

## ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2017 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

**ΘΕΜΑ 1ο.** (2) Εστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  η συνάρτηση με

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{όταν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι διαφορίσιμη στο σημείο  $(0, 0)$ .

(β) Να αποδειχθεί ότι το όριο  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  δεν υπάρχει.

(γ) Είναι η  $f$  συνεχώς διαφορίσιμη στο  $\mathbb{R}^2$ ;

**ΘΕΜΑ 2ο.** (1) Εστω  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  μια διαφορίσιμη συνάρτηση και  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  η συνάρτηση με τύπο

$$h(r, \phi, z) = f(r \cos \phi, r \sin \phi, z).$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial \phi}, \frac{\partial h}{\partial z}$  της  $h$  (σε κάθε σημείο) συναρτήσει των μερικών παραγώγων της  $f$ .

**ΘΕΜΑ 3ο.** (2) Να ευρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z$$

στο κλειστό και φραγμένο σύνολο  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ .

**ΘΕΜΑ 4ο.** (1,5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_B (x^2 + y^2) dx dy$ , όπου  $B$  είναι το τετράγωνο στο  $\mathbb{R}^2$  με κορυφές τα σημεία  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  και  $(0, -1)$ .

**ΘΕΜΑ 5ο.** (1,5) Αν  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 2x, \quad y \geq 0\}$ , να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B xy dx dy.$$

**ΘΕΜΑ 6ο.** (2) Αν  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 1\}$ , να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$