

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ε. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Μέ απόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τὰ διδακτικά
βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώ-
νονται ἀπό τόν Ὄργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βι-
βλίων καί μοιράζονται Δ Ω Ρ Ε Α Ν.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ε. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1978

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Όρισμοί και βασικές έννοιες

1.1. Από την Άλγεβρα γνωρίζουμε τον όρισμό μιᾶς ἀλγεβρικής ἐξισώσεως (ὡς πρὸς x) $A(x) = B(x)$, ὅπου A καὶ B εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς x . Ἄν ἓνα τουλάχιστον ἀπὸ τὰ μέλη τῆς παραπάνω ἐξισώσεως περιέχει τὴν τιμὴ μιᾶς ἢ περισσοτέρων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων¹⁾ στὴ θέση $\varphi(x)$, ὅπου φ ὁποιαδήποτε πραγματικὴ συνάρτηση τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς x , τότε ἡ ἐξίσωση αὐτὴ ὀνομάζεται **τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση** ὡς πρὸς x . Μὲ ἄλλα λόγια, ὀνομάζεται τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση ὡς πρὸς x κάθε ἀλγεβρικὴ ἐξίσωση ὡς πρὸς x , ποὺ στὸ ἓνα μέλος τῆς, τουλάχιστον, ὑπάρχει ἓνας ἢ περισσότεροι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ x ἢ τοῦ $\varphi(x)$, ὅπου φ ὁποιαδήποτε πραγματικὴ συνάρτηση. Π.χ. οἱ ἐξισώσεις :

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x = 2, \quad \sigma\upsilon\nu 5x = -\frac{1}{2}, \quad \epsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\varphi(\eta\mu x),$$

$$\epsilon\varphi x = x, \quad \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

εἶναι τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις.

Κάθε τόξο χ_0 ποὺ ἐπαληθεύει μιὰ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση λέγεται **μερικὴ λύση** ἢ **μιὰ λύση** αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως. Π.χ. τὸ τόξο $\frac{2\pi}{15}$ εἶναι μιὰ μερικὴ λύση τῆς ἐξισώσεως $\sigma\upsilon\nu 5x = -\frac{1}{2}$. Τὸ σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως ὀνομάζεται **γενικὴ λύση** ἢ **πιὸ ἀπλὰ λύση**. Ἡ εὕρεση

¹⁾ . Ὄταν θὰ λέμε «τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις» θὰ ἐννοοῦμε τὶς συναρτήσεις $\eta\mu$, $\sigma\upsilon\nu$, $\epsilon\varphi$, $\sigma\varphi$, $\tau\epsilon\mu$ καὶ $\sigma\tau\epsilon\mu$. Ὑπενθυμίζουμε ἀκόμα ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\varphi x$, $\sigma\varphi x$, $\tau\epsilon\mu x$ καὶ $\sigma\tau\epsilon\mu x$ εἶναι οἱ τιμὲς τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων στὴ θέση $x \in \mathbf{R}$.

Ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ, δηλαδὴ τὸ τόξο, ὅπως λέμε στὴν Τριγωνομετρίᾳ, τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων θὰ θεωρεῖται πάντοτε πραγματικὸς ἀριθμὸς.

της γενικής λύσεως μιᾶς τριγωνομετρικής εξίσωσεως λέγεται **ἐπίλυση** ἢ **λύση** τῆς τριγωνομετρικής εξίσωσεως.

Ἄν κάθε τόξο εἶναι μερική λύση μιᾶς τριγωνομετρικής εξίσωσεως, τότε ἡ εξίσωση αὐτή εἶναι **τριγωνομετρική ταυτότητα**. Π.χ. ἡ εξίσωση $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$ εἶναι μία τριγωνομετρική ταυτότητα, γιατί ἐπαληθεύεται γιὰ κάθε $\chi \in \mathbf{R}$.

Ὅταν μιὰ τριγωνομετρική εξίσωση δὲν ἐπαληθεύεται μὲ κανένα τόξο, τότε θὰ λέμε ὅτι ἡ εξίσωση αὐτή εἶναι **ἀδύνατη**. Π.χ. ἡ εξίσωση $\eta\mu\chi = 2$ εἶναι ἀδύνατη.

Ἡ ἐπίλυση ὁποιασδήποτε τριγωνομετρικῆς εξίσωσεως ἀνάγεται τελικὰ στὴν ἐφαρμογὴ ἑνὸς ἀπὸ τὰ τέσσερα βασικὰ θεωρήματα, ποὺ διατυπώνονται σύντομα μὲ ἐπόμενες ἰσοδυναμίες :

$$(\Theta_1) \quad \eta\mu\chi = \eta\mu\psi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi \quad \eta \\ \chi = (2\lambda + 1)\pi - \psi \end{cases} \quad (\kappa, \lambda \in \mathbf{Z})$$

$$(\Theta_2) \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\psi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi \quad \eta \\ \chi = 2\lambda\pi - \psi \end{cases} \quad (\kappa, \lambda \in \mathbf{Z})$$

$$(\Theta_3) \quad \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\psi \quad \Leftrightarrow_{\kappa \in \mathbf{Z}} \quad \chi = \kappa\pi + \psi \quad (\chi \quad \eta \quad \psi \neq \rho\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \rho \in \mathbf{Z})$$

$$(\Theta_4) \quad \sigma\phi\chi = \sigma\phi\psi \quad \Leftrightarrow_{\kappa \in \mathbf{Z}} \quad \chi = \kappa\pi + \psi \quad (\chi \quad \eta \quad \psi \neq \rho\pi, \quad \rho \in \mathbf{Z})$$

Λύνουμε καὶ διερευνοῦμε παρακάτω ὁρισμένες κλασικὲς μορφὲς τριγωνομετρικῶν εξισώσεων στὶς ὁποῖες ἀνάγεται κάθε ἄλλη τριγωνομετρικὴ εξίσωση.

2. Θεμελιώδεις τριγωνομετρικὲς εξισώσεις

2.1. $\eta\mu\chi = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). Γιὰ τὴ λύση αὐτῆς τῆς εξίσωσεως παρατηροῦμε ὅτι :

α) Ἄν $|\alpha| > 1$ ($\Leftrightarrow \alpha > 1$ ἢ $\alpha < -1$), ἡ εξίσωση εἶναι ἀδύνατη, γιατί $|\eta\mu\chi| \leq 1$ γιὰ κάθε τόξο $\chi \in \mathbf{R}$.

β) Ἄν $|\alpha| \leq 1$ ($\Leftrightarrow -1 \leq \alpha \leq 1$), τότε ἡ εξίσωση ἔχει λύση, ποὺ τὴ βρίσκουμε ὡς ἑξῆς :

Θὰ ὑπάρχει τόξο $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ὥστε $\eta\mu\varphi = \alpha$, ὁπότε ἡ εξίσωση ἰσοδύναμα γράφεται :

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\varphi \quad (1)$$

Εἶναι φανερό ὅτι τὸ τόξο φ εἶναι μιὰ μερική λύση τῆς εξίσωσεως $\eta\mu\chi = \alpha$.

Σύμφωνα τώρα με την παραπάνω ισοδυναμία (Θ_1), βρίσκουμε τη γενική λύση της (1), που δίνεται από τους τύπους

$$\chi = 2\kappa\pi + \varphi \text{ και } \chi = (2\lambda + 1)\pi - \varphi \quad (\kappa, \lambda \in \mathbf{Z})$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε άκεραη τιμή του κ ή λ βρίσκουμε από τους παραπάνω τύπους και μία μερική λύση. Π.χ. για $\kappa = 0$ βρίσκουμε τη μερική λύση $\chi = \varphi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 3\chi = -\frac{1}{2}$ και από τη γενική της λύση νά βρεθεί η ελάχιστη θετική.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται: $\eta\mu 3\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Η γενική λύση της δίνεται από τους τύπους:

$$\left. \begin{aligned} 3\chi_{\kappa} &= 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad (\kappa \in \mathbf{Z}) \\ 3\chi_{\rho} &= (2\rho + 1)\pi + \frac{\pi}{6} \quad (\rho \in \mathbf{Z}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \chi_{\kappa} &= \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \quad (1) \\ \chi_{\rho} &= \frac{2\rho\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} \quad (2) \end{aligned} \right.$$

Εξετάζουμε τώρα ποιές από τις λύσεις που βρήκαμε είναι θετικές. Για να είναι οι λύσεις θετικές πρέπει και αρκεί:

$$\left\{ \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{18} > 0 \text{ και } \frac{2\rho\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} > 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \kappa > \frac{1}{12} \text{ και } \rho > -\frac{7}{12} \right\}$$

Άρα, για $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ και $\rho = 0, 1, 2, \dots$ παίρνουμε από τους τύπους (1) και (2), αντίστοιχως, θετικές λύσεις. Άκόμα παρατηρούμε ότι:

$$\chi_{\kappa+1} > \chi_{\kappa} \text{ και } \chi_{\rho+1} > \chi_{\rho}, \quad \forall \kappa, \rho \in \mathbf{Z}.$$

Επομένως οι συναρτήσεις των τύπων (1) και (2) είναι αύξουσες. Ωστε, από τις μερικές λύσεις (1) η ελάχιστη θετική αντιστοιχεί στην τιμή $\kappa = 1$ και είναι $\frac{11\pi}{18}$. Επίσης, για $\rho = 0$, βρίσκουμε την ελάχιστη θετική λύση, από τις μερικές λύσεις (2), που είναι $\frac{7\pi}{18}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu \frac{3\chi}{2} = -\frac{1}{2}$.

Λύση. Η εξίσωση $\eta\mu \frac{3\chi}{2} = -\frac{1}{2}$ είναι ισοδύναμη με την: $\eta\mu\left(-\frac{3\chi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Επίσης είναι γνωστό ότι $\eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ και επομένως η εξίσωση γράφεται:

$\eta\mu\left(-\frac{3\chi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6}$. Η γενική λύση της είναι:

$$\begin{cases} -\frac{3\chi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} & (\kappa \in \mathbf{Z}) \end{cases} \quad (1)$$

ή

$$\begin{cases} -\frac{3\chi}{2} = (2\rho + 1)\pi - \frac{\pi}{6} & (\rho \in \mathbf{Z}) \end{cases} \quad (2)$$

Λύνοντας άλγεβρικά ως προς χ τις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\begin{cases} \chi = -\frac{4\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \\ \chi = -\frac{4\rho\pi}{3} - \frac{5\pi}{9} \end{cases}$$

2. 2. $\sigma\upsilon\nu\chi = \lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}$). Όπως και στην προηγούμενη θεμελιώδη εξίσωση $\eta\mu\chi = \alpha$, έτσι και εδώ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για την παράμετρο λ :

α) Αν $|\lambda| > 1$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

β) Αν $|\lambda| \leq 1$, τότε η εξίσωση έχει λύση και βρίσκεται ως εξής:

Θά υπάρχει τόξο $\varphi \in [0, \pi]$ τέτοιο, ώστε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \lambda$ και επομένως η εξίσωση γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (1)$$

Η γενική λύση της (1), σύμφωνα με την παραπάνω ισοδυναμία (Θ_2), είναι:

$$\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \varphi & (\kappa \in \mathbf{Z}) \\ \chi = 2\rho\pi - \varphi & (\rho \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 3\chi = \frac{1}{4}$.

Λύση. Από τους λογαριθμικούς πίνακες βρίσκουμε το ελάχιστο θετικό τόξο τ τέτοιο, ώστε $\sigma\upsilon\nu\tau = \frac{1}{4}$. Το τόξο τ βρίσκεται με λογαρίθμηση της σχέ-

σεως $\sigma\upsilon\nu\tau = \frac{1}{4}$, ως εξής:

$$\begin{aligned}\log\sigma\text{υν}\tau &= \log\frac{1}{4} \Rightarrow \log\sigma\text{υν}\tau = -\log 4 \Rightarrow \log\sigma\text{υν}\tau = \bar{1},39794 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tau = 75^\circ 31' 21''.\end{aligned}$$

Έπομένως η εξίσωση $\sigma\text{υν}3\chi = \frac{1}{4}$ γράφεται: $\sigma\text{υν}3\chi = \sigma\text{υν} 75^\circ 31' 21''$ και η γενική λύση της είναι:

$$\left. \begin{aligned} 3\chi &= 360^\circ\kappa + 75^\circ 31' 21'' \\ \eta \quad 3\chi &= 360^\circ\lambda - 75^\circ 31' 21'' \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \chi &= 120^\circ\kappa + 25^\circ 10' 27'' \quad (\kappa \in \mathbb{Z}) \\ \chi &= 120^\circ\lambda - 25^\circ 10' 27'' \quad (\lambda \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \right.$$

2.3. $\epsilon\phi\chi = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Η εξίσωση αυτή έχει πάντοτε λύση, εφόσον $\lambda \in \mathbb{R}$.

Υπάρχει τόξο $\omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, πού βρίσκουμε από τους πίνακες, τέτοιο, ώστε $\epsilon\phi\omega = \lambda$. Η εξίσωση τώρα γράφεται:

$$\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\omega \quad (1)$$

Η γενική λύση της (1), σύμφωνα με την ισοδυναμία (Θ_3) , είναι $\chi = \kappa\pi + \omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Όμοια λύνεται και η παρακάτω θεμελιώδης τριγωνομετρική εξίσωση.

2.4. $\sigma\phi\chi = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθούν μέσα στο διάστημα $(0, \frac{3\pi}{4})$ οι λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\phi 2\chi = \sqrt{3}$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται $\epsilon\phi 2\chi = \epsilon\phi \frac{\pi}{3}$. Η γενική λύση της είναι:

$$2\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (\kappa \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε:

$$0 < \chi < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \kappa < \frac{7}{6}$$

Οι μοναδικές ακέραιες τιμές του κ μέσα στο διάστημα $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{6}\right)$ είναι 0 και

1. Από τη γενική λύση (1) με $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$ βρίσκουμε $\chi = \frac{\pi}{6}$ και $\chi = \frac{2\pi}{3}$, πού είναι οι ζητούμενες λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά επιλυθεί ή εξίσωση : $\epsilon\phi\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\epsilon\phi\left(\frac{\chi}{3}-\frac{\pi}{18}\right)$ (E)

Έπίλυση. Είναι :

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{3} = \kappa\pi + \frac{\chi}{3}-\frac{\pi}{18}, \quad \kappa \in \mathbf{Z} \\ \frac{\chi}{2}-\frac{\pi}{3} \neq \rho\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \rho \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = 6\kappa\pi + \frac{5\pi}{3} \quad (1) \\ \chi \neq 2\rho\pi + \frac{5\pi}{3} \quad (2) \end{array} \right.$$

Τά τόξα (1) είναι τής μορφής (2) καί έπομένως ή εξίσωση (E) είναι αδύνατη.
 Άναφέρουμε παρακάτω όρισμένες θεμελιώδεις τριγωνομετρικές εξισώσεις καί τίς λύσεις τους.

$\eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi$	$\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
$\eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi$
$\eta\mu\chi = -1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\chi = -1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \pi$
$\epsilon\phi\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi$	$\sigma\phi\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

(Σέ όλες τίς παραπάνω λύσεις ό κ είναι άκέραιος)

3. Τριγωνομετρικές εξισώσεις πού ανάγονται σέ θεμελιώδεις

3.1. Τριγωνομετρική εξίσωση άλγεβρικής μορφής. Κάθε εξίσωση $f(t) = 0$, όπου τό t είναι τριγωνομετρικός αριθμός καί τό $f(t)$ άκέραιο πολυώνυμο ώς πρός t, όνομάζεται τριγωνομετρική εξίσωση άλγεβρικής μορφής. Για νά λύσουμε μιá τέτοια εξίσωση έργαζόμαστε μέ τόν έξής τρόπο :

Λύνουμε πρώτα τήν άλγεβρική ώς πρός t εξίσωση $f(t) = 0$. Άν υποθέσουμε ότι $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι οί ρίζες τής άλγεβρικής εξισώσεως $f(t) = 0$, τότε ή αντίστοιχη τριγωνομετρική εξίσωση είναι ίσοδύναμη μέ τίς έπόμενες θεμελιώδεις τριγωνομετρικές εξισώσεις :

$$t = t_1, \quad t = t_2, \dots, \quad t = t_n. \quad (1)$$

Οί λύσεις όλων τών εξισώσεων (1) είναι ή (γενική) λύση τῆς $f(t) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\epsilon\phi^2\chi - (1 + \sqrt{3})\epsilon\phi\chi + \sqrt{3} = 0$ (E)

Λύση. Ἡ (E) εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρὸς $\epsilon\phi\chi$ καὶ ἔχει ρίζες τοὺς ἀριθμοὺς $1, \sqrt{3}$.

Ἄρα θὰ ἔχουμε :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi\chi = 1 & (\alpha) \\ \eta \\ \epsilon\phi\chi = \sqrt{3}. & (\beta) \end{cases}$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λύσουμε τὶς ἐξισώσεις (α) καὶ (β). Εἶναι :

$$(\alpha) \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

$$(\beta) \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \rho\pi + \frac{\pi}{3}, \rho \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Ἐπομένως ἡ γενικὴ λύση τῆς (E) εἶναι τὰ τόξα (1) καὶ (2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $2\eta\mu^2\chi - 5\eta\mu\chi + 2 = 0$ (E)

Λύση. Ἡ (E) εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρὸς $\eta\mu\chi$ καὶ ἐπειδὴ οἱ ρίζες τῆς εἶναι 2 καὶ $\frac{1}{2}$, θὰ ἔχουμε :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\chi = \frac{1}{2} & (1) \\ \eta \\ \eta\mu\chi = 2. & (2) \end{cases}$$

Εἶναι φανερὸ πὼς ἡ (2) εἶναι ἀδύνατη. Ἡ λύση τῆς (1) καὶ ἐπομένως καὶ τῆς (E) εἶναι :

$$\begin{aligned} \chi &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \eta \chi &= (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{aligned} \quad (\kappa \in \mathbf{Z})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\eta\mu^3\chi + 2\eta\mu^2\chi - \eta\mu\chi - 2 = 0$.

Λύση. Ἡ ἐξίσωση γράφεται :

$$(\eta\mu^3\chi - \eta\mu\chi) + 2(\eta\mu^2\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi(\eta\mu^2\chi - 1) + 2(\eta\mu^2\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu\chi + 2)(\eta\mu^2\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi + 2)(\eta\mu\chi + 1)(\eta\mu\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \eta\mu\chi = -2 \quad \text{ή} \quad (\alpha) \\ \eta\mu\chi = 1 \quad \text{ή} \quad (\beta) \\ \eta\mu\chi = -1 \quad \text{ή} \quad (\gamma) \end{cases}$$

Ἡ ἐξίσωση (α) εἶναι ἀδύνατη. Οἱ λύσεις τῶν (β) καὶ (γ) εἶναι :

$$\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad \chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} \quad (\kappa, \lambda \in \mathbb{Z})$$

Παρατήρηση. Ἡ διερεύνηση μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως $f(t) = 0$ ἀλγεβρικῆς μορφῆς, ἀνάγεται συνήθως στὴ διερεύνηση τῆς ἀντίστοιχης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως. Ὅμως, στὴν περίπτωση αὐτή, θὰ πρέπει νὰ προσέχουμε τὰ ὅρια μεταβολῆς τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ t τῆς ἐξισώσεως $f(t) = 0$. Π.χ. ἡ ἐξίσωση $\alpha\varphi^2\chi + \beta\varphi\chi + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρὸς $\varphi\chi = t$ καὶ ἰσχύει :

$$(E) : \alpha\varphi^2\chi + \beta\varphi\chi + \gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi\chi = t_1 \\ \varphi\chi = t_2 \end{cases}$$

ὅπου t_1, t_2 , εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἀντίστοιχης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$. Ἡ (E) ἔχει λύση τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν οἱ ρίζες t_1, t_2 εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (βλέπε 2.3). Ἀρα, ἡ (E) ἔχει λύση τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$. Ὅμοια διερευνοῦμε τὴν ἐξίσωση $\alpha\sigma\varphi^2\chi + \beta\sigma\varphi\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.

Ἡ διερεύνηση τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως $\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\eta\mu\chi + \gamma = 0$ ἀνάγεται στὴ διερεύνηση τῆς ἀντίστοιχης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ μὲ $-1 \leq t \leq 1$, γιατί θέσαμε $\eta\mu\chi = t$.

Γιὰ νὰ κατανοήσουμε καλύτερα τὴν παραπάνω παρατήρηση, ἀναφέρουμε τὰ ἀμέσως ἐπόμενα δύο παραδείγματα :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Νὰ λυθεῖ καὶ διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\eta\mu\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (E) .

Λύση. Ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\chi = t_1 \quad \text{ή} \quad (1) \\ \eta\mu\chi = t_2 \quad (2) \end{cases}$$

ὅπου t_1, t_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἀντίστοιχης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ ($\eta\mu\chi = t$). Γιὰ τὴ διερεύνηση τῆς (E) πρέπει νὰ μελετήσουμε προσεκτικὰ τὶς παρακάτω ἰσοδύναμες προτάσεις :

i) Ἡ ἐξίσωση (E) ἔχει λύση.

ii) Μία τουλάχιστον ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχει λύση.

iii) Μία τουλάχιστον ρίζα από τις t_1, t_2 είναι **δεκτή**, δηλαδή ανήκει στο διάστημα $[-1, 1]$.

Σύμφωνα τώρα με την παραπάνω πρόταση iii), μπορούμε να διατυπώσουμε τις συνθήκες για να έχει λύση ή (Ε). Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις :

1) 'Η εξίσωση $f(t) = at^2 + bt + \gamma = 0$ έχει **μια μόνο δεκτή ρίζα**, όταν :
 1_α) Μια μόνο ρίζα της ανήκει στο διάστημα $(-1, 1)$. 'Η ίκανή και αναγκαία συνθήκη γι' αυτό είναι :

$$f(-1)f(+1) < 0 \Leftrightarrow (a + \beta + \gamma)(a - \beta + \gamma) < 0.$$

1_β) 'Η μια ρίζα να είναι 1 και ή άλλη έξω από το διάστημα $[-1, 1]$. Αυτό ισχύει τότε και μόνο τότε, όταν :

$$\left(f(1) = 0, \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| > 1 \right) \Leftrightarrow \left(a + \beta + \gamma = 0, \left| \frac{\gamma}{a} \right| > 1 \right).$$

γιατί, αν $t_1 = 1$, τότε, από τη σχέση $t_1 t_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, βρίσκουμε $t_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

1_γ) 'Η μια ρίζα να είναι το -1 και ή άλλη έξω από το διάστημα $[-1, 1]$. Αυτό ισχύει τότε και μόνο τότε, όταν :

$$\left(f(-1) = 0, \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| > 1 \right) \Leftrightarrow \left(a - \beta + \gamma = 0, \left| \frac{\gamma}{a} \right| > 1 \right).$$

1_δ) 'Η αντίστοιχη αλγεβρική εξίσωση να έχει διπλή ρίζα¹⁾ δεκτή. 'Η ίκανή και αναγκαία συνθήκη γι' αυτό είναι :

$$\left(\Delta = 0, \left| -\frac{\beta}{2\alpha} \right| \leq 1 \right) \Leftrightarrow \left(\beta^2 - 4a\gamma = 0, \left| \frac{\beta}{2a} \right| \leq 1 \right).$$

2) 'Η εξίσωση $f(t) = at^2 + bt + \gamma = 0$ έχει δύο δεκτές ρίζες τότε και μόνο τότε, όταν :

$$\left(\Delta > 0, af(-1) \geq 0, af(+1) \geq 0, -1 + \frac{\beta}{2\alpha} < 0, 1 + \frac{\beta}{2\alpha} > 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\beta^2 - 4a\gamma > 0, a(a - \beta + \gamma) \geq 0, a(a + \beta + \gamma) \geq 0, -1 + \frac{\beta}{2a} < 0, 1 + \frac{\beta}{2a} > 0 \right).$$

¹⁾ Στην περίπτωση αυτή δε μας ενδιαφέρει ο βαθμός πολλαπλότητας της ρίζας.

Παραπάνω αναφέραμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να λύνεται ή (Ε) και επομένως σε κάθε άλλη περίπτωση ή (Ε) είναι αδύνατη. Όμοια μπορούμε να λύσουμε και να διερευνήσουμε την εξίσωση :

$$\alpha \sin^2 \chi + \beta \sin \chi + \gamma = 0 \quad (\alpha \neq 0).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$ ή εξίσωση $\epsilon \phi^2 \chi + \lambda \epsilon \phi \chi + 1 = 0$ έχει μια μόνο λύση μέσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Λύση. Θα πρέπει να ισχύει: $0 < \chi < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \epsilon \phi 0 < \epsilon \phi \chi < \epsilon \phi \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Rightarrow 0 < \epsilon \phi \chi < 1$. Θέτουμε $\epsilon \phi \chi = t$ και επομένως ή εξίσωση γράφεται :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t^2 + \lambda t + 1 = 0 \\ 0 &< t < 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Για να έχουμε μια μόνο λύση μέσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, θα πρέπει ή

(1) να έχει μια μόνο ρίζα μέσα στο διάστημα $(0,1)$. Οί συνθήκες γι' αυτό είναι :

α) $\varphi(0)\varphi(1) < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (\lambda + 2) < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$

β) $\Delta = 0$ και $0 < -\frac{\beta}{2\alpha} < 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0$ και $0 < -\frac{\lambda}{2} < 1$. Το τε-

λευταίο σύστημα είναι αδύνατο και επομένως μόνο για $\lambda < -2$ έχουμε λύση του προβλήματος.

3.2. Τριγωνομετρικές εξισώσεις με περισσότερα από ένα άγνωστα τόξα. Αν θεωρήσουμε αλγεβρικές εξισώσεις με περισσότερους από ένα άγνωστους, μπορούμε να επεκτείνουμε τον όρισμό της τριγωνομετρικής εξίσωσης 1.1 και σε τριγωνομετρική εξίσωση με άγνωστα τόξα περισσότερα από ένα. Π.χ. οί εξισώσεις

$$\eta \mu(\chi + \psi) + \eta \mu(\chi - \psi) = 2, \quad \epsilon \phi 2\chi = \epsilon \phi \psi, \quad \sigma \nu \nu 3\chi = \eta \mu\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right)$$

είναι τριγωνομετρικές εξισώσεις δύο άγνωστων τόξων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να λυθεί ή εξίσωση: $\eta \mu \psi = \sigma \nu \nu 2\chi$ (Ε).

Λύση. Η εξίσωση (Ε) γράφεται $\sigma \nu \nu\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sigma \nu \nu 2\chi$ και αυτή είναι ισοδύναμη με τις επόμενες δύο αλγεβρικές εξισώσεις :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \psi &= 2\kappa\pi + 2\chi \\ \eta \quad \frac{\pi}{2} - \psi &= 2\lambda\pi - 2\chi \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = \frac{\pi}{2} - 2\chi - 2\kappa\pi \\ \psi = \frac{\pi}{2} + 2\chi - 2\lambda\pi \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ \eta \\ (2). \end{matrix} \quad (\kappa, \lambda \in \mathbf{Z})$$

Ώστε, η γενική λύση της (E) είναι :

$$\left\{ (\chi, \psi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \psi = \frac{\pi}{2} - 2\chi - 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ (\chi, \psi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \psi = \frac{\pi}{2} + 2\chi - 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Η (1) παριστάνει σέ ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων, μιὰ οἰκογένεια παράλληλων εὐθειῶν, ὅταν ὁ κ μεταβάλλεται στό $\mathbf{Z}$. Ὁμοίᾳ ἡ (2) παριστάνει μιὰ οἰκογένεια παράλληλων εὐθειῶν. Νά παραστήσετε γραφικὰ αὐτὲς τὶς δύο οἰκογένειες παράλληλων εὐθειῶν.

3.3. Ὁμογενὴς τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση. Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $\varphi(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) = 0$, ὅπου τὸ πρῶτο μέλος τῆς εἶναι ἀκέραιο ὁμογενὲς πολυώνυμο ὡς πρὸς $\eta\mu\chi$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\chi$, λέγεται ὁμογενὴς τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση. Π.χ. οἱ ἐξισώσεις :

$$\eta\mu^2\chi + 3\sigma\upsilon\nu^2\chi - 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 0, \quad \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi + \eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 3\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$$

εἶναι ὁμογενεῖς.

Γιὰ νὰ λύσουμε μιὰ ὁμογενὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση, διαιροῦμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς μὲ $\sigma\upsilon\nu^k\chi$, ἐφόσον $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$ ($\Leftrightarrow \chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}$), ὅπου $\kappa \in \mathbf{N}$ ὁ βαθμὸς τῆς ὁμογένειας. Ἔτσι, φτάνουμε σέ μιὰ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση ἀλγεβρικῆς μορφῆς ὡς πρὸς $\epsilon\varphi\chi$, ποὺ εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὴν προηγούμενη κατηγορία. Τονίζουμε ἀκόμα ὅτι, ἂν $\varphi(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) = 0$ εἶναι μιὰ ὁμογενὴς ἐξίσωση μὲ βαθμὸ κ , τότε αὐτὴ ἰσοδύναμα γράφεται : $\sigma\upsilon\nu^k\chi \cdot f(\epsilon\varphi\chi) = 0$ ($\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$), ὁπότε ἔχουμε νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση $f(\epsilon\varphi\chi) = 0$. Ἡ τελευταία ὁμως ἐξίσωση εἶναι ἀλγεβρικῆς μορφῆς, γιατί τὸ $f(\epsilon\varphi\chi)$ εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο ὡς πρὸς $\epsilon\varphi\chi$ καὶ ἐπομένως λύνεται μὲ τὸ γνωστὸ τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\eta\mu^2\chi - (1 + \sqrt{3}) \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$ (1).

Λύση. Μὲ $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$ ἡ ἐξίσωση (1) δίνει $\eta\mu\chi = 0$, ποὺ εἶναι ἀδύνατο ¹⁾, γιατί

¹⁾ Αὐτὸ σημαίνει ὅτι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$, δηλαδὴ τὰ τόξα $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$, δὲν εἶναι λύσεις τῆς (1). Ἄρα, ὑποθέτοντας $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$ δὲν περιορίζουμε τὶς λύσεις τῆς (1), δηλαδὴ δὲν ἔχουμε ἀπώλεια λύσεων.

είναι $\eta\mu\chi = 1$ ή -1 , όταν $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$. Έπομένως είναι $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$, οπότε, διαιρώντας με $\sigma\upsilon\nu^2\chi$ και τα δύο μέλη της (1), βρίσκουμε $\epsilon\phi^2\chi - (1 + \sqrt{3})\epsilon\phi\chi + \sqrt{3} = 0$. Η τελευταία εξίσωση είναι αλγεβρικής μορφής (δευτεροβάθμια ως προς $\epsilon\phi\chi$) και είναι ισοδύναμη με τις θεμελιώδεις εξισώσεις :

$$\epsilon\phi\chi = 1 \quad (2)$$

$$\epsilon\phi\chi = \sqrt{3}. \quad (3)$$

Η λύση της (2) είναι : $\{\chi \in \mathbb{R} : \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$ και η λύση της (3) είναι :

$$\{\chi \in \mathbb{R} : \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να λυθεί η εξίσωση : $\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \delta$ (1)

Λύση. Είναι :

$$(1) \Leftrightarrow \alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \delta(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\delta)\eta\mu^2\chi + (\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \quad (2)$$

Η (2) είναι ομογενής εξίσωση και για τη λύση της διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

1) "Αν $\alpha \neq \delta$, τότε η (2) δέχεται ως λύσεις τα τόξα $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$), γιατί με $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ δεν επαληθεύεται η εξίσωση. Στήν περίπτωση αυτή διαιρούμε και τα δύο μέλη της (2) με $\sigma\upsilon\nu^2\chi$ και έχουμε :

$$(\alpha-\delta)\epsilon\phi^2\chi + \gamma\epsilon\phi\chi + \beta-\delta = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) έχει λύση, όταν και μόνο όταν : $\gamma^2 - 4(\alpha-\delta)(\beta-\delta) > 0$.

2) "Αν $\alpha = \delta$, η εξίσωση (2) γράφεται :

$$(\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi[(\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\eta\mu\chi] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi = 0 & (\alpha) \\ (\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\eta\mu\chi = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Η γενική λύση της (α) είναι : $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Λύση της (β). Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

ι) "Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$, οπότε, διαιρώντας και τα δύο μέλη της (β) με $\sigma\upsilon\nu\chi$ έχουμε :

$$\gamma\epsilon\phi\chi + \beta - \delta = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \frac{\delta-\beta}{\gamma} \text{ (θεμελιώδης).}$$

ii) "Αν $\gamma = 0$, τότε ή (β) γράφεται : $(\beta - \delta)\sigma\upsilon\nu\chi = 0$. 'Η τελευταία εξίσωση είναι άορίστη, δηλαδή έπαληθεύεται για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, αν $\beta = \delta$ και έχει λύση τα τόξα $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$), αν $\beta \neq \delta$.

"Ομοια μπορεί να λυθεί και ή εξίσωση :

$$\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu 2\chi + \delta\sigma\upsilon\nu 2\chi + \varepsilon = 0, \quad (E)$$

άρκει να γραφεί ως εξής :

$$\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \delta(\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi) + \varepsilon(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) = 0$$

Παρατήρηση. 'Η (E) μετασχηματίζεται ακόμα και ως εξής :

$$\alpha \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} + \beta \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} + \gamma\eta\mu 2\chi + \delta\sigma\upsilon\nu 2\chi + \varepsilon = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\gamma\eta\mu 2\chi + (2\delta + \beta - \alpha)\sigma\upsilon\nu 2\chi = -2\varepsilon - \alpha - \beta.$$

'Η τελευταία εξίσωση είναι μία γραμμική εξίσωση, με την οποία θα ασχοληθούμε άμέσως παρακάτω.

3.4. Γραμμική τριγωνομετρική εξίσωση. Έτσι ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής :

$$\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0^{1)}$$

3.4.1. Λύση της γραμμικής εξίσώσεως (α' τρόπος). 'Επειδή υπάρχει πάντοτε τόξο $\omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ (M_1) ή εξίσωση γράφεται :

$$(E) \Leftrightarrow \eta\mu\chi + \frac{\beta}{\alpha} \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\omega\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow \eta\mu(\chi + \omega) = \frac{\gamma}{\alpha} \sigma\upsilon\nu\omega. \quad (1)$$

'Η εξίσωση όμως (1) είναι θεμελιώδης (βλ. 2.1) και έχει λύση, όταν και μόνο όταν :

$$\left| \frac{\gamma}{\alpha} \sigma\upsilon\nu\omega \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \sigma\upsilon\nu^2\omega \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \leq 1 \Leftrightarrow (M_1)$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2} \frac{1}{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2$$

Άρα, ή ίκανή και άναγκαία συνθήκη για να έχει λύση ή γραμμική εξίσωση είναι : $\alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2$ (Σ).

¹⁾ Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι με $\alpha\beta\gamma = 0$ ή εξίσωση $\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma = 0$ παίρνει πολύ απλή μορφή.

Αν η συνθήκη (Σ) ικανοποιείται, τότε θέτουμε $\frac{\alpha}{\gamma} \text{ συν}\omega = \eta\mu\theta$ (M_2), όπου το θ θεωρείται γνωστό τόξο με $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Σύμφωνα τώρα με το μετασχηματισμό (M_2), η (1) γράφεται :

$$\eta\mu(\chi + \omega) = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \omega = 2\kappa\pi + \theta \\ \chi + \omega = (2\lambda + 1)\pi - \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \theta - \omega, & \kappa \in \mathbb{Z} \\ \chi = (2\lambda + 1)\pi - \theta - \omega, & \lambda \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Οι δύο τελευταίες οικογένειες λύσεων αποτελούν τη γενική λύση της γραμμικής εξίσωσης.

Παρατηρήσεις. 1) Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha\epsilon\phi\chi + \beta\sigma\phi\chi = \gamma$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$ είναι ισοδύναμη με τη γραμμική εξίσωση :

$$\gamma\eta\mu\omega + (\alpha - \beta)\sigma\eta\mu\omega = \alpha + \beta, \text{ όπου } \omega = 2\chi \text{ (γιατί);}$$

2) Αν στην παραπάνω συνθήκη (Σ) ισχύει το Ίσον, τότε, σύμφωνα και με τους μετασχηματισμούς (M_1), (M_2) θα είναι $|\eta\mu\theta| = 1$.

Η γραμμική τριγωνομετρική εξίσωση μπορεί να λυθεί και με άλλο τρόπο, που περιγράφουμε παρακάτω.

3.4.2. Λύση της γραμμικής εξίσωσης (β' τρόπος). Είναι γνωστοί οι τύποι :

$$\eta\mu\chi = \frac{2\epsilon\phi\frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon\phi^2\frac{\chi}{2}}, \quad \sigma\eta\chi = \frac{1 - \epsilon\phi^2\frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon\phi^2\frac{\chi}{2}} \left(\frac{\chi}{2} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi \neq 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z} \right)$$

Σύμφωνα με τους τύπους αυτούς η γραμμική εξίσωση γράφεται :

$$\alpha \frac{2\epsilon\phi\frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon\phi^2\frac{\chi}{2}} + \beta \frac{1 - \epsilon\phi^2\frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon\phi^2\frac{\chi}{2}} = \gamma \Leftrightarrow (\beta + \gamma)\epsilon\phi^2\frac{\chi}{2} - 2\alpha\epsilon\phi\frac{\chi}{2} + \gamma - \beta = 0 \quad (1)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι η γραμμική εξίσωση δεν είναι ισοδύναμη με την (1). Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι τα τόξα $\chi = 2\kappa\pi + \pi$ δεν μπορεί να είναι λύσεις της (1), γιατί γι' αυτά τα τόξα δεν ορίζεται η $\epsilon\phi\frac{\chi}{2}$. Δεν αποκλείεται όμως τα τόξα αυτά να είναι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης. Πριν προχωρήσουμε στη λύση της (1), ας εξετάσουμε πότε η γραμμική εξίσωση δέχεται για λύσεις τα τόξα $\chi = 2\kappa\pi + \pi$. Για να είναι τα τόξα αυτά λύσεις της γραμμικής εξίσωσης πρέπει να αρκεί να ισχύει :

$$\alpha\eta\mu(2\kappa\pi + \pi) + \beta\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \pi) = \gamma \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta(-1) = \gamma \Leftrightarrow \beta + \gamma = 0 \quad (\sigma)$$

Για τή λύση τής (1) διακρίνουμε τīs παρακάτω περιπτώσεις :

1) "Αν $\beta + \gamma \neq 0$, τότε ή (1) είναι δευτεροβάθμια ως πρὸς $\epsilon\phi \frac{\chi}{2}$ καὶ ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν : $\Delta = 4\alpha^2 - 4(\beta + \gamma)(\gamma - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2$. Πρέπει νὰ προσέξουμε ἀκόμη ὅτι στὴν περίπτωση αὐτὴ ($\beta + \gamma \neq 0$) ή γραμμικὴ ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν (1), σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη παρατήρηση πού μᾶς ὁδήγησε στὴν συνθήκη (σ).

2) "Αν $\beta + \gamma = 0$, τότε ή (1) γράφεται :

$$-2\alpha\epsilon\phi \frac{\chi}{2} + \gamma - \beta = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi \frac{\chi}{2} = \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \Leftrightarrow \epsilon\phi \frac{\chi}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad (2)$$

Ἡ λύση τής θεμελιώδους ἐξίσωσews (2) καὶ τὰ τόξα $\chi = 2\kappa\pi + \pi$ εἶναι ή γενικὴ λύση τής γραμμικῆς ἐξίσωσews. Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι ή συνθήκη $\alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2$ ἱκανοποιεῖται πάλι, ἐφόσον $\beta + \gamma = 0$.

Παρατήρηση. Ἡ γραμμικὴ ἐξίσωση μὲ $\beta + \gamma = 0$ γράφεται :

$$\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma \Leftrightarrow \alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = -\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha\eta\mu\chi + \beta(1 + \sigma\upsilon\nu\chi) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\eta\mu \frac{\chi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} + 2\beta\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} \left(\alpha\eta\mu \frac{\chi}{2} + \beta\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \eta \\ \alpha\eta\mu \frac{\chi}{2} + \beta\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi \frac{\chi}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}. \end{cases}$$

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθεῖ ή ἐξίσωση : } 3\eta\mu\chi - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 3 \quad (\text{E})$$

Λύση. Ἡ (E) γράφεται :

$$(E) \Leftrightarrow \eta\mu\chi - \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi - \frac{\eta\mu 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}\sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu 30^\circ - \eta\mu 30^\circ\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(\chi - 30^\circ) = \eta\mu 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi - 30^\circ = 360^\circ\kappa + 60^\circ, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \eta \\ \chi - 30^\circ = (2\rho + 1)180^\circ - 60^\circ, \rho \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = 360^\circ\kappa + 90^\circ, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \eta \\ \chi = 360^\circ\rho + 150^\circ, \rho \in \mathbf{Z} \end{array} \right.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu\chi + \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu\chi = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

Λύση. 'Η εξίσωση έχει λύση έφόσον ισχύει : $1^2 + (\sqrt{3})^2 \geq (2\lambda)^2 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$. 'Από την τελευταία σχέση, και έπειδή ό λ είναι άκέραιος, συνάγεται ότι : $\lambda = -1$ ή 0 ή 1. 'Αρα, ή εξίσωση είναι ισοδύναμη με μιá από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\eta\mu\chi + \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu\chi = -2 \quad (\alpha), \quad \eta\mu\chi + \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \quad (\beta), \quad \eta\mu\chi + \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu\chi = 2 \quad (\gamma).$$

Λύση τής (α). 'Η (α) γράφεται :

$$\eta\mu\chi + \epsilon\phi \frac{\pi}{3} \sigma\upsilon\nu\chi = -2 \Leftrightarrow \eta\mu\chi + \frac{\eta\mu \frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu\chi = -2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\chi \eta\mu \frac{\pi}{3} = -2 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \eta\mu \left(\chi + \frac{\pi}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\chi + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6}.$$

Λύση τής (β). 'Η (β) γράφεται : $\epsilon\phi\chi = -\sqrt{3}$ και ή λύση της είναι

$$\chi = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Λύση τής (γ). 'Ακολουθοῦμε την ίδια άκριβώς πορεία με εκείνη τής (α) και φτάνουμε στην εξίσωση $\eta\mu \left(\chi + \frac{\pi}{3} \right) = 1$. 'Η γενική λύση της είναι $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

3.5. Συμμετρική τριγωνομετρική εξίσωση. Έτσι ονομάζεται κάθε εξίσωση τής μορφής $f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) = 0$, όπου $f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi)$ είναι συμμετρικό άκέραιο πολυώνυμο ως πρὸς $\eta\mu\chi$ και $\sigma\upsilon\nu\chi$. 'Από την 'Αλγεβρα γνωρίζουμε ότι τὸ πολυώνυμο $f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi)$ μπορεί νά έκφραστεί ως συνάρτηση με τὸ $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$ και τὸ $\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$. Τελικά ή συμμετρική εξίσωση παίρνει τή μορφή :

$$f(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi, \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi) = 0 \quad (E).$$

Γιά νά λύσουμε την (E) εφαρμόζουμε τὸν μετασχηματισμό :

$\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = t \quad (M_1)$. 'Ακόμα έχουμε :

$$(M_1) \Leftrightarrow (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = t^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = t^2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{t^2 - 1}{2} \quad (1)$$

‘Ο μετασχηματισμός (M_1) ισοδύναμα γράφεται : $\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = t \quad (M_2).$

‘Από τη σχέση (M_2) συμπεραίνουμε ότι : $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad (2).$

Σύμφωνα με τον (M_1) και τη σχέση (1), η συμμετρική εξίσωση γράφεται :

$$f\left(t, \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 0 \quad (E_1).$$

‘Η (E) είναι μία άλγεβρική εξίσωση ως προς t . ‘Από την (E_1) βρίσκουμε το t και κατόπιν το αντικαθιστούμε στην θεμελιώδη εξίσωση (M_2) , για να βρούμε το χ . ‘Η σχέση (2) είναι απαραίτητη για τη διερεύνηση της άλγεβρικής εξισώσεως (E_1) .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθεί η εξίσωση :

$$\alpha(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) + \beta\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma, \alpha\beta \neq 0 \quad (E)$$

Λύση. ‘Η εξίσωση (E) είναι η απλούστερη μορφή συμμετρικής εξισώσεως. Σύμφωνα με όσα εκθέσαμε παραπάνω, θέτουμε $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = t$, όποτε η (E) γράφεται :

$$\alpha t + \beta \frac{t^2 - 1}{2} = \gamma \Leftrightarrow \beta t^2 + 2\alpha t - (\beta + 2\gamma) = 0.$$

‘Αρα, ισχύει η ισοδυναμία :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta t^2 + 2\alpha t - (\beta + 2\gamma) = 0 & (1) \\ \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = t. & (2) \end{cases}$$

‘Η (E) έχει λύση τότε και μόνο τότε, όταν μία τουλάχιστον από τις ρίζες της (1) βρίσκεται στο διάστημα $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Οί ικανές και αναγκαίες συνθήκες γι’ αυτό είναι γνωστές από την ‘Αλγεβρα (βλ. επίσης 3.1.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = 1.$

Λύση. ‘Η εξίσωση είναι συμμετρική γιατί δέν μεταβάλλεται με την αντιμετάθεση των $\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi$. Είναι :

$$\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = 1 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) (1 - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 1 & (1) \\ \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = t. & (2) \end{cases}$$

Λύνουμε πρώτα την άλγεβρική εξίσωση (1). Έχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow t \frac{3 - t^2}{2} = 1 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t^3 - t) - (2t - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(t^2 - 1) - 2(t - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t - 2 = 0. \end{cases}$$

Οι ρίζες της (1) είναι $t_1 = 1$ (διπλή) και $t_2 = -2$. Η ρίζα $t_2 = -2$ είναι απαράδεκτη, γιατί $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$. Άρα, έχουμε να λύσουμε την εξίσωση (2) με $t = 1$. Είναι :

$$\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \eta \\ \chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \eta \\ \chi = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z} \end{array} \right.$$

4. Τριγωνομετρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}) \quad (1)$$

Έπειδή για κάθε $\chi \in \mathbf{R}$ υπάρχει ωε $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\epsilon\phi\omega = \chi$ (M_1), η εξίσωση (1) γράφεται :

$$\alpha\epsilon\phi^2\omega + \beta\epsilon\phi\omega + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \beta \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\eta\mu^2\omega + \beta\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \gamma\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0 \Leftrightarrow \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega) + \beta\eta\mu^2\omega + \gamma(1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = 0 \\ \Leftrightarrow \beta\eta\mu^2\omega + (\gamma - \alpha)\sigma\upsilon\nu^2\omega = -(\alpha + \gamma). \quad (2)$$

Έτσι, η λύση της (1) ανάγεται, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (M_1), στη λύση της (2). Η (2) όμως είναι μια γραμμική τριγωνομετρική εξίσωση και λύνεται με τον πρώτο τρόπο λύσεώς της (βλ. 3.4.1), ως εξής :

1) "Αν $\beta \neq 0$, θέτουμε $\frac{\gamma - \alpha}{\beta} = \epsilon\phi\psi$ (M_1) και έχουμε :

$$\eta\mu 2\omega + \epsilon\phi\psi \sigma\upsilon\nu 2\omega = -\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \Leftrightarrow \eta\mu(2\omega + \psi) = -\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \sigma\upsilon\nu\psi. \quad (3)$$

"Όπως γνωρίζουμε, η ίκανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση η (2) είναι : $\beta^2 + (\gamma - \alpha)^2 \geq (\alpha + \gamma)^2 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ (4).

Η (4) είναι η γνωστή συνθήκη ύπαρξεως πραγματικών ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσεως (1). Εφόσον η συνθήκη (4) ικανοποιείται, η εξίσωση

(3) θα έχει λύση, δηλαδή θα υπάρχει τόξο $\Phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε

$$\eta\mu\Phi = -\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \sigma\upsilon\nu\psi \quad (M_3). \text{ Σύμφωνα τώρα με τον } (M_3), \text{ η εξίσωση (3)}$$

γράφεται $\eta\mu(2\omega + \psi) = \eta\mu\Phi$ και έχει τις παρακάτω οικογένειες λύσεων :

$$\omega_1 = \kappa\pi + \frac{\Phi}{2} - \frac{\Psi}{2} \quad (\kappa \in \mathbf{Z})$$

$$\omega_2 = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2} - \frac{\Psi}{2} \quad (\lambda \in \mathbf{Z}).$$

Είναι :

$$\epsilon\phi\omega_1 = \epsilon\phi\left(\kappa\pi + \frac{\Phi}{2} - \frac{\Psi}{2}\right) = \epsilon\phi\left(\frac{\Phi}{2} - \frac{\Psi}{2}\right) \text{ και}$$

$$\epsilon\phi\omega_2 = \epsilon\phi\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2} - \frac{\Psi}{2}\right) = \sigma\phi\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\Psi}{2}\right).$$

Από τις τελευταίες σχέσεις και σύμφωνα με τον (M_1), οι ρίζες της (1) είναι :

$$\chi_1 = \epsilon\phi\left(\frac{\Phi}{2} - \frac{\Psi}{2}\right), \chi_2 = \sigma\phi\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\Psi}{2}\right) \quad (5)$$

2) "Αν $\beta = 0$, τότε η (2) γράφεται : $(\gamma - \alpha)\sigma\upsilon\nu 2\omega = -(\alpha + \gamma)$ (6)

Για τη λύση της (6) διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις :

2_α) "Αν $\gamma = \alpha$, τότε η (6) είναι αδύνατη, γιατί με $\alpha = \gamma$ το δεύτερο μέλος της γίνεται -2α και δεν μπορεί να είναι 0.

2_β) "Αν $\gamma \neq \alpha$, τότε η εξίσωση (6) γράφεται :

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma} \quad (7).$$

Η (7) είναι θεμελιώδης και λύνεται, όταν και μόνο όταν :

$$\left| \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma} \right| \leq 1 \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)^2 \leq (\alpha - \gamma)^2 \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq 0$$

Θέτουμε $\frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma} = \text{syn}\varphi$ και επομένως ή (7) γράφεται $\text{syn}2\omega = \text{syn}\varphi$. 'Η λύση τής τελευταίας εξισώσεως είναι :

$$\omega_1 = \kappa\pi + \frac{\varphi}{2}, \quad \omega_2 = \lambda\pi - \frac{\varphi}{2} \quad (\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}).$$

Άρα, σύμφωνα και με τόν (M_1) , οι ρίζες τής (1) είναι :

$$\chi_1 = \varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2}, \quad \chi_2 = -\varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2}.$$

Παρατηρήσει: 1) 'Αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω ρίζες (5) είναι ίσες, τότε θα έχουμε :

$$\varepsilon\varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) = \sigma\varphi \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2} \right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) = \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} \Leftrightarrow \varphi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$\eta\mu\varphi \in \{-1, 1\}$. 'Από αυτό και τὸ μετασχηματισμὸ (M_3) , συνάγεται ὅτι :

$$\left| \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \text{syn}\psi \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{(\alpha + \gamma)^2}{\beta^2} \text{syn}^2\psi = 1 \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)^2 \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\psi} = \beta^2.$$

'Απ' αὐτὴ και τὸν (M_2) ἔχουμε :

$$(\alpha + \gamma)^2 \frac{1}{1 + \frac{(\gamma - \alpha)^2}{\beta^2}} = \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,$$

δηλαδή βρίσκουμε τὴ γνωστὴ ἀπὸ τὴν 'Αλγεβρα συνθήκη ὑπάρξεως διπλῆς ρίζας.

2) 'Η γνωστὴ ἀπὸ τὴν 'Αλγεβρα μέθοδος γιὰ τὴ λύση τῆς δευτεροβάθμιας εξισώσεως (1), διαφέρει οὐσιαστικὰ ἀπὸ τὴ μέθοδο ποὺ ἐκθέσαμε παραπάνω, γιατί σ' αὐτὴ δὲ χρησιμοποιήσαμε τοὺς γνωστούς τύπους τῶν ριζῶν τῆς (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑ

1) Νὰ λυθοῦν οἱ παρακάτω εξισώσεις :

$$1) \text{syn}\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \text{syn} \frac{5\pi}{6}$$

$$3) \text{syn}\left(2\chi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{syn}3\chi$$

$$5) \text{syn}3\chi + 1 = 0$$

$$7) \text{syn}4\chi + \text{syn}\chi = 0$$

$$9) 4\eta\mu^3\chi - 3\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$$

$$11) 4\eta\mu^2(2\chi - 1) = 1$$

$$2) \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{4} - 2\chi\right)$$

$$4) 4\eta\mu^2\chi = 1$$

$$6) \varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$8) \text{syn}\left(2\chi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$10) \text{syn}^{24}\chi - \eta\mu^{23}\chi = 0$$

$$12) \varepsilon\varphi\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi3\chi.$$

2) Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

$$1) \varepsilon\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$3) \varepsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} \varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

$$2) \varepsilon\phi x \varepsilon\phi 2x = 1$$

$$4) \varepsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sigma\phi\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

3) Να λυθεί ως προς x ή εξίσωση : $|\eta\mu x| = \eta\mu\alpha$ ($\eta\mu\alpha \geq 0$)

4) Να λυθούν τα επόμενα συστήματα :

$$1) \begin{cases} \varepsilon\phi\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \varepsilon\phi\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\phi x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

5) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$1) 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0$$

$$2) 2\eta\mu^2 x + \sqrt{3} \eta\mu x - 3 = 0$$

$$3) 3(1 - \sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu^2 x$$

$$4) \varepsilon\phi^2 x + (\sqrt{3} - 1)\varepsilon\phi x - \sqrt{3} = 0$$

$$5) \eta\mu 2x = \varepsilon\phi x$$

$$6) \sigma\upsilon\nu 2x - 4\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0$$

$$7) \varepsilon\phi 2x = 3\varepsilon\phi x$$

$$8) \eta\mu 2x = \eta\mu^3 x$$

$$9) 2\eta\mu x \eta\mu 3x = 1$$

$$10) 5\eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$11) \sigma\upsilon\nu 2x + (1 + \sqrt{3}) \eta\mu 2x - 2\sqrt{3} \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$13) \eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 3x = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

$$12) \eta\mu 2x + \eta\mu 6x = 2\eta\mu 4x$$

$$15) \eta\mu x + \eta\mu 3x = 2\eta\mu 2x$$

$$14) \sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 3x + \eta\mu 5x = 0$$

$$17) \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu 7x = \sigma\upsilon\nu 3x \sigma\upsilon\nu 5x$$

$$16) \eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu 3x = 0$$

$$19) 2 \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$18) \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x = 2\eta\mu x \eta\mu 2x$$

6) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$1) \eta\mu x + \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$$

$$2) 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x = 3$$

$$3) \sqrt{3} \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x = 1$$

$$4) \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$5) \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$$

Β' ΟΜΑΔΑ

7) Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$1) \varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2) \varepsilon\phi x \varepsilon\phi 2\psi = 1$$

$$3) \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

8) Να λυθούν και διερευνηθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$1) \lambda\eta\mu^2 x - 2(\lambda - 2)\eta\mu x + \lambda + 2 = 0$$

$$2) \eta\mu 2x = \lambda\eta\mu 3x$$

$$3) (\mu - 1)\eta\mu^2 x - 2(\mu + 2)\eta\mu x - 1 = 0$$

$$4) 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \lambda$$

$$5) 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \lambda\eta\mu 2x = -\lambda$$

$$6) \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \kappa \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

$$7) (\lambda - 1)\eta\mu x + (\lambda + 1)\sigma\upsilon\nu 2x = 2\lambda$$

$$8) \lambda(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 1$$

9) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ή εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x + \lambda\eta\mu x + 1 = 0$ έχει δύο μόνο λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

10) Νά λυθεί ή εξίσωση $\eta\mu 2\psi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - 3\chi\right)$ καί έπειτα νά δείξετε ότι οι λύσεις της άπo-
τελούν δύο οικογένειες παράλληλων εύθειών. Νά γίνεи γραφική παράσταση τών δύο αύτων οί-
κογενειών.

11) "Αν $\chi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, νά λυθεί καί διερευνηθεί ή εξίσωση : $\lambda\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 1 - 3\lambda$.

12) Νά λυθεί ώς πρός χ καί διερευνηθεί ή εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha - \chi) = \lambda$ ($\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$).

13) Νά λυθοῦν οι έπόμενες εξισώσεις :

$$1) \epsilon\phi(\pi\eta\mu\chi) = \sigma\phi(\pi\sigma\upsilon\nu\chi)$$

$$3) 8 \sigma\upsilon\nu\chi \sigma\upsilon\nu 2\chi \sigma\upsilon\nu 4\chi = 1$$

$$5) \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) + \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \chi\right) = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$$

$$7) (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + \epsilon\phi\chi)^3 = \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi + \epsilon\phi^3\chi$$

$$9) (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) \left(1 + \frac{2}{\eta\mu 2\chi}\right) + \epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi + 2 = 0$$

$$11) \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu \frac{2\chi}{3} = 2\eta\mu^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\chi}{6}\right)$$

$$13) \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi 2\chi + \epsilon\phi 3\chi = 0$$

$$15) 2\eta\mu^3\chi = 3\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi$$

$$17) 2 \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{3} - \eta\mu \frac{\chi}{2} = 2.$$

$$2) \eta\mu(\pi\sigma\upsilon\nu\chi) = \sigma\upsilon\nu(\pi\eta\mu\chi)$$

$$4) \eta\mu 3\chi = 4\eta\mu\chi \eta\mu 2\chi \eta\mu 4\chi$$

$$6) 8\eta\mu\chi \sigma\upsilon\nu 2\chi \sigma\upsilon\nu 4\chi = 1$$

$$8) \sigma\upsilon\nu 7\chi = 2\eta\mu\chi \eta\mu 2\chi (5 - 8\sigma\upsilon\nu^2\chi)$$

$$10) \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi \sigma\upsilon\nu\chi = 1$$

$$12) \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi + \eta\mu\chi \sigma\upsilon\nu\chi = 1$$

$$14) 1 + \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi = 0$$

$$16) \epsilon\phi\chi = 2\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu 2\chi - \sigma\phi 2\chi$$

14) Νά λύσετε καί διερευνήσετε τίς παρακάτω εξισώσεις :

$$1) \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2\chi} + \sqrt{1 + \eta\mu^2\chi} = \sqrt{\lambda}, \quad \lambda > 0$$

$$2) (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + \lambda\epsilon\phi\chi)^3 = \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi + \lambda^3\epsilon\phi^3\chi$$

$$3) \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + \epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi + \tau\epsilon\mu\chi + \sigma\tau\epsilon\mu\chi = \lambda$$

$$4) \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\text{Νά δείξετε πρῶτα ότι : } -1 \leq \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi \leq 1).$$

$$5) \epsilon\phi(\alpha\chi) \epsilon\phi(\beta\chi) = -1 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

15) Νά βρεθοῦν τά τόξα μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi]$, που έπαληθεύουν τήν εξίσωση :

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi = \sqrt{2} (\sigma\upsilon\nu^3\chi + \eta\mu^3\chi - \eta\mu\chi \sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi \eta\mu^2\chi).$$

16) Νά βρεθεί ή ίκανή καί άναγκαία συνθήκη, γιά νά έχει ή εξίσωση $\mu\sigma\upsilon\nu\chi - (2\mu + 1)\eta\mu\chi = \mu$
δύο λύσεις χ_1, χ_2 ($\chi_1 - \chi_2 \neq 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$) τέτοιες, ώστε :

$$\alpha) \left| \chi_1 - \chi_2 \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta) \chi_1 + \chi_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

17) Νά λυθεί ή εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) + 3\sigma\upsilon\nu(\chi + \psi) = 4$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Ένα σύστημα εξισώσεων που έχει μιὰ τουλάχιστον τριγωνομετρική εξίσωση λέγεται **τριγωνομετρικό σύστημα**. Ἡ λύση καὶ ἡ διερεύνηση ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ συστήματος ἀνάγεται πάντοτε στὴ λύση καὶ στὴ διερεύνηση μιᾶς τριγωνομετρικῆς εξισώσεως. Δὲν ὑπάρχει μιὰ γενικὴ μέθοδος γιὰ τὴ λύση τῶν τριγωνομετρικῶν συστημάτων. Γι' αὐτὸ γιὰ τὴ λύση ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ συστήματος ἐπιδιώκουμε πάντοτε νὰ βροῦμε ἕνα ἰσοδύναμό του ἀλγεβρικό γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῶν ἄγνωστων τόξων.

2. Συστήματα μὲ δύο ἄγνωστους

Στὰ ἐπόμενα ἀναφέρουμε μερικές βασικές κατηγορίες τριγωνομετρικῶν συστημάτων μὲ δύο ἄγνωστα τόξα.

2.1. Ἡ μιὰ εξίσωση τοῦ συστήματος εἶναι ἀλγεβρική. Τὰ κυριότερα συστήματα αὐτῆς τῆς κατηγορίας εἶναι τὰ παρακάτω :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \eta \mu \chi + \varepsilon_2 \eta \mu \psi = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \sigma \nu \chi + \varepsilon_2 \sigma \nu \psi = \beta \end{array} \right\}$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \eta \mu \chi \eta \mu \psi = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \sigma \nu \chi \sigma \nu \psi = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \sigma \nu \chi \eta \mu \psi = \beta \end{array} \right\}$$

$$(Γ) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \varepsilon \phi \chi \varepsilon \phi \psi = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \sigma \phi \chi \sigma \phi \psi = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \varepsilon \phi \chi \sigma \phi \psi = \beta \end{array} \right\}$$

$$(Δ) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \varepsilon \phi \chi + \varepsilon_2 \varepsilon \phi \psi = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \sigma \phi \chi + \varepsilon_2 \sigma \phi \psi = \beta \end{array} \right\}$$

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \frac{\eta \mu \chi}{\eta \mu \psi} = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \frac{\sigma \nu \chi}{\sigma \nu \psi} = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \frac{\varepsilon \phi \chi}{\varepsilon \phi \psi} = \beta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \varepsilon_1 \psi = \alpha \\ \frac{\sigma \phi \chi}{\sigma \phi \psi} = \beta \end{array} \right\}$$

Σε όλα τα παραπάνω συστήματα τα ϵ_1 και ϵ_2 παίρνουν τις τιμές 1 ή -1 και τα α, β είναι πραγματικοί αριθμοί.

Για τη λύση ενός οποιουδήποτε συστήματος αυτής της κατηγορίας επιδίδουμε συνήθως από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος να βρούμε το άθροισμα ή τη διαφορά των τόξων, έφόσον μᾶς δίνεται αντίστοιχως ή διαφορά ή το άθροισμά τους.

2.1.1. Λύση του συστήματος:
$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \beta \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Έχουμε :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu\frac{\chi + \psi}{2} \sin\frac{\chi - \psi}{2} = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\chi - \psi}{2} = \beta. \end{array} \right. \quad (1)$$

Για τη λύση της (1) διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

1) Αν $\eta\mu\frac{\alpha}{2} \neq 0$ ($\Leftrightarrow \alpha \neq 2\rho\pi, \rho \in \mathbb{Z}$), τότε ή (1) γράφεται :

$$\sin\frac{\chi - \psi}{2} = \frac{\beta}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

Η (2) είναι μιᾶ θεμελιώδης εξίσωση και έχει λύση τότε και μόνο τότε, όταν :

$$\frac{\beta}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \leq 1. \text{ Στην περίπτωση αυτή υπάρχει τόξο } \varphi \text{ με } \sin\varphi = \frac{\beta}{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}}$$

και έπομένως ή (2) γράφεται :

$$\sin\frac{\chi - \psi}{2} = \sin\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \chi - \psi = 4\kappa\pi + 2\varphi, & \kappa \in \mathbb{Z} \\ \chi - \psi = 4\lambda\pi - 2\varphi, & \lambda \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Άρα, το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με τα έπόμενα άλγεβρικά συστήματα που λύνονται εύκολα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 4\kappa\pi + 2\varphi \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 4\lambda\pi - 2\varphi \end{array} \right\}$$

Όστε με $\alpha \neq 2\rho\pi$ ($\rho \in \mathbb{Z}$) το σύστημα (Σ) έχει τις λύσεις των παραπάνω άλγεβρικῶν συστημάτων που είναι :

$$\chi = 2\kappa\pi + \varphi + \frac{\alpha}{2}, \quad \psi = -2\kappa\pi - \varphi + \frac{\alpha}{2} \quad \text{και}$$

$$\chi = 2\lambda\pi - \varphi + \frac{\alpha}{2}, \quad \psi = -2\lambda\pi + \varphi + \frac{\alpha}{2}.$$

2) "Αν $\eta\mu \cdot \frac{\alpha}{2} = 0$ ($\Leftrightarrow \alpha = 2\rho\pi$, $\rho \in \mathbf{Z}$), τότε για τη λύση της (1) διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

i) "Αν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) είναι αδύνατη και συνεπώς το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.

ii) "Αν $\beta = 0$, τότε η (1) είναι άοριστη, δηλαδή επαληθεύεται για οποιαδήποτε διαφορά $\chi - \psi$. "Αρα, με $\alpha = 2\rho\pi$ ($\rho \in \mathbf{Z}$) και $\beta = 0$, το σύστημα (Σ) είναι άοριστο και η λύση του είναι : $\chi = \theta$, $\psi = \alpha - \theta$ (θ τυχαίο τόξο).

"Ομοια λύνονται τα υπόλοιπα συστήματα της ομάδας (Α).

Παρατήρηση. "Από τα παραπάνω φαίνεται ότι για να έχει λύση το σύστημα (Σ) (βλ 2.2.1) η συνθήκη είναι : $\beta^2 \leq 4\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}$. Τη συνθήκη αυτή μπορούμε να τη βρούμε και ως

έξης: "Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (Σ) έχουμε $\psi = \alpha - \chi$, οπότε η δεύτερη εξίσωση γράφεται :

$$\eta\mu\chi + \eta\mu(\alpha - \chi) = \beta \Leftrightarrow (1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)\eta\mu\chi + \eta\mu\sigma\upsilon\nu\chi = \beta \quad (\epsilon).$$

Η εξίσωση όμως (ε) είναι γραμμική (βλ. 3.4) και λύνεται όταν και μόνο όταν :

$$(1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + \eta\mu^2\alpha \geq \beta^2 \Leftrightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^2\alpha \geq \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$2(1 - \sigma\upsilon\nu\alpha) \geq \beta^2 \Leftrightarrow 4\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \geq \beta^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \eta\mu\chi - \eta\mu\psi = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Λύση. Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ 2\eta\mu \frac{\chi - \psi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi + \psi}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ 2\eta\mu \frac{\pi}{6} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi + \psi}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu\chi \frac{\chi + \psi}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}, \chi + \psi = 4\rho\pi - \frac{2\pi}{3} \quad (\kappa, \rho \in \mathbf{Z}) \end{array} \right\}$$

"Αρα έχουμε να λύσουμε τα παρακάτω απλά αλγεβρικά συστήματα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\rho\pi - \frac{2\pi}{3} \end{array} \right\} \quad (\kappa, \rho \in \mathbf{Z})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά λυθεί τὸ σύστημα:
$$\begin{cases} \chi + \psi = 3\pi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 1 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Λύση. Ἔχουμε :

$$\begin{aligned} (\Sigma) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = 3\pi - \chi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu(3\pi - \chi) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = 3\pi - \chi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\chi = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} \psi = 3\pi - \chi \\ \eta\mu\chi = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = 3\pi - \chi \\ \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \chi = (2\rho + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{array} \right. \quad (\kappa, \rho \in \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

*Αρα ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι :

$$\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \psi = -2\kappa\pi + \frac{17\pi}{6} \quad (\kappa \in \mathbf{Z})$$

$$\chi = 2\rho\pi + \frac{5\pi}{6}, \psi = -2\rho\pi + \frac{13\pi}{6} \quad (\rho \in \mathbf{Z})$$

2.1.2. Λύση τοῦ συστήματος:
$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \beta \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Εἶναι :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \sin(\chi - \psi) - \sin(\chi + \psi) = 2\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \sin(\chi - \psi) = 2\beta + \sin\alpha \end{array} \right. \quad (1)$$

Ἡ (1) ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν: $|2\beta + \sin\alpha| \leq 1$. Ἐφόσον ἡ τελευταία συνθήκη ἱκανοποιεῖται, τότε ὑπάρχει τόξο φ τέτοιο, ὥστε $\sin\varphi = 2\beta + \sin\alpha$ καὶ ἐπομένως ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $\sin(\chi - \psi) = \sin\varphi$. Ἡ λύση αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $\chi - \psi = 2\kappa\pi + \varphi$ ἢ $\chi - \psi = 2\rho\pi - \varphi$ ($\kappa, \rho \in \mathbf{Z}$). *Αρα ἡ λύση τοῦ (Σ) εἶναι οἱ λύσεις τῶν παρακάτω ἀλγεβρικῶν συστημάτων :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 2\kappa\pi + \varphi \end{array} \right\} \quad (\Sigma_1), \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 2\rho\pi - \varphi \end{array} \right\} \quad (\Sigma_2)$$

Εὐκόλα λύνουμε τὰ (Σ₁), (Σ₂) καὶ βρίσκουμε :

$$\begin{aligned} \chi &= \kappa\pi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2}, \psi = -\kappa\pi - \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad \text{καὶ} \quad \chi = \rho\pi - \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2}, \psi = \\ &= -\rho\pi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

*Ὅμοια λύνονται τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ομάδας (B).

Παρατήρηση: 'Η συνθήκη $|2\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha| \leq 1$, πού βρήκαμε παραπάνω, μπορεί νά γραφεί καί ὡς ἑξῆς:

$$-1 \leq 2\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -1 - \sigma\upsilon\nu\alpha \leq 2\beta \leq 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow$$

$$-\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} \leq \beta \leq \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθεῖ τὸ σύστημα:
$$\begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Λύση. Τὸ σύστημα (Σ) γράφεται:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) - \sigma\upsilon\nu(\chi + \psi) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi - \psi = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \psi = -\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

2.1.3. Λύση τοῦ συστήματος:
$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \epsilon\phi\chi \epsilon\phi\psi = \beta \left(\chi, \psi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γίνεται: $\frac{\eta\mu\chi\eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi} = \beta \quad (1)$

1) Ἄν $\beta \neq 1$, τότε ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi + \eta\mu\chi\eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\chi\eta\mu\psi} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi)}{\sigma\upsilon\nu(\chi + \psi)} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \frac{\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi)}{\sigma\upsilon\nu(\chi + \psi)} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \sigma\upsilon\nu\alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Ἄν ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση (2) λύνεται, βρίσκουμε τὴ διαφορά $\chi - \psi$ καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀπλό. Ἡ (2) λύνεται, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:

$$\left| \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \sigma\upsilon\nu\alpha \right| \leq 1$$

2) Ἄν $\beta = 1$, τότε ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (Σ) γράφεται:

$$\epsilon\phi\chi\epsilon\phi\psi = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \sigma\phi\psi \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \Leftrightarrow$$

$$\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \psi, \kappa \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \chi + \psi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Άρα, έχουμε να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi + \psi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\kappa \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

Το σύστημα τούτο είναι αδύνατο, όταν $\alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ και έχει

λύση μόνο όταν υπάρχει $\kappa_0 \in \mathbf{Z}$ τέτοιος, ώστε $\alpha = \kappa_0\pi + \frac{\pi}{2}$. Η λύση του συ-

στήματος είναι : $\chi = \theta, \psi = \kappa_0\pi + \frac{\pi}{2} - \theta$, όπου θ τυχαίο τόξο.

Τονίζουμε ακόμα πώς στη λύση τού συστήματος υπάρχει ο περιορισμός

$\chi, \psi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}$. Γι' αυτό θα πρέπει στην παραπάνω λύση να είναι $\theta \neq \rho\pi, \rho \in \mathbf{Z}$.

Όμοια λύνονται και τα υπόλοιπα συστήματα της ομάδας (Γ).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να λυθεί το σύστημα :
$$\begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \epsilon\phi\chi\epsilon\phi\psi = 3 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Λύση. Το (Σ) γράφεται :

$$\begin{aligned} (\Sigma) &\Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\eta\mu\chi\eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi + \eta\mu\chi\eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\chi\eta\mu\psi} = \frac{1+3}{1-3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi)}{\sigma\upsilon\nu(\chi + \psi)} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi - \psi = 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Το τελευταίο σύστημα είναι αλγεβρικό και λύνεται εύκολα.

2.1.4. Λύση του συστήματος :
$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = \beta \quad (\chi, \psi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Έχουμε :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \frac{\eta\mu(\chi + \psi)}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi} = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \beta\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi = \eta\mu\alpha \end{array} \right. \quad (1)$$

1) Αν $\beta \neq 0$, τότε η (1) γράφεται $\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi = \frac{\eta\mu\alpha}{\beta}$. Έπομένως έχουμε το σύστημα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi = \frac{\eta\mu\alpha}{\beta}, \end{array} \right.$$

που λύνεται όμοια με το 2.1.2.

2) Αν $\beta = 0$, τότε από τη δεύτερη εξίσωση του (Σ) συνάγεται :

$$\begin{aligned} \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 0 &\Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = -\epsilon\phi\psi \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi(-\psi) \Leftrightarrow \\ \chi = \lambda\pi - \psi, \lambda \in \mathbf{Z} &\Leftrightarrow \chi + \psi = \lambda\pi \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε να λύσουμε το σύστημα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \chi + \psi = \lambda\pi \end{array} \right.$$

Το τελευταίο σύστημα έχει λύση, όταν και μόνο όταν υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbf{Z}$ τέτοιο, ώστε $\alpha = \lambda_0\pi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να λυθεί το σύστημα:
$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{2} \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 2 \end{array} \right. \quad (\Sigma)$$

Λύση. Το σύστημα γράφεται :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{2} \\ \eta\mu(\chi + \psi) = 2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{2} \\ 1 = 2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) + \sigma\upsilon\nu(\chi + \psi) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{2} \\ \chi - \psi = 2κ\pi, \kappa \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \psi = -\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \quad (\kappa \in \mathbf{Z}).$$

$$2.1.5. \text{ Λύση τοῦ συστήματος : } \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \varepsilon\phi\chi - \varepsilon\phi\psi = \beta \quad (\chi, \psi \neq \mu\pi + \frac{\pi}{2}, \mu \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Εἶναι :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \frac{\eta\mu(\chi - \psi)}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \eta\mu(\chi - \psi) = \beta\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu(\chi - \psi) = \beta[(\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) + \sigma\upsilon\nu(\chi + \psi))] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu(\chi - \psi) = \beta\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) + \beta\sigma\upsilon\nu\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu(\chi - \psi) - \beta\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = \beta\sigma\upsilon\nu\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι γραμμικὴ ὡς πρὸς $\chi - \psi$ καὶ ἐπομένως λύνεται μὲ τοὺς γνωστοὺς τρόπους. Τὸ σύστημα (Σ) ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει λύση. Ἡ ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἔχει λύση ἡ (1) εἶναι :

$$4 + \beta^2 \geq \beta^2 \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow 4 + \beta^2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow 4 + \beta^2\eta\mu^2\alpha \geq 0$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ τελευταία συνθήκη ἱκανοποιεῖται πάντοτε, τὸ παραπάνω σύστημα (Σ) ἔχει πάντοτε λύση.

Ὅμοια μὲ τὴ λύση τῶν δύο παραπάνω συστημάτων 2.1.4. καὶ 2.1.5 εἶναι καὶ ἡ λύση τῶν ὑπόλοιπων συστημάτων τῆς ομάδας (Δ).

$$2.1.6. \text{ Λύση τοῦ συστήματος : } \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} = \beta \quad (\psi \neq \rho\pi, \rho \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

1) Ἄν $\beta \neq 1$, τότε ἀπὸ τὴ δευτέρη ἐξίσωση τοῦ συστήματος (Σ), ἔχουμε :

$$\frac{\eta\mu\chi + \eta\mu\psi}{\eta\mu\chi - \eta\mu\psi} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \Leftrightarrow \frac{2\eta\mu \frac{\chi + \psi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi - \psi}{2}}{2\eta\mu \frac{\chi - \psi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi + \psi}{2}} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi \frac{\chi + \psi}{2} \sigma\phi \frac{\chi - \psi}{2} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1}.$$

Ἀρα, τὸ σύστημα γράφεται :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \varepsilon\phi \frac{\chi + \psi}{2} \sigma\phi \frac{\chi - \psi}{2} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \varepsilon\phi \frac{\alpha}{2} \sigma\phi \frac{\chi - \psi}{2} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1}. \end{cases} \quad (1)$$

ι) *Αν $\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} \neq 0$ ($\Leftrightarrow \alpha \neq 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbf{Z}$), τότε ή (1) γράφεται σφ $\frac{\chi - \psi}{2} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1}$.
σφ $\frac{\alpha}{2}$ καί τὸ σύστημα λύνεται εύκολα.

ιι) *Αν $\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = 0$ ($\Leftrightarrow \alpha = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbf{Z}$), τότε, ή (1) εἶναι ἀδύνατη, ἐφόσον $\beta \neq -1$, καί ἀόριστη, ἐφόσον $\beta = -1$. Στὴν τελευταία περίπτωση εἶναι $\chi - \psi = \theta$, ὅπου θ τυχαῖο τόξο μὲ $\theta \neq 2\rho\pi, \rho \in \mathbf{Z}$, ὅποτε ἔχουμε νὰ λύσουμε τὸ ἀπλὸ ἀλγεβρικό σύστημα :

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = \theta. \end{cases}$$

2) *Αν $\beta = 1$, τότε ή δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (Σ) γίνεται :

$$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\psi \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi & , \kappa \in \mathbf{Z} \\ \chi = (2\lambda + 1)\pi - \psi & , \lambda \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

*Αρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὰ ἀπλὰ ἀλγεβρικά συστήματα :

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 2\kappa\pi \end{cases} \quad \text{καί} \quad \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi + \psi = 2\lambda\pi + \pi \end{cases}$$

*Όμοια μὲ τὸ παραπάνω σύστημα 2.1.6 λύνονται καί τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδας (E).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\psi} = 2 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Λύση. Τὸ σύστημα (Σ) γράφεται :

$$\begin{aligned} (\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu\psi} = \frac{2 + 1}{2 - 1} \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \frac{2\sigma\upsilon\nu \frac{\chi + \psi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi - \psi}{2}}{2\eta\mu \frac{\chi + \psi}{2} \eta\mu \frac{\psi - \chi}{2}} = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ -\sigma\varphi \frac{\chi + \psi}{2} \sigma\varphi \frac{\chi - \psi}{2} = 3 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \sigma\varphi \frac{\chi + \psi}{2} = -\sqrt{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{\kappa\pi}{2} \\ \psi = \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{3}. \end{array} \right. (\kappa \in \mathbf{Z})$$

2.2. Συμμετρικά ως πρὸς τὰ τόξα. Μερικά συστήματα αὐτῆς τῆς κατηγορίας εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi = \beta \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \beta \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \alpha \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \beta \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \beta \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = \alpha \\ \epsilon\phi 2\chi + \epsilon\phi 2\psi = \beta \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi = \beta \end{array} \right\} \text{ κ.λ.π.}$$

Γιὰ νὰ λύσουμε ἓνα συμμετρικὸ σύστημα, προσπαθοῦμε νὰ τὸ μετασχηματίσουμε μὲ τρόπο, ὥστε νὰ ἐμφανιστοῦν τὰ τόξα $\chi + \psi$, $\chi - \psi$.

2.2.1. Λύση τοῦ συστήματος :
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi = \alpha \\ \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \beta \end{array} \right\} \quad (\Sigma)$$

Ἔχουμε :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi + \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \alpha + \beta \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \alpha - \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = \alpha + \beta \\ \sigma\upsilon\nu(\chi + \psi) = \alpha - \beta \end{array} \right\}.$$

Τὸ τελευταῖο σύστημα ἔχει λύση, ἂν καὶ μόνο ἂν : $|\alpha + \beta| \leq 1, |\alpha - \beta| \leq 1$.

Στὴν περίπτωσιν αὕτῃ ὑπάρχουν τόξα $\phi_1, \phi_2 \in [0, \pi]$ τέτοια, ὥστε :

$\sigma\upsilon\nu\phi_1 = \alpha + \beta$, $\sigma\upsilon\nu\phi_2 = \alpha - \beta$ καὶ ἐπομένως τὸ σύστημα γράφεται :

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\chi + \psi) &= \sigma\upsilon\nu\phi_2 \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) &= \sigma\upsilon\nu\phi_1 \end{aligned} \quad (\Sigma_1).$$

Τὸ (Σ_1) εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὰ ἐπόμενα ἀλγεβρικὰ συστήματα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = 2\kappa\pi + \phi_1 \\ \chi + \psi = 2\rho\pi + \phi_2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = 2\lambda\pi - \phi_1 \\ \chi + \psi = 2\rho\pi + \phi_2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = 2\kappa\pi + \phi_1 \\ \chi + \psi = 2\mu\pi - \phi_2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = 2\lambda\pi - \phi_1 \\ \chi + \psi = 2\mu\pi - \phi_2 \end{array} \right\}.$$

Ἡ λύση τῶν παραπάνω ἀλγεβρικῶν συστημάτων εἶναι εὐκόλη.

2.2.2. Λύση τοῦ συστήματος :
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\psi = \beta. \end{array} \right. \quad (\Sigma)$$

Ἄν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu\chi = \omega$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\psi = \phi$, τὸ σύστημα (Σ) ἀνάγεται στὴ λύση τοῦ συμμετρικοῦ ἀλγεβρικοῦ συστήματος :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega + \varphi = \alpha \\ 2\omega^2 - 1 + 2\varphi^2 - 1 = \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega + \varphi = \alpha \\ \omega^2 + \varphi^2 = \frac{\beta + 2}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega + \varphi = \alpha \\ (\omega + \varphi)^2 - 2\omega\varphi = \frac{\beta + 2}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega + \varphi = \alpha \\ \omega\varphi = \frac{2\alpha^2 - \beta - 2}{4} \end{array} \right\}.$$

Άρα, τὰ ω, φ είναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $t^2 - \alpha t + \frac{2\alpha^2 - \beta - 2}{4} = 0$ (Ε).

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $|\omega| \leq 1$ καὶ $|\varphi| \leq 1$, συμπεραίνουμε ὅτι τὸ σύστημα ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν, οἱ δύο ρίζες τῆς (Ε) εἶναι μέσα στὸ διάστημα $[-1, 1]$. Ἐπομένως τὸ θέμα ἀνάγεται στὴ θέση τῶν ἀριθμῶν $-1, 1$ ὡς πρὸς τὶς ρίζες τῆς (Ε), ποὺ εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὴν Ἀλγεβρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα:
$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 1 \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi = \frac{3}{4} \end{array} \right. \quad (\Sigma)$$

Λύση. Ἐχουμε :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\eta\mu\frac{\chi+\psi}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2} = 1 \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi) + \sigma\upsilon\nu(\chi+\psi) = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\frac{\chi+\psi}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2} = \frac{1}{2} \\ 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi-\psi}{2} - 1 + 1 - 2\eta\mu^2\frac{\chi+\psi}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\frac{\chi+\psi}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2} = \frac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi-\psi}{2} - \eta\mu^2\frac{\chi+\psi}{2} = \frac{3}{4} \end{array} \right\}.$$

Θέτουμε $\eta\mu\frac{\chi+\psi}{2} = \omega$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2} = \varphi$. Ἐχουμε τώρα νὰ λύσουμε τὸ σύστημα: $\omega\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi^2 - \omega^2 = \frac{3}{4}$. Ἡ λύση του εἶναι: $\varphi = 1$, $\omega = \frac{1}{2}$ καὶ $\varphi = -1$, $\omega = -\frac{1}{2}$. Ἀρα, τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὰ ἐπόμενα ἀπλὰ συστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2} = 1 \\ \eta\mu\frac{\chi+\psi}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2} = -1 \\ \eta\mu\frac{\chi+\psi}{2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}.$$

2.3. Μια τουλάχιστον εξίσωση είναι θεμελιώδης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \sin(\chi + \psi) = 1 \\ 2\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \end{cases} \quad (\Sigma).$

Λύση. Είναι :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\chi + \psi) = \sin 0 \\ 2\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ 2\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = 2\kappa\pi - \chi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ 2\eta\mu\chi + \eta\mu(2\kappa\pi - \chi) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \psi = 2\kappa\pi - \chi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ 2\eta\mu\chi - \eta\mu\chi = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = 2\kappa\pi - \chi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \eta\mu\chi = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = 2\kappa\pi - \rho\pi \\ \chi = \rho\pi \end{array} \right\} \quad (\kappa, \rho \in \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \eta\mu\chi = \eta\mu\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = 2\eta\mu^2\frac{\psi}{2} + \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (\Sigma)$

Λύση. Από την πρώτη εξίσωση του (Σ) βρίσκουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \psi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \chi = (2\lambda + 1)\pi - \psi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} + \psi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \chi = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{4} - \psi, \lambda \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Η δεύτερη εξίσωση του (Σ) γράφεται: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = 1 - \sin\psi - \eta\mu\psi.$

Επομένως το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με τα επόμενα δύο συστήματα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} + \psi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = 1 - \sin\psi - \eta\mu\psi \end{array} \right\} \quad (\Sigma_1) \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{4} - \psi, \lambda \in \mathbf{Z} \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = 1 - \sin\psi - \eta\mu\psi \end{array} \right\} \quad (\Sigma_2).$$

Λύνουμε τώρα το (Σ_1) . Είναι :

$$(\Sigma_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} + \psi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} - \psi\right) = 1 - \sin\psi - \eta\mu\psi \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} + \psi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ -\eta\mu\psi = 1 - \sin\psi - \eta\mu\psi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} + \psi, \kappa \in \mathbf{Z} \\ \sin\psi = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2(\kappa + \rho)\pi + \frac{\pi}{4} & (\kappa, \rho \in \mathbf{Z}). \\ \psi = 2\rho\pi \end{cases}$$

Με τὸν ἴδιο τρόπο λύνεται τὸ (Σ_2) καὶ βρίσκουμε :

$$\begin{cases} \chi = 2(\lambda - \mu)\pi + \frac{\pi}{4} \\ \psi = 2\mu\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{Z}).$$

3. Συστήματα με τρεῖς ἄγνωστους

Λύνουμε παρακάτω ἓνα χαρακτηριστικό σύστημα με τρεῖς ἄγνωστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα :
$$\begin{cases} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \frac{\sigma\phi\chi}{\alpha} = \frac{\sigma\phi\psi}{\beta} = \frac{\sigma\phi\omega}{\gamma} \quad (\alpha\beta\gamma \neq 0) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Λύση. Γνωρίζουμε ὅτι, ἂν $\chi + \psi + \omega = \pi$, τότε : $\sigma\phi\chi\sigma\phi\psi + \sigma\phi\psi\sigma\phi\omega + \sigma\phi\omega\sigma\phi\chi = 1$.

Ἐπομένως ἔχουμε :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\phi\chi\sigma\phi\psi + \sigma\phi\psi\sigma\phi\omega + \sigma\phi\omega\sigma\phi\chi = 1 & (1) \\ \chi + \psi + \omega = \pi & (2) \\ \sigma\phi\chi = \lambda\alpha & (3) \\ \sigma\phi\psi = \lambda\beta & (4) \\ \sigma\phi\omega = \lambda\gamma & (5) \end{cases} \quad (\Sigma').$$

Σύμφωνα με τις (3), (4) καὶ (5), ἡ (1) γράφεται : $\lambda^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 1$. Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ὅτι, τὸ σύστημα ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha > 0$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ εἶναι :

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}},$$

ὁπότε θέτουμε :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}}$$

Τὸ σύστημα (Σ') εἶναι ἰσοδύναμο με ἓνα ἀπὸ τὰ παρακάτω συστήματα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \sigma\phi\chi = \lambda_1\alpha \\ \sigma\phi\psi = \lambda_1\beta \\ \sigma\phi\omega = \lambda_1\gamma \end{array} \right\} \quad (\Sigma_1) \quad \tilde{\eta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \sigma\phi\chi = \lambda_2\alpha \\ \sigma\phi\psi = \lambda_2\beta \\ \sigma\phi\omega = \lambda_2\gamma \end{array} \right\} \quad (\Sigma_2)$$

"Ας είναι ω_1, ω_2 καὶ ω_3 τὰ τόξα μέσα στοῦ διάστημα $(0, \pi)$ τέτοια, ὥστε :
 $\sigma\phi\omega_1 = \lambda_1\alpha, \sigma\phi\omega_2 = \lambda_1\beta$ καὶ $\sigma\phi\omega_3 = \lambda_1\gamma$. Ἔχουμε :

$$(\Sigma_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \sigma\phi\chi = \sigma\phi\omega_1 \\ \sigma\phi\psi = \sigma\phi\omega_2 \\ \sigma\phi\omega = \sigma\phi\omega_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \chi = \kappa_1\pi + \omega_1 \\ \psi = \kappa_2\pi + \omega_2 \\ \omega = \kappa_3\pi + \omega_3 \end{array} \right\} \quad (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbf{Z}).$$

Ἀπὸ τὸ τελευταῖο σύστημα προκύπτει : $\pi - (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)\pi = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Ἐπειδὴ ὅμως $\omega_i \in (0, \pi)$ μὲ $i = 1, 2, 3$, συνάγεται :

$$0 < \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 < 3\pi \Leftrightarrow 0 < \pi - (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)\pi < 3\pi \Leftrightarrow -2 < \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 < 1 \Leftrightarrow (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \in \{-1, 0\}.$$

Ἄρα, ἡ γενικὴ λύση τοῦ συστήματος (Σ_1) εἶναι :

$$\left. \begin{array}{l} \chi = \kappa_1\pi + \omega_1 \\ \psi = \kappa_2\pi + \omega_2 \\ \omega = \kappa_3\pi + \omega_3 \end{array} \right\} \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbf{Z} \text{ καὶ } \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = -1 \text{ ἢ } 0.$$

Ὁμοία λύνεται τὸ σύστημα (Σ_2) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑ

18) Νὰ λυθοῦν τὰ παρακάτω συστήματα :

$$\begin{array}{lll} 1) \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{2\pi}{3} \\ \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \frac{3}{4} \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{3} \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \frac{1}{2} \end{array} \right. & 3) \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{6} \\ \frac{\epsilon\phi\chi}{\epsilon\phi\psi} = 3 \end{array} \right. \\ 4) \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{4} \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 1 \end{array} \right. & 5) \left\{ \begin{array}{l} \chi - \psi = \frac{\pi}{12} \\ \epsilon\phi\chi = \sqrt{3} \epsilon\phi\psi \end{array} \right. & 6) \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{4\pi}{3} \\ \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\psi} = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ 7) \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{4} \\ \sigma\phi\chi - \sigma\phi\psi = 2 \end{array} \right. & 8) \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{\pi}{6} \\ \eta\mu 2\chi + \eta\mu 2\psi = \frac{1}{2} \end{array} \right. & 9) \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \frac{2\pi}{3} \\ \epsilon\phi\chi\epsilon\phi\psi = \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

19) Να λύσετε τὰ ἐπόμενα συστήματα :

$$1) \begin{cases} \sigma\eta\eta\chi \eta\mu\psi + \epsilon\phi\chi \epsilon\phi\psi = 0 \\ \epsilon\phi\chi \epsilon\phi\psi = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sigma\eta\eta\chi + \sigma\eta\eta\psi = \sqrt{2} \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 2\eta\mu(\chi + \psi) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \eta\mu\chi = \eta\mu\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = 2\eta\mu^2 \frac{\psi}{2} + \sigma\eta\eta\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \eta\mu\chi = \sigma\eta\eta 2\psi \\ \sigma\eta\eta\psi = \eta\mu 2\chi \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \left(\eta\mu \frac{\chi + \psi}{2} - \sigma\eta\eta \frac{\chi - \psi}{2}\right)^2 = 1 - \eta\mu\chi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \chi + 2\psi = \frac{\pi}{2} \\ 3\epsilon\phi\chi + 12\epsilon\phi\psi = 5\sqrt{3} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2\eta\mu(\chi - \psi) = 1 \\ 2\sigma\eta\eta(\chi + \psi) = 1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 9\epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 4 \\ 2\sigma\phi\chi + 4\sigma\phi\psi = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \eta\mu\chi \eta\mu\psi = \frac{1}{4} \\ \sigma\eta\eta\chi \sigma\eta\eta\psi = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \\ \sigma\eta\eta\chi \sigma\eta\eta\psi = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Β' ΟΜΑΔΑ

20) Να λυθούν τὰ συστήματα :

$$1) \begin{cases} 2\sigma\eta\eta\chi \sigma\eta\eta\psi = 1 \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sigma\eta\eta 2\chi + \sigma\eta\eta 2\psi = \frac{1}{2} \\ 2(\eta\mu\chi + \eta\mu\psi) = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 2\sqrt{3} \\ \sigma\phi\chi + \sigma\phi\psi = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \sqrt{2} \\ \eta\mu 3\chi + \eta\mu 3\psi = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \eta\mu\chi \eta\mu\psi = \frac{1}{2} \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \eta\mu 2\chi + \eta\mu 2\psi = 1 \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 4 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \eta\mu\chi - \eta\mu\psi = 1 \\ \sigma\eta\eta\chi \sigma\eta\eta\psi = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2\eta\mu\chi \eta\mu\psi = 1 \\ 2(\sigma\eta\eta 2\psi - \sigma\eta\eta 2\chi) = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ 3(\eta\mu\chi - \eta\mu\psi) + 4\eta\mu\chi \eta\mu\psi = 3 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \sigma\eta\eta\chi + \sigma\eta\eta\psi = 2\sqrt{6} \sigma\eta\eta\chi \sigma\eta\eta\psi \end{cases}$$

21) Να λυθούν καὶ διερευνηθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

$$1) \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \eta\mu^2\chi + \eta\mu^2\psi = 1 - \sigma\eta\eta\alpha \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} = \alpha \\ \chi - \psi = \beta \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \eta\mu^2\chi - \eta\mu^2\psi = \beta \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \chi + \psi = 2\alpha \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \beta (\eta\mu\chi - \eta\mu\psi) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 2\lambda\eta\mu\alpha \\ \sigma\eta\eta\chi + \sigma\eta\eta\psi = 2\lambda\sigma\eta\eta\alpha \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \eta\mu\chi \eta\mu\psi = \alpha \\ \sigma\eta\eta\chi + \sigma\eta\eta\psi = \beta \end{cases}$$

22) Νά λυθοῦν τὰ συστήματα :

$$1) \begin{cases} \eta\mu\chi = \eta\mu(\psi + \alpha)\epsilon\phi\alpha \\ \eta\mu(\alpha - \chi) = 2\eta\mu^2 \frac{\psi}{2} + \sigma\upsilon\nu(\psi + 2\alpha) \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \epsilon\phi\chi = \lambda\epsilon\phi 2\psi \\ \epsilon\phi\psi = \lambda\epsilon\phi 2\chi. \end{cases}$$

23) Νά λυθεῖ καί διερευνηθεῖ τὸ σύστημα :
$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \alpha \\ \epsilon\phi \frac{\chi}{2} + \epsilon\phi \frac{\psi}{2} = \beta. \end{cases}$$

24) Νά λύσετε τὰ συστήματα :

$$1) \begin{cases} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = 3 \\ \epsilon\phi\psi + \epsilon\phi\omega = 4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\psi = \sigma\upsilon\nu 2\omega \\ \sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 3\psi = \sigma\upsilon\nu 3\omega \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \epsilon\phi \frac{\chi}{2} \epsilon\phi \frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3} \\ \epsilon\phi \frac{\psi}{2} \epsilon\phi \frac{\omega}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \chi, \psi, \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

25) Νά ἀποδείξετε τὴν ἰσοδυναμία :

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \chi) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \psi) = 0 \\ \eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha + \chi) + \eta\mu(\alpha + \psi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = 0 \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}).$$

*Αν χ_0, ψ_0 , εἶναι μιὰ λύση τοῦ παραπάνω συστήματος, τότε νά δείξετε ὅτι τὰ πέρατα τῶν τόξων $\alpha, \alpha + \chi_0$ καὶ $\alpha + \psi_0$, πάντω στὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἀποτελοῦν κορυφές ἰσοπλευρου τριγώνου.

26) Νά λυθεῖ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \frac{\eta\mu\chi}{\alpha} = \frac{\eta\mu\psi}{\beta} = \frac{\eta\mu\omega}{\gamma}, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0. \end{cases}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΑΛΟΙΦΗ

1. Ἡ ἔννοια τῆς ἀπαλοιφῆς

Ἡ ἔννοια τῆς ἀπαλοιφῆς καὶ τῆς ἀπαλείφουσας χρησιμοποιεῖται, ὅπως γνωρίζουμε ἀπὸ τὴν Ἀλγεβρα, σὲ παραμετρικὸ σύστημα μὲ μ ἐξισώσεις καὶ ν ἄγνωστους, ὅπου $\mu < \nu$. Τὸ σύστημα αὐτὸ μπορεῖ νὰ ἔχει ἢ νὰ μὴν ἔχει λύση. Ἄν τὸ σύστημα ἔχει λύση, τότε βρίσκουμε μιὰ σχέση μετὰξὺ τῶν παραμέτρων, ποὺ λέγεται **ἀπαλείφουσα**. Ἄρα, ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι γενικὰ ἡ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἔχει τὸ σύστημα λύση. Ἡ διαδικασία ποὺ ἀκολουθοῦμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀπαλείφουσα, ὀνομάζεται **ἀπαλοιφή** τῶν ἄγνωστων ἢ πιὸ ἀπλὰ ἀπαλοιφή.

Παρακάτω ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα ἀπαλοιφῆς.

1.1.1. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος:
$$\begin{cases} \alpha \eta \mu \chi = \gamma \\ \beta \sigma \nu \chi = \delta \end{cases} \quad (\alpha \beta \neq 0)$$

Δεχόμαστε ὅτι τὸ σύστημα ἔχει μία λύση χ_0 . Τότε, θὰ ἔχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \eta \mu \chi_0 = \gamma \\ \beta \sigma \nu \chi_0 = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \eta \mu \chi_0 = \frac{\gamma}{\alpha} \\ \sigma \nu \chi_0 = \frac{\delta}{\beta} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta^2 \mu^2 \chi_0 + \sigma \nu^2 \chi_0 = \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\delta^2}{\beta^2} = 1.$$

Ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπαλείφουσα.

1.1.2. Νὰ ἀπαλείψετε τὸ χ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις:
$$\begin{cases} \sigma \phi \chi (1 + \eta \mu \chi) = 4\alpha \\ \sigma \phi \chi (1 - \eta \mu \chi) = 4\beta \end{cases} \quad (\Sigma).$$

Ἄν χ_0 εἶναι μιὰ λύση τοῦ συστήματος (Σ) , τότε θὰ ἔχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \phi \chi_0 (1 + \eta \mu \chi_0) = 4\alpha \\ \sigma \phi \chi_0 (1 - \eta \mu \chi_0) = 4\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \phi \chi_0 + \sigma \nu \chi_0 = 4\alpha \\ \sigma \phi \chi_0 - \sigma \nu \chi_0 = 4\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \phi \chi_0 = 2\alpha + 2\beta \\ \sigma \nu \chi_0 = 2\alpha - 2\beta \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma\mu\chi_0}{\eta\mu\chi_0} = 2\alpha + 2\beta \\ \sigma\mu\chi_0 = 2\alpha - 2\beta \end{array} \right\} (\alpha^2 \neq \beta^2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\chi_0 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \\ \sigma\mu\chi_0 = 2\alpha - 2\beta \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\chi_0 + \sigma\mu\mu^2\chi_0 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 + (2\alpha - 2\beta)^2 \Rightarrow \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 + 4(\alpha - \beta)^2 = 1.$$

‘Η τελευταία αυτή σχέση είναι ή ζητούμενη άπαλείφουσα.

1.1.3. Νά βρεθεί ή άπαλείφουσα τοῦ συστήματος :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = \epsilon\phi\beta \\ \sigma\phi\chi + \sigma\phi\psi = \sigma\phi\gamma \end{array} \right. \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}).$$

‘Αν (χ_0, ψ_0) είναι μιὰ λύση τοῦ συστήματος, τότε ἔχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_0 + \psi_0 = \alpha \\ \epsilon\phi\chi_0 + \epsilon\phi\psi_0 = \epsilon\phi\beta \\ \sigma\phi\chi_0 + \sigma\phi\psi_0 = \sigma\phi\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_0 + \psi_0 = \alpha \\ \frac{\eta\mu(\chi_0 + \psi_0)}{\sigma\mu\chi_0 \sigma\mu\psi_0} = \epsilon\phi\beta \\ \frac{\eta\mu(\chi_0 + \psi_0)}{\eta\mu\chi_0 \eta\mu\psi_0} = \sigma\phi\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_0 + \psi_0 = \alpha \\ \eta\mu\alpha = \epsilon\phi\beta \sigma\mu\chi_0 \sigma\mu\psi_0 \\ \eta\mu\alpha = \sigma\phi\gamma \eta\mu\chi_0 \eta\mu\psi_0 \end{array} \right\}$$

‘Από τις τελευταίες σχέσεις καί ἑφόσον $\eta\mu\alpha\epsilon\phi\beta\sigma\phi\gamma \neq 0$, ἔχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_0 + \psi_0 = \alpha \\ \sigma\mu\chi_0 \sigma\mu\psi_0 = \eta\mu\alpha\sigma\phi\beta \\ \eta\mu\chi_0 \eta\mu\psi_0 = \eta\mu\alpha\epsilon\phi\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_0 + \psi_0 = \alpha \\ \sigma\mu\chi_0 \sigma\mu\psi_0 - \eta\mu\chi_0 \eta\mu\psi_0 = \eta\mu\alpha\sigma\phi\beta - \eta\mu\alpha\epsilon\phi\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_0 + \psi_0 = \alpha \\ \sigma\mu\mu(\chi_0 + \psi_0) = \eta\mu\alpha(\sigma\phi\beta - \epsilon\phi\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma\mu\mu\alpha = \eta\mu\alpha(\sigma\phi\beta - \epsilon\phi\gamma) \Rightarrow (\sigma\phi\beta - \epsilon\phi\gamma)\epsilon\phi\alpha = 1.$$

‘Η τελευταία σχέση είναι ή άπαλείφουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑ

27) Νά άπαλείψετε τὸ χ μεταξύ τῶν παρακάτω ἑξισώσεων :

$$\begin{array}{l} \alpha_1\eta\mu\chi + \beta_1\sigma\mu\chi = \gamma_1 \\ \alpha_2\eta\mu\chi + \beta_2\sigma\mu\chi = \gamma_2 \end{array} \quad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0).$$

28) Να απαλείψετε το χ από τα επόμενα συστήματα :

$$1) \begin{cases} \eta\mu(\chi + \alpha) = \mu \\ \eta\mu(\chi + \beta) = \nu \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha \\ \epsilon\phi 2\chi + \sigma\phi 2\chi = \beta \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha \\ \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = \beta \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi = \alpha \\ \eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi\eta\mu\chi = \beta \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \lambda\sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu(\chi + \alpha) \\ \lambda\eta\mu 2\chi = 2\eta\mu(\chi + \alpha) \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \alpha\eta\mu^2\chi + \beta\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \\ \alpha'\eta\mu^2\chi + \beta'\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma'\sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \end{cases} \quad (\alpha\alpha' \neq 0).$$

Β' ΟΜΑΔΑ

29) Να απαλείψετε το α από τις εξισώσεις :

$$\chi^3\eta\mu\alpha + \psi^3\sigma\upsilon\nu\alpha = \lambda^3\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\chi^3\sigma\upsilon\nu\alpha - \psi^3\eta\mu\alpha = \lambda^3\sigma\upsilon\nu 2\alpha.$$

30) Να απαλείψετε τα χ και ψ από τα ακόλουθα συστήματα :

$$1) \begin{cases} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \alpha, & \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \beta, & \chi - \psi = \gamma \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \alpha, & \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \beta, & \epsilon\phi \frac{\chi}{2} \epsilon\phi \frac{\psi}{2} = \epsilon\phi^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \epsilon\phi\chi + \epsilon\phi\psi = \alpha, & \sigma\phi\chi + \sigma\phi\psi = \beta, & \chi + \psi = \gamma. \end{cases}$$

31) *Αν οι εξισώσεις $\eta\mu\chi + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 1$ και $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \lambda$ έχουν κοινή λύση, τότε να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Όρισμοί και βασικές έννοιες

Αν ένα τουλάχιστον από τα μέλη μιᾶς ἀλγεβρικής ἀνίσωσης, ὡς πρὸς χ , περιέχει ἓνα ἢ περισσότερους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ $\chi \in \mathbf{R}$, τότε ἡ ἀνίσωση ὀνομάζεται **τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση** ὡς πρὸς χ . Θὰ περιοριστοῦμε στὴ μελέτη τῶν τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων μὲ ἓνα ἄγνωστο τόξο. Γενικότερα ὅμως, ὅπως ἀκριβῶς καὶ στὶς τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε καὶ ἀνισώσεις μὲ περισσότερα ἀπὸ ἓνα ἄγνωστα τόξα.

Κάθε τόξο χ_0 ποὺ ἐπαληθεύει μιὰ τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση λέγεται **μερική λύση** τῆς. Τὸ σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνίσωσης, ὀνομάζεται **γενικὴ λύση** ἢ πιὸ ἀπλᾶ **λύση** αὐτῆς τῆς ἀνίσωσης. Τὸ σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων μέσα στὸ διάστημα $[0, 2\pi)$ μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνίσωσης ὀνομάζεται **εἰδικὴ λύση**¹⁾.

Μιὰ τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση ποὺ ἐπαληθεύεται γιὰ κάθε τόξο ὀνομάζεται **μόνιμη τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση**.

Παρακάτω ἀναφέρουμε ὀρισμένες βασικὲς κατηγορίες τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων.

2. Θεμελιώδεις τριγωνομετρικὲς ἀνισώσεις

Ἡ λύση ὁποιασδήποτε τριγωνομετρικῆς ἀνίσωσης ἀνάγεται πάντοτε στὴ λύση μιᾶς ἢ καὶ περισσότερων θεμελιωδῶν ἀνισώσεων. Οἱ θεμελιώδεις ἀνισώσεις εἶναι :

$$\eta\mu\chi > \alpha, \sigma\upsilon\nu\chi > \alpha, \epsilon\phi\chi > \alpha, \sigma\phi\chi > \alpha$$

$$\eta\mu\chi < \alpha, \sigma\upsilon\nu\chi < \alpha, \epsilon\phi\chi < \alpha, \sigma\phi\chi < \alpha.$$

2.1. $\eta\mu\chi < \alpha$. Γιὰ νὰ λύσουμε αὐτὴ τὴν ἀνίσωση διακρίνουμε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις :

¹⁾ Ἡ εἰδικὴ λύση ἔχει μιὰ ἰδιαίτερη καὶ μεγάλη σημασία γιὰ τὶς τριγωνομετρικὲς ἀνισώσεις. Δὲ θεωροῦμε σκόπιμο νὰ ἐπεκταθοῦμε περισσότερο, γιὰτὶ τὸ θέμα τῆς εἰδικῆς λύσεως σχετίζεται μὲ τὴν περιοδικότητα τῶν συναρτήσεων.

- i) "Αν $\alpha \leq -1$, η άνίσωση είναι αδύνατη, γιατί $\eta\mu\chi \geq -1$ για κάθε $\chi \in \mathbf{R}$.
 ii) "Αν $\alpha > 1$, η άνίσωση είναι μόνιμη, γιατί $\eta\mu\chi \leq 1$ για κάθε $\chi \in \mathbf{R}$.
 iii) "Αν $\alpha = 1$, τότε η άνίσωση επαληθεύεται για κάθε τόξο, εκτός από τα τόξα που είναι λύσεις της εξισώσεως $\eta\mu\chi = 1$. "Αρα, η γενική λύση της ανισώσεως είναι :

$$\mathbf{R} - \{\chi \in \mathbf{R} : \eta\mu\chi = 1\} = \mathbf{R} - \{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} : \kappa \in \mathbf{Z}\}.$$

iv) Τέλος, ας υποθέσουμε ότι : $-1 < \alpha < 1$. Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε ακόμα τις παρακάτω ειδικότερες περιπτώσεις :

α) "Αν $0 < \alpha < 1$, λύνουμε πρώτα την άνίσωση γεωμετρικά (γραφικά) πάνω στην περιφέρεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Αυτό γίνεται με τον εξής τρόπο : Θεωρούμε πάνω στον άξονα BB' τῶν ἡμιτόνων διάνυσμα $\overline{OP}$ (Σχ. 1) τέτοιο, ὥστε $(\overline{OP}) = \alpha$. Ἀπὸ τὸ P φέρουμε παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα AA' τῶν συνημιτόνων καὶ σημειώνουμε μὲ M καὶ M' τὰ κοινὰ σημεία της μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Εἶναι φανερὸ πὼς κάθε τόξο μὲ πέρασ ὁποιοδήποτε σημείο τοῦ τόξου $\widehat{M'B'M}$ (Σχ. 1), επαληθεύει τὴν άνίσωση. Ἐνδιαφερόμαστε τώρα νὰ βροῦμε ἀναλυτικὰ τὴ λύση τῆς ανισώσεως $\eta\mu\chi < \alpha$ μὲ $0 < \alpha < 1$. Πρῶτα ὁμως θὰ βροῦμε τὴν εἰδικὴ λύση καὶ ἔπειτα μὲ τὴ βοήθεια της τὴ γενικὴ λύση, ὅπως φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν παρακάτω ἰσοδυναμία :

$$\eta\mu\chi < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\omega < \alpha & (1) \\ \omega \in [0, 2\pi) & (2) \\ \chi = 2\kappa\pi + \omega, \kappa \in \mathbf{Z} & (3). \end{cases}$$

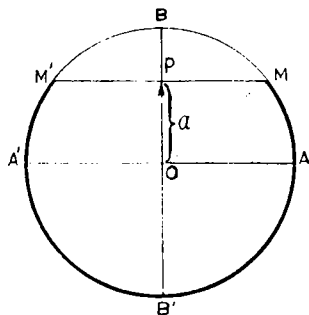
"Απὸ τὴν ἰσοδυναμία αὐτὴ φαίνεται ὅτι, λύνοντας τὴν (1) μποροῦμε ἔπειτα νὰ βροῦμε καὶ τὴ γενικὴ λύση τῆς $\eta\mu\chi < \alpha$, μὲ τὴ βοήθεια τῆς (3). Τονίζουμε ἀκόμα ὅτι ἡ λύση τῆς (1) μὲ τὸν περιορισμὸ (2) ἀποτελεῖ τὴν εἰδικὴ λύση τῆς ανισώσεως $\eta\mu\chi < \alpha$.

Γιὰ νὰ λύσουμε τὴν (1), υποθέτουμε ὅτι φ καὶ $\pi - \varphi$ εἶναι τὰ μοναδικὰ τόξα μέσα στὸ διάστημα $[0, 2\pi)$ μὲ $\eta\mu\varphi = \eta\mu(\pi - \varphi) = \alpha$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. "Αρα, τὰ μοναδικὰ ὑποδιαστήματα τοῦ διαστήματος $[0, 2\pi)$, πού ἱκανοποιοῦν τὴν άνίσωση (1) εἶναι $(\pi - \varphi, 2\pi)$ καὶ $[0, \varphi)$. Ἐπομένως ἡ εἰδικὴ λύση τῆς (1) εἶναι :

$$(\pi - \varphi, 2\pi) \cup [0, \varphi). \quad (4)$$

Τὸ σύνολο (4) ἀποτελεῖ τὴν εἰδικὴ λύση τῆς $\eta\mu\chi < \alpha$, ὁπότε ἡ γενικὴ λύση της, σύμφωνα καὶ μὲ τὴν (3) θὰ εἶναι :

$$\Delta_\chi = (2\kappa\pi + \pi - \varphi, 2\kappa\pi + 2\pi) \cup [2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \varphi), \kappa \in \mathbf{Z}.$$



Σχ. 1.

Με άλλα λόγια, ή ειδική λύση τής (1) είναι τὰ τόξα χ , πού ικανοποιοῦν μιὰ ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες ἀνισότητες :

$$0 < \chi \leq \varphi \quad \eta \quad \pi - \varphi < \chi < 2\pi.$$

Ἡ γενική λύση τής (1) είναι τὰ τόξα χ , πού ικανοποιοῦν μιὰ ἀπὸ τὶς ἀνισότητες :

$$2k\pi \leq \chi < 2k\pi + \varphi \quad \eta \quad 2k\pi + \pi - \varphi < \chi < 2k\pi + 2\pi,$$

ὅπου k ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος.

β) Ἄν $-1 < \alpha \leq 0$, ή ἀνίσωση λύνεται με ἀνάλογο τρόπο.

Ὅμοια με τὴν παραπάνω ἀνίσωση 2.1. λύνεται καί ή ἀνίσωση $\eta\mu\chi > \alpha$. Σημειώνουμε ἀκόμα ὅτι ή λύση τής ἀνισοεξισώσεως $\eta\mu\chi \leq \alpha$ (ή $\eta\mu\chi \geq \alpha$) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴ λύση τής ἀνισώσεως $\eta\mu\chi < \alpha$ (ή $\eta\mu\chi > \alpha$) καί τής ἐξισώσεως $\eta\mu\chi = \alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθεῖ ή ἀνίσωση : $\eta\mu\chi < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1).

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι στὸ σχῆμα 1 είναι $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Είναι φανερό τώρα ὅτι

κάθε τόξο χ , πού ἔχει πέρας τὸ ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $M'B'M$, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα M καί M' , ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση (1). Τὰ πρῶτα τόξα (γεωμετρικά) πού ἔχουν πέρατα τὰ σημεῖα M καί M' ἀντιστοίχως είναι τὰ $\frac{\pi}{3}$ καί

$\frac{2\pi}{3}$. Ἐπομένως ή ειδική λύση είναι :

$$0 < \chi < \frac{\pi}{3} \quad \eta \quad \frac{2\pi}{3} < \chi < 2\pi.$$

Ἡ γενική λύση τής (1) δίνεται ἀπὸ τὰ παρακάτω τόξα χ .

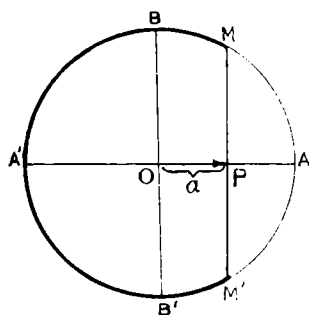
$$2k\pi < \chi < 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \eta \quad 2k\pi + \frac{2\pi}{3} < \chi < 2k\pi + 2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

2. 2. συν $\chi < \alpha$. Γιά νὰ λύσουμε αὐτὴ τὴν ἀνίσωση διακρίνουμε, ὅπως καί προηγούμενα, τὶς παρακάτω περιπτώσεις :

- i) Ἄν $\alpha \leq -1$, ή ἀνίσωση είναι ἀδύνατη.
- ii) Ἄν $\alpha > 1$, ή ἀνίσωση είναι μόνιμη τριγωνομετρική ἀνίσωση.
- iii) Ἄν $\alpha = 1$, τότε ή ἀνίσωση ἐπαληθεύεται γιά κάθε τόξο, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τόξα $\{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$. Ἐπομένως ή γενική λύση είναι :

$$\mathbf{R} - \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$$

iv) Ἄν $-1 < \alpha < 1$, λύνουμε τὴν ἀνίσωση γεωμετρικά ἐπάνω στὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Θεωροῦμε διάνυσμα $\overline{OP}$ (Σχ. 2) τέτοιο,



Σχ. 2.

ὥστε $(\overline{OP}) = \alpha$. Ἀπὸ τὸ P φέρουμε παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα BB' τῶν ἡμιτόνων καὶ σημειώσουμε μὲ M καὶ M' τὰ κοινὰ σημεία τῆς μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Παρατηροῦμε πὼς κάθε τόξο μὲ πέρας ὁποιοδήποτε

σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{MA'M'}$, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεία M καὶ M' , ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση. Γιὰ νὰ βροῦμε τώρα τὴν ἀναλυτικὴ λύση τῆς ἀνισώσεως, παραστήνουμε μὲ φ τὸ πρῶτο (γεωμετρικὸ) τόξο, ποὺ ἔχει πέρας τὸ M. Ἡ εἰδικὴ λύση τῆς εἶναι $(\varphi, 2\pi - \varphi)$. Προσθέτοντας στὰ ἄκρα τῆς εἰδικῆς λύσεως τὸ $2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$, βρίσκουμε τὴ γενικὴ λύση, ποὺ εἶναι :

$$(2\kappa\pi + \varphi, 2\kappa\pi + 2\pi - \varphi), \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Ὅμοια λύνονται οἱ : $\sin x > \alpha$, $\sin x \leq \alpha$, $\sin x \geq \alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση : $\sin x \leq \frac{1}{2}$ (1)

Λύση. Βρίσκουμε τὰ δύο καὶ μοναδικὰ τόξα μέσα στὸ $[0, 2\pi)$, ποὺ ἔχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$. Αὐτὰ εἶναι τὰ $\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{5\pi}{3}$. Κάθε τόξο x , ποὺ ἔχει πέρας ἓνα ὁποιο-

δήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{MA'M'}$ (Σχ. 3) εἶναι λύση τῆς ἀνισώσεως (1). Εἶναι φανερό ὅτι ἡ εἰδικὴ λύση εἶναι :

$$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] = \left\{ x \in \mathbf{R} : \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

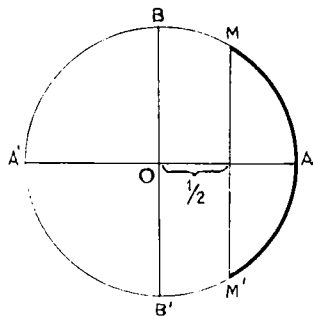
Ἡ γενικὴ λύση τῆς (1) εἶναι :

Τὰ τόξα x , ποὺ ἱκανοποιοῦν μιὰ ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀνισότητες :

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{3}, \kappa \in \mathbf{Z}.$$

2.3. $\varepsilon\varphi x < \alpha$. Ἡ ἀνίσωση αὕτὴ ἔχει πάντοτε λύση, ἐφόσον $\alpha \in \mathbf{R}$. Ὑποθέτουμε ὅτι $\alpha > 0$. Θεωροῦμε πάνω στὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων τὸ διάνυσμα $\overline{AP}$ τέτοιο, ὥστε $(\overline{AP}) = \alpha$ (Σχ. 4). Σημειώνουμε μὲ

M καὶ M' τὰ κοινὰ σημεία τῆς εὐθείας OP καὶ τῆς περιφέρειας τοῦ τριγωνομε-



Σχ. 3.

τρίκλου κύκλου κέντρου 0. Είναι φανερό από τὸ Σχ. 4, πὼς κάθε τόξο μὲ πέρασ ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{BA'M'}$ ἢ $\widehat{MAB'}$, ἐκτὸς τῶν σημείων B, M', B' καὶ M', ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση. Ὑποθέτουμε ὅτι φ εἶναι τὸ μοναδικὸ τόξο μὲ $\epsilon\phi\phi = \alpha$ καὶ $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Τότε ἡ εἰδικὴ λύση

εἶναι :

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi + \phi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \cup [0, \phi) \quad (1)$$

Ἡ γενικὴ λύση βρίσκεται προσθέτοντας στὰ ἄκρα τῶν εἰδικῶν διαστημάτων (1) τὸ $2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

Μποροῦμε ὅμως ἀκόμα νὰ βροῦμε τὴ γενικὴ λύση προσθέτοντας στὰ ἄκρα τοῦ διαστήματος

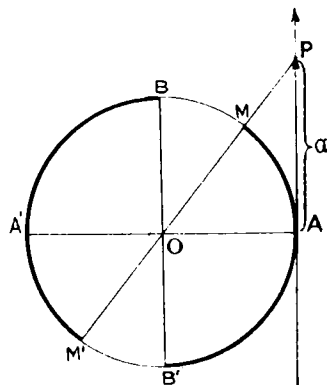
$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi + \phi\right) \text{ τὸ } \kappa\pi, \kappa \in \mathbf{Z}. \text{ Ἀρα ἡ γενικὴ λύση}$$

εἶναι :

$$\kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \chi < \kappa\pi + \pi + \phi \quad (\kappa \in \mathbf{Z}).$$

Ὅμοια λύνονται καὶ οἱ: $\epsilon\phi\chi > \alpha$, $\sigma\phi\chi < \alpha$,

$\sigma\phi\chi > \alpha$, $\epsilon\phi\chi \leq \alpha$, $\epsilon\phi\chi \geq \alpha$, $\sigma\phi\chi \leq \alpha$, $\sigma\phi\chi \geq \alpha$.



Σχ. 4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\epsilon\phi\chi < \sqrt{3}$ (1).

Λύση. Ὡς ὑποθέσουμε ὅτι στὸ σχῆμα 4 εἶναι $\alpha = \sqrt{3}$. Τὰ μοναδικὰ τόξα μέσα στὸ διάστημα $[0, 2\pi)$ ποὺ ἔχουν ἐφαπτομένη $\sqrt{3}$, εἶναι αὐτὰ ποὺ ἔχουν πέρατα

τὰ σημεία M καὶ M'. Τὰ τόξα αὐτὰ εἶναι τὰ $\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{4\pi}{3}$. Εἶναι ἤδη φανερό ἀπὸ τὸ σχῆμα ὅτι ἡ εἰδικὴ λύση τῆς (1) εἶναι :

$$\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{4\pi}{3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi \quad \text{ἢ} \quad 0 \leq \chi < \frac{\pi}{3}.$$

Ἐπομένως ἡ γενικὴ λύση εἶναι :

$$\kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \chi < \kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \quad (\kappa \in \mathbf{Z}).$$

Δίνουμε παρακάτω ἓνα παράδειγμα τριγωνομετρικῆς ἀνίσωσης ἀλγεβρικῆς μορφῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να λυθεί η ανίσωση : $4\sigma\sigma\chi + 2(1 + \sqrt{3})\sigma\sigma\chi + \sqrt{3} < 0$ (1)

Λύση. Άν θέσουμε $\sigma\sigma\chi = t$, τότε έχουμε να επιλύσουμε τήν άλγεβρική άνίσωση

$$4t^2 + 2(1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} < 0. \quad (2).$$

Έπειδή οί ρίζες τοῦ τριωνύμου $4t^2 + 2(1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3}$ είναι οί άριθμοί $-\frac{1}{2}$ καί $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, η λύση τής (2) είναι :

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < t < -\frac{1}{2}.$$

Άρα, έχουμε να λύσουμε τς θεμελιώδεις άνισώσεις :

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sigma\sigma\chi < -\frac{1}{2} \quad (3)$$

Μέ άλλα λόγια, η (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα τών άνισώσεων (3). Οί είδικές λύσεις αὔτῶν τών άνισώσεων είναι :

$$0 \leq \chi < \frac{5\pi}{6} \quad \eta \quad \frac{7\pi}{6} < \chi < 2\pi \quad (4)$$

καί

$$-\frac{2\pi}{3} < \chi < \frac{4\pi}{3}. \quad (5)$$

Τά τόξα χ γιά τά όποία συναλθεύουν οί (4) καί (5) άποτελοῦν τήν είδική λύση τής (1), η όποία είναι :

$$\frac{2\pi}{3} < \chi < \frac{5\pi}{6} \quad \eta \quad \frac{7\pi}{6} < \chi < \frac{4\pi}{3}.$$

Η γενική λύση τής (1) θα είναι :

$$2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < \chi < 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \quad \eta \quad 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} < \chi < 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \quad (\kappa \in \mathbf{Z})$$

3. Τριγωνομετρικές άνισώσεις που άνάγονται σε θεμελιώδεις

Οί βασικές μορφές τριγωνομετρικών άνισώσεων, καθώς καί οί μέθοδοι γιά τή λύση τους, είναι άνάλογες με έκείνες τών τριγωνομετρικών εξισώσεων. Έτσι, η λύση μιās άνισώσεως άνάγεται στη λύση θεμελιωδών τριγωνομετρι-

κῶν ἀνισώσεων. Π.χ., ἡ ἀνίσωση $f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) > 0$, ὅπου $f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi)$ ἀκέ-
 ραιο καὶ συμμετρικὸ πολυώνυμο ὡς πρὸς $\eta\mu\chi$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\chi$, εἶναι μιὰ βασικὴ μορφή
 τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως καὶ λύνεται ὅπως καὶ ἡ ἀντίστοιχη συμμετρικὴ
 τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση. Ἔχουμε :

$$f(\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(t, \frac{t^2-1}{2}\right) > 0 & (1) \\ t = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right). & (2) \end{cases}$$

Ἡ (1) εἶναι ἀλγεβρική ἀνίσωση ὡς πρὸς t . Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ (1) λύ-
 νεται καὶ ὅς εἶναι τὸ διάστημα $(t_0, +\infty)$ κάποια λύση τῆς. Τότε θὰ ἔχουμε
 νὰ λύσουμε τὴν ἀνίσωση :

$$\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) > t_0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{t_0 \sqrt{2}}{2},$$

ποὺ εἶναι θεμελιώδης τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση.

Παρακάτω ἀναφέρουμε ὁρισμένες χαρακτηριστικὲς μορφὲς τριγωνομε-
 τρικῶν ἀνισώσεων καὶ τὸν τρόπο ποὺ λύνονται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $(2\eta\mu\chi - \sqrt{3})(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1)(\epsilon\phi\chi - 1) < 0$ (1)

Λύση. Γιὰ νὰ λύσουμε τὴν (1) ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὰ σημεῖα τῶν παραγόντων
 τοῦ πρώτου μέλους τῆς, ὅταν τὸ χ διατρέχει τὸ διάστημα $[0, 2\pi)$. Μὲ ἄλλα
 λόγια, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσουμε τίς εἰδικὲς λύσεις τῶν παρακάτω ἀνισώσεων :

$$2\eta\mu\chi - \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi > \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\epsilon\phi\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi > 1. \quad (4)$$

Οἱ ἀνισώσεις (2), (3) καὶ (4) εἶναι θεμελιώδεις καὶ οἱ εἰδικὲς λύσεις τους
 ἀντίστοιχα εἶναι :

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ καὶ } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Γιὰ νὰ βροῦμε τώρα τὸ σημεῖο τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1), τοποθετοῦμε
 τὰ παραπάνω συμπεράσματα στὸν ἐπόμενο πίνακα :

χ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$2\eta\mu\chi - \sqrt{3}$	-	-	+	+	-	-	-	-	-
$2\sigma\upsilon\nu\chi - 1$	+	+	-	-	-	-	-	+	+
$\epsilon\phi\chi - 1$	-	+	+	-	-	+	-	-	-
Γ	+	-	-	+	-	+	-	+	+

$$\text{Είναι : } \Gamma = (2\eta\mu\chi - \sqrt{3})(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1)(\epsilon\phi\chi - 1).$$

Ἀπὸ τὸν παραπάνω πίνακα φαίνεται πὼς ἡ εἰδικὴ λύση τῆς (1) εἶναι :

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\eta\mu 3\chi > \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ νὰ σημειωθοῦν πάντω στὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ διαστήματα τῶν τόξων μέσα στὰ ὁποῖα καταλήγουν οἱ λύσεις της.

Λύση. Θέτουμε $3\chi = \omega$ καὶ λύνουμε τὴν ἀνίσωση $\eta\mu\omega > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἡ γενικὴ λύση της εἶναι :

$$\bigcup_{\kappa \in \mathbf{Z}} \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}, 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Ἐπομένως εἶναι :

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < 3\chi < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2\pi \frac{\kappa}{3} + \frac{\pi}{9} < \chi < 2\pi \frac{\kappa}{3} + \frac{2\pi}{9} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\kappa = 3\rho + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < 3$ ($\rho, \upsilon \in \mathbf{Z}$), ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$2\pi \frac{3\rho + \upsilon}{3} + \frac{\pi}{9} < \chi < 2\pi \frac{3\rho + \upsilon}{3} + \frac{2\pi}{9} \Leftrightarrow$$

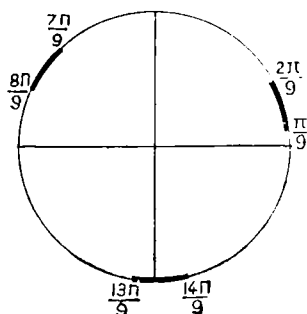
$$2\pi\rho + \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{\pi}{9} < \chi < 2\pi\rho + \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \quad (2).$$

Ἡ (2) εἶναι μιὰ ἄλλη μορφή τῆς γενικῆς λύσεως τῆς ἀνισώσεως $\eta\mu 3\chi > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ἡ μορφή αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βροῦμε τὴν εἰδικὴ λύση τῆς ἀνισώσεως, ἄρκει νὰ παραλείψουμε ἀπὸ τὴ (2) τὸ $2\pi\rho$. Ἀρα, ἡ εἰδικὴ λύση εἶναι :

$$\left(\frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{\pi}{9}, \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \right) \text{ μὲ } \upsilon = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Δίνοντας τώρα στὸ υ τὶς δυνατὲς τιμὲς βρίσκουμε ἀπὸ τὴν (3) τὰ τρία



Σχ. 5.

ειδικά διαστήματα μέσα στα οποία καταλήγουν οι λύσεις της ανισώσεως (Σχ. 5). Τα διαστήματα της ειδικής λύσεως είναι :

$$v = 0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9} \right)$$

$$v = 1 \rightarrow \left(\frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9} \right)$$

$$v = 2 \rightarrow \left(\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9} \right).$$

3.1. Άνισωση της μορφής : $\alpha \eta \mu \chi + \beta \sigma \upsilon \nu \chi + \gamma > 0, \quad \alpha \beta \gamma \neq 0$ (1)

Έπειδή η αντίστοιχη εξίσωση $\alpha \eta \mu \chi + \beta \sigma \upsilon \nu \chi + \gamma = 0$, όπως αναφέραμε στα προηγούμενα, λύνεται με δύο τρόπους, έτσι και η ανίσωση (1) θα λυθεί με δύο τρόπους.

α' τρόπος. Με τον περιορισμό $\chi \neq 2\kappa\pi + \pi (\kappa \in \mathbf{Z})$, εκφράζουμε τα $\eta \mu \chi$ και $\sigma \upsilon \nu \chi$ με την $\epsilon \varphi \frac{\chi}{2}$ και έχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \alpha \frac{2\epsilon \varphi \frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon \varphi^2 \frac{\chi}{2}} + \beta \frac{1 - \epsilon \varphi^2 \frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon \varphi^2 \frac{\chi}{2}} + \gamma > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\gamma - \beta) \epsilon \varphi^2 \frac{\chi}{2} + 2\alpha \epsilon \varphi \frac{\chi}{2} + \beta + \gamma > 0. \quad (2)$$

Η ανίσωση (2) είναι αλγεβρικής μορφής ως προς $\epsilon \varphi \frac{\chi}{2}$ και επομένως η λύση της ανάγεται στη λύση θεμελιωδών ανισώσεων της μορφής : $\epsilon \varphi \frac{\chi}{2} > \lambda$ ή $\epsilon \varphi \frac{\chi}{2} < \lambda$ με $\lambda \in \mathbf{R}$.

Αν $\chi = 2\kappa\pi + \pi$, τότε η (1) γράφεται :

$$\alpha \eta \mu (2\kappa\pi + \pi) + \beta \sigma \upsilon \nu (2\kappa\pi + \pi) + \gamma > 0 \Leftrightarrow -\beta + \gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma > \beta.$$

Άρα, η (1) έχει λύσεις τα τόξα $2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbf{Z}$, μόνο όταν $\gamma > \beta$.

β' τρόπος. Η (1) γράφεται :

$$(1) \Leftrightarrow \alpha \left(\eta \mu \chi + \frac{\beta}{\alpha} \sigma \upsilon \nu \chi + \frac{\gamma}{\alpha} \right) > 0.$$

Έπειδή όμως $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbf{R}$, υπάρχει τόξο $\omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\varepsilon\phi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ και επομένως έχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \alpha \left(\eta\mu\chi + \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \sigma\upsilon\nu\chi + \frac{\gamma}{\alpha} \right) > 0 \quad \begin{matrix} \sigma\upsilon\nu\omega > 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\alpha(\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega) > 0 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu(\chi + \omega) > -\gamma\sigma\upsilon\nu\omega.$$

i) "Αν $\alpha > 0$, έχουμε να λύσουμε τη θεμελιώδη άνίσωση :

$$\eta\mu(\chi + \omega) > -\frac{\gamma\sigma\upsilon\nu\omega}{\alpha}.$$

ii) "Αν $\alpha < 0$, τότε έχουμε την άνίσωση : $\eta\mu(\chi + \omega) < -\frac{\gamma\sigma\upsilon\nu\omega}{\alpha}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να λυθεί ή άνίσωση : $\sqrt{3}\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - \sqrt{2} < 0$. (1)

Λύση. Έχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3} \left(\eta\mu\chi + \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \left(\eta\mu\chi + \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}} \left[\eta\mu \left(\chi + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \right] < 0 \Leftrightarrow 2 \left[\eta\mu \left(\chi + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] < 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu \left(\chi + \frac{\pi}{6} \right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Θέτουμε $\chi + \frac{\pi}{6} = \omega$, όπότε έχουμε να λύσουμε την άνίσωση $\eta\mu\omega < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Η γενική λύση της είναι :

$$2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} < \omega < 2\kappa\pi + 2\pi \quad \text{και} \quad 2\lambda\pi \leq \omega < 2\lambda\pi + \frac{\pi}{4} \quad (\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}).$$

Απ' αυτή και έπειδή $\chi = \omega - \frac{\pi}{6}$, βρίσκουμε τη γενική λύση της (1),

πού είναι :

$$2\kappa\pi + \frac{7\pi}{12} < \chi < 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6} \quad \text{και} \quad 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6} \leq \chi < 2\lambda\pi + \frac{\pi}{12}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑ

32) Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} 1) \eta\mu\chi > \frac{\sqrt{3}}{2} & 2) \epsilon\phi\chi \geq -\sqrt{3} & 3) \sigma\upsilon\nu\chi < -\frac{1}{2} \\ 4) \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{2} & 5) \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} & 6) \sigma\phi\chi > 0. \end{array}$$

33) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} 1) 3\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi > 2 & 2) \epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi > 1 & 3) \sigma\upsilon\nu 2\chi > \eta\mu^2\chi - 1 \\ 4) \eta\mu 2\chi > \sigma\upsilon\nu\chi & 5) \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi > 1 & 6) \sigma\upsilon\nu 2\chi + 2 < 3\sigma\upsilon\nu\chi \\ 7) \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi < \sqrt{2} & 8) \frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi - 1}{\sigma\upsilon\nu 2\chi} < 1 & 9) \eta\mu^2\chi - \eta\mu 2\chi + 3\sigma\upsilon\nu^2\chi > 2 \\ 10) \frac{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi} > 1. \end{array}$$

Β' ΟΜΑΔΑ

34) Να λυθεί ή άνίσωση $\eta\mu 5\chi > \frac{1}{2}$ και να σημειωθούν πάνω στην περιφέρεια του τριγωνομετρικού κύκλου τα διαστήματα των τόξων μέσα στα οποία καταλήγουν οι λύσεις της.

35) Να βρείτε τις ειδικές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων :

$$\begin{array}{lll} 1) \sigma\phi 3\chi > -1 & 2) \eta\mu 4\chi < -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3) \sigma\upsilon\nu 3\chi < \frac{1}{2} \\ 4) (\eta\mu\chi - 1)(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1)(\epsilon\phi\chi - 1) < 0 & 5) (\sigma\upsilon\nu\chi + 1)(\eta\mu\chi - 2)(\epsilon\phi\chi + \sqrt{3}) < 0 \\ 6) (2\eta\mu\chi - 1)\left(\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{1}{2}\right)(\sigma\phi\chi - \sqrt{3}) \geq 0 & 7) (\sqrt{2}\eta\mu\chi - 1)(\epsilon\phi 2\chi - 1) \leq 0 \\ 8) (\chi - 2)\eta\mu 3\chi < 0 & 9) \chi\sigma\upsilon\nu\chi > 0. \end{array}$$

36) Να λυθεί ή άνίσωση: $\eta\mu 2\chi > \eta\mu 2\alpha$, $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

37) Να λυθεί και διερευνηθεί ή εξίσωση ως προς χ :

$$(2\sigma\upsilon\nu\phi - 1)\chi^2 - 4\chi + 2(2\sigma\upsilon\nu\phi + 1) = 0,$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

38) Να λυθεί ή άνίσωση: $3(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) - 5\eta\mu\chi \sigma\upsilon\nu\chi > 3$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Όρισμοί και βασικές έννοιες

1.1. Από τον όρισμό του $\eta\mu\chi$ ($\chi \in \mathbf{R}$) συμπεραίνουμε ότι, το ήμίτονο (σύντομα το $\eta\mu$) είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$ και πεδίο τιμών το $[-1, 1]$. Έπομένως το $\eta\mu$ είναι μια πραγματική συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς καὶ ἔχει τὸν τύπο $\psi = \eta\mu\chi$. Συμβολικὰ γράφουμε :

$$\eta\mu : \mathbf{R} \longrightarrow [-1, 1] \quad \eta$$

$$\chi \xrightarrow{\eta\mu} \eta\mu(\chi) = \eta\mu\chi.$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ συνάρτηση $\eta\mu$ δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη (ἓνα πρὸς ἓνα), γιατί ἡ ἐξίσωση $\eta\mu\chi = \psi$ μὲ $|\psi| \leq 1$ δὲν ἔχει μιὰ μόνο λύση. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι κάθε $\psi \in [-1, 1]$ δὲν εἶναι ἀντίστοιχο (εἰκόνα) ἑνὸς μόνο $\chi \in \mathbf{R}$. Π.χ. ἡ λύση

τῆς ἐξισώσεως $\eta\mu\chi = 1$ εἶναι $\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Έπομένως τὰ ἅπεια τόξα

$2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ἔχουν εἰκόνα μὲ τὴ συνάρτηση $\eta\mu$ τὸ 1, δηλαδή εἶναι $\eta\mu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= 1$ γιὰ κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$. Τελικά, ἡ συνάρτηση $\eta\mu$ εἶναι μιὰ συνάρτηση τοῦ $\mathbf{R}$ πᾶν ὅπου $[-1, 1]$. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν εἶναι ἓνα πρὸς ἓνα, δὲν ἔχει ἀντίστροφη συνάρτηση. Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ συνάρτηση $\eta\mu$ δὲν ἀντιστρέφεται, δηλαδή ἡ ἀντιστοιχία :

$$\eta\mu^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$$

δὲν εἶναι συνάρτηση.

Ἄν ὅμως περιορίσουμε τὸ πεδίο ορισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\eta\mu$ σ' ἓνα κατάλληλο ὑποδιάστημα τοῦ $\mathbf{R}$, τότε μπορεῖ ἡ συνάρτηση $\eta\mu$ νὰ γίνεῖ ἓνα πρὸς ἓνα καὶ ἔπομένως νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀντιστροφή της.

Θὰ δείξουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $\eta\mu$ μὲ πεδίο ορισμοῦ τὸ σύνολο

$$\Delta_{\kappa} = \left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right] \quad (\kappa \in \mathbf{Z}) \quad \text{καὶ μὲ πεδίο τιμῶν τὸ } [-1, 1] \text{ εἶναι}$$

ένα πρὸς ένα¹⁾. Θεωροῦμε δύο τόξα χ_1, χ_2 ἀπὸ τὸ Δ_k μὲ $\chi_1 \neq \chi_2$ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $\eta\mu\chi_1 \neq \eta\mu\chi_2$. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $\eta\mu\chi_1 = \eta\mu\chi_2$, τότε θὰ εἶναι :

$$\chi_1 = 2\rho\pi + \chi_2 \quad \eta \quad \chi_1 = (2\rho + 1)\pi - \chi_2 \quad (\rho \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\chi_1 - \chi_2 = 2\rho\pi \quad (1)$$

ἢ

$$\chi_1 + \chi_2 = 2\rho\pi + \pi \quad (2).$$

Ἐξάλλου, ἐπειδὴ $\chi_1, \chi_2 \in \Delta_k$, συνάγεται ὅτι :

$$k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \chi_1 \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \chi_2 \leq k\pi + \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Ἀπὸ τὶς (3) βρίσκουμε :

$$-\pi \leq \chi_1 - \chi_2 \leq \pi \quad (4)$$

$$2k\pi - \pi \leq \chi_1 + \chi_2 \leq 2k\pi + \pi. \quad (5)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (4) ἔχουμε :

$$-\pi \leq 2\rho\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \rho = 0.$$

Ἀπὸ τὴν (1) μὲ $\rho = 0$ βρίσκουμε $\chi_1 = \chi_2$, ποὺ εἶναι ἄτοπο.

Συνδυάζοντας τὶς (2) καὶ (5) ἔχουμε :

$$2k\pi - \pi \leq 2\rho\pi + \pi \leq 2k\pi + \pi \Leftrightarrow k-1 \leq \rho \leq k \Leftrightarrow \rho = k \quad \eta \quad \rho = k-1.$$

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (3) καὶ (2) μὲ $\rho = k$ ἢ $k-1$ συνάγουμε ἀντιστοίχως

$$\chi_1 = \chi_2 = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \eta \quad \chi_1 = \chi_2 = k\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ ποὺ εἶναι ἄτοπο. Ἀρα ἡ συνάρτηση:}$$

$$\eta\mu: \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right] \longrightarrow [-1, 1]$$

εἶναι ἓνα πρὸς ἓνα καὶ ἐπομένως ἀντιστρέφεται. Ἡ ἀντίστροφή της συμβολίζεται

$$\text{μὲ τοῦτο } \eta\mu \text{ καὶ διαβάζεται «τόξο κάπα ἡμίτονο». Τὸ διάστημα } \Delta_k = \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right] \text{ μὲ } k \in \mathbf{Z} \text{ ὀνομάζεται γενικὸ διάστημα ἀντιστροφῆς τῆς συναρτή-}$$

σεως $\eta\mu$. Εἰδικότερα, ἂν $k = 0$ ἔχουμε τὴν ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση :

1). Μιὰ ἀπεικόνιση $f: A \rightarrow B$ εἶναι ἓνα πρὸς ἓνα, ὅταν καὶ μόνο ὅταν :

$$\forall (\chi_1, \chi_2) \in A \times A \text{ μὲ } \chi_1 \neq \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) \neq f(\chi_2).$$

$$\text{τοξο ημ} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1],$$

γιατί με $\kappa = 0$ είναι $\Delta_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Τη συνάρτηση τοξοημ θα συμβολί-

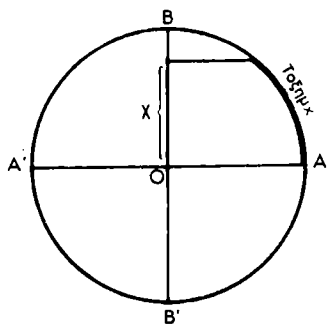
ζουμε στα επόμενα με **Τοξημ**. Το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ θα λέγεται **βασικό ή**

πρωτεύον διάστημα της συναρτήσεως τοξημ. Ο αριθμός Τοξημχ με $|\chi| \leq 1$ θα λέγεται **βασική ή πρωτεύουσα τιμή** της τοξημ και θα διαβάζεται «πρωτεύον τόξο ήμίτονου χ».

“Όλα τα παραπάνω, αποτελούν τη θεωρητική πλευρά της αντιστροφής της συναρτήσεως ημ. Για την εφαρμογή όμως της προηγούμενης θεωρίας, είναι απαραίτητο να δώσουμε μερικούς πιο πρακτικούς όρισμούς των έννοιων που όρισαμε.

Το σύμβολο **Τοξημχ** ή **τοξοημχ**, εφόσον $-1 \leq \chi \leq 1$, διαβάζεται «τόξο ήμίτονου χ» και παριστάνει ένα και μοναδικό τόξο του διαστήματος $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ που έχει ήμίτονο τον αριθμό χ (Βλ. Σχ. 6).

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. } \text{τοξοημ} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4} \text{ και } \text{τοξοημ} \left(-\frac{1}{2} \right) = \\ &= -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$



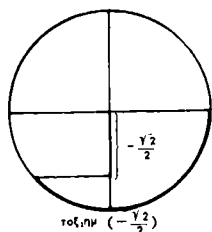
Σχ. 6.

Το σύμβολο τοξημχ, εφόσον $-1 \leq \chi \leq 1$, παριστάνει ένα και μοναδικό τόξο του διαστήματος

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ που έχει ήμίτονο το χ. Το διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ το βρήκαμε από το γενικό διάστημα αντιστροφής της συναρτήσεως ημ, δηλαδή το $\left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \right.$

$\left. \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ με $\kappa = 1$. Η τιμή $\kappa = 1$ καθορίζεται από το δείκτη του συμβόλου

τοξημχ. Π.χ. είναι: $\text{τοξημ} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$ και $\text{τοξημ} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\pi}{4}$ (Βλ. Σχ. 7)



Σχ. 7.

Από τὰ παραπάνω φαίνεται καὶ πάλι ἡ χρήσιμη ἰσοδυναμία :

$$\left. \begin{aligned} \text{τοξ}_{\eta\mu} \chi &= \varphi \\ -1 \leq \chi \leq 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \eta\mu \varphi &= \chi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right.$$

Αναφέρουμε τώρα μερικά ακόμη παραδείγματα :

$$\text{Τοξ}_{\eta\mu} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{Τοξ}_{\eta\mu} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \text{Τοξ}_{\eta\mu} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{τοξ}_1 \eta\mu \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}, \quad \text{τοξ}_1 \eta\mu \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi}{3}, \quad \text{τοξ}_1 \eta\mu 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{τοξ}_2 \eta\mu \frac{1}{2} = \frac{13\pi}{6}, \quad \text{τοξ}_2 \eta\mu \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5\pi}{3}, \quad \text{τοξ}_2 \eta\mu 1 = \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{τοξ}_{-1} \eta\mu \frac{1}{2} = -\frac{7\pi}{6}.$$

Από τὸν ὀρισμὸ τῆς συναρτήσεως τοξ_κημ συνάγεται, γιὰ κάθε $k \in \mathbb{Z}$ καὶ γιὰ κάθε $\psi \in [-1, 1]$, ὅτι :

$$\alpha) \eta\mu(\text{τοξ}_{\kappa} \eta\mu \psi) = \psi$$

$$\beta) \text{Τοξ}_{\eta\mu}(-\psi) = -\text{Τοξ}_{\eta\mu} \psi$$

$$\gamma) \text{τοξ}_{\kappa} \eta\mu \psi = k\pi + (-1)^{\kappa} \text{Τοξ}_{\eta\mu} \psi$$

$$\delta) \text{Τοξ}_{\eta\mu} \psi = \chi \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \eta\mu \chi &= \psi \\ \chi &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\epsilon) \text{τοξ}_{\kappa} \eta\mu \psi = \chi \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \eta\mu \chi &= \psi \\ \chi &\in \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \right.$$

Ἡ παραπάνω ἰσοδυναμία δ) εἶναι χρήσιμη γιὰ τὶς ἐφαρμογές.

1.2. Μὲ ἀνάλογο τρόπο μπορούμε νὰ μελετήσουμε τὸ πρόβλημα ἂν ὑπάρχει ἀντίστροφη συνάρτηση τῆς συναρτήσεως συν(συνημίτονο). Τὸ γενικὸ διά-

σημα αντίστροφης της συναρτήσεως συν είναι $[κπ, κπ + π]$, $κ \in \mathbf{Z}$. 'Η αντίστροφη συνάρτηση της συναρτήσεως συν συμβολίζεται με **τοξ_κσυν**. Με $κ = 0$ βρίσκουμε το **βασικό διάστημα** $[0, π]$. 'Η συνάρτηση **τοξ₀συν** που αντιστοιχεί στο βασικό διάστημα συμβολίζεται και με **Τοξσυν**. 'Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα :

$$\begin{aligned} \text{Τοξ συν } \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{3}, & \text{Τοξ συν } (-1) &= \pi, & \text{Τοξ συν } 0 &= \frac{\pi}{2}, \\ \text{τοξ}_1 \text{συν } \frac{1}{2} &= \frac{5\pi}{3}, & \text{τοξ}_2 \text{συν } \frac{1}{2} &= \frac{7\pi}{3}, & \text{τοξ}_{-1} \text{συν } \frac{1}{2} &= -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

'Από τον όρισμό της συναρτήσεως τοξ_κσυν συνάγονται, για κάθε $\psi \in [-1, 1]$, τα εξής :

- α) $\text{συν}(\text{τοξ}_κ \text{συν } \psi) = \psi$, για κάθε $κ \in \mathbf{Z}$
- β) $\text{Τοξσυν}(-\psi) = \pi - \text{Τοξσυν} \psi$
- γ) $\text{τοξ}_κ \text{συν} \psi = 2κπ + (-1)^κ \text{Τοξσυν} \psi$, για κάθε $κ \in \mathbf{Z}$

$$\delta) \quad \boxed{\text{Τοξσυν} \psi = \chi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{συν} \chi = \psi \\ \chi \in [0, \pi] \end{cases}}$$

$$\epsilon) \text{ τοξ}_κ \text{συν} \psi = \chi \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{συν} \chi = \psi \\ κπ \leq \chi \leq κπ + \pi \end{array} \right\} \quad (κ \in \mathbf{Z})$$

'Η παραπάνω ισοδυναμία δ) είναι χρήσιμη για τις εφαρμογές.

Παρατήρηση : Για να βρούμε την αντίστροφη της συναρτήσεως συν, μπορούμε να στηριχθούμε στα προηγούμενα (βλ. 1.1.), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\text{συν} \chi = \eta \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \chi \right)$.

1.3. 'Η συνάρτηση εφ (έφαπτομένη) με τύπο $\psi = \text{εφ} \chi$ είναι ορισμένη στο $\mathbf{R} - \left\{ κπ + \frac{\pi}{2} : κ \in \mathbf{Z} \right\}$ και έχει πεδίο τιμών το $\mathbf{R}$. 'Η συνάρτηση εφ δεν είναι άμφιμονοσήμαντη και επομένως δεν υπάρχει ή αντίστροφή της. Θα δείξουμε όμως ότι η συνάρτηση :

$$\text{εφ} : \left(κπ - \frac{\pi}{2}, κπ + \frac{\pi}{2} \right) \longrightarrow \mathbf{R} \quad (\Sigma)$$

είναι άμφιμονοσήμαντη για κάθε $κ \in \mathbf{Z}$. Θεωρούμε δύο τόξα $\chi_1, \chi_2 \in$

$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$ με $\chi_1 \neq \chi_2$. "Αν υποθέσουμε ότι $\varepsilon\varphi\chi_1 = \varepsilon\varphi\chi_2$,

τότε θα έχουμε :

$$\chi_1 - \chi_2 = \rho\pi, \rho \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

$$\text{'Εξάλλου είναι : } k\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_1 < k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ και } k\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_2 < k\pi + \frac{\pi}{2}$$

και άπ' αυτές βρίσκουμε :

$$-\pi < \chi_1 - \chi_2 < \pi. \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε :

$$-\pi < \rho\pi < \pi \Leftrightarrow -1 < \rho < 1 \Leftrightarrow \rho = 0.$$

Με $\rho = 0$ η σχέση (1) δίνει $\chi_1 = \chi_2$, που είναι άτοπο. Άρα, υπάρχει η αντίστροφη της $\varepsilon\varphi$ και συμβολίζεται με $\text{τοξ}_\kappa \varepsilon\varphi$. Το γενικό διάστημα αντιστροφής της $\varepsilon\varphi$ είναι το $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. 'Ακόμα τη συνάρτηση $\text{τοξ}_0 \varepsilon\varphi$ θα συμβολίζουμε και με $\text{Τοξ}\varepsilon\varphi$.

$$\text{'Η τιμή Τοξ}\varepsilon\varphi\chi \text{ της συναρτήσεως Τοξ}\varepsilon\varphi \text{ στη θέση } \chi \in \mathbf{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\right\}$$

ονομάζεται **βασική τιμή** τιμή και το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ονομάζεται **βασικό διάστημα**.

'Από τον όρισμό της συναρτήσεως $\text{τοξ}_\kappa \varepsilon\varphi$ προκύπτουν τὰ παρακάτω :

$$\alpha) \varepsilon\varphi(\text{τοξ}_\kappa \varepsilon\varphi\chi) = \chi, \text{ για κάθε } (\chi, \kappa) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}.$$

$$\beta) \text{Τοξ}\varepsilon\varphi(-\chi) = -\text{Τοξ}\varepsilon\varphi\chi, \text{ για κάθε } \chi \in \mathbf{R}.$$

$$\gamma) \text{τοξ}_\kappa \varepsilon\varphi\chi = k\pi + \text{Τοξ}\varepsilon\varphi\chi, \text{ για κάθε } (\chi, \kappa) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}.$$

$$\delta) \text{τοξ}_\kappa \varepsilon\varphi\chi = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi\omega = \chi \\ k\pi - \frac{\pi}{2} < \chi < k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} (\kappa \in \mathbf{Z}, \chi \in \mathbf{R}).$$

'Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και για την αντίστροφη συνάρτηση της $\sigma\varphi$ (συνεφαπτομένης), αρκεί νὰ τονίσουμε ότι το γενικό διάστημα αντιστροφής της συναρτήσεως $\sigma\varphi$ είναι το $(k\pi, k\pi + \pi)$.

Εύκολα μπορούμε νὰ δείξουμε τὰ ἐπόμενα :

$$\alpha) \text{Τοξ}\varepsilon\varphi\chi = \text{Τοξ}\sigma\varphi \frac{1}{\chi}, \chi > 0.$$

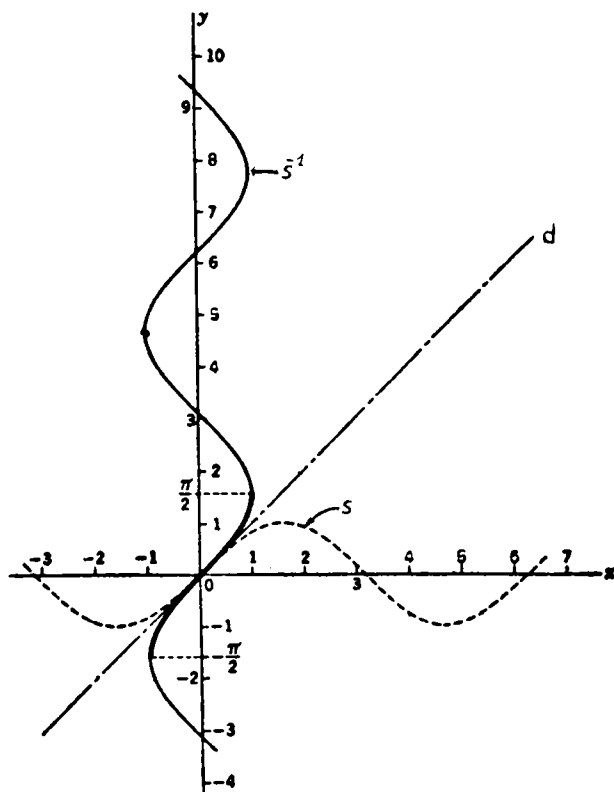
$$\beta) \text{To}_{\xi\epsilon\phi\chi} = -\pi + \text{To}_{\xi\sigma\phi} \frac{1}{\chi}, \chi < 0.$$

$$\gamma) \text{To}_{\xi\epsilon\phi\chi} + \text{To}_{\xi\epsilon\phi} \frac{1}{\chi} = \frac{\pi}{2}, \chi > 0.$$

$$\delta) \text{To}_{\xi\epsilon\phi\chi} + \text{To}_{\xi\epsilon\phi} \frac{1}{\chi} = -\frac{\pi}{2}, \chi < 0.$$

$$\epsilon) \text{To}_{\xi\sigma\phi\chi} + \text{To}_{\xi\sigma\phi} \frac{1}{\chi} = \frac{\pi}{2}, \chi > 0.$$

$$\sigma\tau) \text{To}_{\xi\sigma\phi\chi} + \text{To}_{\xi\sigma\phi} \frac{1}{\chi} = -\frac{\pi}{2}, \chi < 0.$$



Σχ. 8

Οι συναρτήσεις τοξ_{χημ}, τοξ_{συν}, τοξ_{εφ} και τοξ_{σφ} ονομάζονται αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις.

Χρήσιμες για τις εφαρμογές είναι και οι επόμενες ισοδυναμίες :

$$\text{Τοξεφ}\chi = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi\omega = \chi \\ -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Τοξσφ}\chi = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\varphi\omega = \chi \\ -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

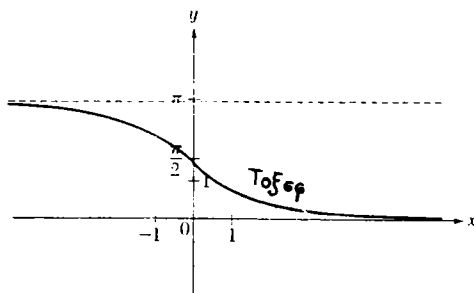
Παρατήρηση. α) 'Η συνάρτηση $\eta\mu$ στο διάστημα $\left[κπ - \frac{\pi}{2}, κπ + \frac{\pi}{2}\right]$ είναι «γνήσιως αύξουσα» με $κ$ άρτιο και «γνησίως φθίνουσα» με $κ$ περιττό.

β) 'Η συνάρτηση $\sin$ στο διάστημα $[κπ, κπ + π]$ είναι γνησίως φθίνουσα με $κ$ άρτιο και γνησίως φθίνουσα με $κ$ περιττό.

γ) 'Η συνάρτηση $\varepsilon\varphi$ στο διάστημα $\left(κπ - \frac{\pi}{2}, κπ + \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα με $κ \in \mathbf{Z}$

δ) 'Η συνάρτηση $\sigma\varphi$ στο διάστημα $(κπ, κπ + π)$ είναι γνησίως φθίνουσα με $κ \in \mathbf{Z}$.

1.4. Γραφική παράσταση των αντίστροφων κυκλικών συναρτήσεων Γνωρίζουμε ότι, αν f είναι μιὰ συνάρτηση μιὰς πραγματικής μεταβλητής και f^{-1} ή αντίστροφή της, τότε τὰ διαγράμματα $S_{f^{-1}}$ και $S_{f^{-1}}$ τών f και f^{-1} είναι σὲ ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν πρώτη διχοτόμο. Μὲ τὴ βοήθεια αὐτοῦ τοῦ συμπεράσματος, μπορούμε τώρα νὰ παραστήσουμε γραφικὰ τὶς ἀντίστροφες κυκλικὲς συναρτήσεις, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζουμε τὰ διαγράμματα τών τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων $\eta\mu$, $\sin$, $\varepsilon\varphi$ καὶ $\sigma\varphi$. Συγκεκριμένα θεωροῦμε τὴ συνάρτηση $\text{Τοξ}\eta\mu$, ὅπως τὴν ὀρίσαμε παραπάνω (1.1). 'Η συνάρτηση $\text{Τοξ}\eta\mu$ εἶναι ἡ ἀντίστροφη τῆς συναρτήσεως $\eta\mu$ μέσα στοῦ διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ καὶ ἐπομένως τὰ διαγράμματα S καὶ S^{-1} τών συναρτήσεων $\eta\mu$ καὶ $\text{Τοξ}\eta\mu$ θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν πρώτη διχοτόμο d (Σχ. 8).

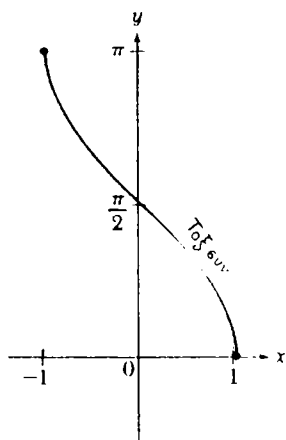


Σχ. 9.

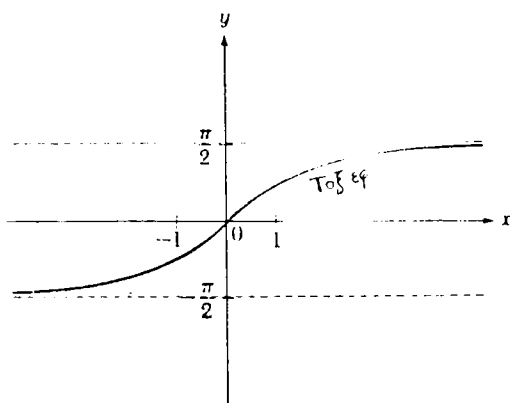
'Η γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως $\text{τοξ}\chi\eta\mu$ θὰ προκύψει μὲ παράλληλη μεταφορὰ κατὰ $κπ$ ($κ \in \mathbf{Z}$) τοῦ διαγράμματος S^{-1} καὶ τοῦτο, γιατί ἰσχύει :

$\text{τοξ}\chi\eta\mu\chi = κπ \pm \text{Τοξ}\eta\mu\chi$ ($|\chi| \leq 1$).

"Ομοῖα βρίσκουμε τὰ διαγράμματα τών ὑπόλοιπων ἀντίστροφων κυκλικῶν συναρτήσεων (βλ. σχήματα 7, 8 καὶ 9).



Σχ. 10.



Σχ. 11.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά δείξετε ότι: $\text{Τοξ.εφ } \frac{1}{2} + \text{Τοξ.εφ } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ (1)

Απόδειξη. Αν θέσουμε $\text{Τοξ.εφ } \frac{1}{2} = \alpha$ και $\text{Τοξ.εφ } \frac{1}{3} = \beta$, τότε έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\text{Τοξ.εφ } \frac{1}{2} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi\alpha = \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

(M)

$$\text{Τοξ.εφ } \frac{1}{3} = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi\beta = \frac{1}{3} \\ -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}$$

Σύμφωνα με το μετασχηματισμό (M), έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (2) και (4) βρίσκουμε:

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

$$\text{καί έπομένως } \alpha + \beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbf{Z} \quad (7)$$

Άρκεί νά δείξουμε ότι είναι $\kappa = 0$, όπότε από την (7) θά έχουμε την (6). 'Από τις (2), (3) βρίσκουμε $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ καί από τις (4), (5) βρίσκουμε $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$.

Συνδυάζοντας τά τελευταία συμπεράσματα, έχουμε $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. 'Απ' αὐτή καί την (7) προκύπτει :

$$0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \kappa < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. 'Αν $\chi > 0$, $\psi > 0$ καί $\chi\psi < 1$, τότε νά δείξετε ότι :

$$\text{To}_{\xi\epsilon\phi}\chi + \text{To}_{\xi\epsilon\phi}\psi = \text{To}_{\xi\epsilon\phi}\frac{\chi + \psi}{1 - \chi\psi}$$

'Απόδειξη. Θέτουμε :

$$\text{To}_{\xi\epsilon\phi}\chi = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi\alpha = \chi \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$\text{To}_{\xi\epsilon\phi}\psi = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi\beta = \psi \\ -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

$$\text{To}_{\xi\epsilon\phi}\frac{\chi + \psi}{1 - \chi\psi} = \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi\gamma = \frac{\chi + \psi}{1 - \chi\psi} \\ -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, άρκεί νά δείξουμε ότι : $\alpha + \beta = \gamma$ (7)

'Από τις σχέσεις (1), (2) καί (3) έχουμε :

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta} = \frac{\chi + \psi}{1 - \chi\psi} = \epsilon\phi\gamma$$

καί έπομένως : $\alpha + \beta = \kappa\pi + \gamma$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. 'Αρκεί τώρα νά δείξουμε ότι $\kappa = 0$, όπότε από την τελευταία σχέση θά έχουμε την (7).

'Από τις σχέσεις (1), (2) καί έπειδή $\chi > 0$, συνάγεται ότι : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (8)

'Από τις (3), (4) καί έπειδή $\psi > 0$, προκύπτει : $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ (9)

‘Ακόμα $\frac{\chi + \psi}{1 - \chi\psi} > 0$, γιατί $\chi\psi < 1$, όπότε, σύμφωνα με τις (5) και (6), έχουμε: $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ή $0 > -\gamma > -\frac{\pi}{2}$ ή $-\frac{\pi}{2} < -\gamma < 0$. ‘Η τελευταία σχέση σέ συνδυασμό και με τις σχέσεις (8), (9) μάς δίνει: $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta - \gamma < \pi$. ‘Απ’ αὐτή και τήν $\alpha + \beta = \kappa\pi + \gamma$ έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2} < \kappa\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \kappa < 1 \Leftrightarrow \kappa = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νά δείξετε ότι: $\text{Τοξημ } \frac{1}{3} + \text{Τοξημ } \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi}{2}$ (1)

‘Απόδειξη. Έχουμε τις επόμενες ισοδυναμίες:

$$\text{Τοξημ } \frac{1}{3} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\alpha = \frac{1}{3} & (2) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Τοξημ } \frac{2\sqrt{2}}{3} = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} & (4) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} & (5) \end{cases}$$

‘Η (1) γράφεται:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \quad (6).$$

Βρίσκουμε τὰ όρια μεταβολής του̃ τόξου $\frac{\pi}{2} - \beta$. Είναι $\frac{2\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ και επομένως, σύμφωνα με τήν (4), έχουμε $\eta\mu\beta > \eta\mu \frac{\pi}{3}$. ‘Από τήν τελευταία σχέση και τήν (5), συνάγεται:

$$\frac{\pi}{3} < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ ή } 0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{6} \quad (8).$$

‘Από τις (3) και (8) προκύπτει ότι:

$$(6) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha = \pm \sqrt{1 - \eta\mu^2\beta} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \sqrt{1 - \eta\mu^2\beta} \Leftrightarrow$$

(5)
(4)

$$\frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Νά λυθεί η εξίσωση $\text{Toxi}\mu\chi + \text{Toxi}\mu\chi\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$. (1)

Λύση. Το πρώτο μέλος της (1) έχει έννοια (ορίζεται), εφόσον είναι :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \chi \leq 1 \\ -1 \leq \chi/\sqrt{3} \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \chi \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Θέτουμε :

$$\text{Toxi}\mu\chi = \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\alpha = \chi \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (3)$$

(M)

$$\text{Toxi}\mu\chi/\sqrt{3} = \beta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\beta = \chi/\sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$(6)$$

*Αρα, έχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ (M) \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \chi \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\pi). \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\text{'Αρκεϊ νά λύσουμε την εξίσωση } (7) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta. \quad (8)$$

$$\text{Θεωρούμε την εξίσωση } \eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right). \quad (9)$$

Ή (9) δέν είναι ίσοδύναμη μέ την (8), αλλά κάθε λύση της (8) είναι και της (9). Θα λύσουμε έπομένως την (9) και θα ξεετάσουμε κατόπιν ποιές από τις λύσεις της είναι λύσεις και της (8). *Έχουμε :

$$(9) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \pm \sqrt{1 - \eta\mu^2\beta}.$$

Ή τελευταία εξίσωση, σύμφωνα μέ τις σχέσεις (3) και (5), γράφεται :

$$\chi = \pm \sqrt{1-3\chi^2} \Rightarrow \chi = \frac{1}{2}, \chi = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

‘Ο περιορισμός (π) δὲν ἀποκλείει τὶς ρίζες (10). Ἐξετάζουμε ὁμως τώρα ποιά ρίζα ἀπὸ τὶς (10) εἶναι καὶ ρίζα τῆς (8).

$$1) \text{ Ἄν } \chi = \frac{1}{2}, \text{ τότε, ἀπὸ τὶς (3) καὶ (5), ἔχουμε } \eta\alpha = \frac{1}{2} \text{ καὶ } \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀπ’ αὐτὲς καὶ τὶς (4), (6) προκύπτει $\alpha = \frac{\pi}{6}$ καὶ $\beta = \frac{\pi}{3}$. Τὰ τόξα αὐτὰ ἐπα-

ληθεύουν τὴν ἐξίσωση (8) καὶ ἐπομένως ἡ ρίζα $\chi = \frac{1}{2}$ εἶναι καὶ ρίζα τῆς (1).

$$2) \text{ Ἄν } \chi = -\frac{1}{2}, \text{ τότε, μὲ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο, θὰ βροῦμε } \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

καὶ $\beta = -\frac{\pi}{3}$. Τὰ τόξα ὁμως αὐτὰ δὲν ἐπαληθεύουν τὴν (8) καὶ ἐπομένως

ἡ ρίζα $\chi = -\frac{1}{2}$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς (1).

Παρατήρηση: Τονίσαμε παραπάνω ὅτι οἱ ἐξισώσεις (8) καὶ (9) δὲν εἶναι ἰσοδύναμες. Τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὴν ἐπόμενη ἰσοδυναμία :

$$\eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \beta & (E) \\ \alpha = (2\lambda + 1)\pi - \frac{\pi}{2} + \beta \end{cases} \quad (\kappa, \lambda \in \mathbf{Z})$$

Μόνο ἀπὸ τὴν (E), μὲ $\kappa = 0$, βρίσκουμε τὴν (8).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ἄν $\chi > 0$, $\psi > 0$ καὶ $\chi^2 + \psi^2 < 1$, νὰ δείξετε ὅτι :

$$\text{Τοξημ}\chi + \text{Τοξημ}\psi = \text{Τοξημ}(\chi\sqrt{1-\psi^2} + \psi\sqrt{1-\chi^2}). \quad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴ σχέση $\chi^2 + \psi^2 < 1$ συνάγεται ὅτι $\chi < 1$ καὶ $\psi < 1$.

Θέτουμε $\text{Τοξημ}\chi = \alpha$ καὶ $\text{Τοξημ}\psi = \beta$, ὁπότε ἔχουμε :

$$\begin{cases} \eta\mu\alpha = \chi & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

καὶ

$$\begin{cases} \eta\mu\beta = \psi & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. & (5) \end{cases}$$

Ἐξάλλου εἶναι :

$$\chi^2 + \psi^2 < 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta < 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha < 1 - \eta\mu^2\beta \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha < \sigma\upsilon\nu^2\beta$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\alpha < \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \eta\mu\alpha < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση καὶ ἐπειδὴ $0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$, προκύπτει

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta \text{ ἢ } \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}. \text{ Ἀκόμα ἔχουμε :}$$

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \eta\mu(\alpha + \beta) = \chi \sqrt{1 - \psi^2} + \psi \sqrt{1 - \chi^2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \text{Τοξ}\eta\mu(\chi \sqrt{1 - \psi^2} + \psi \sqrt{1 - \chi^2}) \Leftrightarrow (1).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση : $2\text{Τοξ}\eta\mu \frac{1}{3} + \text{Τοξ}\eta\mu\chi < \frac{\pi}{2}$. (1)

Λύση. Τὸ πρῶτο μέλος τῆς (1) ὀρίζεται, ἐφόσον $|\chi| \leq 1$. Θέτουμε :

$$\text{Τοξ}\eta\mu \frac{1}{3} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\alpha = \frac{1}{3} & (2) \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{6} & (3) \end{cases}$$

(M)

$$\text{Τοξ}\eta\mu\chi = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\beta = \chi & (4) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} & (5) \end{cases}$$

Ἐπομένως ἔχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \\ |\chi| \leq 1 \end{cases} \quad (M)$$

$$\text{Εἶναι : } 0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < -2\alpha < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - 2\alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση καὶ σύμφωνα μὲ τὴν (5) ἔχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta < \frac{\pi}{2} - 2\alpha \\ |\chi| \leq 1 \\ (M) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\beta < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \\ |\chi| \leq 1 \\ (M) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \eta\mu\beta < \sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ |x| \leq 1 \\ (M) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \eta\mu\beta < 1 - 2\eta\mu^2\alpha \\ -1 \leq x \leq 1 \\ (M) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x < 1 - \frac{2}{9} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq x \leq \frac{7}{9}.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α' ΟΜΑΔΑ

39) Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν παρακάτω παραστάσεων :

1) Τοξ $\eta\mu\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\eta\mu\left(\text{Τοξ } \eta\mu\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3) $\sigma\upsilon\nu\left(\text{Τοξ } \eta\mu\frac{4}{5}\right)$

4) $\sigma\upsilon\nu\left(2 \text{ Τοξ } \sigma\upsilon\nu\frac{3}{5}\right)$

5) $\text{Τοξ } \eta\mu\left(\eta\mu\frac{8\pi}{9}\right)$

6) $\epsilon\varphi\left[\text{Τοξ } \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

7) $\text{Τοξ } \epsilon\varphi\sqrt{3} + \text{Τοξ } \epsilon\varphi 1$

8) $2\text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1}{3} \quad \text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1}{7}.$

40) Νά δείξετε τις ισότητες :

1) $\text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1}{2} + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1}{5} + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

2) $\text{Τοξ } \sigma\varphi 7 + \text{Τοξ } \sigma\varphi 8 + \text{Τοξ } \sigma\varphi 18 = \text{Τοξ } \sigma\varphi 3$

3) $\sigma\upsilon\nu\left(2 \text{ Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1}{7}\right) = \eta\mu\left(4 \text{ Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1}{3}\right).$

41) Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ταυτότητα : $\text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{\alpha}{\alpha+1} + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1}{2\alpha+1} = \frac{\pi}{4} \quad (\alpha > 0).$

42) Νά δείξετε ὅτι : $\text{Τοξ } \epsilon\varphi\chi + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1-\chi}{1+\chi} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{ἂν } \chi > -1 \text{ καὶ}$

$$\text{Τοξ } \epsilon\varphi\chi + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{1-\chi}{1+\chi} = -\frac{3\pi}{4}, \quad \text{ἂν } \chi < -1.$$

43) Ἐν $\chi > 0, \psi > 0$ καὶ $\chi\psi > 1$, τότε ἰσχύει ἡ σχέση :

$$\text{Τοξ } \epsilon\varphi\chi + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\psi = \pi + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}.$$

44) Νά δείξετε ὅτι : $\text{Τοξ } \epsilon\varphi\chi + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\psi = \kappa\pi + \text{Τοξ } \epsilon\varphi\frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi} \quad (\chi, \psi \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{Z}).$

45) Ἐν $\chi > 0$ καὶ $\psi > 0$, τότε ἰσχύει : $\text{Τοξ } \sigma\varphi\chi + \text{Τοξ } \sigma\varphi\psi = \text{Τοξ } \sigma\varphi\frac{\chi\psi-1}{\chi+\psi}.$

Β' ΟΜΑΔΑ

46) Νά λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

$$1) \operatorname{Tox}\varphi \frac{3\chi}{2} + \operatorname{Tox}\sigma\varphi \frac{1}{\chi} = \frac{\pi}{4}$$

$$2) \operatorname{Tox}\eta\mu\chi + \operatorname{Tox}\eta\mu 2\chi = \frac{\pi}{2}$$

$$3) \operatorname{Tox}\varphi \frac{2}{5} - \operatorname{Tox}\varepsilon\varphi\chi = \frac{\pi}{4}$$

$$4) \eta\mu \left(\operatorname{Tox}\varepsilon\varphi \frac{1}{2} \right) = \varepsilon\varphi(\operatorname{Tox}\sigma\mu\sqrt{\chi})$$

$$5) \eta\mu [2\operatorname{Tox}\eta\mu\chi] = \chi.$$

47) Νά προσδιορίσετε τὸν ἀκέραιο κ , ὥστε ἡ ἀκόλουθη ἐξίσωση νά ἔχει λύση :

$$\operatorname{Tox}\varepsilon\varphi \frac{\chi+1}{\chi-1} + \operatorname{Tox}\varepsilon\varphi \frac{\chi-1}{\chi} = \kappa\pi + \operatorname{Tox}\varepsilon\varphi(-7).$$

48) Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση :

$$\operatorname{Tox}\varepsilon\varphi\chi + \operatorname{Tox}\sigma\varphi(\chi-1) < \frac{\pi}{2}.$$

49) Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση : $\eta\mu[\operatorname{Tox}\sigma\varphi(\sigma\mu(\operatorname{Tox}\varepsilon\varphi\chi))] > \chi$.

50) Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\operatorname{Tox}\varepsilon\varphi\chi + \operatorname{Tox}\varepsilon\varphi \frac{2\chi+1}{2\chi-23} = \frac{\pi}{4}$.

51) Νά βρεῖτε γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ ν ἰσχύει ἡ σχέση :

$$\operatorname{Tox}\varepsilon\varphi \frac{\nu}{\nu+1} + \operatorname{Tox}\varepsilon\varphi \frac{1}{2\nu+1} = \frac{\pi}{4}.$$

52) Ἄν $\chi, \psi, \omega > 0$, νά δείξετε ὅτι :

$$\operatorname{Tox}\varepsilon\varphi\chi + \operatorname{Tox}\varepsilon\varphi\psi + \operatorname{Tox}\varepsilon\varphi\omega = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi\psi + \psi\omega + \omega\chi = 1.$$

53) Ἄν $\chi, \psi, \omega > 0$, νά δειχθεῖ ὅτι :

$$\operatorname{Tox}\sigma\mu\chi + \operatorname{Tox}\sigma\mu\psi + \operatorname{Tox}\sigma\mu\omega = \pi \Rightarrow \chi^2 + \psi^2 + \omega^2 + 2\chi\psi\omega = 1.$$

54) Ἄν $\chi > 0$, $\psi > 0$ καὶ $\operatorname{Tox}\eta\mu\chi + \operatorname{Tox}\eta\mu\psi < \frac{\pi}{2}$, τότε ἰσχύει ἡ σχέση (1) τοῦ παραδεί-

$$\gamma\mu\alpha\tau\omicron\varsigma 4 \text{ (Ἄρκει νά δειχθεῖ ὅτι: } \operatorname{Tox}\eta\mu\chi + \operatorname{Tox}\eta\mu\psi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 < 1).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ

ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Σχέσεις μεταξύ των κύριων στοιχείων ενός τριγώνου

1.1. Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι γωνίες του και οι πλευρές του. Τα δευτερεύοντα είναι ή ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, το έμβασμό, τα ύψη, ή ακτίνα του έγγεγραμμένου κύκλου, ή ήμιπερίμετρος, οι διάμεσες, οι έσωτερικές διχοτόμοι, οι έξωτερικές διχοτόμοι.

Μας είναι ήδη γνωστοί όρισμένοι τύποι, που αναφέρονται στα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου. Τους τύπους αυτούς υπενθυμίζουμε άμέσως στα έπόμενα (Βλ. 1.2.).

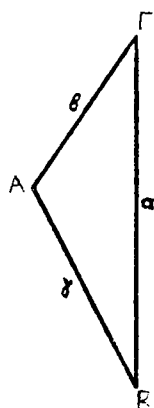
Συμβολίζουμε με α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ και με Α, Β, Γ τα μέτρα των γωνιών του (βλ. Σχ. 10). Στο έξης, όταν θα λέμε ή «πλευρά α» θα έννοουμε το «μήκος της πλευράς α» και όταν θα λέμε ή «γωνία Α» θα έννοουμε το «μέτρο της γωνίας Α». Το ίδιο θα ισχύει και για όλα τα γωνιακά και γραμμικά στοιχεία¹⁾ του τριγώνου.

1.2. Θεμελιώδεις ομάδες τύπων. Μεταξύ των κύριων στοιχείων ($\alpha, \beta, \gamma, A, B, \Gamma$) ενός τριγώνου ΑΒΓ υπάρχουν τρεις θεμελιώδεις ομάδες τύπων, όπως θα δούμε άμέσως παρακάτω. Γνωρίζουμε ότι το **Θεώρημα των ήμιτόνων** (Νόμος των ήμιτόνων) έκφράζεται από τον τύπο :

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2 R.$$

¹⁾ Όταν θα λέμε «γραμμικό στοιχείο» ενός τριγώνου, θα έννοουμε το μήκος όποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος, που έχει σχέση με το τρίγωνο. Π.χ. οι πλευρές, τα ύψη, οι διχοτόμοι, κλπ. ενός τριγώνου είναι γραμμικά στοιχεία του. Το έμβασμό ενός τριγώνου θα θεωρείται και αυτό γραμμικό στοιχείο. Όταν θα λέμε «γωνιακό στοιχείο» ενός τριγώνου, θα έννοουμε όχι μόνο μία άκέραια έκφραση των γωνιών του, αλλά και τριγωνομετρική έξίσωση τέτοιων έκφράσεων.

‘Η πρώτη θεμελιώδης ομάδα τύπων είναι :



$$(A) \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad 1$$

$$A + B + \Gamma = \pi \quad 2$$

‘Η δεύτερη θεμελιώδης ομάδα τύπων αποτελείται από τους γνωστούς τύπους που εκφράζουν το **θεώρημα των συνημιτόνων**. Δηλαδή :

$$(B) \quad \begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A & 3 \\ \beta^2 &= \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B & 4 \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma & 5 \end{aligned}$$

Σχ. 12.

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$ και έπομένως έχουμε :
 $\eta\mu A = \eta\mu B\sigma\upsilon\nu \Gamma + \eta\mu \Gamma\sigma\upsilon\nu B \Leftrightarrow 2R\eta\mu A = (2R\eta\mu B)\sigma\upsilon\nu \Gamma + (2R\eta\mu \Gamma)\sigma\upsilon\nu B$
 $\Leftrightarrow \alpha = \beta\sigma\upsilon\nu \Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B.$

Με κυκλική έναλλαγή τών α, β, γ και A, B, Γ έχουμε την ακόλουθη ομάδα τύπων, που εκφράζει το **θεώρημα των προβολών** :

$$(Γ) \quad \begin{aligned} \alpha &= \beta\sigma\upsilon\nu \Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B & 6 \\ \beta &= \gamma\sigma\upsilon\nu A + \alpha\sigma\upsilon\nu \Gamma & 7 \\ \gamma &= \alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu A & 8 \end{aligned}$$

Σημείωση. Οι τρεις ομάδες τύπων (A), (B) και (Γ) είναι ανά δύο ισοδύναμες. ‘Η απόδειξη αυτής της προτάσεως δίνεται ως άσκηση (Βλ. άσκ. 74).

Χρήσιμοι για τὰ έπόμενα είναι και οί παρακάτω γνωστοί τύποι.

1.3. Τύποι του Mollweide.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} &= \eta\mu \frac{A - B}{2} \\ \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} &= \eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \\ \frac{\alpha - \gamma}{\beta} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} &= \eta\mu \frac{A - \Gamma}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \eta\mu \frac{A}{2} &= \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2} & 9 \\ \frac{\gamma + \alpha}{\beta} \eta\mu \frac{B}{2} &= \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma - A}{2} & 10 \\ \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} &= \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2} & 11 \end{aligned}$$

$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = \varepsilon\varphi \frac{A-B}{2} \quad \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma} \sigma\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \frac{B-\Gamma}{2} \quad \frac{\gamma-\alpha}{\alpha+\gamma} \sigma\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\Gamma-A}{2}$	12
---	----

Οί τύποι 12 αποτελοῦν τὸ θεώρημα τῶν ἐφαπτομένων (Νόμος τῶν ἐφαπτομένων)

1.4. Τριγωνομετρικοί ἀριθμοὶ τῶν μισῶν γωνιῶν τριγώνου ὡς συναρτήσεις τῶν πλευρῶν του.

$\eta\mu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$	$\eta\mu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}$	$\eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}$	13
--	--	---	----

$\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$	$\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}$	$\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$	14
--	--	---	----

$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$	$\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$	$\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$	15
---	--	--	----

1.5. Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου.

$E = \frac{1}{2} \beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2} \gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2} \alpha\beta\eta\mu \Gamma$	16
$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$	17
$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$	18
$E = 2R^2 \eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma$	19

1.6 Ἡ ἀκτίνα R ὡς συνάρτηση τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$
--

2. Κλασικὲς ἐπιλύσεις

Ὅπως θὰ δοῦμε στὰ ἐπόμενα, χρησιμοποιώντας τοὺς προηγούμενους τύπους (Βλ. § 1) μπορούμε νὰ ὑπολογίζουμε τὰ ἀγνωστα στοιχεῖα ἐνὸς τριγώνου, ἐφόσον βεβαίως δίνονται ἀρκετὰ ἄλλα στοιχεῖα του. Ἡ ἐργασία ποὺ γίνεται γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὰ ἀγνωστα κύρια στοιχεῖα ἐνὸς τριγώνου λέγεται **ἐπί-**

λυση του τριγώνου. "Αν τὰ γνωστὰ στοιχεῖα γιὰ τὴν ἐπίλυση ἑνὸς τριγώνου εἶναι κύρια, τότε ἡ ἐπίλυση λέγεται **κλασικὴ ἐπίλυση**. Τὸ θέμα τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου ἐξαντλεῖται στὸ κεφάλαιο VII (Βλ. § 2), ὅπου περιγράφουμε μιὰ γενικὴ μέθοδο γιὰ τὴν ἐπίλυση ὁποιουδήποτε τριγώνου καὶ δίνουμε παραδείγματα καὶ μὲ δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

Θὰ πρέπει ἀκόμα νὰ τονίσουμε πῶς σήμερα ὁ σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι διπλός : νὰ μελετήσῃ τὶς κυκλικὲς συναρτήσεις καὶ νὰ ὑπολογίσει ἀποστάσεις ἢ γωνίες. Ἰδιαίτερο μάλιστα ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ ἀπρόσιτες ἀποστάσεις (τοπογραφικὲς ἐφαρμογές).

Ἀμέσως παρακάτω θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ ὅλες τὶς κλασικὲς ἐπιλύσεις καὶ μερικὲς χαρακτηριστικὲς τοπογραφικὲς ἐφαρμογές. Πολλὰ παραδείγματα ποὺ θὰ ἀκολουθήσουν θὰ ἀντιμετωπιστοῦν μὲ τὴ βοήθεια τῶν λογαρίθμων. Ἔτσι, μὲ αὐτὰ τὰ παραδείγματα, θὰ διαπιστώσουμε καὶ τὴ σημασία τῶν λογαρίθμων γιὰ τὶς πολύπλοκες ὑπολογιστικὲς ἐργασίες. Οἱ κλασικὲς ἐπιλύσεις εἶναι τέσσερις. Κάθε μιὰ, ὅπως θὰ δοῦμε, ἀντιμετωπίζεται μὲ ὀρισμένο τρόπο καὶ ἐπομένως λίγα παραδείγματα εἶναι ἀρκετὰ γιὰ νὰ κατανοήσουμε τὴ μέθοδο ἐπιλύσεως καὶ τὸν τρόπο ποὺ χρησιμοποιοῦνται οἱ λογάριθμοι.

2.1. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὶς πλευρὲς τοῦ α,β καὶ γ.

Ἐπίλυση. Τὰ ἄγνωστα κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου εἶναι οἱ γωνίες τοῦ Α,Β καὶ Γ. Αὐτὲς μποροῦμε νὰ τὶς βροῦμε μὲ τὸ θεώρημα τῶν συνημιτόνων. Π.χ. ἔχουμε :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A.$$

Ἐπομένως θὰ εἶναι :

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}. \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) δὲν εἶναι πάντοτε ὁ πιὸ κατάλληλος γιὰ τὸν ὑπολογισμό τῆς γωνίας Α, γιατί δὲν εἶναι λογιστὸς μὲ τοὺς λογάριθμους. Τὸν ἐφαρμόζουμε, ὅταν τὰ δεδομένα γιὰ τὸν ὑπολογισμό τοῦ συνΑ εἶναι ἀπλά. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο :

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα : $\alpha = 147$, $\beta = 342$, $\gamma = 409$.

Ἐπίλυση. Εἶναι :

$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{147 + 342 + 409}{2} = 449$$

καὶ ἔπομένως ἔχουμε :

$$\tau - \alpha = 302, \tau - \beta = 107, \tau - \gamma = 40.$$

Θεωροῦμε τὸν τύπο :

$$\begin{aligned} \varepsilon\phi \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau(\tau - \alpha)}} = \\ &= \frac{1}{\tau - \alpha} \sqrt{\frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau}} = \frac{\kappa}{\tau - \alpha}, \end{aligned}$$

ὅπου

$$\kappa = \sqrt{\frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau}}.$$

Ὑπολογίζουμε πρῶτα τὸ κ . Εἶναι :

$$\kappa = \sqrt{\frac{(302)(107)(40)}{449}}. \quad (1)$$

Ἄν λογαριθμίσουμε τὴν (1), θὰ βροῦμε :

$$\log \kappa = \frac{1}{2} (\log 302 + \log 107 + \log 40 - \log 449).$$

Εἶναι :

$$\begin{array}{rcl} \log 302 & = & 2.48001 \\ \log 107 & = & 2.02938 \\ \log 40 & = & 1.60206 \\ & & \underline{6.11145} \\ -\log 449 & = & -2.65225 \\ \log \kappa^2 & = & 3.45920 \\ \log \kappa & = & 1.72960. \end{array}$$

Ἐπομένως θὰ ἔχουμε :

$$\begin{aligned} \log \kappa &= 1.72960 \\ -\log(\tau - \alpha) &= -\log 302 = -2.48001 \\ \log \varepsilon\phi \frac{A}{2} &= 1.24959 \\ \frac{A}{2} &= 10^\circ 4' \\ A &= 20^\circ 8'. \end{aligned} \quad (2)$$

Ἐπίσης εἶναι :

$$\varepsilon\phi \frac{B}{2} = \frac{\kappa}{\tau - \beta},$$

καὶ ἐπομένως ἔχουμε :

$$\begin{aligned}\log k &= 1.72960 \\ -\log(\tau-\beta) &= -\log 107 = \underline{-2.02938} \\ \log \varepsilon \varphi \frac{B}{2} &= 1.70022 \\ \frac{B}{2} &= 26^\circ 38' \\ B &= 53^\circ 16'. \quad (3)\end{aligned}$$

Τέλος, ἀπὸ τὸν τύπο

$$\varepsilon \varphi \frac{\Gamma}{2} = \frac{\kappa}{\tau-\gamma}$$

ἔχουμε :

$$\begin{aligned}\log k &= 1.72960 \\ -\log(\tau-\gamma) &= -\log 40 = \underline{-1.60206} \\ \log \varepsilon \varphi \frac{\Gamma}{2} &= 0.12754 \\ \frac{\Gamma}{2} &= 53^\circ 18' \\ \Gamma &= 106^\circ 36'. \quad (4)\end{aligned}$$

Ἀπὸ τὶς (2), (3) καὶ (4) διαπιστώνουμε ὅτι $A + B + \Gamma = 180^\circ$.

2.2. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: α, γ, A (ἀμφίβολη περίπτωση).

Ἐπίλυση. Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων,

$$\frac{\alpha}{\eta \mu A} = \frac{\beta}{\eta \mu B} = \frac{\gamma}{\eta \mu \Gamma}$$

ἔχουμε :

$$\eta \mu \Gamma = \frac{\gamma \eta \mu A}{\alpha} \quad (1)$$

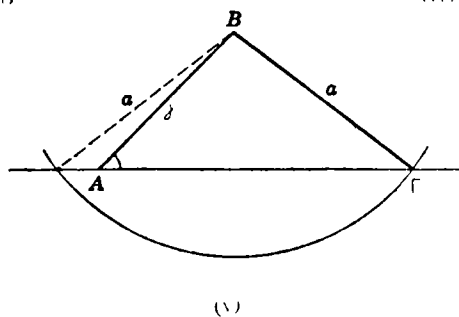
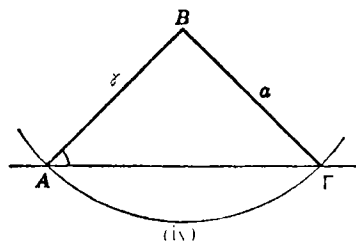
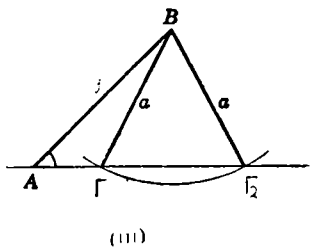
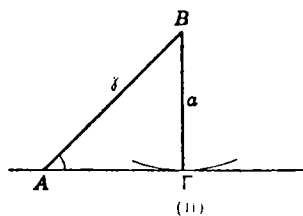
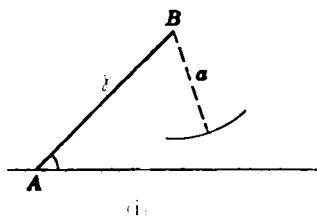
$$\beta = \frac{\alpha \eta \mu B}{\eta \mu A} \quad (2)$$

Ἐπίσης εἶναι :

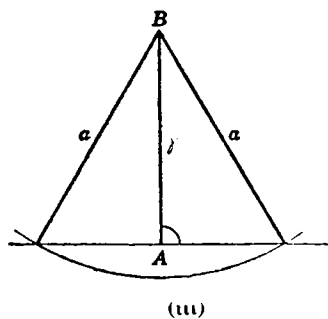
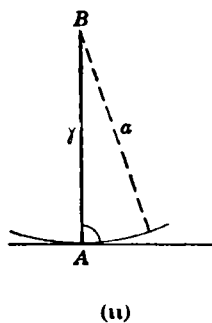
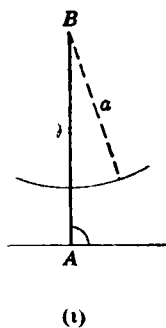
$$B = 180^\circ - (A + \Gamma) \quad (3)$$

Ἀπὸ τὴν (1) μπορούμε νὰ βροῦμε τὴ γωνία Γ καὶ μετὰ, ἀπὸ τὴ σχέση (3), τὴ γωνία B . Τέλος, ἀπὸ τὴ σχέση (2), μπορούμε νὰ βροῦμε τὴν πλευρά β .

Ἡ ἐπίλυση ὅμως τοῦ τριγώνου δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει πάντοτε τρίγωνο μὲ στοιχεῖα τὰ α, γ καὶ A . Γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυση θὰ πρέπει νὰ ὑπάρχει γωνία Γ ἀπὸ τὴ σχέση (1), ποὺ νὰ ἱκανοποιεῖ καὶ τὴ σχέση (3).



Σχ. 13 ($A < 90^\circ$)



Σχ. 14 ($A = 90^\circ$)

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις.

1. $A < 90^\circ$.

(i) $\alpha < \gamma \mu A$. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει τρίγωνο (Βλ. Σχ. 13 (i)).

(ii) $\alpha = \gamma \mu A$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μόνο ένα ορθογώνιο τρίγωνο (Βλ. Σχ. 13 (ii)).

(iii) $\gamma \mu A < \alpha < \gamma$. Τώρα έχουμε δύο λύσεις (βλ. Σχ. 13 (iii)).

(iv) $\alpha = \gamma$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μία μόνο λύση, δηλαδή υπάρχει μόνο ένα τρίγωνο (Βλ. Σχ. 13 (iv)).

(v) $\alpha > \gamma$. Έχουμε μία μόνο λύση (Βλ. Σχ. 13 (v)).

2. $A = 90^\circ$.

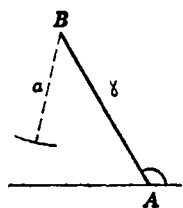
(i) $\alpha \leq \gamma$. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει καμία λύση (Βλ. Σχ. 14 (i) και 14 (ii)).

(ii) $\alpha > \gamma$. Υπάρχει μία μόνο λύση (Βλ. Σχ. 14 (iii)).

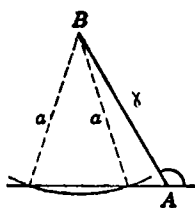
3. $A > 90^\circ$.

(i) $\alpha \leq \gamma$. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει λύση (Βλ. Σχ. 15 (i) και 15 (ii)).

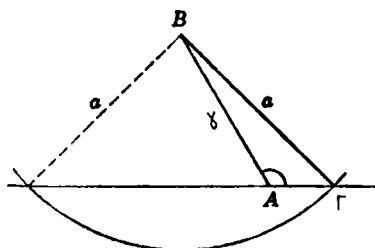
(ii) $\alpha > \gamma$. Τώρα έχουμε μία μόνο λύση (Βλ. Σχ. 15 (iii)).



(i)



(ii)



Σχ. 15 ($A > 90^\circ$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά επιλυθεί τρίγωνο από τα στοιχεία: $\alpha = 18.40$, $\gamma = 23.85$, $A = 38^\circ 10'$.

Έπιλυση. Πρώτα υπολογίζουμε την παράσταση $\gamma \mu A$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \log \gamma &= \log 23.85 = 1.37749 \\ \log \mu A &= \log \mu 38^\circ 10' = 1.79095 \\ \log(\gamma \mu A) &= 1.16844 \\ \gamma \mu A &= 14.74. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι:

$$14.74 < 18.40 < 23.85 \Leftrightarrow \gamma \mu A < \alpha < \gamma.$$

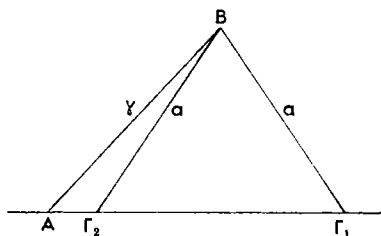
Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχουν δύο λύσεις, δηλαδή δύο τρίγωνα. Για να βρούμε τις δύο γωνίες Γ_1 και Γ_2 χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\eta \mu \Gamma = \frac{\gamma \mu A}{\alpha}.$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned}\log(\gamma\mu A) &= 1.16844 \\ -\log\alpha &= -1.26482 \\ \hline \log\mu\Gamma &= \overline{1.90362}.\end{aligned}$$

Υπάρχουν δύο γωνίες που δρίζονται από την τιμή αυτή του $\log\mu\Gamma$. Οι γωνίες αυτές είναι βεβαίως παραπληρωματικές (Βλ. Σχ. 16).



Σχ. 16

Είναι :

$$\Gamma_1 = 53^\circ 13' \text{ και } \Gamma_2 = 180^\circ - \Gamma_1 = 126^\circ 47'$$

Η τρίτη γωνία Β βρίσκεται ως εξής :

$$B_1 = 180^\circ - (A + \Gamma_1) = 180^\circ - 38^\circ 10' - 53^\circ 13' = 88^\circ 37'$$

$$B_2 = 180^\circ - (A + \Gamma_2) = 180^\circ - 38^\circ 10' - 126^\circ 47' = 15^\circ 3'.$$

Για να βρούμε την τρίτη πλευρά β χρησιμοποιούμε το θεώρημα τών ημιτόνων και στις δυο περιπτώσεις. Δηλαδή έχουμε :

$$\frac{\beta_1}{\eta\mu B_1} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \text{ ή } \beta_1 = \frac{\alpha\eta\mu B_1}{\eta\mu A}$$

και

$$\frac{\beta_2}{\eta\mu B_2} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \text{ ή } \beta_2 = \frac{\alpha\eta\mu B_2}{\eta\mu A}$$

$\log\alpha = 1.26482$	$\log\alpha = 1.26482$
$\log\mu B_1 = \overline{1.99987}$	$\log\mu B_1 = \overline{1.41441}$
$\hline 1.26469$	$\hline 0.67923$
$-\log\mu A = -\overline{1.79095}$	$-\log\mu A = -\overline{1.79095}$
$\log\beta_1 = \overline{1.47374}$	$\log\beta_2 = \overline{0.88828}$
$\beta_1 = 29.77$	$\beta_2 = 7.732.$

2.3. Να επιλυθεί τρίγωνο από τὰ στοιχεία α,β και Γ.

Έπίλυση. Από τὸ Θεώρημα τών εφαπτομένων έχουμε :

$$\varepsilon\varphi \frac{A-B}{2} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}$$

Ἀπὸ τὴ σχέσηη αὐτὴ μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ $A-B$. Ἐξάλλου, ἔχουμε $A+B=180^\circ-\Gamma$ καὶ ἐπομένως εἶναι εὐκόλος ὁ προσδιορισμὸς τῶν γωνιῶν A καὶ B . Τὴν τρίτη πλευρὰ γ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀπὸ τὴ σχέσηη $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\eta\Gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα :

$$\alpha = 149.2, \beta = 203.5, \Gamma = 37^\circ 18'$$

Ἑπίλυση. Εἶναι :

$$A+B=180^\circ-37^\circ 18' = 142^\circ 42' \text{ καὶ ἐπομένως}$$

$$\frac{A+B}{2} = 71^\circ 21'. \quad (1)$$

Ἀκόμα ἔχουμε :

$$\alpha + \beta = 352.7 \text{ καὶ } \beta - \alpha = 54.3. \quad (2)$$

Ἀπὸ τὸν τύπο

$$\varepsilon\varphi \frac{B-A}{2} = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} \varepsilon\varphi \frac{B+A}{2}$$

καὶ τὶς σχέσεις (1), (2), βρίσκουμε :

$$\varepsilon\varphi \frac{B-A}{2} = \frac{54.3}{352.7} \varepsilon\varphi 71^\circ 21' \Rightarrow$$

$$\log \varepsilon\varphi \frac{B-A}{2} = \log 54.3 + \log \varepsilon\varphi 71^\circ 21' - \log 352.7$$

$$\begin{array}{rcl} \log 54.3 & = & 1.73480 \\ \log \varepsilon\varphi 71^\circ 21' & = & 0.47171 \\ & & \hline & & 2.20651 \\ -\log 352.7 & = & -2.54741 \\ \log \varepsilon\varphi \frac{B-A}{2} & = & \hline & & 1.65910 \end{array}$$

$$\frac{B-A}{2} = 24^\circ 31'$$

$$B-A = 49^\circ 2'.$$

Συνδυάζοντας τώρα τη διαφορά $B-A = 49^\circ 2'$ με το άθροισμα $B + A = 142^\circ 42'$ (Βλ. (1)), προκύπτει :

$$A = 45^\circ 50' \text{ και } B = 95^\circ 52'.$$

Τέλος, από τη σχέση $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sin\Gamma$, βρίσκουμε την πλευρά γ .

2.4. Να επιλυθεί τρίγωνο από τα στοιχεία B, Γ και α.

Έπίλυση. Άγνωστα είναι τα στοιχεία A, β και γ. Η γωνία A υπολογίζεται άμέσως από τη σχέση $A = 180^\circ - (B + \Gamma)$. Οι πλευρές β και γ θα βρεθούν από το Θεώρημα τών ήμιτόνων. Έχουμε

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

και επομένως βρίσκουμε :

$$\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A} \text{ και } \gamma = \frac{\alpha\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}.$$

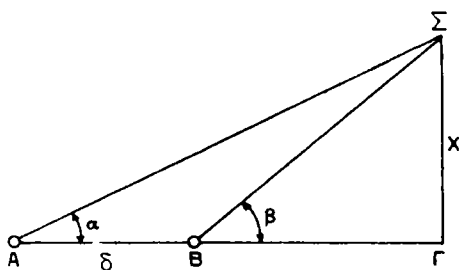
3. Τοπογραφικές εφαρμογές.

Όπως τονίσαμε και στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, ένας από τους πρακτικούς σκοπούς της Τριγωνομετρίας είναι και ο υπολογισμός αποστάσεων μεταξύ σημείων που δεν είναι προσιτά. Για να υπολογίσουμε μια τέτοια απόσταση, γενικά προσπαθούμε να βρούμε ένα τρίγωνο με γνωστά αρκετά στοιχεία του και τέτοιο, ώστε κάποια πλευρά του να είναι ή άγνωστη απόσταση. Αν επιλύσουμε το τρίγωνο αυτό, θα βρούμε τις άγνωστες πλευρές του και επομένως τη ζητούμενη απόσταση. Έτσι, από τον τρόπο που βρίσκουμε τις αποστάσεις, φαίνεται και η σπουδαιότητα της επιλύσεως του τριγώνου. Για τις τοπογραφικές εφαρμογές υπάρχουν ειδικά όργανα (γωνιόμετρα) με τα οποία μπορούμε να μετρήσουμε οριζόντιες και κατακόρυφες γωνίες.

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα τοπογραφικών εφαρμογών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί το ύψος ενός όρατου σημείου του χώρου από το οριζόντιο επίπεδο.

Λύση. Υποθέτουμε ότι Σ είναι το όρατο σημείο και Γ η προβολή του πάνω στο οριζόντιο επίπεδο (Βλ. Σχ. 17). Βρίσκουμε δύο σημεία Α και Β πάνω στο οριζόντιο επίπεδο τέτοια, ώστε να είναι στο ίδιο επίπεδο με τα Σ και Γ. Με τη μετροταινία βρίσκουμε την απόσταση τών Α, Β και με το ταχύμετρο (είδος γωνιόμετρου) τις γωνίες $\widehat{\Sigma\hat{A}\Gamma}$, $\widehat{\Sigma\hat{B}\Gamma}$.



Σχ. 17.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\widehat{\Sigma\hat{A}\Gamma} = \alpha$, $\widehat{\Sigma\hat{B}\Gamma} = \beta$ καὶ $(AB) = \delta$. Ἄν ἐφαρμόσουμε τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων στὸ τρίγωνο ΣΑΒ, θὰ βροῦμε :

$$\frac{(\Sigma B)}{\eta\mu\alpha} = \frac{\delta}{\eta\mu(\beta-\alpha)} \quad \eta$$

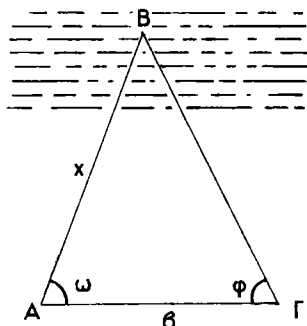
$$(\Sigma B) = \frac{\delta\eta\mu\alpha}{\eta\mu(\beta-\alpha)} \quad (1)$$

Ἐξάλλου εἶναι $\chi = (\Sigma B)\eta\mu B$. Ἀπ' αὐτὴ καὶ τὴν (1) συνάγεται :

$$\chi = \frac{\delta\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\eta\mu(\beta-\alpha)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀπόσταση ἑνὸς σημείου Α ἀπὸ ἓνα ἄλλο ἀπρόσιτο Β (π.χ. τὸ Α εἶναι στὴ στεριά καὶ τὸ Β στὴ θάλασσα).

Λύση. Ἐκλέγουμε ἓνα σημεῖο Γ τέτοιο, ὥστε ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸ Α νὰ εἶναι β (βλ. Σχ. 18). Μὲ τὸ γωνιόμετρο βρίσκουμε τίς γωνίες $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$. Ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \omega$ καὶ $\widehat{B\hat{\Gamma}A} = \phi$. Τὸ πρόβλημα τώρα ἀνάγεται στὴν ἐπίλυση τοῦ τριγώνου (ΑΒΓ). Ἔχουμε :



Σχ. 18.

$$\frac{\chi}{\eta\mu\phi} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \eta \quad \frac{\chi}{\eta\mu\phi} = \frac{\beta}{\eta\mu(\omega + \phi)} \quad \eta$$

$$\chi = \frac{\beta\eta\mu\phi}{\eta\mu(\omega + \phi)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα μιᾶς κυλινδρικής ἀπρόσιτης δεξαμενῆς, ὅταν :

(α) Ἡ ἀπόσταση δύο σημείων Α καὶ Β εἶναι δ (βλ. Σχ. 19).

(β) Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀνήκουν στὸ ἐπίπεδο ποὺ

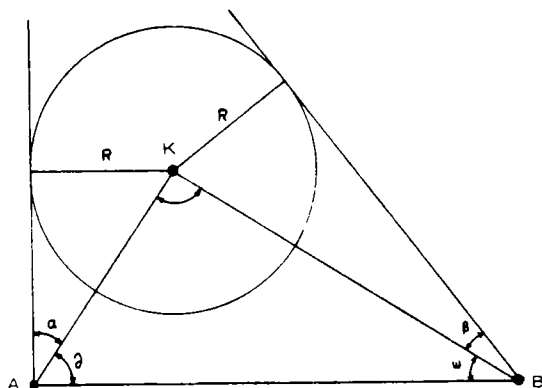
εἶναι κάθετο πάνω στὸν ἄξονα τῆς δεξαμενῆς.

(γ) Ἡ δεξαμενὴ φαίνεται μὲ γωνίες α καὶ β ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.

Λύση. "Όταν σκοπεύουμε με τὸ γωνιόμετρο γιὰ νὰ βροῦμε τὶς γωνίες α καὶ β , βρίσκουμε συγχρόνως καὶ τὶς γωνίες θ καὶ ω (Βλ. Σχ. 19). Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ἀκτὶνὰ τῆς δεξαμενῆς εἶναι R . Ἄν ἐφαρμόσουμε τὸ θεώρημα τῶν συνημιτόνων στὸ τρίγωνο (ΚΑΒ), θὰ ἔχουμε :

$$\delta^2 = (KA)^2 + (KB)^2 - 2(KA)(KB)\widehat{\text{συν}}\text{ΑΚΒ} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὁμως εἶναι : $\widehat{\text{συν}}\text{ΑΚΒ} = -\widehat{\text{συν}}(\theta + \omega)$ καὶ



Σχ. 19

$$(KA) = \frac{R}{\eta\mu\alpha}, \quad (KB) = \frac{R}{\eta\mu\beta}$$

ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$\delta^2 = \frac{R^2}{\eta\mu^2\alpha} + \frac{R^2}{\eta\mu^2\beta} + 2 \frac{R^2}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} \widehat{\text{συν}}(\theta + \omega) \quad \eta$$

$$R = \frac{\delta\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sqrt{\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\widehat{\text{συν}}(\theta + \omega)}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

55) Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα :

1) $B = \frac{\pi}{9}, \Gamma = \frac{2\pi}{5}, \alpha = 180$

2) $\beta = 20, \gamma = 10, \Gamma = \frac{\pi}{3}$

3) $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3} + 1, A = \frac{\pi}{12}$

4) $\beta = 2, \gamma = \sqrt{2}, \Gamma = \frac{\pi}{6}$

56) Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα :

1) $\beta = 2, \gamma = \sqrt{3}, \Gamma = \frac{\pi}{3}$

2) $\gamma = 4, A = 2\Gamma, \widehat{\text{συν}}\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

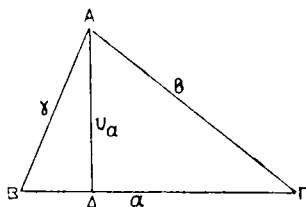
ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ— ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ δώσουμε καὶ θὰ ἀποδείξουμε τοὺς πρὸ βασικοὺς τύπους, ποὺ ἀναφέρονται στὰ δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου (Βλ. κεφ. VI, § 1). Οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς ἐκφράζουν τὰ δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, ὡς συναρτήσεις τῶν γωνιῶν του καὶ τοῦ R . Τὸ γεγονός αὐτὸ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ περιγράψουμε στὴν ἐπόμενη παράγραφο μιὰ γενικὴ μέθοδο ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου (Βλ. Παρατ. 1.7.).

1. Δευτερεύοντα στοιχεῖα τριγώνου

1.1. Ὑψὴ τριγώνου. Θεωροῦμε τρίγωνο $AB\Gamma$ καὶ τὸ ὕψος τοῦ $AD = u_\alpha$ (Σχ. 20). Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ABD ἔχουμε :

$u_\alpha = \gamma \mu B$ ἢ $u_\alpha = 2R \eta \mu B \eta \mu \Gamma$. Ἀρα, προκύπτουν οἱ τύποι :



Σχ. 20

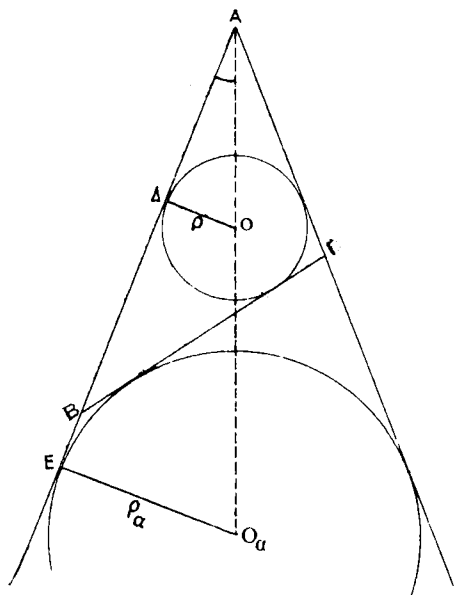
$u_\alpha = 2R \eta \mu \Gamma \eta \mu B$	21
$u_\beta = 2R \eta \mu A \eta \mu \Gamma$	22
$u_\gamma = 2R \eta \mu B \eta \mu A$	23

Στὸ παραπάνω σχῆμα 20 εἶναι : $B, \Gamma < \frac{\pi}{2}$. Ἄν $B \geq \frac{\pi}{2}$ ἢ $\Gamma \geq \frac{\pi}{2}$, τότε οἱ τύποι **21**, **22** καὶ **23** ἰσχύουν πάλι.

Χρησιμοποιοῦμε ἀκόμα καὶ τοὺς ἀκόλουθους τύπους, ποὺ εἶναι γνωστοὶ ἀπὸ τὴ Γεωμετρία :

$au_\alpha = bu_\beta = \gamma u_\gamma = 2E$	24
---	-----------

1.2. Ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου σὲ τρίγωνο κύκλου. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τὸν ἐγγεγραμμένο του κύκλο Ο. Σημειώνουμε μὲ ρ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου Ο (Σχ. 21). Ἀπὸ τὴ Γεωμετρία ξέρομε ὅτι $ΑΔ = τ - α$ (βλ. Σχ. 21), ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΟ ἔχομε $(ΔΟ) = (ΑΔ) \varepsilon\varphi \frac{A}{2}$ καὶ ἐπομένως $\rho = (τ - α) \varepsilon\varphi \frac{A}{2}$. Ἀπ' αὐτὸν καὶ μὲ τὴ βοήθεια τοῦ τύπου 14 προκύπτει :



Σχ. 21.

$$\rho = (τ - α) \sqrt{\frac{(τ - β)(τ - γ)}{τ(τ - α)}} \Rightarrow$$

$$\rho = \sqrt{\frac{τ(τ - α)(τ - β)(τ - γ)}{τ^2}} \Rightarrow \rho = \frac{E}{τ}$$

Τελικὰ ἔχομε τοὺς παρακάτω βασικούς τύπους :

$$\begin{aligned} \rho &= (τ - α) \varepsilon\varphi \frac{A}{2} = (τ - β) \varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \\ &= (τ - γ) \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} \end{aligned} \quad 25$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(τ - α)(τ - β)(τ - γ)}{τ}} = \frac{E}{τ} \quad 26$$

Ἀπὸ τοὺς 25 ἔχομε :

$$\rho^3 = (τ - α)(τ - β)(τ - γ) \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}$$

$$\Rightarrow (τρ)^3 = τ(τ - α)(τ - β)(τ - γ) τ^2 \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$E^3 = E^2 τ^2 \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} \Rightarrow E = τ^2 \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$τρ = τ^2 \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} \Rightarrow \boxed{\rho = τ \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}} \quad 27$$

Ἀπὸ τὸν τελευταῖο τύπο προκύπτουν εὐκόλα καὶ οἱ ἐπόμενοι :

$\tau = \rho \sigma \varphi \frac{A}{2} \sigma \varphi \frac{B}{2} \sigma \varphi \frac{\Gamma}{2}$	28
$E = \tau^2 \varepsilon \varphi \frac{A}{2} \varepsilon \varphi \frac{B}{2} \varepsilon \varphi \frac{\Gamma}{2}$	29
$E = \rho^2 \sigma \varphi \frac{A}{2} \sigma \varphi \frac{B}{2} \sigma \varphi \frac{\Gamma}{2}$	30

1.3. Ἀκτίνα τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου. Θεωροῦμε τὸν παρεγγεγραμμένο κύκλο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ α τριγώνου ΑΒΓ. Σημειώνουμε μὲ Ο_α τὸ κέντρο του καὶ μὲ ρ_α τὴν ἀκτίνα του (Σχ. 21). Ἀπὸ τὴν Γεωμετρία ξέρουμε ὅτι (ΑΕ) = τ (βλ. Σχ. 21) καὶ ἐπομένως, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΕΟ_α, ἔχουμε $\rho_{\alpha} = \tau \varphi \frac{A}{2}$. Ἔτσι καταλήγουμε στοὺς παρακάτω βασικούς τύπους :

$\rho_{\alpha} = \tau \varphi \frac{A}{2}$	$\rho_{\beta} = \tau \varphi \frac{B}{2}$	$\rho_{\gamma} = \tau \varphi \frac{\Gamma}{2}$	31
--	---	---	----

Διαιρώντας τοὺς τύπους $\rho_{\alpha} = \tau \varphi \frac{A}{2}$ καὶ $\rho = (\tau - \alpha) \varepsilon \varphi \frac{A}{2}$, ἔχουμε :

$$\frac{\rho_{\alpha}}{\rho} = \frac{\tau}{\tau - \alpha} \Leftrightarrow \rho_{\alpha} = \frac{\tau \rho}{\tau - \alpha} \Leftrightarrow \rho_{\alpha} = \frac{E}{\tau - \alpha}.$$

Ἄρα, ἔχουμε τοὺς γνωστούς ἀπὸ τὴ Γεωμετρία τύπους :

$\rho_{\alpha} = \frac{E}{\tau - \alpha}$	$\rho_{\beta} = \frac{E}{\tau - \beta}$	$\rho_{\gamma} = \frac{E}{\tau - \gamma}$	32
---	---	---	----

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1. Σὲ κάθε τρίγωνο νὰ δειχθεῖ ὅτι: $E = \sqrt{\rho \rho_{\alpha} \rho_{\beta} \rho_{\gamma}}$.

Ἀπόδειξη. Ἄν πολλαπλασιάσουμε τοὺς τύπους 26 καὶ 32 προκύπτει :

$$\rho_{\alpha} \rho_{\beta} \rho_{\gamma} \rho = \frac{E^4}{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)\tau} \Rightarrow \rho_{\alpha} \rho_{\beta} \rho_{\gamma} \rho = \frac{E^4}{E^2}$$

$$E^2 = \rho_{\alpha} \rho_{\beta} \rho_{\gamma} \rho \Rightarrow E = \sqrt{\rho \rho_{\alpha} \rho_{\beta} \rho_{\gamma}}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει :

$$\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} = \frac{1}{u_\alpha} + \frac{1}{u_\beta} + \frac{1}{u_\gamma} = \frac{1}{\rho}$$

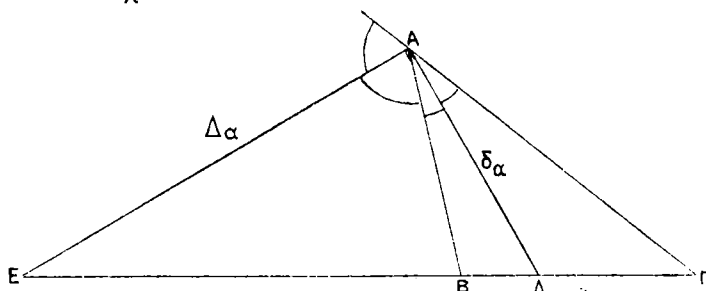
Απόδειξη. Σύμφωνα με τους τύπους 32 έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma} &= \frac{\tau-\alpha}{E} + \frac{\tau-\beta}{E} + \frac{\tau-\gamma}{E} = \frac{3\tau - (\alpha + \beta + \gamma)}{E} = \\ &= \frac{3\tau - 2\tau}{E} = \frac{\tau}{E} = \frac{\tau}{\tau\rho} = \frac{1}{\rho} . \end{aligned}$$

Εξάλλου, σύμφωνα με τους τύπους 24, είναι :

$$\frac{1}{u_\alpha} + \frac{1}{u_\beta} + \frac{1}{u_\gamma} = \frac{\alpha}{2E} + \frac{\beta}{2E} + \frac{\gamma}{2E} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2E} = \frac{2\tau}{2E} = \frac{\tau}{\tau\rho} = \frac{1}{\rho} .$$

1.4. Έσωτερική διχοτόμος τριγώνου. Άς συμβολίσουμε με δ_α την έσωτερική διχοτόμο, που αντιστοιχεί στην πλευρά α τριγώνου $AB\Gamma$ (Σχ. 22). Αν E είναι το έμβασδο του $AB\Gamma$ και E_1, E_2 τα αντίστοιχα έμβασδα τών τριγώνων $AB\Delta, A\Gamma\Delta$ (Σχ. 22), τότε θα έχουμε :



Σχ. 22.

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu A = \frac{1}{2} \gamma \delta_\alpha \eta \mu \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \beta \delta_\alpha \eta \mu \frac{A}{2} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \beta \gamma \left(2 \eta \mu \frac{A}{2} \sigma \nu \nu \frac{A}{2} \right) &= \frac{1}{2} \delta_\alpha (\beta + \gamma) \eta \mu \frac{A}{2} \Rightarrow 2 \beta \gamma \sigma \nu \nu \frac{A}{2} = (\beta + \gamma) \delta_\alpha \Rightarrow \\ \delta_\alpha &= \frac{2 \beta \gamma}{\beta + \gamma} \sigma \nu \nu \frac{A}{2} \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{2 \cdot 2 R \eta \mu B \cdot 2 R \eta \mu \Gamma}{2 R \eta \mu B + 2 R \eta \mu \Gamma} \sigma \nu \nu \frac{A}{2} \Rightarrow \\ \delta_\alpha &= \frac{4 R \eta \mu B \eta \mu \Gamma}{\eta \mu B + \eta \mu \Gamma} \sigma \nu \nu \frac{A}{2} \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{4 R \eta \mu B \eta \mu \Gamma}{2 \eta \mu \frac{B + \Gamma}{2} \sigma \nu \nu \frac{B - \Gamma}{2}} \sigma \nu \nu \frac{A}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta_{\alpha} = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2}}.$$

Άρα, έχουμε τελικά τούς επόμενους βασικούς τύπους :

$$\delta_{\alpha} = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2}} \quad 33$$

$$\delta_{\beta} = \frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \frac{2R\eta\mu\Gamma\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma-A}{2}} \quad 34$$

$$\delta_{\gamma} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = \frac{2R\eta\mu A\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}} \quad 35$$

1.5. Έξωτερική διχοτόμος τριγώνου. Άς παραστήσουμε με Δ_{α} την εξωτερική διχοτόμο, που αντιστοιχεί στην πλευρά α (Σχ. 22). Αν E_1 και E_2 είναι τα έμβαδα των τριγώνων ΑΓΕ και ΑΒΕ, τότε θα είναι :

$E = |E_1 - E_2|$, όπου E είναι το έμβαδο του ΑΒΓ. Το σημείο της διαφορᾶς $E_1 - E_2$ εξαρτάται από το σημείο της διαφορᾶς $B-\Gamma$. Αν $B > \Gamma$, τότε $E_1 > E_2$ και αν

$B < \Gamma$, τότε $E_1 < E_2$. Παρατηρούμε ακόμα ότι $\widehat{E\hat{A}\Gamma} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ και $\widehat{E\hat{A}B} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, γιατί $\widehat{E\hat{A}D} = \frac{\pi}{2}$. Σύμφωνα τώρα με τούς τύπους 16 έχουμε :

$$E = |E_1 - E_2| \Rightarrow \frac{1}{2} \beta\gamma\eta\mu A = \left| \frac{1}{2} \beta\Delta_{\alpha}\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} \right) - \frac{1}{2} \gamma\Delta_{\alpha}\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \beta\gamma \cdot 2\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \left| \frac{1}{2} \beta\Delta_{\alpha}\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \gamma\Delta_{\alpha}\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \right| \Rightarrow$$

$$\Delta_{\alpha} = \frac{2\beta\gamma}{|\beta-\gamma|} \eta\mu \frac{A}{2} \Rightarrow \Delta_{\alpha} = \frac{2 \cdot 2R\eta\mu B \cdot 2R\eta\mu\Gamma}{2R|\eta\mu B - \eta\mu\Gamma|} \eta\mu \frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta_{\alpha} = \frac{4R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\left| 2\eta\mu \frac{B-\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2} \right|} \eta\mu \frac{A}{2} \Rightarrow \Delta_{\alpha} = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\left| \eta\mu \frac{B-\Gamma}{2} \right| \left| \eta\mu \frac{A}{2} \right|} \eta\mu \frac{A}{2} \Rightarrow$$

1) Υποθέτουμε $\beta \neq \gamma$ ($\Leftrightarrow B \neq \Gamma$), για να ορίζεται η εξωτερική διχοτόμος Δ_{α} .

$$\Delta_{\alpha} = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu \left| \frac{B-\Gamma}{2} \right|} \quad (\text{γιατί } \eta\mu \frac{A}{2} > 0).$$

Έπομένως συνάγονται οί ακόλουθοι βασικοί τύποι :

$$\Delta_{\alpha} = \frac{2\beta\gamma}{|\beta-\gamma|} \eta\mu \frac{A}{2} = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu \frac{B-\Gamma}{2}} \quad 36$$

$$\Delta_{\beta} = \frac{2\gamma\alpha}{|\gamma-\alpha|} \eta\mu \frac{B}{2} = \frac{2R\eta\mu\Gamma\eta\mu A}{\eta\mu \frac{\Gamma-A}{2}} \quad 37$$

$$\Delta_{\gamma} = \frac{2\alpha\beta}{|\alpha-\beta|} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \frac{2R\eta\mu A\eta\mu B}{\eta\mu \frac{A-B}{2}} \quad 38$$

1.6. Διάμεσος τριγώνου. Αν μ_{α} είναι ή διάμεσος που άντιστοιχεί στην πλευρά α τριγώνου $AB\Gamma$, τότε, σύμφωνα με τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου, έχουμε :

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_{\alpha}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 2(\beta^2 + \gamma^2) = 4\mu_{\alpha}^2 + \alpha^2 \Rightarrow$$

$$2(\beta^2 + \gamma^2) = 4\mu_{\alpha}^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A \Rightarrow 4\mu_{\alpha}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos A \Rightarrow$$

$$4\mu_{\alpha}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 4\left(\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A\right) \sigma\phi A \Rightarrow 4\mu_{\alpha}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 4\epsilon\sigma\phi A.$$

Έξάλλου από τούς τύπους : $4\mu_{\alpha}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos A$ καί $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$, προκύπτει : $4\mu_{\alpha}^2 = \alpha^2 + 4\beta\gamma \cos A$. Έτσι, έχουμε τούς τύπους :

$4\mu_{\alpha}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos A = \beta^2 + \gamma^2 + 4\epsilon\sigma\phi A = \alpha^2 + 4\beta\gamma \cos A$	39
$4\mu_{\beta}^2 = \gamma^2 + \alpha^2 + 2\gamma\alpha \cos B = \gamma^2 + \alpha^2 + 4\epsilon\sigma\phi B = \beta^2 + 4\gamma\alpha \cos B$	
$4\mu_{\gamma}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \Gamma = \alpha^2 + \beta^2 + 4\epsilon\sigma\phi \Gamma = \gamma^2 + 4\alpha\beta \cos \Gamma$	

Παρατήρηση. 'Ο τύπος $4\mu_{\alpha}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\eta\alpha$ μπορεί νά μετασχηματιστεί, αν χρησιμοποιήσουμε βοηθητική γωνία, ώστε νά είναι λογιστή μέ τούς λογάριθμους ή διάμεσος μ_{α} . Πραγματικά, ο τύπος αυτός διαδοχικά γράφεται :

$$4\mu_{\alpha}^2 = (\beta^2 + \gamma^2) \left(\sigma\eta\eta^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{A}{2} \right) + 2\beta\gamma \left(\sigma\eta\eta^2 \frac{A}{2} - \eta\mu^2 \frac{A}{2} \right) =$$

$$(\beta + \gamma)^2 \sigma\eta\eta^2 \frac{A}{2} + (\beta - \gamma)^2 \eta\mu^2 \frac{A}{2} = (\beta + \gamma)^2 \sigma\eta\eta^2 \frac{A}{2} \left[1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \right)^2 \epsilon\phi^2 \frac{A}{2} \right] \Rightarrow$$

$$2\mu_{\alpha} = (\beta + \gamma) \sigma\eta\eta \frac{A}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \right)^2 \epsilon\phi^2 \frac{A}{2}}$$

*Αν θέσουμε : $\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \epsilon\phi \frac{A}{2} = \epsilon\phi\omega \left(-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \right)$, τότε θά έχουμε :

$$2\mu_{\alpha} = (\beta + \gamma) \sigma\eta\eta \frac{A}{2} \sqrt{1 + \epsilon\phi^2 \omega} \Rightarrow 2\mu_{\alpha} = (\beta + \gamma) \sigma\eta\eta \frac{A}{2} | \tau\epsilon\mu\omega |$$

$$\Rightarrow \mu_{\alpha} = \frac{\beta + \gamma}{2\sigma\eta\eta\omega} \sigma\eta\eta \frac{A}{2} \Rightarrow \mu_{\alpha} = \frac{2R(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma)}{2\sigma\eta\eta\omega} \sigma\eta\eta \frac{A}{2} =$$

$$\frac{2R\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} \sigma\eta\eta \frac{B - \Gamma}{2} \sigma\eta\eta \frac{A}{2}}{\sigma\eta\eta\omega} = \frac{2R\sigma\eta\eta^2 \frac{A}{2} \sigma\eta\eta \frac{B - \Gamma}{2}}{\sigma\eta\eta\omega}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Νά έκφραστούν τὰ στοιχεῖα τ, ρ καὶ ρ_{α} ἑνὸς τριγώνου μέ τὴν ἀκτίνα του R καὶ τὶς γωνίες του.

Λύση. Εἶναι : $\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{2} (2R\eta\mu A + 2R\eta\mu B + 2R\eta\mu\Gamma) \Rightarrow$

$$\tau = R(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma) \Rightarrow \tau = 4R\sigma\eta\eta \frac{A}{2} \sigma\eta\eta \frac{B}{2} \sigma\eta\eta \frac{\Gamma}{2}.$$

*Από τὸν τελευταῖο τύπο καὶ τούς τύπους 19, 26, ἔχουμε :

$$\rho = \frac{E}{\tau} = \frac{2R^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{4R\sigma\eta\eta \frac{A}{2} \sigma\eta\eta \frac{B}{2} \sigma\eta\eta \frac{\Gamma}{2}} =$$

$$\frac{2R^2 \left(2\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\eta\eta \frac{A}{2} \right) \left(2\eta\mu \frac{B}{2} \sigma\eta\eta \frac{B}{2} \right) \left(2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\eta\eta \frac{\Gamma}{2} \right)}{4R\sigma\eta\eta \frac{A}{2} \sigma\eta\eta \frac{B}{2} \sigma\eta\eta \frac{\Gamma}{2}} =$$

$$= 4R\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}.$$

Από τούς τύπους $\rho_\alpha = \tau \epsilon \phi \frac{A}{2}$ καὶ $\tau = 4R \sigma \nu \nu \frac{A}{2} \sigma \nu \nu \frac{B}{2} \sigma \nu \nu \frac{\Gamma}{2}$, συνάγεται :

$$\rho_\alpha = 4R \sigma \nu \nu \frac{A}{2} \sigma \nu \nu \frac{B}{2} \sigma \nu \nu \frac{\Gamma}{2} \frac{\eta \mu \frac{A}{2}}{\sigma \nu \nu \frac{A}{2}} \Rightarrow \rho_\alpha = 4R \eta \mu \frac{A}{2} \sigma \nu \nu \frac{B}{2} \sigma \nu \nu \frac{\Gamma}{2}.$$

Ωστε, ἔχουμε τούς ἀκόλουθους χρήσιμους τύπους :

$\tau = 4R \sigma \nu \nu \frac{A}{2} \sigma \nu \nu \frac{B}{2} \sigma \nu \nu \frac{\Gamma}{2}$	40
$\rho = 4R \eta \mu \frac{A}{2} \eta \mu \frac{B}{2} \eta \mu \frac{\Gamma}{2}$	41
$\rho_\alpha = 4R \eta \mu \frac{A}{2} \sigma \nu \nu \frac{B}{2} \sigma \nu \nu \frac{\Gamma}{2}$	42

1.7. Χρήσιμη παρατήρηση. Όλα τὰ γνωστὰ γραμμικά στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ἐκφράζονται μόνο μὲ τὴν ἀκτίνα R καὶ τὶς γωνίες¹⁾ του. Αὐτὸ φαίνεται ἀπὸ τούς τύπους : **19, 21, 22, 23, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42.**

Ἡ παραπάνω παρατήρηση 1.7. θὰ παίξει σπουδαιότατο ρόλο στὴν ἐπίλυση τοῦ τριγώνου, ὅπως θὰ δοῦμε στὰ ἐπόμενα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑ

57) Σὲ κάθε τρίγωνο νὰ δείξετε ὅτι :

1) $\alpha \eta \mu(B - \Gamma) + \beta \eta \mu(\Gamma - A) + \gamma \eta \mu(A - B) = 0$

2) $\alpha \sigma \nu \nu A + \beta \sigma \nu \nu B + \gamma \sigma \nu \nu \Gamma = 4R \eta \mu A \eta \mu B \eta \mu \Gamma$

3) $(\beta + \gamma) \sigma \nu \nu A + (\gamma + \alpha) \sigma \nu \nu B + (\alpha + \beta) \sigma \nu \nu \Gamma = 2\tau$

4) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2(1 + \sigma \nu \nu A \sigma \nu \nu B \sigma \nu \nu \Gamma)$

5) $\alpha(\sigma \nu \nu B - \sigma \nu \nu \Gamma) = 2(\gamma - \beta) \sigma \nu \nu^2 \frac{A}{2}$

6) $(\beta - \gamma)^2 \sigma \nu \nu^2 \frac{A}{2} + (\beta + \gamma)^2 \eta \mu^2 \frac{A}{2} = \alpha^2$

7) $\gamma^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta \eta \mu^2 \frac{\Gamma}{2}$

¹⁾ Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὅταν λέμε «γωνίες» ἔννοοῦμε τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν.

$$8) E = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{4\epsilon\phi \frac{A+B-\Gamma}{2}}$$

$$9) E = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu A\eta\mu B}{2\eta\mu(A-B)} = \sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \sin \frac{A}{2} \quad (B \neq A)$$

$$10) E = \rho_\beta \rho_\gamma \epsilon\phi \frac{A}{2} = \frac{\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma}{\tau}$$

$$11) \alpha \sigma\phi A + \beta \sigma\phi B + \gamma \sigma\phi \Gamma = 2(R + \rho)$$

$$12) \eta\mu^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{B}{2} + \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} = 1 - \frac{\rho}{2R}$$

$$13) E = R\rho(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \eta\mu A \eta\mu B \mu\eta \Gamma}$$

$$14) E = 2R^2 \frac{\nu_\alpha \nu_\beta \nu_\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \alpha \frac{\rho_\beta \rho_\gamma}{\rho_\beta + \rho_\gamma} = \frac{(\alpha + \beta)\rho\rho_\gamma}{\rho + \rho_\gamma}$$

$$15) \nu_\alpha + \nu_\beta + \nu_\gamma = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{2R}$$

$$16) \frac{\eta\mu^2 A}{\nu_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2\sin A}{\beta\gamma}$$

$$17) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4E(\sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi \Gamma)$$

58) "Αν σὲ τρίγωνο $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ σχέση $R \sin(B-\Gamma) = \delta_x \sin \frac{B-\Gamma}{2}$, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο.

59) "Αν σὲ τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι $\mu_x = \gamma$, τότε ἰσχύει :

$$\epsilon\phi \frac{A}{2} = \left(1 + \epsilon\phi^2 \frac{A}{2}\right) \eta\mu(B-\Gamma)$$

καὶ ἀντίστροφα.

60) "Ενα τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές, ὅταν ἰσχύει μιὰ ἀπὸ τὶς παρακάτω σχέσεις :

$$1) \sin^2 \frac{A}{2} = \eta\mu B \eta\mu \Gamma \quad 2) \alpha = 2\beta \sin \Gamma \quad 3) (\tau - \beta) \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = \tau \epsilon\phi \frac{B}{2}$$

$$4) 2\nu_\alpha = \alpha \sigma\phi \frac{A}{2} \quad 5) 4\tau\rho = \alpha^2 \sigma\phi \frac{A}{2}$$

61) Σὲ κάθε τρίγωνο νὰ δειχθεῖ ὅτι :

$$1) \delta_x \sin \frac{B-\Gamma}{2} = \nu_\alpha$$

$$2) \delta_\alpha \Delta_\alpha (\beta^2 - \gamma^2) = 4\beta\gamma E \quad (\beta > \gamma)$$

$$3) \epsilon\phi \frac{B}{2} + \epsilon\phi \frac{\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{\rho_\alpha}$$

$$4) \epsilon\phi \frac{B}{2} \epsilon\phi \frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho}{\rho_\alpha}$$

$$5) \alpha^2 \geq 4\rho\rho_\alpha$$

$$6) \rho_\alpha + \rho_\beta = 4R \sin^2 \frac{\Gamma}{2}$$

$$7) \rho_\alpha \rho_\beta + \rho\rho_\gamma = \alpha\beta$$

$$8) \frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} = \frac{2}{\rho_\gamma} \quad 10) u_\alpha u_\beta + u_\beta u_\gamma + u_\gamma u_\alpha = -\frac{2\rho\tau^2}{R}$$

$$9) \rho_\alpha \rho_\beta + \rho_\beta \rho_\gamma + \rho_\gamma \rho_\alpha = \tau^2$$

62) "Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και η μεγαλύτερη γωνία του είναι διπλάσια από τη μικρότερη, τότε οι πλευρές του είναι ανάλογες με τους αριθμούς 4,5,6 και αντίστροφα.

63) "Αν σε τρίγωνο ισχύει μια από τις ακόλουθες σχέσεις, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο :

$$1) \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2$$

$$2) E = \tau(\tau - \alpha)$$

$$3) E = \rho\rho_\alpha$$

$$4) E = \rho_\beta \rho_\gamma$$

$$5) \rho_\beta + \rho_\gamma = \alpha$$

$$6) \rho_\beta + \rho_\gamma = 2R$$

$$7) \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \frac{\alpha^2}{2E}$$

$$8) \sigma\phi \frac{B}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

64) "Αν οι διάμεσοι μ_β και μ_γ τέμνονται κάθετα, να δείχθει ότι :

$$1) 2(\sigma\phi B + \sigma\phi \Gamma) = \sigma\phi A$$

$$2) \sigma\eta\alpha \geq \frac{4}{5}$$

65) Νά δείξετε ότι $u_\alpha = 4\rho$, όταν και μόνο όταν : $3\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\eta\eta \frac{B - \Gamma}{2}$

66) Νά δείξετε ότι οι πλευρές ενός τριγώνου δεν μπορεί να αποτελούν αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδο, όταν οι γωνίες του αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Β' ΟΜΑΔΑ

67) "Αν σε τρίγωνο είναι $\alpha = u_\alpha$, τότε να δείξετε ότι :

$$\frac{\gamma}{2} (\sqrt{5} - 1) \leq \beta \leq \frac{\gamma}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

68) "Αν σε τρίγωνο ισχύει $R = \sqrt{\rho\rho_\alpha}$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

69) Νά καθορίσετε το είδος του τριγώνου από τη σχέση $\tau > 2R + \rho$.

70) Σε τρίγωνο ισχύει $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^4$, όταν και μόνο όταν $2\eta\mu^2 \Gamma = \epsilon\phi A \epsilon\phi B$.

71) "Αν ω, ϕ και θ είναι αντίστοιχα οι γωνίες που σχηματίζει η διάμεσος μ_α οξυγώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ με τις πλευρές α, β και γ , τότε να δείξετε ότι :

$$\alpha) \sigma\phi\theta = 2\sigma\phi A + \sigma\phi B$$

$$\beta) \sigma\phi\phi = 2\sigma\phi A + \sigma\phi \Gamma$$

$$\gamma) 2\sigma\phi\omega = |\sigma\phi B - \sigma\phi \Gamma| \quad \left(\omega \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\delta) \sigma\phi A = \frac{4\mu_\alpha^2 - \alpha^2}{4\alpha\mu_\alpha\eta\mu\omega}$$

72) "Αν O είναι έσωτερικό σημείο τριγώνου $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε : $\widehat{OAB} = \widehat{OB\Gamma} = \widehat{O\Gamma A} = \omega$, τότε να δείχθει ότι :

$$\alpha) \sigma\phi\omega = \sigma\phi A + \sigma\phi B + \sigma\phi \Gamma$$

$$\beta) \sigma\tau\epsilon\mu^2\omega = \sigma\tau\epsilon\mu^2A + \sigma\tau\epsilon\mu^2B + \sigma\tau\epsilon\mu^2\Gamma$$

$$\gamma) \omega \leq \frac{\pi}{6}$$

73) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τὸ ὀρθόκέντρο του τρίγωνο Α'Β'Γ' καὶ σημειώνουμε μὲ Ο, Η τὸ περίκεντρο καὶ τὸ ὀρθόκεντρο ἀντίστοιχα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄν ΟΚ εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ Ο ἀπὸ τὴν πλευρὰ ΒΓ, τότε νὰ δείξετε ὅτι :

$$1) (OK) = R\sigma\upsilon\nu A$$

$$2) (HA) = 2R\sigma\upsilon\nu A$$

$$3) (HA') = 2R\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

$$4) A' = \pi - 2A, B' = \pi - 2B, \Gamma' = \pi - 2\Gamma.$$

$$5) (B'\Gamma') = R\eta\mu 2A = \alpha\sigma\upsilon\nu A$$

$$6) (A'B'\Gamma') = 2E\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

$$7) (OH)^2 = R^2(1 - 8\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu \Gamma)$$

$$8) \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu \Gamma \leq \frac{1}{8}.$$

Ποιὰ εἶναι ἡ μορφή τῶν παραπάνω σχέσεων, ὅταν τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιο;

74) Ἄν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ καὶ $A, B, \Gamma \in (0, \pi)$, τότε οἱ τρεῖς θεμελιώδεις ομάδες τύπων (Α), (Β) καὶ (Γ) εἶναι ἀνὰ δύο ἰσοδύναμες.

2. Γενικὴ μέθοδος ἐπιλύσεως τριγώνου

2.1. Ὅρισμοὶ καὶ βασικὲς ἔννοιες. Ὅπως εἶδαμε στὴν § 2 τοῦ κεφ. VI, ὀνομάζεται **ἐπίλυση τριγώνου** ὁ ὑπολογισμὸς τῶν κύριων στοιχείων του, ὅταν δοθῶν ἀρκετὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ¹⁾.

Θὰ λέμε ὅτι **ἡ ἐπίλυση εἶναι δυνατὴ**, ἐφόσον ὑπάρχει τρίγωνο τέτοιο, ὥστε τὰ στοιχεῖα ποὺ βρίσκουμε ἀπὸ τὴν ἐπίλυση καὶ τὰ δοσμένα νὰ εἶναι στοιχεῖα του. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση **ἡ ἐπίλυση εἶναι ἀδύνατη**.

Ὀνομάζεται **διερεύνηση τῆς ἐπιλύσεως**, ἡ εὕρεση τῶν ἰκανῶν καὶ ἀναγκαίων συνθηκῶν, ὥστε ἡ ἐπίλυση νὰ εἶναι δυνατὴ ἢ ἀδύνατη.

Στὰ ἐπόμενα, ὅταν λέμε **γωνιακὴ σχέση** θὰ ἐννοοῦμε μιὰ σχέση μετὰξὺ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ ἢ τῶν τριγωνομετρικῶν τους ἀριθμῶν. Ὅταν θὰ λέμε **γραμμικὴ σχέση** θὰ ἐννοοῦμε μιὰ σχέση μετὰξὺ τῶν γραμμικῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου.

Τὰ στοιχεῖα ποὺ δίνονται γιὰ μιὰ ἐπίλυση μπορεῖ νὰ εἶναι γραμμικὲς ἢ γωνιακὲς σχέσεις.

2.2. Παρατηρήσεις: 1) Κάθε γραμμικὴ (καὶ ὁμογενὴς) σχέση σ' ἓνα τρίγωνο εἶναι ἰσοδύναμη μὲ μιὰ γωνιακὴ σχέση. Αὐτὸ συνάγεται ἀπὸ τὴν παρατήρηση 1.7., ὅτι ὅλα τὰ γραμμικὰ

¹⁾ Γιὰ τὴν ἐπίλυση ἑνὸς τριγώνου χρειάζονται τρία στοιχεῖα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἓνα τουλάχιστον πρέπει νὰ εἶναι γραμμικόν.

στοιχεία ενός τριγώνου εκφράζονται με την άκτινα R και τις γωνίες του. Έπομένως, αν εκφράσουμε τα γραμμικά στοιχεία της γραμμικής και όμογενους σχέσεως με R και γωνίες και έπειτα απαλείψουμε το R , θα προκύψει μία γωνιακή σχέση. Π.χ., από τη σχέση $\alpha = \beta \gamma$ θα έχουμε :

$$\alpha = \beta \gamma \Leftrightarrow (2R\eta\mu A) (2R\eta\mu B\eta\mu \Gamma) = (2R\eta\mu B) (2R\eta\mu \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$4R^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu \Gamma = 4R^2\eta\mu B\eta\mu \Gamma \Leftrightarrow \eta\mu A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

2) Από 2 γραμμικές όχι όμογενείς εκφράσεις προκύπτει μία γωνιακή έκφραση. Θεωρούμε τις γραμμικές σχέσεις: $\beta - \gamma = \kappa > 0$ και $E = \lambda^2$. Έχουμε :

$$\beta - \gamma = \kappa \Leftrightarrow 2R (\eta\mu B - \eta\mu \Gamma) = \kappa \Leftrightarrow 4R\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \text{ συν } \frac{B + \Gamma}{2} = \kappa \Leftrightarrow$$

$$4R\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \eta\mu \frac{A}{2} = \kappa \Leftrightarrow 16R^2 \eta\mu^2 \frac{B - \Gamma}{2} \eta\mu^2 \frac{A}{2} = \kappa^2 \quad (1).$$

$$E = \lambda^2 \Leftrightarrow 2R^2 \eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma = \lambda^2 \Leftrightarrow 4R^2 \eta\mu \frac{A}{2} \text{ συν } \frac{A}{2} \eta\mu B \eta\mu \Gamma = \lambda^2 \quad (2)$$

Διαιρώντας τις (1) και (2) βρίσκουμε τη γωνιακή σχέση :

$$\frac{4\eta\mu^2 \frac{B - \Gamma}{2} \eta\mu \frac{A}{2}}{\text{συν } \frac{A}{2} \eta\mu B \eta\mu \Gamma} = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

3) Θεωρούμε τρεις γωνίες A, B, Γ και έναν αριθμό R . Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι, οί ικανές και αναγκαίες συνθήκες, για να υπάρχει τρίγωνο με γωνίες τις A, B, Γ και άκτινα περιγεγραμμένης περιφέρειας το R , είναι :

$$A > 0, B > 0, \Gamma > 0, A + B + \Gamma = \pi, R > 0.$$

Άρα, έχουμε την ακόλουθη βασική επίλυση :

2.3. Βασική επίλυση. Να επιλυθεί τρίγωνο από δύο γωνίες του και την άκτινα της περιγεγραμμένης του περιφέρειας. Δηλαδή δίνονται τα στοιχεία :

$$A = \theta_1, B = \theta_2, P = \kappa \quad (\theta_1, \theta_2, \kappa \text{ δοσμένοι αριθμοί}).$$

Θεωρούμε το σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} A = \theta_1 \\ B = \theta_2 \\ A + B + \Gamma = \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \theta_1 \\ B = \theta_2 \\ \Gamma = \pi - (\theta_1 + \theta_2). \end{array} \right.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει θετική λύση, όταν και μόνο όταν :

$$\{\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \pi - (\theta_1 + \theta_2) > 0\} \Leftrightarrow \{\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_1 + \theta_2 < \pi\}.$$

Άρα, η επίλυση του τριγώνου είναι δυνατή, όταν :

$$\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_1 + \theta_2 < \pi, \kappa > 0.$$

Κατόπιν, από τούς τύπους (II), βρίσκουμε τις πλευρές του τριγώνου, που είναι :

$$\alpha = 2R\eta\mu\theta_1, \quad \beta = 2R\eta\mu\theta_2, \quad \gamma = 2R\eta\mu(\theta_1 + \theta_2).$$

2.4. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κατηγορίες επιλύσεως τριγώνων. Αυτές φαίνονται από την παρακάτω γενική διατύπωση :

Να επιλυθεί τρίγωνο, όταν δίνονται :

α) δυο γωνιακές σχέσεις και μιὰ γραμμική όχι όμογενής.

β) δυο γραμμικές σχέσεις από τις όποιες μιὰ τουλάχιστον όχι όμογενής και μιὰ γωνιακή.

γ) τρεις γραμμικές σχέσεις από τις όποιες μιὰ τουλάχιστον είναι όχι όμογενής.

Οι περιπτώσεις β) και γ) ανάγονται, σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις 1 και 2, στην περίπτωση α).

Για να επιλύσουμε το τρίγωνο στην α) περίπτωση ακολουθούμε την έξης πορεία : Λύνουμε το τριγωνομετρικό σύστημα, που αποτελείται από τις δυο γραμμικές σχέσεις και την $A + B + \Gamma = \pi$. Το σύστημα αυτό ως καλέσουμε (Σ). "Ωστε, η επίλυση ενός τριγώνου άρχίζει σχεδόν πάντοτε με τον προσδιορισμό των γωνιών του από την λύση του συστήματος (Σ). "Αν το σύστημα (Σ) έχει θετική λύση, τότε προσδιορίζουμε τις γωνίες. "Επειτα, από τη δοσμένη γραμμική σχέση βρίσκουμε το R, αφού προηγουμένως εκφράσουμε τα γραμμικά στοιχεία της με το R και τις γωνίες. "Ετσι, έχουμε αναχθεί στη βασική επίλυση 2.3.

Τονίζουμε ακόμα ότι, αν το σύστημα έχει θετική λύση και είναι $R > 0$, τότε είναι δυνατή η επίλυση. "Αρα, οι συνθήκες για να έχει θετική λύση το (Σ), έφ'όσον $R > 0$, είναι οι συνθήκες για να είναι δυνατή η επίλυση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί τρίγωνο από τα στοιχεία :

$B - \Gamma = \omega > 0$, $\beta + \gamma = \kappa\alpha$ και $\rho = \lambda$, όπου κ, λ και ω γνωστοί αριθμοί.

Επίλυση. Έχουμε :

$$\beta + \gamma = \kappa\alpha \Leftrightarrow 2R(\eta\mu B + \eta\mu \Gamma) = 2\kappa R\eta\mu B\eta\mu \Gamma$$

$$4\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} \text{ συν} \frac{B - \Gamma}{2} = \kappa (2\eta\mu B\eta\mu \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} \text{ συν} \frac{B - \Gamma}{2} = \kappa \{ \text{συν}(B - \Gamma) - \text{συν}(B + \Gamma) \} \quad (1)$$

"Αρα, έχουμε να λύσουμε το σύστημα :

$$(1) \left. \begin{array}{l} B-\Gamma = \omega \\ A+B+\Gamma = \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B-\Gamma = \omega \\ 4\sigma\eta\frac{A}{2}\sigma\eta\frac{\omega}{2} = \kappa(\sigma\eta\omega + \sigma\eta A) \\ A+B+\Gamma = \pi \end{array} \right. \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση (2) ἰσοδύναμα γράφεται :

$$(2) \Leftrightarrow 4\sigma\eta\frac{A}{2}\sigma\eta\frac{\omega}{2} = \kappa(\sigma\eta\omega + 2\sigma\eta^2\frac{A}{2} - 1) \Leftrightarrow$$

$$2\kappa\sigma\eta^2\frac{A}{2} - 4\sigma\eta\frac{\omega}{2}\sigma\eta\frac{A}{2} + \kappa\sigma\eta\omega - \kappa = 0 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sigma\eta\frac{A}{2}\right) = \kappa\sigma\eta^2\frac{A}{2} - 2\sigma\eta\frac{\omega}{2}\sigma\eta\frac{A}{2} - \kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2} = 0. \quad (3)$$

Ἐξάλλου εἶναι :

$$\Gamma > 0 \Leftrightarrow 2\Gamma > 0 \Leftrightarrow (A+B+\Gamma) - (B-\Gamma) > A \Leftrightarrow \pi - \omega > A.$$

Ἀπ' αὐτὴ καὶ ἐπειδὴ $B-\Gamma = \omega > 0$, συμπεραίνουμε ὅτι, ἂν τὸ παραπάνω σύστημα ἔχει λύση, αὐτὴ θὰ εἶναι θετική, ὅταν καὶ μόνο ὅταν :

$$0 < A < \pi - \omega \Leftrightarrow 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \omega < \pi$$

$$\sigma\eta 0 > \sigma\eta\frac{A}{2} > \sigma\eta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow 1 > \sigma\eta\frac{A}{2} > \eta\mu\frac{\omega}{2}. \quad (4)$$

Ἐπομένως οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσως (3) εἶναι δεκτές, ἐφόσον ἱκανοποιῶν τὴ συνθήκη (4). Διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις :

α) Ἐφόσον $\Delta = 4\sigma\eta^2\frac{\omega}{2} + 4\kappa^2\eta\mu^2\frac{\omega}{2} \neq 0$, ἡ (3) ἔχει μιὰ μόνο δεκτὴ ρίζα, ὅταν καὶ μόνον ὅταν :

$$f\left(\eta\mu\frac{\omega}{2}\right) f(1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2} - 2\sigma\eta\frac{\omega}{2}\eta\mu\frac{\omega}{2} - \kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\right) \left(\kappa - 2\sigma\eta\frac{\omega}{2} - \kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$-2\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\eta\frac{\omega}{2} \left(\kappa\sigma\eta^2\frac{\omega}{2} - 2\sigma\eta\frac{\omega}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega \text{ συν } \frac{\omega}{2} \left(\kappa \text{ συν } \frac{\omega}{2} - 2 \right) > 0 \Leftrightarrow \kappa \text{ συν } \frac{\omega}{2} - 2 > 0 \quad (5)$$

β) 'Η (3) έχει δυο δεκτές ρίζες, όταν και μόνο όταν :

$$\Delta > 0, \alpha f \left(\eta\mu \frac{\omega}{2} \right) > 0, \alpha f(1) > 0, \eta\mu \frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{2\alpha} < 0, 1 + \frac{\beta}{2\alpha} > 0.$$

Τώρα, από τη σχέση $\rho = \lambda$ και σύμφωνα με τον τύπο 41, έχουμε :

$$\lambda = 4R \eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}. \text{ 'Απ' αυτή βρίσκουμε το } R \text{ και έπομένως έχου-}$$

με άναχθεί στη βασική επίλυση. 'Ακόμα, το R είναι θετικό, εφόσον $\lambda > 0$.

'Εξάλλου, από τη σχέση $\beta + \gamma = \kappa\omega$ προκύπτει $\kappa > 0$. 'Η συνθήκη (5) με

$$\kappa > 0 \text{ γράφεται : } \text{συν } \frac{\omega}{2} > \frac{2}{\kappa}. \text{ Είναι :}$$

$$\alpha f \left(\eta\mu \frac{\omega}{2} \right) = \kappa \left(-2 \text{συν } \frac{\omega}{2} \eta\mu \frac{\omega}{2} \right) = -\kappa\eta\mu\omega < 0$$

και έπομένως η (3) αποκλείεται να έχει δυο δεκτές ρίζες.

Τελικά, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, βρίσκουμε ότι η επίλυση είναι

$$\text{δυνατή, όταν: } \lambda > 0, \kappa > 0, \text{συν } \frac{\omega}{2} > \frac{2}{\kappa}, \omega < \pi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί τρίγωνο από τα στοιχεία : $B - \Gamma = \omega, \frac{\beta}{\gamma} = \kappa$

και $\delta_\alpha = \lambda$, όπου κ, λ, ω γνωστοί αριθμοί και $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

'Επίλυση. 'Από τη σχέση $\frac{\beta}{\gamma} = \kappa$, συνάγεται $\kappa \neq 1$, γιατί, αν $\kappa = 1$, τότε

θα είναι $\beta = \gamma$ και έπομένως $B = \Gamma$ ή $B - \Gamma = 0$, πού είναι άτοπο. 'Εχουμε :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \kappa \Leftrightarrow \frac{2R \eta\mu B}{2R \eta\mu \Gamma} = \kappa \Leftrightarrow \frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Gamma} = \kappa \Leftrightarrow \frac{\eta\mu B + \eta\mu \Gamma}{\eta\mu B - \eta\mu \Gamma} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} \text{συν } \frac{B - \Gamma}{2}}{2\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \text{συν } \frac{B + \Gamma}{2}} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{B + \Gamma}{2} \sigma\varphi \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}.$$

'Επομένως, έχουμε να επιλύσουμε το σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} B - \Gamma = \omega \\ A + B + \Gamma = \pi \\ \varepsilon\varphi \frac{B + \Gamma}{2} \sigma\varphi \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B - \Gamma = \omega \\ A + B + \Gamma = \pi \\ \sigma\varphi \frac{A}{2} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \varepsilon\varphi \frac{\omega}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

Ἄν τὸ παραπάνω σύστημα ἔχει λύση, αὐτὴ θὰ εἶναι θετική, ὅταν καὶ μόνο ὅταν :

$$0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \sigma\varphi \frac{A}{2} > \sigma\varphi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \right) \Leftrightarrow \sigma\varphi \frac{A}{2} > \varepsilon\varphi \frac{\omega}{2}.$$

Ἄρα, ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν :

$$\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \varepsilon\varphi \frac{\omega}{2} > \varepsilon\varphi \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} > 1 \Leftrightarrow \kappa > 1.$$

Ἀκόμα, ἀπὸ τὴ γραμμικὴ σχέση $\delta_\alpha = \lambda$, εἶναι : $\frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\varphi \frac{B - \Gamma}{2}} = \lambda$. Ἀ-

πὸ τὴν τελευταία σχέση βρίσκουμε τὸ R καὶ ἐπομένως καταλήγουμε στὴ βασικὴ ἐπίλυση.

Τὰ ἐπόμενα παραδείγματα εἶναι δύο κλασικὲς ἐπιλύσεις (βλ. κεφ. VI, § 2), τὶς ὁποῖες ἀναφέρουμε καὶ ἐδῶ γιὰ νὰ τὶς μελετήσουμε μὲ τὴ βοήθεια τῆς γενικῆς μεθόδου ἐπιλύσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: $A = \theta_1, B = \theta_2, \alpha = k$, ὅπου θ_1, θ_2 καὶ k γνωστοὶ ἀριθμοί. Θεωροῦμε τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} A = \theta_1 \\ B = \theta_2 \\ A + B + \Gamma = \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \theta_1 \\ B = \theta_2 \\ \Gamma = \pi - (\theta_1 + \theta_2) \end{array} \right.$$

Τὸ σύστημα, ἔχει θετικὴ λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν : $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_1 + \theta_2 < \pi$. Ἀπὸ τὴ σχέση $\alpha = k$ ἔχουμε: $2R\eta\mu\theta_1 = k$ καὶ ἐπομένως $R = \frac{k}{2\eta\mu\theta_1}$.

Ἄρα, τὰ στοιχεῖα A, B, Γ , καὶ R μᾶς εἶναι γνωστὰ καὶ συνεπῶς ἔχουμε φτάσει στὴ βασικὴ ἐπίλυση. Ἀκόμα εἶναι :

$$R > 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2\eta\mu\theta_1} > 0 \Leftrightarrow k > 0.$$

Ἐπομένως ἡ ἐπίλυση εἶναι δυνατὴ, ὅταν καὶ μόνο ὅταν : $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_1 + \theta_2 < \pi, k > 0$.

Αν $\beta < \gamma$ ($\Leftrightarrow \kappa < \lambda$), τότε η επίλυση προχωρεί με τὸν ἴδιο, ὅπως καὶ παραπάνω, τρόπο. Ἀν ὅμως εἶναι $\beta = \gamma$ ($\Leftrightarrow \kappa = \lambda$), τότε ἡ επίλυση τοῦ τριγώνου εἶναι ἀπλή, γιατί $B = \Gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὶς πλευρὲς του. Τὰ στοιχεῖα γιὰ τὴν επίλυση εἶναι : $\alpha = \kappa$, $\beta = \lambda$, $\gamma = \mu$, ὅπου κ , λ , μ γνωστοὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου προσδιορίζονται ἀπὸ τὸ παρακάτω σύστημα (βλ. 15) :

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\mu)(s-\kappa)}{s(s-\lambda)}} \quad (\Sigma)$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-\kappa)(s-\lambda)}{s(s-\mu)}} \quad (2s = \kappa + \lambda + \mu)$$

Ἡ γωνία A προσδιορίζεται, ὅταν καὶ μόνον ὅταν :

$$\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)} > 0 \Leftrightarrow |\lambda - \mu| < \kappa < \lambda + \mu \quad (1)$$

Ἀν ἡ συνθήκη (1) ἱκανοποιεῖται, τότε ὑπάρχει γωνία $\theta_1 \in (0, \pi)$ τέτοια, ὥστε :

$$\varepsilon\varphi \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}}$$

Ἐπομένως θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\theta_1}{2}$ καὶ τότε βρίσκουμε $A = \theta_1$. Ἀρα, τὸ παραπάνω σύστημα (Σ) ἔχει μιὰ μόνο λύση μέσα στὸ διάστημα $(0, \pi)$, ὅταν καὶ μόνον ὅταν :

$$|\lambda - \mu| < \kappa < \lambda + \mu, \quad |\mu - \kappa| < \lambda < \mu + \kappa, \quad |\kappa - \lambda| < \mu < \kappa + \lambda. \quad (2)$$

Ὑποθέτουμε ὅτι : $A = \theta_1$, $B = \theta_2$ καὶ $\Gamma = \theta_3$ εἶναι ἡ λύση τοῦ συστήματος (Σ) . Γιὰ νὰ εἶναι ἡ επίλυση δυνατὴ θὰ πρέπει $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Θὰ δείξουμε ὅτι αὐτὸ ἰσχύει. Γνωρίζουμε ὅτι :

$$\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \cos\theta_1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}}$$

Ἀκόμα, οἱ ἀριθμοὶ κ, λ, μ καὶ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ἱκανοποιοῦν τὶς ὑποθέσεις τῆς ἀσκή-

σεως 77 και επομένως είναι στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου. Τέλος, ἡ ἐπίλυση εἶναι δυνατή, ἐφόσον ἱκανοποιοῦνται οἱ παραπάνω συνθήκες (1).

Παρατήρηση. Ἡ σχέση $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, ποὺ ἀναφέρεται παραπάνω, μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι: } & \varepsilon\varphi \frac{\theta_1}{2} \varepsilon\varphi \frac{\theta_2}{2} + \varepsilon\varphi \frac{\theta_2}{2} \varepsilon\varphi \frac{\theta_3}{2} + \varepsilon\varphi \frac{\theta_1}{2} \varepsilon\varphi \frac{\theta_3}{2} = \\ & = \sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\kappa)(s-\mu)^2}{s^2(s-\kappa)(s-\mu)}} + \sqrt{\frac{(s-\kappa)^2(s-\lambda)(s-\mu)}{s^2(s-\lambda)(s-\mu)}} + \sqrt{\frac{(s-\lambda)^2(s-\kappa)(s-\mu)}{s^2(s-\mu)(s-\kappa)}} = 1. \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση, ὅπως γνωρίζουμε, συνάγεται $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\rho\pi + \pi$, $\rho \in \mathbb{Z}$. Ἐπειδὴ ὁμως εἶναι $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, \pi)$, προκύπτει $0 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 3\pi$ καὶ ἐπομένως ἔχουμε:

$$0 < 2\rho\pi + \pi < 3\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \rho < 1 \Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$$

2.5. Ἐπίλυση ὀρθογώνιου τριγώνου. Στὴν περίπτωση ποὺ ἔχουμε νὰ ἐπιλύσουμε ὀρθογώνιο τρίγωνο, θὰ θεωροῦμε πάντοτε ὅτι A εἶναι ἡ ὀρθή γωνία. Ἀναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: $\alpha = \kappa$, $\rho = \lambda$.

Ἐπίλυση. Οἱ ἀρχικοὶ περιορισμοὶ εἶναι: $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Ἀπὸ τοὺς τύπους 41 ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\alpha} &= \frac{4R\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}}{2R\eta\mu A} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\kappa} = \frac{2\eta\mu \frac{\pi}{4} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu \frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \\ \frac{\lambda}{\kappa} &= \sqrt{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \frac{2\lambda}{\kappa\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2} &= \frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa} \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} &= \frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}(2\lambda + \kappa)}{2\kappa}. \end{aligned}$$

Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} B + \Gamma = \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}(2\lambda + \kappa)}{2\kappa} \end{cases} \quad (1)$$

Ἄν τὸ σύστημα αὐτὸ ἔχει λύση, αὐτὴ θὰ εἶναι θετική, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:

$$0 \leq |B - \Gamma| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left| \frac{B - \Gamma}{2} \right| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sin 0 \geq \sin \frac{B - \Gamma}{2} > \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 \geq \sin \frac{B - \Gamma}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2).$$

Εξάλλου, η εξίσωση (1) έχει λύση, όταν και μόνο όταν :

$$1 \geq \frac{\sqrt{2}(2\lambda + \kappa)}{2\kappa} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}(2\lambda + \kappa)}{2\kappa} \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\kappa(\sqrt{2} - 1)}{2} \quad (3).$$

Αν ικανοποιείται η συνθήκη (3), η εξίσωση (1) έχει λύση και επομένως βρίσκουμε τη διαφορά $B - \Gamma$. Από τη διαφορά και τη σχέση $B + \Gamma = \frac{\pi}{2}$, βρίσκουμε τις γωνίες B και Γ .

Τελικά οι συνθήκες, για να είναι δυνατή η επίλυση, είναι :

$$\kappa > 0, \quad 0 < \lambda \leq \frac{\kappa(\sqrt{2} - 1)}{2}.$$

Αν $\lambda = \frac{\kappa(\sqrt{2} - 1)}{2}$, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο από τα στοιχεία :

$$\alpha = \kappa, \quad \delta_\beta \delta_\gamma = \lambda^2 \quad (\kappa, \lambda \in \mathbb{R})$$

Επίλυση : Αρχικοί περιορισμοί : $\kappa > 0, \lambda > 0$. Έχουμε :

$$\delta_\beta \delta_\gamma = \frac{\gamma}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{\beta}{\sin \frac{\Gamma}{2}} \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{4R^2 \eta_\mu \Gamma \eta_\mu B}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{\Gamma}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = 16R^2 \eta_\mu \frac{B}{2} \eta_\mu \frac{\Gamma}{2}. \quad (1)$$

$$\text{Εξάλλου, είναι : } \alpha = 2R \Leftrightarrow \kappa = 2R \Leftrightarrow \kappa^2 = 4R^2. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) συνάγεται :

$$\lambda^2 = 4\kappa^2 \eta_\mu \frac{B}{2} \eta_\mu \frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow \lambda^2 = 2\kappa^2 \left[\sin \frac{B - \Gamma}{2} - \sin \frac{B + \Gamma}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = 2\kappa^2 \left[\sin \frac{B - \Gamma}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \Leftrightarrow \sin \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*Αρα, έχουμε να λύσουμε το σύστημα :

$$B + \Gamma = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\text{συν } \frac{B - \Gamma}{2} = \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

*Αν το παραπάνω σύστημα έχει λύση, αυτή θα είναι θετική, όταν και μόνον όταν :

$$0 \leq |B - \Gamma| < \pi - A \Leftrightarrow 0 \leq |B - \Gamma| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left| \frac{B - \Gamma}{2} \right| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\text{συν} 0 \geq \text{συν} \left| \frac{B - \Gamma}{2} \right| > \text{συν} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 \geq \text{συν} \frac{B - \Gamma}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5)$$

*Εξάλλου, η εξίσωση (4) για να έχει δεκτή λύση πρέπει και αρκεί :

$$1 \geq \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \leq 2 - \sqrt{2} \quad (6)$$

*Εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη (6), τότε η εξίσωση (4) έχει λύση και επομένως βρίσκουμε τη διαφορά $B - \Gamma$. Κατόπιν προχωρούμε κατά τα γνωστά. Τελικά οι συνθήκες, για να είναι δυνατή η επίλυση, είναι :

$$\kappa > 0, \quad \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \leq 2 - \sqrt{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑ

75) Να επιλυθεί τρίγωνο από τα στοιχεία :

1) $\alpha = 2\beta, \Gamma = \frac{\pi}{3}, E = 2\sqrt{3}$

2) $\alpha, R, A = 2\Gamma$

3) $\alpha, \beta - \gamma = \lambda, B = 2\Gamma$

4) $\alpha, A, \frac{\beta}{\gamma} = \lambda$

76) Να επιλύσετε τρίγωνο από τα επόμενα στοιχεία :

1) α, A, τ

2) $\alpha, B, \beta - \gamma = \lambda$

3) α, A, E

4) $\alpha, \nu_\alpha, B = 2\Gamma$

5) α, A, μ_α

6) $A, \beta + \gamma = \lambda, \nu_\alpha = \alpha$

7) $A, \nu_\alpha, \beta + \gamma = 2\alpha$

8) $\alpha, \tau, B = 2\Gamma$

9) $\alpha, A, \beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2$

77) Νά επιλυθεί ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = \frac{\pi}{2}$) ἀπὸ τὰ παρακάτω στοιχεία :

- | | | | | |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|--------------|
| 1) α, ρ | 2) ν_α, μ_β | 3) $B, \beta + \gamma = \kappa$ | 4) ν_α, μ_α | 5) ρ, B |
| 6) α, δ_β | 7) τ, R | 8) $2\tau, \nu_\alpha$ | 9) $B, \alpha + \nu_\alpha = \lambda$ | |

78) Νά επιλυθεί τρίγωνο ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα στοιχεία :

- | | |
|--|--|
| 1) $\alpha, B - \Gamma = \omega, \frac{\varepsilon\phi B}{\varepsilon\phi \Gamma} = \lambda$ | 2) $\alpha, E = \lambda^3, \varepsilon\phi \frac{B}{2} + \varepsilon\phi \frac{\Gamma}{2} = \nu$ |
| 3) $\alpha, A, \beta - \gamma + \nu_\alpha = \lambda$ | 4) $\alpha, A, \nu_\beta + \nu_\gamma = \mu$ |
| 5) $\alpha, \mu_\alpha, B - \Gamma = \omega > 0$ | 6) $\alpha, \frac{\nu_\alpha}{\rho_\beta} = \lambda, B = 2\Gamma$ |

Β' ΟΜΑΔΑ

79) Νά βρεθοῦν οἱ τρεῖς πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου, ὅταν γνωρίζουμε ὅτι εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὅτι ἡ μεγαλύτερη γωνία του εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴ μικρότερη.

80) Σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται τὰ τμήματα $BD = \mu$ καὶ $\Gamma D = \nu$, ὅπου $AD = \delta_\alpha$ ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας Α. Νά ὑπολογισθοῦν τὰ στοιχεῖα $\alpha, \beta, \gamma, \delta_\alpha$ καὶ ν_α .

81) Ἄν οἱ πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου ἀποτελοῦν διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου καὶ εἶναι γνωστὴ ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου, νά βρεθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες του.

82) Ἄν σὲ τρίγωνο δίνονται τὰ στοιχεῖα R, ρ καὶ ἰσχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$, νά ὑπολογιστοῦν οἱ πλευρὲς του.

83) Ἄν σὲ τρίγωνο εἶναι $\sigma\phi A = 2$ καὶ $\sigma\phi B = 3$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία Γ (χωρὶς πίνακες).

84) Νά ἐκφραστεῖ μὲ τὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας τῶν διαμέσων μ_β καὶ μ_γ .

85) Οἱ πλευρὲς τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθ. πρόοδο καὶ ἡ διαφορὰ τῆς μικρότερης γωνίας του ἀπὸ τὴ μεγαλύτερή του εἶναι $\frac{\pi}{2}$. Νά δεიχθεῖ ὅτι οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt[3]{7} - 1, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7} + 1$.

86) Ἄν σὲ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\Gamma = \frac{\pi}{3}$, τότε νά δείξετε ὅτι :

$$\frac{1}{\alpha + \gamma} + \frac{1}{\beta + \gamma} = \frac{3}{2\tau}$$

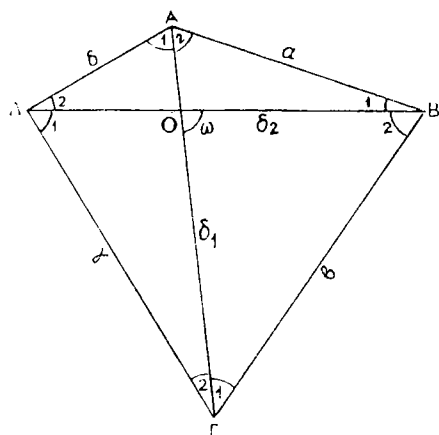
87) Ἄν σὲ τρίγωνο εἶναι $E = \frac{4}{3}, \beta^2 + \gamma^2 = \frac{20}{3}$ καὶ $\varepsilon\phi B\varepsilon\phi \Gamma = 4$, τότε νά ὑπολογιστοῦν τὰ $\alpha, \varepsilon\phi A$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

1. Κυρτό τετράπλευρο

1.1. Οί γωνίες A, B, Γ, Δ καί οί πλευρές $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ενός κυρτοῦ τετραπλεύρου (Σχ. 23), χαρακτηρίζονται, ὅπως καί στο τρίγωνο, ὡς **κύρια** στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου, ἐνῶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα του **δευτερεύοντα**. Δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 23) εἶναι : οί διαγωνίαι δ_1 καί δ_2 , τὸ ἐμβαδὸν E , ἡ περίμετρος $2S$, ἡ γωνία ω τῶν διαγωνίων, ὅπως



Σχ. 23

καί κάθε ἄλλο στοιχείο (γραμμικὸ ἢ γωνιακὸ) ποὺ ἔχει σχέση μετὰ τὸ τετράπλευρο.

1.2. Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τετραπλεύρου. Ἀναφέρουμε παρακάτω ὁρισμένες βασικὲς σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου.

1.2.1. Γωνίες πλευρῶν καὶ διαγωνίων. Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων καὶ τὴ φανερὴ σχέση :

$$\frac{(A\Delta)}{(A\Gamma)} \cdot \frac{(A\Gamma)}{(AB)} \cdot \frac{(AB)}{(A\Delta)} = 1,$$

βρίσκουμε ἀμέσως τὸν τύπο : $\frac{\eta\mu\Gamma_2}{\eta\mu\Delta} \cdot \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma_1} \cdot \frac{\eta\mu\Delta_2}{\eta\mu B_1} = 1.$

Ὅμοια καταλήγουμε στοὺς τύπους :

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu\Gamma_2}{\eta\mu\Delta} \cdot \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma_1} \cdot \frac{\eta\mu\Delta_2}{\eta\mu B_1} &= 1, \quad \frac{\eta\mu\Delta_2}{\eta\mu A} \cdot \frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\Delta_1} \cdot \frac{\eta\mu A_2}{\eta\mu\Gamma_1} = 1, \\ \frac{\eta\mu A_2}{\eta\mu B} \cdot \frac{\eta\mu\Delta}{\eta\mu A_1} \cdot \frac{\eta\mu B_2}{\eta\mu\Delta_1} &= 1, \quad \frac{\eta\mu B_2}{\eta\mu\Gamma} \cdot \frac{\eta\mu A}{\eta\mu B_1} \cdot \frac{\eta\mu\Gamma_2}{\eta\mu A_1} = 1. \end{aligned}$$

Από τη σχέση $\frac{(AB)}{(B\Gamma)} \cdot \frac{(B\Gamma)}{(\Gamma\Delta)} \cdot \frac{(\Gamma\Delta)}{(\Delta A)} \cdot \frac{(\Delta A)}{(AB)} = 1$, έχουμε τον τύπο :

$$\eta\mu A_1 \eta\mu B_1 \eta\mu \Gamma_1 \eta\mu \Delta_1 = \eta\mu A_2 \eta\mu B_2 \eta\mu \Gamma_2 \eta\mu \Delta_2$$

44

1.2.2. Έμβαδό. Έχουμε (Σχ. 23) :

$$\begin{aligned} E &= (AOB) + (BO\Gamma) + (\Gamma O\Delta) + (AO\Delta) \Rightarrow E = \frac{1}{2} (AO)(BO)\eta\mu\omega + \\ &+ \frac{1}{2} (BO)(\Gamma O)\eta\mu\omega + \frac{1}{2} (\Gamma O)(\Delta O)\eta\mu\omega + \frac{1}{2} (\Delta O)(AO)\eta\mu\omega \Rightarrow \\ E &= \frac{1}{2} [(AO) + (O\Gamma)][(BO) + (O\Delta)]\eta\mu\omega \Rightarrow E = \frac{1}{2} (A\Gamma)(B\Delta)\eta\mu\omega. \end{aligned}$$

Επομένως καταλήγουμε στον τύπο :

$$E = \frac{1}{2} \delta_1 \delta_2 \eta\mu\omega$$

45

1.2.3. Πλευρές, διαγώνιες και γωνία διαγωνίων. Σημειώνουμε με Z το κοινό σημείο τών πλευρών β και δ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 24). Σύμφωνα με το θεώρημα τών συνημιτόνων, έχουμε :

$$\alpha^2 = (OA)^2 + (OB)^2 + 2(OA)(OB)\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\beta^2 = (OB)^2 + (O\Gamma)^2 - 2(OB)(O\Gamma)\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\gamma^2 = (OD)^2 + (O\Gamma)^2 + 2(OD)(O\Gamma)\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\delta^2 = (OA)^2 + (OD)^2 - 2(OA)(OD)\sigma\upsilon\nu\omega$$

Απ' αυτές βρίσκουμε :

$$\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 2[(OA)(OB) + (OB)(O\Gamma) + (O\Gamma)(OD) + (OD)(OA)]\sigma\upsilon\nu\omega \Rightarrow$$

$$(\alpha^2 + \gamma^2) - (\beta^2 + \delta^2) = 2\delta_1 \delta_2 \sigma\upsilon\nu\omega$$

46

Όμοια έχουμε : $\delta_1^2 = (AZ)^2 + (Z\Gamma)^2 - 2(AZ)(Z\Gamma)\sigma\upsilon\nu\varphi$,

$\delta_2^2 = (ZB)^2 + (Z\Delta)^2 - 2(ZB)(Z\Delta)\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\alpha^2 = (ZB)^2 + (ZA)^2 - 2(ZB)(ZA)\sigma\upsilon\nu\varphi$

$$\text{καί } \gamma^2 = (Z\Delta)^2 + (Z\Gamma)^2 - 2(Z\Delta)(Z\Gamma)\text{συνφ.}$$

‘Απ’ αὐτὲς καὶ τὶς σχέσεις $(ZA) = (Z\Delta) + (\Delta A)$, $(ZB) = (Z\Gamma) + (\Gamma B)$, προκύπτει ὁ τύπος :

$$(\delta_1^2 + \delta_2^2) - (\alpha^2 + \gamma^2) = 2\beta\delta\text{συνφ} \quad 47$$

1.2.4. ‘Εμβαδὸ σὲ συνάρτηση μὲ περίμετρο καὶ καὶ γωνίες. ‘Απὸ τοὺς τύπους 45 καὶ 46 συνάγεται ἀμέσως ὁ τύπος :

$$E = \frac{1}{4} (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) \epsilon\phi\omega \quad 48$$

$$\text{‘Εξάλλου, εἶναι : } E = (\Delta AB) + (\Delta \Gamma B) = \frac{1}{2} \alpha\delta \eta\mu A + \frac{1}{2} \beta\gamma \eta\mu \Gamma \Rightarrow$$

$$4E = 2\alpha\delta \eta\mu A + 2\beta\gamma \eta\mu \Gamma \quad (1)$$

$$\text{‘Επίσης, ἔχουμε : } \delta_2^2 = \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta\text{συν}A \text{ καὶ } \delta_2^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\Gamma.$$

$$\text{‘Επομένως συνάγεται : } \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta \text{ συν}A = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν}\Gamma \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\delta \text{ συν}A - 2\beta\gamma \text{ συν}\Gamma. \quad (2).$$

Τετραγωνίζουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῶν (1), (2) καὶ μετὰ προσθέτουμε, ὁπότε ἔχουμε :

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2\alpha\delta \eta\mu A + 2\beta\gamma \eta\mu \Gamma)^2 + (2\alpha\delta \text{ συν}A - 2\beta\gamma \text{ συν}\Gamma)^2 \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = 4\alpha^2\delta^2 + 4\beta^2\gamma^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν} (A + \Gamma) \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta [1 + \text{συν}(A + \Gamma)] \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}^2 \frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$16E^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}^2 \frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$16E^2 = [(\alpha + \delta)^2 - (\beta - \gamma)^2] [(\beta + \gamma)^2 - (\alpha - \delta)^2] - 16\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}^2 \frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$16E^2 = 16(s - \alpha)(s - \beta)(s - \gamma)(s - \delta) - 16\alpha\beta\gamma\delta \text{ συν}^2 \frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$(2s = \alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Έτσι βρίσκουμε τον τύπο :

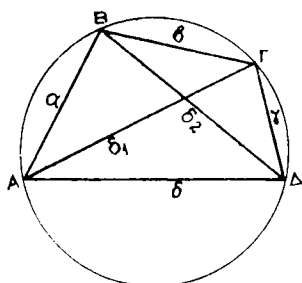
$$E = \sqrt{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta) - \alpha\beta\gamma\delta \frac{A+\Gamma}{2}}$$

49

1.3. Κυρτό τετράπλευρο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο. Θεωροῦμε ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο τετράπλευρο ΑΒΓΔ (Σχ. 25). Ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου, ἔχουμε :

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin B = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta \sin \Delta \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $B + \Delta = \pi$, προκύπτει $\sin B = -\sin \Delta$. Ἀπ' αὐτὴ καὶ τὴν (1) ἔχουμε :



$$\sin B = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2}{2(\alpha\beta + \gamma\delta)} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴ σχέση (2) καὶ τοὺς τύπους

$$\eta\mu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sin B}{2}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sin B}{2}},$$

προκύπτει :

Σχ. 25.

$$\eta\mu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{\alpha\beta + \gamma\delta}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\gamma)(s-\delta)}{\alpha\beta + \gamma\delta}} \quad (2s = \alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

$$\text{Ἄν διαιρέσουμε τοὺς τελευταίους τύπους, συνάγεται : } \epsilon\phi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{(s-\gamma)(s-\delta)}}$$

Τελικά, ἔχουμε τοὺς ἐπόμενους βασικούς τύπους :

$$\eta\mu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{\alpha\beta + \gamma\delta}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\gamma)(s-\delta)}{\alpha\beta + \gamma\delta}},$$

$$\epsilon\phi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{(s-\gamma)(s-\delta)}}$$

50

Εἶναι $A + \Gamma = \pi$, ὁπότε $\sin \frac{A+\Gamma}{2} = 0$ καὶ ἐπομένως ἀπὸ τὸν τύπο 7 συνάγεται :

$$E = \sqrt{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta)}$$

51

Οι διαγωνίες δ_1 και δ_2 του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 25) υπολογίζονται σε συνάρτηση με τις πλευρές του ως εξής :

Από τον τύπο $\delta_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sin B$ και την τιμή του $\sin B$ (βλ. 1.3, σχέση (2)), προκύπτει :

$$\delta_1^2 = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}.$$

Άρα, έχουμε τους παρακάτω τύπους :

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}}, \delta_2 = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{\alpha\delta + \beta\gamma}}$$

52

Από το τρίγωνο ΑΒΓ (Σχ. 25) έχουμε :

$$\delta_1 = 2R\eta\mu B \text{ ή } \delta_1 = 4R\eta\mu \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2},$$

οπότε, σύμφωνα και με τους τύπους 50, 51 και 53, προκύπτει :

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta)}} \\ &= \frac{1}{4E} \sqrt{(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)} \end{aligned}$$

53

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

96) Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ νά δείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\eta\mu A}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\eta\mu B_1 \eta\mu A_1}{\eta\mu B_2 \eta\mu \Gamma_2} = \frac{\eta\mu \Delta_2 \eta\mu A_2}{\eta\mu \Delta_1 \eta\mu \Gamma_1} \quad \beta) \frac{\eta\mu A \eta\mu B}{\eta\mu \Gamma \eta\mu \Delta} = \frac{\eta\mu A_2 \eta\mu B_1}{\eta\mu \Gamma_2 \eta\mu \Delta_1}$$

97) Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ δίνονται οι πλευρές α, β, γ και οι γωνίες Β και Γ. Νά βρεθούν οι γωνίες Α, Δ και η πλευρά δ.

98) Αν οι πλευρές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι 3,4,5,6 και δύο απέναντι γωνίες του έχουν άθροισμα π , τότε νά βρεθεί το έμβαδό του τετραπλεύρου.

99) Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο, τότε το έμβαδό του δίνεται από τον τύπο : $E = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} \eta\mu \frac{B + \Delta}{2}.$

100) "Αν τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο σὲ κύκλο, τότε ἰσχύει :

$$\alpha\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} = \gamma\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \eta\mu \frac{\Delta}{2} .$$

101) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. "Αν $\widehat{BA\Gamma} = \chi$ καὶ $\widehat{AB\Delta} = \psi$, τότε νὰ δείξετε ὅτι :

$$\alpha) \sigma\phi\chi - \sigma\phi\psi = \sigma\phi A - \sigma\phi B \quad \beta) \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} .$$

102) "Αν τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο καὶ περιγράψιμο σὲ κύκλο, νὰ δειχθεῖ ὅτι :

$$\alpha) \epsilon\phi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}} \quad \beta) E = \alpha\beta\epsilon\phi \frac{B}{2} \quad \gamma) \sigma\upsilon\nu A = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\delta + \beta\gamma}$$

$$\delta) \epsilon\phi^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma} \quad \epsilon) \eta\mu\omega = \frac{2 \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}}{\alpha\gamma + \beta\delta} \quad (\omega \text{ εἶναι ἡ γωνία τῶν διαγωνίων})$$

103) Σὲ κάθε ἐγγράψιμο τετράπλευρο ἰσχύει :

$$\epsilon\phi \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{(s-\beta)(s-\delta)}{(s-\alpha)(s-\gamma)}} ,$$

ὅπου ω εἶναι ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του καὶ $2s$ ἡ περίμετρός του.

2. Ἐπίλυση τετραπλεύρου

2.1. Οἱ διαγωνίες ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου χωρίζουν αὐτὸ σὲ τέσσερα τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ καὶ ΔΑΒ, ποὺ ὀνομάζονται **μερικὰ τρίγωνα**. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ διευκολύνουν ὄχι μόνο τὴ μελέτη τοῦ τετραπλεύρου ἀλλὰ καὶ τὴν ἐπίλυσή του. Συνήθως ἡ ἐπίλυση ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου γίνεται μὲ τὴν ἐπίλυση τὴν μερικῶν του τριγώνων. Ὑπάρχουν ὁμως καὶ περιπτώσεις στὶς ὁποῖες κανένα μερικὸ τρίγωνο δὲν ἐπιλύεται.

Ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νὰ ἐπιλυθεῖ κυρτὸ τετράπλευρο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα A_1 , B_1 , β , γ καὶ δ_2 (Σχ. 26).

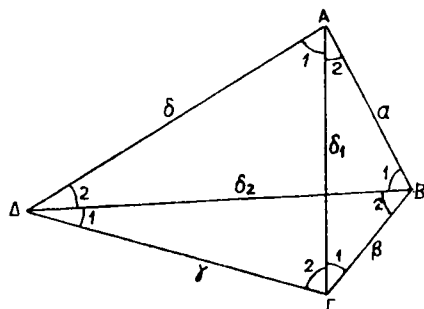
Ἐπίλυση. Ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ὑπολογίζουμε τὶς γωνίες B_2 , Γ καὶ Δ . Ἀρα, ἡ γωνία $B = B_1 + B_2$ ὑπολογίζεται. Ἐξάλλου ἔχουμε :

$$A_2 + B + \Gamma_1 = \pi \Rightarrow (A - A_1) +$$

$$B + (\Gamma - \Gamma_2) = \pi \Rightarrow$$

$$A - \Gamma_2 = \pi - A_1 - (B + \Gamma) \quad (1)$$

Ὁ τελευταῖος ἀπὸ τοὺς τύπους 1 μᾶς δίνει :



Σχ. 26

$$\eta\mu A\eta\mu\Gamma_2 = \frac{\eta\mu B_1\eta\mu\Gamma\eta\mu A_1}{\eta\mu B_2}. \quad (2)$$

Οί σχέσεις (1), (2) αποτελούν ένα άπλο τριγωνομετρικό σύστημα με άγνωστες γωνίες τις A και Γ_2 . Από τη λύση του συστήματος αυτού βρίσκουμε τις γωνίες A και Γ_2 . Έπομένως, έχουμε προσδιορίσει και τις γωνίες $\Delta = 2\pi - (A + B + \Gamma)$ και $\Delta_2 = \Delta - \Delta_1$. Κατόπιν, από την επίλυση των τριγώνων $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του τετραπλεύρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά επιλυθεί κυρτό τετράπλευρο από τα στοιχεία α , A_1 , A_2 , B_2 και Δ_1 .

Έπίλυση. Είναι φανερό (Σχ. 26) πώς από τις σχέσεις $A = A_1 + A_2$ και $\Gamma = \pi - (B_2 + \Delta_1)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τις γωνίες A και Γ . Άρα, έχουμε :

$$B + \Delta = 2\pi - (A + \Gamma). \quad (1)$$

Εξάλλου, από τους τύπους 1 προκύπτει

$$\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Delta} = \frac{\eta\mu A_2\eta\mu B_2}{\eta\mu A_1\eta\mu\Delta_1} \quad (2)$$

Οί γωνίες B και Δ βρίσκονται εύκολα από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2). Έπειτα, με επίλυση των μερικων τριγώνων, βρίσκουμε τα υπόλοιπα άγνωστα κύρια στοιχεία του τετραπλεύρου :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νά επιλυθεί κυρτό τετράπλευρο από τις πλευρές του α , β , γ , δ και το έμβαδό του $E = \kappa^2$ (κ γνωστός αριθμός).

Έπίλυση. Από τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta\Gamma B$ (Σχ. 23), σύμφωνα και με το θεώρημα των συνημιτόνων, έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 &= \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta\sigma\eta A \\ \delta^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\eta\Gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha\delta\sigma\eta A - \beta\gamma\sigma\eta\Gamma = \frac{\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2} \quad (1)$$

Θέτουμε $\frac{\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2} = \lambda^2$, όπότε ή (1) γράφεται :

$$\alpha\delta\sigma\eta A - \beta\gamma\sigma\eta\Gamma = \lambda^2.$$

Άκόμα, από τη σχέση $E = (\Delta AB) + (\Delta\Gamma B)$, έχουμε :

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} \alpha\delta\eta\mu A + \frac{1}{2} \beta\gamma\eta\mu\Gamma \Rightarrow \alpha\delta\eta\mu A + \beta\gamma\eta\mu\Gamma = 2\kappa^2.$$

Άρα οί γωνίες A και Γ θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\left. \begin{aligned} \alpha\delta\sigma\eta A - \beta\gamma\sigma\eta\Gamma &= \lambda^2 \\ \alpha\delta\eta\mu A + \beta\gamma\eta\mu\Gamma &= 2\kappa^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \beta\gamma\sigma\eta\Gamma &= \alpha\delta\sigma\eta A - \lambda^2 \\ \beta\gamma\eta\mu\Gamma &= 2\kappa^2 - \alpha\delta\eta\mu A. \end{aligned} \right. \quad (2) \quad (3)$$

’Από τις (2) καὶ (3) προκύπτει :

$$\begin{aligned}(\beta\gamma)^2 (\text{συν}^2\Gamma + \eta\mu^2\Gamma) &= (\alpha\delta \text{συν}A - \lambda^2)^2 + (2\kappa^2 - \alpha\delta\eta\mu A)^2 \Leftrightarrow \\ 4\kappa^2\alpha\delta\eta\mu A + 2\lambda^2\alpha\delta \text{συν}A &= \alpha^2\delta^2 + \lambda^4 + 4\kappa^4 - \beta^2\gamma^2.\end{aligned}$$

’Η τελευταία εξίσωση είναι γραμμική ὡς πρὸς τὴ γωνία A καὶ ἐπομένως λύνεται εὐκόλα. Μετὰ ἀπὸ τὸν προσδιορισμὸ τῆς γωνίας A, εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυση τοῦ τριγώνου ΔAB. ’Απὸ τὴν ἐπίλυση αὐτοῦ βρίσκουμε τὰ στοιχεῖα B₁, Δ₂ καὶ δ₂. Τέλος, μπορούμε νὰ ἐπιλύσουμε τὸ τρίγωνο ΔΓB καὶ νὰ βροῦμε τὶς γωνίες Δ₁, B₂, Γ. Ἔτσι, ἔχουμε ὑπολογίσει τὶς γωνίες τοῦ τετραπλεύρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 104) Νὰ ἐπιλυθεῖ κυρτὸ τετράπλευρο ABΓΔ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα δ₁, A₁, B₁, Γ₁ καὶ Γ₂.
- 105) Νὰ ἐπιλυθεῖ ἐγγράψιμο τετράπλευρο ἀπὸ τὶς πλευρὲς του.
- 106) Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες κυρτοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ, ὅταν δίνονται οἱ γωνίες A₁, B₁, B₂ καὶ Δ₁.
- 107) Νὰ ἐπιλυθεῖ κυρτὸ τετράπλευρο ἀπὸ τὶς πλευρὲς του καὶ μιὰ γωνία του.
- 108) Νὰ ἐπιλυθεῖ τραπέζιο ἀπὸ τὶς διαγωνίους του καὶ τὶς γωνίες του.
- 109) Νὰ ἐπιλυθεῖ παραλληλόγραμμο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα : E (ἐμβαδό), 2s (περίμετρος) καὶ μιὰ διαγώνιο δ.
- 110) Θεωροῦμε κυρτὸ τετράπλευρο ABΓΔ ἐγγεγραμμένον σὲ κύκλο. Ἄν οἱ πλευρὲς του α, β, γ, δ εἶναι ἀνάλογες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 5, 6, 7, 8 καὶ τὸ ἐμβαδὸ του E = 100, τότε νὰ βρεθοῦν οἱ πλευρὲς του καὶ ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου.
- 111) Νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ διαγωνίες τραπέζιου, ὅταν γνωρίζουμε τὶς πλευρὲς τοῦ.
- 112) Νὰ ἐπιλυθεῖ παραλληλόγραμμο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα :

$$2s, \frac{\delta_1}{\delta_2} = \lambda, \omega.$$

ὅπου δ₁, δ₂ εἶναι οἱ διαγωνίες του καὶ ω ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του.

- 113) Νὰ ἐπιλυθεῖ τετράπλευρο ἐγγράψιμο καὶ περιγράψιμο σὲ κύκλο, ὅταν δίνονται ἡ πλευρά του α καὶ οἱ γωνίες του A, B.
- 114) Κυρτὸ τετράπλευρο εἶναι περιγεγραμμένον σὲ κύκλο ἀκτίνας R. Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες του, ὅταν ξέρουμε τὶς πλευρὲς του α, β καὶ γ. Ἐπειτα, νὰ βρεθεῖ ἡ συνθήκη, ὥστε νὰ ἔχει λύση τὸ πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΧ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

1. Όρισμοί και βασικές έννοιες

1.1. Υπενθυμίζουμε τον όρισμό μιᾶς σειρᾶς. Υποθέτουμε ὅτι : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ εἶναι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θεωροῦμε ἀκόμα τὴν ἀκολουθία $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$ μέ :

$$\sigma_1 = \alpha_1$$

$$\sigma_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

Ἔτσι σχηματίζεται μιὰ νέα ἀκολουθία μέ ὄρους ποὺ εἶναι ἄθροισματα τῶν ὄρων τῆς (α_n) , $n \in \mathbf{N}$. Ἡ ἀκολουθία (σ_n) λέγεται καὶ **ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων τῆς (α_n)** . Ὀνομάζεται **σειρὰ πραγματικῶν ἀριθμῶν** τὸ διατεταγμένο ζεῦγος $((\alpha_n), (\sigma_n))$ καὶ συμβολίζεται μέ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ ἢ μέ $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$. Ὁ ὅρος τῆς ἀκολουθίας (α_n) λέγονται καὶ **ὄροι τῆς σειρᾶς** $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$.

Ἄν ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων (σ_n) συγκλίνει σ' ἓνα πραγματικὸ ἀριθμὸ $\eta \in \mathbf{R}$, τότε θὰ λέμε ὅτι τὸ **ἄθροισμα τῆς σειρᾶς** $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ εἶναι η καὶ θὰ γράφουμε $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \eta$.

Εἰδικότερα, ἂν οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας (α_n) περιέχουν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, τότε ἡ σειρὰ θὰ λέγεται **τριγωνομετρικὴ σειρὰ**.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα μιᾶς σειρᾶς, πρέπει πρῶτα νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἄθροισμα σ_n τῶν n πρώτων ὄρων τῆς καὶ ἔπειτα νὰ βροῦμε τὸ ὄριό του. Τονίζουμε ὅτι στὶς περισσότερες περιπτώσεις τὸ ἄθροισμα αὐτὸ σ_n δὲν ὑπολογίζεται καὶ ἐπομένως δὲν μπορούμε εὐκολὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς.

Ἀναφέρουμε ἀμέσως μιὰ πρόταση ποὺ θὰ μᾶς βοηθήσει στὴν εὕρεση τοῦ ἄθροίσματος σ_n τῶν n πρώτων ὄρων σειρᾶς.

1.2. Πρόταση. "Αν ο γενικός όρος α_n μιᾶς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ μπορεί νὰ πάρει τὴ μορφή :

$$\alpha_n = f(n) - f(n+1), \quad (1)$$

ὅπου f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη γιὰ κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε τὸ ἄθροισμα $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο :

$$\sigma_n = f(1) - f(n+1).$$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴν σχέση (1) μὲ $n = 1, 2, \dots, n$, ἔχουμε :

$$\alpha_1 = f(1) - f(2)$$

$$\alpha_2 = f(2) - f(3)$$

$$\alpha_n = f(n) - f(n+1)$$

"Αν προσθέσουμε τὶς παραπάνω ἰσότητες, βρίσκουμε :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = f(1) - f(n+1) \quad \text{ἢ}$$

$$\sigma_n = f(1) - f(n+1).$$

Παρακάτω θὰ ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα τριγωνομετρικῶν σειρῶν, ποὺ τὸ ἄθροισμά τους ὑπολογίζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. "Αν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, τότε νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς :

$$\eta\mu\alpha + 2\eta\mu^2\alpha + 4\eta\mu^3\alpha + \dots + 2^{n-1}\eta\mu^n\alpha + \dots$$

Λύση. Οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς εἶναι ὅροι φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἐπομένως ἔχουμε :

$$\sigma_n = \frac{(2\eta\mu\alpha)^n - 1}{2\eta\mu\alpha - 1} \eta\mu\alpha \Leftrightarrow \sigma_n = \frac{\eta\mu\alpha}{2\eta\mu\alpha - 1} (2\eta\mu\alpha)^n + \frac{\eta\mu\alpha}{1 - 2\eta\mu\alpha}. \quad (1)$$

Ἐξάλλου, εἶναι :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < \eta\mu\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2\eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\eta\mu\alpha)^n = 0 \quad (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε :

$$\lim \sigma_n = \frac{\eta\mu\alpha}{2\eta\mu\alpha - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (2\eta\mu\alpha)^n + \frac{\eta\mu\alpha}{1 - 2\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{1 - 2\eta\mu\alpha}.$$

Άρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $\frac{\eta\mu\alpha}{1 - 2\eta\mu\alpha}$ καὶ ἐπομένως γράφουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{1 - 2\eta\mu\alpha}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} \eta\mu \frac{\pi}{2^{n+2}} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2^{n+2}}$

Λύση. Ἔχουμε:

$$\alpha_n = \eta\mu \frac{\pi}{2^{n+2}} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2^{n+2}} \Rightarrow 2\alpha_n = \eta\mu \frac{\pi}{2^n} - \eta\mu \frac{\pi}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2^n} - \frac{1}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha_n = f(n) - f(n+1)$, ὅπου $f(n) = \frac{1}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2^n}$.

Ἐπομένως θὰ ἔχουμε:

$$\sigma_n = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\text{Εἶναι: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 0 = \frac{1}{2}.$$

Άρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $\frac{1}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \epsilon\phi \frac{\alpha}{2^n}$.

Λύση. Ἀπὸ τὴν ταυτότητα $\epsilon\phi\chi = \sigma\phi\chi - 2\sigma\phi 2\chi$ μὲ $\chi = \frac{\alpha}{2^n}$ ἔχουμε:

$$\epsilon\phi \frac{\alpha}{2^n} = \sigma\phi \frac{\alpha}{2^n} - 2\sigma\phi \frac{\alpha}{2^{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \epsilon\phi \frac{\alpha}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sigma\phi \frac{\alpha}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \sigma\phi \frac{\alpha}{2^{n-1}} \Rightarrow$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n} \epsilon\phi \frac{\alpha}{2^n} = f(n+1) - f(n),$$

$$\text{όπου } f(v) = \frac{1}{2^{v-1}} \sigma\phi \frac{\alpha}{2^{v-1}}.$$

Έπομένως θα είναι :

$$\sigma_v = f(v+1) - f(1) = \frac{1}{2^v} \sigma\phi \frac{\alpha}{2^v} - \frac{1}{2^0} \sigma\phi \frac{\alpha}{2^0} = \frac{1}{2^v} \sigma\phi \frac{\alpha}{2^v} - \sigma\phi\alpha =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2^v} \cdot \frac{\frac{1}{2^v}}{\eta\mu \frac{\alpha}{2^v}} - \sigma\phi\alpha = \frac{1}{\alpha} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2^v} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^v}}{\eta\mu \frac{\alpha}{2^v}} - \sigma\phi\alpha.$$

$$\text{Είναι : } \lim_{v \rightarrow +\infty} \sigma_v = \frac{1}{\alpha} \lim_{v \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2^v} \cdot \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha}{2^v}}{\eta\mu \frac{\alpha}{2^v}} - \sigma\phi\alpha =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sigma\upsilon\nu 0.1 - \sigma\phi\alpha = \frac{1}{\alpha} - \sigma\phi\alpha$$

$$(\text{είναι γνωστόν ότι : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\chi}{\eta\mu\chi} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1 \text{ και } \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2^v} = 0).$$

Άρα, το άθροισμα της σειράς είναι $\frac{1}{\alpha} - \sigma\phi\alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Αν $\alpha > 0$, να βρεθεί το άθροισμα της σειράς :

$$\sum_{v=1}^{\infty} \text{Τοξ}\epsilon\phi \frac{\alpha}{1 + v(v+1)\alpha^2}.$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι (βλ. Κεφ. V, Παραδ. 2) :

$$\text{Αν } \chi, \psi > 0 \Rightarrow \text{Τοξ}\epsilon\phi\chi - \text{Τοξ}\epsilon\phi\psi = \text{Τοξ}\epsilon\phi \frac{\chi - \psi}{1 + \chi\psi} \quad (1).$$

Είναι : $\nu\alpha > 0$ και $(\nu+1)\alpha > 0$, για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, γιατί $\alpha > 0$. Έπομένως από την (1) με $\chi = (\nu+1)\alpha$ και $\psi = \nu\alpha$, έχουμε :

$$\text{Τοξ}\epsilon\phi(\nu+1)\alpha - \text{Τοξ}\epsilon\phi\nu\alpha = \text{Τοξ}\epsilon\phi \frac{(\nu+1)\alpha - \nu\alpha}{1 + \nu(\nu+1)\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{Τοξ}\epsilon\phi(\nu+1)\alpha - \text{Τοξ}\epsilon\phi\nu\alpha = \text{Τοξ}\epsilon\phi \frac{\alpha}{1 + \nu(\nu+1)\alpha^2} \quad (2)$$

Ο νιοστός όρος της σειράς είναι :

$$\alpha_n = \text{Τοξεφ} \frac{\alpha}{1 + n(n+1)\alpha^2} = \text{Τοξεφ} (n+1)\alpha - \text{Τοξεφ} n\alpha = f(n+1) - f(n),$$

όπου $f(n) = \text{Τοξεφ} n\alpha$.

Έπομένως, έχουμε: $\sigma_n = (fn+1) - f(1) = \text{Τοξεφ}(n+1)\alpha - \text{Τοξεφ}\alpha$.

*Αρα σύμφωνα και με την (1) προκύπτει:

$$\sigma_n = \text{Τοξεφ} \frac{(n+1)\alpha - \alpha}{1 + (n+1)\alpha^2} = \text{Τοξεφ} \frac{n\alpha}{n\alpha^2 + 1 + \alpha^2} = \text{Τοξεφ} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{1+\alpha^2}{n}}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Τοξεφ} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{1+\alpha^2}{n}} = \text{Τοξεφ} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{1+\alpha^2}{n}} \right) = \\ &= \text{Τοξεφ} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 0} = \text{Τοξεφ} \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

*Αρα, το άθροισμα της σειράς είναι $\text{Τοξεφ} \frac{1}{\alpha}$, δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Τοξεφ} \frac{\alpha}{1 + n(n+1)\alpha^2} = \text{Τοξεφ} \frac{1}{\alpha}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115) Νά βρεθεί το άθροισμα της σειράς: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$

116) Νά βρεθεί το άθροισμα της σειράς: $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Τοξσφ}(1 + n + n^2)$

(Υπόδειξη: *Αν $\chi, \psi > 0 \Rightarrow \text{Τοξσφ}\psi - \text{Τοσφ}\chi = \text{Τοξσφ} \frac{\chi\psi + 1}{\chi - \psi}$)

117) Νά δείξετε ότι το άθροισμα της σειράς: $\sum_{n=1}^{\infty} \eta\mu \frac{\alpha}{3^n} \text{τεμ} \frac{\alpha}{3^{n-1}}$ είναι 0.

118) Νά βρεθούν τα άθροισματα τῶν παρακάτω σειρῶν:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \text{εφ} \frac{\alpha}{2^n} \right)^2$ β) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{εφ} \frac{\alpha}{2^n} \text{τεμ} \frac{\alpha}{2^{n-1}}$ γ) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \text{εφ}^2 \frac{\alpha}{2^n} \text{εφ} \frac{\alpha}{2^{n-1}}$

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Όρισμοί και βασικές έννοιες	σελ.	5
2. Θεμελιώδεις τριγωνομετρικές εξισώσεις	»	6
2.1. Επίλυση της τριγωνομετρικής εξίσωσης $\eta\mu\chi = \alpha$	»	6
2.2. » » » » $\sigma\upsilon\nu\chi = \lambda$	»	8
2.3. » » » » $\epsilon\phi\chi = \lambda$	»	9
2.4. » » » » $\sigma\phi\chi = \lambda$	»	9
3. Τριγωνομετρικές εξισώσεις που ανάγονται σε θεμελιώδεις		
3.1. Τριγωνομετρική εξίσωση αλγεβρικής μορφής	»	10
3.2. Τριγωνομετρικές εξισώσεις με περισσότερα από ένα άγνωστα τόξα	»	14
3.3. Όμογενής τριγωνομετρική εξίσωση	»	15
3.4. Γραμμική τριγωνομετρική εξίσωση	»	17
3.5. Συμμετρική τριγωνομετρική εξίσωση	»	20
4. Τριγωνομετρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $a\chi^2 + b\chi + \gamma = 0$	»	22
Άσκησης	»	24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Βασικές έννοιες και όρισμοί		
2. Συστήματα με δυο άγνωστους	»	27
2.1. Ή μία εξίσωση του συστήματος είναι αλγεβρική	»	27
2.2. Συμμετρικά ως προς τα τόξα	»	36
2.3. Μια τουλάχιστον εξίσωση είναι θεμελιώδης	»	38
3. Συστήματα με τρεις άγνωστους	»	39
Άσκησης	»	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΑΛΟΙΦΗ

1. Ή έννοια της απαλοιφής — Άπαλείφουσα	»	43
Άσκησης	»	44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙV

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Όρισμοί και βασικές έννοιες	»	46
--------------------------------	---	----

2.	Θεμελιώδεις τριγωνομετρικές ανισώσεις	»	46
3.	Τριγωνομετρικές ανισώσεις πουλ ανάγονται σέ θεμελιώδεις	»	51
	Άσκήσεις	»	56

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.	Όρισμοι καί βασικές έννοιες	»	57
1.1.	Ή συνάρτηση Τοξημ	»	57
1.2.	Ή συνάρτηση Τοξσυν	»	60
1.3.	Οί συναρτήσεις Τοξεφ καί Τοξσφ	»	61
1.4.	Γραφική παράσταση τών αντίστροφων κυκλικών συναρτήσεων	»	64
	Άσκήσεις	»	71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ — ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1.	Σχέσεις μεταξύ τών κύριων στοιχείων ενός τριγώνου	»	73
1.1.	Συμβολισμοί — Τριγωνική ιδιότητα	»	73
1.2.	Θεμελιώδεις ομάδες τύπων	»	73
1.3.	Τύποι του Mollweide	»	74
1.4.	Τριγωνομετρικοί ἄριθμοι τών μισών γωνιών τριγώνου ὡς συνάρτηση τών πλευρῶν του	»	75
1.5.	Τύποι του ἔμβαδου τριγώνου	»	75
1.6.	Ή ἀκτίνα R ὡς συνάρτηση τών πλευρῶν του τριγώνου	»	75
2.	Κλασικές ἐπιλύσεις	»	75
3.	Τοπογραφικές ἐφαρμογές	»	83
	Άσκήσεις	»	85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ — ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1.	Δευτερεύοντα στοιχεῖα τριγώνου	»	86
1.1.	Ύψη τριγώνου	»	86
1.2.	Άκτίνα του ἐγγεγραμμένου σέ τριγώνου κύκλου	»	87
1.3.	Άκτίνα του παρεγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου	»	88
1.4.	Ἐσωτερική διχοτόμος τριγώνου	»	89
1.5.	Ἐξωτερική διχοτόμος τριγώνου	»	90
1.6.	Διάμεσος τριγώνου	»	91
1.7.	Χρήσιμη παρατήρηση	»	93
	Άσκήσεις	»	93
2.	Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τριγώνου	»	96
2.1.	Όρισμοι καί βασικές έννοιες	»	96
2.2.	Παρατηρήσεις	»	96
2.3.	Βασική ἐπίλυση	»	97
2.4.	Περίπτώσεις ἐπιλύσεων τριγώνου	»	98
2.5.	Ἐπίλυση ὀρθογώνιου τριγώνου	»	103
	Άσκήσεις	»	105

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

1.	Κυρτό τετράπλευρο	»	107
1.2.	Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων τετραπλεύρου	»	107
1.3.	Κυρτό τετράπλευρο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο	»	110
	Ἀσκήσεις	»	111
2.	Ἐπίλυση τετραπλεύρου	»	112
	Ἀσκήσεις	»	114

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

1.	Ὅρισμοί καὶ βασικὲς ἔννοιες	»	115
	Ἀσκήσεις	»	119
	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	»	121

Τά αντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τό κάτωθι βιβλιοσσημο γιά ἀπόδειξη τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπο στερούμενο τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπο. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιοῦν αὐτό διώκεται κατὰ τίς διατάξεις τοῦ ἀρθροῦ 7 τοῦ Νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α' 108).

