ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ — ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστούν όλες οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της f στο σημείο $(0,0)$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$.

ΘΕΜΑ 2ο. (1,5) Εστω οτι $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση για την οποία $Df(0,0,0) = (-1,1,1)$. Αν $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$h(x,y,z) = f(x + 2y - z, -x + 3y + z, x - y + z),$$

να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της h στο σημείο $(0,0,0)$.

ΘΕΜΑ 3ο. (1) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικού μεγίστου, τοπικού ελαχίστου, καθώς και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

ΘΕΜΑ 4ο. (1,5) Να ευρεθεί η μέγιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση $f(x,y,z) = xy + z^2$ στην μοναδιαία σραίρα $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ και η μέγιστη τιμή που παίρνει στην μοναδιαία κλειστή μπάλλα $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

ΘΕΜΑ 5ο. (1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_B (2x + y)\,dxdy$, όπου B είναι το τρίγωνο στο $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(-1,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 6ο. (1,5) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq e^z, \quad 0 \leq z \leq 1\}.$$

ΘΕΜΑ 7ο. (1,5) Αν

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq 3(x^2 + y^2), \quad z \geq 0\},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K z\,dxdydz.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ