$x_1 = \frac{1}{2\alpha}(\beta - \beta\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{2\alpha}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\eta\mu^2\frac{\varphi}{2} \quad (8)$$

$$\text{και} \quad x_2 = \frac{1}{2\alpha}(\beta + \beta\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{2\alpha}(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2} \quad (9)$$

Έπειδή όμως $\beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\eta\mu\varphi}$, οί (8) και (9) γίνονται:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\sigma\varphi\frac{\varphi}{2}$$

δηλαδή παραστάσεις λογαριθμίσιμες.

Έφαρμογή. Νά υπολογισθοῦν οί ρίζες τῆς ἐξίσωσης:

$$4x^2 - 25,7x + 35,549 = 0.$$

Λύση. Η εξίσωση αυτή είναι τῆς μορφῆς $ax^2 - bx + \gamma = 0$.

Αν γράψουμε $\eta\mu^2\varphi = \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}$, θά έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \log \eta\mu\varphi &= \frac{1}{2} (\log 4 + \log \alpha + \log \gamma) + \sigma\upsilon\log \beta = \\ &= \frac{1}{2} (0,60206 + 0,60206 + 1,55083) + 2,59007 = 1,96755, \end{aligned}$$

$$\text{όπότε} \quad \varphi = 68^\circ 7' 36'' \quad \text{και} \quad \frac{\varphi}{2} = 34^\circ 3' 48''.$$

Οί ρίζες τῆς ἐξίσωσης προκύπτουν από τίς σχέσεις (8), (9), δηλαδή:

$$x_1 = \frac{\beta}{\alpha} \eta\mu^2\frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \log x_1 &= \log \beta + \sigma\upsilon\log \alpha + 2\log \eta\mu(34^\circ 3' 48'') = \\ &= 1,40993 + 1,39794 + 1,49654 = 0,30441 \Rightarrow \\ x_1 &= \mathbf{2,0156}, \end{aligned}$$

$$\text{και} \quad x_2 = \frac{\beta}{\alpha} \sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\log x_2 &= \log \beta + \sigma \log \alpha + 2 \log \sigma \nu (34^\circ 3' 48'') = \\ &= 1,40993 + \overline{1},39794 + \overline{1},83650 = 0,64437 \Rightarrow \\ x_2 &= 4,4093.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ομάδα

85. Με τη χρήση κατάλληλης βοηθητικής γωνίας, νά γίνουν λογαριθμίσιμες οι ακόλουθες παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} 1. & x = \sqrt{2} - 1, \\ 2. & x = 2 + \sqrt{2}, \\ 3. & x = 2 + \sqrt{3}, \\ 7. & x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} 4. & x = 1 - \sqrt{3}, \\ 5. & x = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \\ 6. & x = 3 - \sqrt{3}, \\ 8. & x = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \end{array} \quad 9. \quad x = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

86. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οι παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} 1. & x = 1 + 2\eta\mu\alpha, \\ 2. & x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha, \\ 3. & x = 1 + \sqrt{2}\eta\mu\alpha, \\ 7. & x = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sqrt{3}\eta\mu\alpha, \end{array} \quad \begin{array}{ll} 4. & x = 2\sigma\upsilon\nu\alpha - \sqrt{3}, \\ 5. & x = 1 - \sqrt{3}\sigma\varphi\alpha, \\ 6. & x = \eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha, \\ 8. & x = \frac{\sqrt{3} + \epsilon\varphi\alpha}{1 - \sqrt{3}\epsilon\varphi\alpha}. \end{array}$$

★ Δεύτερη ομάδα

87. *Αν είναι γνωστοί οι $\log \alpha$ και $\log \beta$ με $\log \alpha > \log \beta$, νά γίνουν λογαριθμίσιμες οι παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} 1. & x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \\ 2. & x = \sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha - \beta}, \\ 5. & x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3. & x = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} + \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}}, \\ 4. & x = \frac{4(\alpha - \beta)\sqrt{\alpha\beta}}{(\alpha + \beta)^2}, \end{array}$$

αν για όλες είναι: $\alpha = 1375$, $\beta = 8602$, $\gamma = 1215$.

88. *Αν $\alpha = 108,7$, $\beta = 73,45$, νά υπολογισθεί ή $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

89. *Αν $\alpha = 71,29$, $\beta = 32,57$, νά υπολογισθεί ή $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

90. *Αν $\alpha = 4258$, $\beta = 3672$ και $\beta \epsilon\varphi 3x = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, νά υπολογισθεί ό x έτσι, ώστε $0^\circ < x < 180^\circ$.

91. *Αν $\alpha = 4625,5$, $\beta = 3944,6$, $\theta = 51^\circ 57' 44''$, $\theta_1 = 63^\circ 18' 27''$ και

$$\epsilon\varphi 2x = \frac{\alpha \eta\mu\theta_1 - \beta \eta\mu\theta}{\alpha \eta\mu\theta_1 + \beta \eta\mu\theta},$$

νά υπολογισθεί ό x , για νά είναι: $0^\circ < x < 180^\circ$.

92. Νά έπιλυθεί ή έξίσωση:

$$8x^2 - 36,75x - 25,628 = 0.$$

93. *Επίσης οι έξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} 1. & x^2 - 148,7x + 1385 = 0, \\ 2. & x^2 - 245,7x - 1247,6 = 0, \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3. & x^2 + 16,75x - 64,53 = 0, \\ 4. & x^2 + 75,23x - 433,7 = 0. \end{array}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

	Σελίδα
1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί του $\alpha \pm \beta$	5 - 9
2. Έφαρμογές	9 - 11
3. Ταυτότητες υπό συνθήκες — Άσκήσεις	11 - 14
4. Τριγωνομετρικοί αριθμοί του $\alpha + \beta + \gamma$ — Άσκήσεις	14 - 16
5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί άκεραίων πολλαπλάσιων τόξων	16 - 18
6. Τύποι του Simpson	18
7. Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$ — Άσκήσεις	18 - 20
8. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου 2α από την $\epsilon\phi \alpha$	21
9. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας α από την $\epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$	22
10. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας α από το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$	22-24
11. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$ από το $\sigma\upsilon\nu \alpha$	24
Έφαρμογές	25 - 27
12. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας α από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$	28
Έφαρμογές — Άσκήσεις	28 - 30
13. Η $\epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$ από την $\epsilon\phi \alpha$ — Παραδείγματα	30 - 32

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

14. Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων	33 - 35
15. Έφαρμογές — Άσκήσεις	36 - 40
16. Μετασχηματισμός γινομένων σε άθροισματα ή διαφορές	40
Έφαρμογές — Άσκήσεις	41 - 45

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

17. Τριγωνομετρικές ταυτότητες πάνω στο τρίγωνο και στο τετράπλευρο	46 - 51
Άσκήσεις	51 - 53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

18. Έφαρμογές των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών. Τύποι του Mollweide ..	54 - 55
19. Τριγωνομετρικοί αριθμοί των μισών των γωνιών τριγώνου από τις πλευρές του	55 - 56
20. Έμβαδό τριγώνου	57
21. Έμβαδό τριγώνου από τις πλευρές του	57
22. Υπολογισμός της ακτίνας R του περιγραμμένου κύκλου σε τρίγωνο από τις πλευρές του α, β, γ	57 - 58
23. Έμβαδό τριγώνου από την R και από τ'ά ημίτονα των γωνιών αυτού ...	58
Έφαρμογές — Άσκήσεις	58 - 62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

24. Τριγωνομετρικοί πίνακες — Περιγραφή τους — Άσκήσεις	63 - 64
25. Έφαρμογές των τριγωνομετρικών πινάκων — Προβλήματα — Άσκήσεις	68 - 77

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

26. Λογαριθμίσιμες παραστάσεις — Έφαρμογές — Άσκήσεις	78 - 85
---	---------

ΕΚΔΟΣΗ ΣΤ', 1977 (VIII) - ΑΝΤΙΤ. 85.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ 2873/31-5-1977

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΤΟΥΜΑΖΑΤΟΣ

