Η ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΠΟΨΗ ΤΗΣ ΑΛΥΣΩΤΗΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος
Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 71409 Ηράκλειο

1. Εισαγωγή

Ενα μέρος της δραστηριότητας τών ερευνητών του κλάδου των Δυναμικών Συστημάτων αποτελείται από την μελέτη παραστάσεων σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Οι παραστάσεις αυτές συχνά παράγουν στην οθόνη του υπολογιστή θολές εικόνες. Το βασικό ερώτημα που ανακύπτει είναι πιά σχέση έχουν οι εικόνες αυτές με την πραγματικότητα. Στις αρχές της δεκαετίας του ′70 οι R. Bowen και C. Conley πρότειναν ως εννοιολογικό εργαλείο για μια πιθανή προσέγγιση του ερωτήματος αυτού την έννοια της ψευδοτροχιάς ή (ϵ, T)-αλυσίδας. Η έννοια αυτή οδήγησε στην έννοια της αλυσωτής επαναφοράς μέσω της οποίας έγινε απλούστερη η διατύπωση πολλών γνωστών προτάσεων. Η αλυσωτή επαναφορά είναι η πιο γενική έννοια επαναφοράς που υπάρχει και γενικεύει γνήσια την έννοια της γενικευμένης επαναφοράς του J. Auslander.

Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε με βάση την έννοια της αλυσωτής επαναφοράς μια ολική περιγραφή ενός δυναμικού συστήματος σ′ έναν συμπαγή μετρικό χώρο ανάλογη μ′ εκείνην ενός gradient διανυσματικού πεδίου σε μια πολλαπλότητα, που οφείλεται στον C.Conley. Ετσι η μελέτη της δομής ενός δυναμικού συστήματος ανάγεται σε τρία μέρη :

(α) στο gradient-like μέρος,
(β) στο αλυσωτά επαναφερόμενο μέρος και
(γ) στην μελέτη της αλληλεπίδρασης των δύο αυτών μερών.

2. Αλυσωτή επαναφορά

Ενα συνεχές δυναμικό σύστημα ή ροή σ′ έναν τοπολογικό χώρο X, που λέγεται χώρος φάσεων, είναι μια δράση της προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών επί του X και ορίζεται από μια συνεχή συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) $\phi(0, x) = x$ για κάθε $x \in X$ και
(β) $\phi(t + s, x) = \phi(t, (\phi(s, x))$ για κάθε $t,\ s \in \mathbb{R}$ και $x \in X$.

Συνήθως χρησιμοποιούμε τον βολικό συμβολισμό $\phi(t, x) = tx$ και $\phi(I \times A) = IA$, όταν $I \subset \mathbb{R}$ και $A \subset X$. Η ϕ ορίζει την συνεχή μονοπαραμετρική ομάδα ομοιομορφισμών ϕ_t : $X \to X$ με $\phi_t(x) = tx$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$. Η τροχιά του σημείου $x \in X$ είναι το σύνολο $C(x) = \{tx : t \in \mathbb{R}\}$ και η θετική ημιτροχιά το $C^+(x) = \{tx : t \geq 0\}$. Το σύνολο

$$L^+(x) = \{y \in X : t_n x \to y \text{ για κάποια } t_n \to +\infty\}$$

λέγεται θετικό οριακό σύνολο του x. Αντίστοιχα ορίζεται το αρνητικό οριακό σύνολο $L^-(x)$. Τα οριακά σύνολα εξαρτώνται μόνον από τις τροχιές και είναι κλειστά και αμετάβλητα.

Σε όσα θ′ ακολουθήσουν υποθέτουμε πάντα ότι ο X είναι ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και η d μια μετρική που ορίζει την τοπολογία του.

2.1. Ορισμός. Εστω x, $y \in X$ και ϵ, $T > 0$. Μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το x στο y είναι ένα ζεύγος πεπερασμένων συνόλων σημείων του X και χρόνων $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ ώστε $x = x_0$, $y = x_{p+1}$, $t_i \geq T$ και $d(t_i x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ για κάθε $i = 0, 1, ..., p$.

Στον X θεωρούμε την διμελή σχέση P έτσι ώστε xPy όταν για κάθε $\epsilon, T > 0$ υπάρχει (ϵ, T)-αλυσίδα από το x στο y. Επειδή ο X υποτίθεται συμπαγής, από το λήμμα του Lebesgue προκύπτει ότι η P δεν εξαρτάται από την μετρική d αλλά μόνον από την τοπολογία του X. Πράγματι, έστω a μια άλλη μετρική που ορίζει την τοπολογία του X και Q η αντίστοιχη διμελής σχέση που παίρνουμε, αν στην θέση της d χρησιμοποιήσουμε την a. Εστω $\epsilon, T > 0$. Οι ανοιχτές d-μπάλλες $S_d(x, \epsilon/2)$, $x \in X$, αποτελούν ανοιχτό κάλυμα του (X, a). Από το λήμμα του Lebesgue, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε κάθε ανοιχτή a-μπάλλα ακτίνας δ περιέχεται σ′ ένα στοιχείο του καλύματος αυτού. Αν τώρα x, $y \in Q$, υπάρχει μια (δ, T)-αλυσίδα $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ ως προς την μετρική a. Για κάθε $i = 0, 1, ..., p$, υπάρχει κάποιο $z_i \in X$ ώστε $S_a(x_{i+1}, \delta) \subset S_d(z_i, \epsilon/2)$. Ετσι έχουμε $d(t_i x_i, x_{i+1}) < d(t_i x_i, z_i) + d(z_i, x_{i+1}) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Συνεπώς η $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ είναι (ϵ, T)-αλυσίδα ως προς την μετρική d. Αυτό δείχνει οτι $Q \subset P$ και όμοια $P \subset Q$.

2.2. Λήμμα. *Η διμελής σχέση P είναι μεταβατική, κλειστό και αμετάβλητο υποσύνολο του $X \times X$ ως προς την δράση γινόμενο.*

Απόδειξη. Η μεταβατικότητα της P είναι προφανής. Εστω $(x, y) \in \overline{P}$ και ϵ, $T > 0$. Από την συνέχεια της ροής, υπάρχουν $(z, w) \in P$, ώστε $d(Tx, Tz) < \epsilon/2$ και $d(y, w) < \epsilon/2$. Η $(x, Tz|T)$ είναι μια (ϵ, T)-αλυσίδα. Υπάρχει και μια $(\epsilon/2, 2T)$-αλυσίδα $(z_0, ..., z_{p+1}|s_0, ..., s_p)$ από το z στο w. Η $(Tz, z_1, ..., z_p|s_0 - T, s_1, ..., s_{p-1})$ είναι μια $(\epsilon/2, T)$-αλυσίδα από το Tz στο z_p. Απ′ την άλλη μεριά, η $(z_p, y|s_p)$ είναι μια (ϵ, T)-αλυσίδα. Είναι τώρα φανερό οτι υπάρχει μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το x στο y, δηλαδή $(x, y) \in P$. Αυτό δείχνει την κλειστότητα του P.

Η αμεταβλητότητα του P σημαίνει οτι αν $(x, y) \in P$ και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε $(tx, sy) \in P$. Εστω ϵ, $T > 0$ και $R > \max\{T, T - s, T + t\}$. Λόγω της συνέχειας υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(sy, sz) < \epsilon$, όταν $d(y, z) < \delta$. Αφού $(x, y) \in P$, υπάρχει μια (δ, R)-αλυσίδα $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ από το x στο y. Τότε έχουμε $d((t_p + s)x_p, sy) < \epsilon$ και $t_p + s > T$. Είναι φανερό τώρα οτι η $(tx, x_1, ..., x_p, sy|t_0 - t, t_1, ..., t_p + s)$ είναι μια (ϵ, T)-αλυσίδα.

2.3. Ορισμός. Ενα σημείο $x \in X$ λέγεται αλυσωτά επαναφερώμενο αν $(x, x) \in P$. Το σύνολο των αλυσωτά επαναφερωμένων σημείων, που θα συμβολίζουμε στην συνέχεια με $R(\phi)$, είναι κλειστό και αμετάβλητο, από το Λήμμα 2.2.

Στο $R(\phi)$ ορίζεται η ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας : $x \sim y$ τότε και μόνον τότε όταν $(x, y) \in P$ και $(y, x) \in P$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας λέγονται αλυσωτές συνιστώσες και είναι κλειστά και αμετάβλητα υποσύνολα του $R(\phi)$, από το Λήμμα 2.2.

2.4. Πρόταση. *Κάθε συνεκτική συνιστώσα του $R(\phi)$ περιέχεται σε μια αλυσωτή συνιστώσα.*

Απόδειξη. Εστω Y μια συνεκτική συνιστώσα του $R(\phi)$ και x, $y \in Y$. Εστω ϵ, $T > 0$. Επειδή ο Y είναι συνεκτικός μετρικός χώρος, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $\{x_0, ...x_{p+1}\} \subset Y$ με $x = x_0$, $y = x_{p+1}$ και $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon/2$ για $i = 0, 1, ..., p$. Αφού $x_i \in R(\phi)$, υπάρχει $(\epsilon/2, T)$-αλυσίδα $(z_{i,0}, ..., z_{i,p_i+1}|t_{i,0}, ..., t_{i,p_i})$ από το x_i στο x_i. Τότε η $(z_{i,0}, ..., z_{i,p_i}, x_{i+1}|t_{i,0}, ..., t_{i,p_i})$

είναι μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το x_i στο x_{i+1}. Είναι φανερό τώρα οτι υπάρχει μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το x στο y. Ομοια υπάρχει μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το y στο x.

Το υπόλοιπο της παρούσας παραγράφου είναι αφιερωμένο στην απόδειξη του γεγονότος οτι οι συνεκτικές συνιστώσες του $R(\phi)$ ταυτιζονται με τις αλυσωτές συνιστώσες. Γι αυτό θα χρειαστούμε μια τεχνική πρόταση.

2.5. Λήμμα. *Για κάθε $T > 0$ υπάρχει μια (όχι συνεχής) συνάρτηση $h : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, που εξαρτάται από το T, τέτοια ώστε :*

(α) Για κάθε $\epsilon > 0$ και x, $y \in X$, $t \in [0, 2T]$ με $d(x, y) < h(\epsilon)$ ισχύει $d(tx, ty) < \epsilon/4$.

(β) $h^k < h^{k-1}/2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου $h^k = h \circ ... \circ h$, k φορές.

(γ) Αν $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ είναι μια $(h^p(\epsilon), T)$-αλυσίδα και $t_i \in [0, 2T]$ για κάθε $i = 0, 1, ..., p$, τότε $d(t_p x_p, (t_0 + ... + t_p)x_0) < \epsilon/2$.

Απόδειξη. Επειδή ο X είναι συμπαγής, λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $0 < h(\epsilon) < \epsilon/2$ ώστε $d(tx, ty) < \epsilon/4$, όταν $t \in [0, 2T]$ και $d(x, y) < h(\epsilon)$. Από το αξίωμα της επιλογής υπάρχει η συνάρτηση h. Τα (α) και (β) είναι προφανή. Θα αποδείξουμε το (γ) με επαγωγή στο p. Για $p = 0, 1$ είναι προφανές. Εστω οτι το (γ) ισχύει για το p και $(x_0, ..., x_{p+2}|t_0, ..., t_{p+1})$ είναι μια $(h^{p+1}(\epsilon), T)$-αλυσίδα με $t_i \in [0, 2T]$ για κάθε $i = 0, 1, ..., p + 1$. Η $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ είναι $h^p(h(\epsilon)), T)$-αλυσίδα και από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε

$$d(t_p x_p, (t_0 + ... + t_p)x_0) < h^p(h(\epsilon)) < \frac{h(\epsilon)}{2} < h(\epsilon).$$

Από το (α) προκύπτει οτι $d((t_p + t_{p+1})x_p, (t_0 + ... + t_{p+1})x_0) < \epsilon/4$. Αφού όμως $d(t_p x_p, x_{p+1}) < h^{p+1}(\epsilon) < h(\epsilon)$, προκύπτει οτι $d((t_p + t_{p+1})x_p, t_{p+1}x_{p+1}) < \epsilon/4$. Αρα $d(t_{p+1}x_{p+1}, (t_0, ..., t_{p+1})x_0) < \epsilon/2$.

2.6. Πρόταση. *Εστω x, $y \in R(\phi)$ και $T_0 > 0$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :*

(α) $x \sim y$.

(β) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια (ϵ, T_0)-αλυσίδα από το x στο x μέσω του y.

Απόδειξη. Εστω οτι ισχύει το (β) και ϵ, $T > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T \leq nT_0$. Από την υπόθεση υπάρχουν $(h^n(\epsilon), T_0)$-αλυσίδες από το x στο y και τανάπαλιν, όπου h είναι η συνάρτηση του Λήμματος 2.5. Εστω $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ μια $(h^n(\epsilon), T_0)$-αλυσίδα από το x στο y. Μπορούμε να υποθεσουμε οτι $1 + p = kn$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και $t_i \in [T_0, 2T_0]$ για κάθε $i = 0, 1, ..., p$. Από το Λήμμα 2.5 έχουμε $d(t_{n-1}x_{n-1}, (t_0 + ... + t_{n-1})x_0) < \epsilon/2$ και $d(t_{n-1}x_{n-1}, x_n) < h^n(\epsilon) < \epsilon/2$. Αρα $d(x_n, (t_0 + ... + t_{n-1})x_0) < \epsilon$ και συνεπώς η $(x_0, x_n|t_0 + ... + t_{n-1})$ είναι (ϵ, T)-αλυσίδα από το $x = x_0$ στο x_n. Ομοια για κάθε $i = 0, 1, ..., k - 1$ η $(x_{in}, x_{(i+1)n}|t_{in}, ..., t_{(i+1)n-1})$ είναι (ϵ, T)-αλυσίδα. Αρα η

$$(x_0, x_n, x_{2n}, ..., x_{kn}|t_0 + ... + t_{n-1}, t_n + ... + t_{2n-1}, ..., t_{(k-1)n} + ... + t_{kn-1})$$

είναι μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το $x_0 = x$ στο $x_{kn} = x_{p+1} = y$. Ομοια βρίσκουμε μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το y στο x.

2.7. Πόρισμα. *Αν $x \in X$, τότε $x \in R(\phi)$ ακριβώς τότε όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια $(\epsilon, 1)$-αλυσίδα από το x στο x.*

Πριν προχωρήσουμε, είναι αναγκαίο να υπενθυμίσουμε την μετρική Hausdorff. Στο σύνολο $F(X)$ όλων των μη-κενών, συμπαγών υποσυνόλων του X ορίζεται η μετρική r με τύπο

$$r(A,B) = \max\{\sup\{d(x,B) : x \in A\}, \sup\{d(y,A) : y \in B\}\}, \quad A, B \in F(X)$$

Ο μετρικός χώρος $(F(X), r)$ είναι συμπαγής.

2.8. Θεώρημα. *Αν Y είναι μια αλυσωτή συνιστώσα, τότε για κάθε x, $y \in Y$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει μια $(\epsilon, 1)$-αλυσίδα στο Y από το x στο x μέσω του y.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια $(1/n, 1)$-αλυσίδα $(x_{n,0}, ..., x_{n,p_n+1}|t_{n,0}, ..., t_{n,p_n})$ από το x στο x ώστε $y = x_{n,j_n}$ για κάποιο $0 \leq j_n \leq p_n$ και $t_i \in [1,2]$ για κάθε $i = 0, 1, ..., p$. Επειδή ο $(F(X), r)$ είναι συμπαγής, υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $\varnothing \neq C \subset X$, ώστε το 0 να είναι οριακό σημείο της ακολουθίας $\{r(C_n, C) : n \in \mathbb{N}\}$, όπου $C_n = \{x_{n,0}, ..., x_{n,p_n}\}$. Προφανώς x, $y \in C$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $z \in C$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει μια $(\epsilon, 1)$-αλυσίδα από το z στο z μέσω του x, τα σημεία της οποίας περιέχονται στο C.

Απόδειξη. Επειδή η ροή ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,2] \times X$, υπάρχει $0 < \delta < \epsilon/3$ ώστε $d(tv, tw) < \epsilon/3$, όταν $t \in [0,2]$ και $d(v,w) < \delta$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \epsilon/3$ και $r(C_n, C) < \delta$. Ετσι για κάθε $x_{n,i} \in C_n$ υπάρχει $z_i \in C$ ώστε $d(x_{n,i}, z_i) < \delta$, $i = 0, 1, ..., p_n$. Εχουμε λοιπόν

$$d(t_{n,i}z_i, z_{i+1}) \leq d(t_{n,i}z_i, t_{n,i}x_{n,i}) + d(t_{n,i}x_{n,i}, x_{n,i+1}) + d(x_{n,i+1}, z_{i+1}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{n} + \delta < \epsilon.$$

Από την άλλη μεριά, υπάρχει $0 \leq i_0 \leq p_n$ ώστε $d(x_{n,i_0}, z) < \delta$. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $z_{i_0} = z$ και $z_0 = x$. Είναι τώρα φανερό οτι η

$$(z, z_{i_0+1}, ..., z_{p_n+1} = x = z_0, ..., z_{i_0-1}, z|t_{n,i_0}, ..., t_{n,p_n}, t_{n,0}, ..., t_{n,i_0-1})$$

είναι μια $(\epsilon, 1)$-αλυσίδα από το z στο z μέσω του x που τα σημεία της περιέχονται στο C.

Προκύπτει αμέσως από τον ισχυρισμό οτι $C \subset Y$ και επιπλέον $x \sim z$ για κάθε $z \in C$ ως προς το περιορισμένο δυναμικό σύστημα στο Y. Ειδικά αυτό ισχύει για $z = y$ πράγμα που αποδεικνύει το θεώρημα.

2.9. Πόρισμα. $R(\phi|R(\phi)) = R(\phi)$.

2.10. Θεώρημα. *Κάθε συνεκτική συνιστώσα του $R(\phi)$ ταυτίζεται με μια αλυσωτή συνιστώσα.*

Απόδειξη. Λόγω της πρότασης 2.4 αρκεί να δείξουμε οτι κάθε αλυσωτή συνιστώσα Y είναι συνεκτικό σύνολο. Εστω U, V δύο ανοιχτά υποσύνολα του X ώστε $Y \subset U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$, $U \cap Y \neq \varnothing$, $V \cap Y \neq \varnothing$. Επειδή το Y είναι συμπαγές, αμετάβλητο και οι τροχιές είναι συνεκτικά σύνολα, τα $U \cap Y$, $V \cap Y$ είναι συμπαγή και αμετάβλητα. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(U \cap Y, \delta) \cap V \cap Y = \varnothing$. Εστω $x \in U \cap Y$ και $y \in V \cap Y$. Από το θεώρημα 2.8 υπάρχει μια $(\delta, 1)$-αλυσίδα $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ από το x στο y που περιέχεται στο Y. Ετσι έχουμε

$t_0x_0 = t_0x \in U \cap Y$ και $d(t_0x_0, x_1) < \delta$. Συνεπώς $x_1 \in S(U \cap Y, \delta) = U \cap Y$. Ομοια $x_2 \in U \cap Y$ και επαγωγικά $y = x_{p+1} \in U \cap Y$, που είναι αντίφαση.

2.11. Πόρισμα. *Το περιορισμένο δυναμικό σύστημα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $R(\phi)$ είναι αλυσωτά επαναφερώμενο.*

3. Η gradient δομή των δυναμικών συστημάτων

Εστω M μια συμπαγής C^∞ πολλαπλότητα Riemann και $f : M \to \mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση. Τότε ορίζεται το gradient διανυσματικό πεδίο ∇f της f. Παραδοσιακά συνήθως θεωρούμε το $-\nabla f$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι σημειακές τροχιές της ροής του $-\nabla f$. Ολες οι άλλες τροχιές είναι ομοιομορφικές με $\mathbb{R}$ και η f είναι γνήσια φθίνουσα κατά μήκος αυτών.

3.1. Πρόταση. *Το σύνολο των σημείων αλυσωτής επαναφοράς της ροής του $-\nabla f$ ταυτίζεται με το σύνολο των κρίσιμων σημείων της f.*

Απόδειξη. Εστω $x \in M$ ένα αλυσωτά επαναφερώμενο σημείο. Υποθέτουμε οτι $\nabla f(x) \neq 0$ και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Επειδή η f είναι γνήσια φθίνουσα κατά μήκος της τροχιάς $C(x)$, το $f(C(x))$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Ετσι το θεώρημα του Sard μας επιτρέπει να υποθέσουμε οτι το $a = f(x)$ είναι κανονική τιμή της f. Συνεπώς το $f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της f και είναι συμπαγής C^∞ υποπολλαπλότητα της M συνδιαστάσεως 1. Επιπλέον, το $f^{-1}(a)$ είναι τοπική τομή της ροής και το $f^{-1}(-\infty, a]$ είναι θετικά αμετάβλητο. Θέτουμε $V = f^{-1}(-\infty, a)$. Τότε $t\overline{V} \subset V$ για κάθε $t > 0$. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $t > 0$. Επειδή το $t\overline{V}$ είναι συμπαγές και το V ανοιχτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S(t\overline{V}, \epsilon) \subset V$. Αν $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ είναι μια (ϵ, t)-αλυσίδα από το x στο x, τότε $d(t_0x_0, x_1) < \epsilon$ και $t_0x_0 = t_0x \in C^+(tx) \subset t\overline{V}$, αφού το $t\overline{V}$ είναι θετικά αμετάβλητο. Αρα $x_1 \in V$ και συνεπώς $t_1x_1 \in t_1\overline{V} \subset t\overline{V}$, ενώ $d(t_1x_1, x_2) < \epsilon$. Αρα $x_2 \in V$ και επαγωγικά έχουμε $x = x_{p+1} \in V$. Αυτό σημαίνει οτι $f(x) = a < f(x)$, που είναι αντίφαση.

Εστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, d μια μετρική που ορίζει την τοπολογία του X και ϕ μια ροή στον X. Στην παράγραφο αυτήν θα κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με ανάλογη συμπεριφορά πάνω στις τροχιές, όπως στην περίπτωση ενός gradient διανυσματικού πεδίου.

Για κάθε $x \in X$ ονομάζουμε το σύνολο $\Omega^+(x) = \{y \in X : (x, y) \in P\}$ θετικό ψευδοοριακό σύνολο του x. Ανάλογα το $\Omega^-(x) = \{y \in X : (y, x) \in P\}$ λέγεται αρνητικό ψευδοοριακό σύνολο του x. Τα $\Omega^\pm(x)$ είναι κλειστά και αμετάβλητα. Με την βοήθεια των ψευδοοριακών συνόλων θα περιγράψουμε το $R(\phi)$ σε σχέση με τα ασυμπτωτικά ευσταθή συμπαγή αμετάβλητα σύνολα.

3.2. Πρόταση. *Εστω $A \subset X$ ένα ασυμπτωτικά ευσταθές, συμπαγές, αμετάβλητο σύνολο και $x \in E^+(A)$, όπου $E^+(A) = \{z \in X : \varnothing \neq L^+(z) \subset A\}$ είναι το πεδίο έλξης του A. Τότε $\Omega^+(x) \subset A$.*

Απόδειξη. Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$, τέτοια ώστε $A = f^{-1}(0)$, $X \setminus E^+(A) = f^{-1}(1)$ και $f(tz) < f(z)$ για κάθε $z \in E^+(A) \setminus A$, $t > 0$. Τα σύνολα $V_n = f^{-1}[0, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, αποτελούν βάση περιοχών του A και είναι θετικά αμετάβλητα.

Αρκεί να δείξουμε οτι $\Omega^+(x) \subset V_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εστω $y \in \Omega^+(x)$. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $t > 0$. Τότε $t\overline{V}_n \subset V_n$. Αφού το $t\overline{V}_n$ είναι συμπαγές και το V_n ανοιχτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S(t\overline{V}_n, \epsilon) \subset V_n$. Αφού $x \in E^+(A)$, υπάρχει $T \geq t$ ώστε $Tx \in t\overline{V}_n$. Εστω $(x_0, ..., x_{p+1}|t_0, ..., t_p)$ μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το x στο y. Τότε $d(t_0x_0, x_1) < \epsilon$ και $t_0x_0 = t_0x \in C^+(Tx) \subset t\overline{V}_n$. Αρα $x_1 \in S(t\overline{V}_n, \epsilon) \subset V_n$ και συνεπώς $t_1x_1 \in t_1\overline{V}_n \subset t\overline{V}_n$ αφού $t_1 \geq T \geq t$. Επειδή $d(t_1x_1, x_2) < \epsilon$, με τον ίδιο τρόπο έχουμε $x_2 \in V_n$ και επαγωγικά $y = x_{p+1} \in V_n$.

Για κάθε $x \in X$, ϵ, $T > 0$ θεωρούμε το σύνολο,

$$\Omega^+(x, \epsilon, T) = \{y \in X : \text{ υπάρχει } (\epsilon, T)\text{-αλυσίδα από το } x \text{ στο } y\}.$$

Είναι προφανές οτι $\Omega^+(x) = \bigcap_{n,T>0} \Omega^+(x, 1/n, T)$. Το $\Omega^+(x, \epsilon, T)$ είναι μη-κενό λόγω της συμπάγειας και προφανώς ανοιχτό. Θεωρούμε επίσης το

$$\Lambda^+(x, \epsilon, T) = \{y \in X : t_nx_n \to y \text{ για κάποια } x_n \in \Omega^+(x, \epsilon, T) \text{ και } t_n \to +\infty\}$$

που είναι κλειστό και αμετάβλητο σύνολο.

3.3. Λήμμα. *Για κάθε $x \in X$ και ϵ, $T > 0$ ισχύουν τα ακόλουθα :*

(α) $T\overline{\Omega^+(x, \epsilon, T)} \subset \Omega^+(x, \epsilon, T)$.

(β) $\Lambda^+(x, \epsilon, T) \subset \Omega^+(x, \epsilon, T)$.

(γ) Το $\Lambda^+(x, \epsilon, T)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, $\Omega^+(x, \epsilon, T) \subset E^+(\Lambda^+(x, \epsilon, T))$ και το $\Lambda^+(x, \epsilon, T)$ είναι το μέγιστο κλειστό αμετάβλητο υποσύνολο του $\Omega^+(x, \epsilon, T)$.

Απόδειξη. (α) Εστω $y \in T\overline{\Omega^+(x, \epsilon, T)} = \overline{T\Omega^+(x, \epsilon, T)}$. Τότε υπάρχει $z \in \Omega^+(x, \epsilon, T)$ ώστε $d(y, Tz) < \epsilon$. Συνεπώς η $(z, y|T)$ είναι μια (ϵ, T)-αλυσίδα από το z στο y. Από την μεταβατικότητα έχουμε $y \in \Omega^+(x, \epsilon, T)$.

(β) Εστω $y \in \Lambda^+(x, \epsilon, T)$, δηλαδή υπάρχουν $x_n \in \Omega^+(x, \epsilon, T)$, $n \in \mathbb{N}$, και $t_n \to +\infty$ ώστε $t_nx_n \to y$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(t_nx_n, y) < \epsilon$ και $t_n \geq 2T$ για κάθε $n \geq n_0$. Από το (α) έχουμε $Tx_n \in \Omega^+(x, \epsilon, T)$. Η $(Tx_n, y|t_n - T)$ είναι (ϵ, T)-αλυσίδα από το Tx_n στο y. Αρα $y \in \Omega^+(x, \epsilon, T)$.

(γ) Αν το $\Lambda^+(x, \epsilon, T)$ δεν ήταν ευσταθές, τότε λόγω της συμπάγειας του X θα υπήρχαν $y \in \Lambda^+(x, \epsilon, T)$, $z \in X \setminus \Lambda^+(x, \epsilon, T)$, $y_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ και $t_n \to +\infty$ ώστε $y_n \to y$ και $t_ny_n \to z$. Επειδή το $\Omega^+(x, \epsilon, T)$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\Lambda^+(x, \epsilon, T)$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_n \in \Omega^+(x, \epsilon, T)$ για κάθε $n \geq n_0$. Εξ ορισμού λοιπόν $z \in \Lambda^+(x, \epsilon, T)$. Αυτή η αντίφαση δείχνει οτι το $\Lambda^+(x, \epsilon, T)$ είναι ευσταθές. Είναι άμεσο από τους ορισμούς επίσης οτι $L^+(y) \subset \Lambda^+(x, \epsilon, T)$ για κάθε $y \in \Omega^+(x, \epsilon, T)$. Αυτά δείχνουν οτι το $\Lambda^+(x, \epsilon, T)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και $\Omega^+(x, \epsilon, T) \subset E^+(\Lambda^+(x, \epsilon, T))$. Τέλος, αν $I \subset \Omega^+(x, \epsilon, T)$ είναι ένα κλειστό αμετάβλητο σύνολο και $y \in I$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $z \in L^-(y)$, λόγω της συμπάγειας του X. Συνεπώς, $y \in \Omega^+(z) \subset \Lambda^+(x, \epsilon, T)$ από την πρόταση 3.2. Αρα $I \subset \Lambda^+(x, \epsilon, T)$.

3.4. Θεώρημα. *Για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$\Omega^+(x) = \bigcap \{A \subset X : A \textit{ ασυμπτωτικά ευσταθές συμπαγές αμετάβλητο και } x \in E^+(A)\}.$$

Απόδειξη. Από το λήμμα 3.3 προκύπτει οτι $\Omega^+(x) \subset \Lambda^+(x,\epsilon,T)$ για κάθε ϵ, $T > 0$, αφού το $\Omega^+(x)$ είναι κλειστό και αμετάβλητο υποσύνολο του $\Omega^+(x,\epsilon,T)$. Επιπλέον από την πρόταση 3.2 έχουμε

$$\Omega^+(x) \subset \bigcap\{A \subset X : A \text{ ασυμπτωτικά ευσταθές συμπαγές αμετάβλητο και } x \in E^+(A)\}$$

$$= \bigcap\{A \subset X : A \text{ ασυμπτωτικά ευσταθές συμπαγές αμετάβλητο και } \Omega^+(x) \subset A\}$$

$$\subset \bigcap_{n,T>0} \Lambda^+(x,1/n,T) \subset \bigcap_{n,T>0} \Omega^+(x,1/n,T) = \Omega^+(x).$$

Από το θεώρημα 3.4 έχουμε ειδικά οτι αν $x \in R(\phi)$, τότε

$$\Omega^+(x) = \bigcap\{A \subset X : A \text{ ασυμπτωτικά ευσταθές συμπαγές αμετάβλητο και } x \in A\}.$$

3.5. Θεώρημα. *Για κάθε ροή ϕ στον συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο X ισχύει*

$$R(\phi) = \bigcap\{A \cup A^* : A \text{ ασυμπτωτικά ευσταθές συμπαγές αμετάβλητο και } A^* = X \setminus E^+(A)\}.$$

Απόδειξη. Αν $x \in R(\phi)$, τότε $x \in \Omega^+(x)$ και συνεπώς $x \in A$ για κάθε ασυμπτωτικά ευσταθές, συμπαγές, αμετάβλητο σύνολο A με $x \in E^+(A)$. Αρα $x \in A \cup A^*$. Το αντίστροφο είναι προφανές.

3.6. Λήμμα. *Μια ροή σ′ έναν συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο X έχει το πολύ αριθμήσιμα ασυμπτωτικά ευσταθή, συμπαγή, αμετάβλητα σύνολα.*

Απόδειξη. Επειδή ο X είναι συμπαγής, το σύνολο $F(X)$ όλων των μη-κενών συμπαγών υποσυνόλων του X με την μετρική Hausdorff r γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος. Το ίδιο είναι και ο χώρος γινόμενο $F(X) \times F(X)$. Εστω A ένα ασυμπτωτικά ευσταθές, συμπαγές, αμετάβλητο σύνολο και $A^* = X \setminus E^+(A)$. Υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S(A,\epsilon) \cap S(A^*,\epsilon) = \varnothing$ και συνεπώς $S(A,\epsilon) \subset E^+(A)$. Εστω τώρα $B \in S_r(A,\epsilon)$. Τότε $B \subset S(A,\epsilon)$. Αν το B είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και αμετάβλητο, τότε $B \subset A$. Αν επιπλέον $B \neq A$, τότε $B^* \cap A \neq \varnothing$ και συνεπώς $B^* \notin S_r(A^*,\epsilon)$. Αυτό δείχνει οτι η ανοιχτή περιοχή $S_r(A,\epsilon) \times S_r(A^*,\epsilon)$ του σημείου (A,A^*) του $F(X) \times F(X)$ δεν περιέχει άλλο σημείο αυτού του τύπου. Το συμπέρασμα προκύπτει τώρα από το γεγονός οτι ο $F(X) \times F(X)$ έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

3.7. Θεώρημα. *Για κάθε ροή ϕ στον συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο X υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ ώστε :*

(α) Το $f(R(\phi))$ είναι ολικά-μη-συνεκτικό.

(β) Για κάθε $c \in f(R(\phi))$, το $f^{-1}(c) \cap R(\phi)$ είναι μια ακριβώς αλυσωτή συνιστώσα.

(γ) $f(tx) < f(x)$ για κάθε $t > 0$ και $x \in X \setminus R(\phi)$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το λήμμα 3.6 υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα ασυμπτωτικά ευσταθή, συμπαγή, αμετάβλητα σύνολα $A_n, n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση

$f_n : X \to [0,1]$ ώστε $f^{-1}(0) = A_n$, $f^{-1}(1) = A_n^*$ και $f_n(tx) < f_n(x)$ για κάθε $t > 0$ και $x \in E^+(A_n) \setminus A_n$. Η συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} f_n : X \to [0,1]$$

είναι συνεχής και φθίνουσα κατά μήκος των τροχιών. Αν $f(tx) = f(x)$ για κάποια $t > 0$ και $x \in X$, τότε $f_n(tx) = f_n(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αρα $x \in A_n \cup A_n^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, που σύμφωνα με το θεώρημα 3.5 σημαίνει οτι $x \in R(\phi)$. Συνεπώς η f είναι γνήσια φθίνουσα πάνω στις τροχιές στο $X \setminus R(\phi)$. Αν τώρα $x \in R(\phi)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_n(x) = 0$ ή 1. Ετσι το $f(R(\phi))$ περιέχεται στο σύνολο του Cantor στο $[0,1]$ που είναι ολικά-μη-συνεκτικό. Προκύπτει τώρα από το θεώρημα 2.10 οτι η f είναι σταθερή πάνω σε κάθε αλυσωτή συνιστώσα. Αν x, $y \in R(\phi)$ και $f(x) = f(y)$, τότε $f_n(x) = f_n(y)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την μοναδικότητα των τριαδικών παραστάσεων των σημείων του συνόλου του Cantor. Αυτό σημαίνει οτι $x \in A_n$ τότε και μόνον τότε όταν $y \in A_n$. Από το θεώρημα 3.4 προκύπτει οτι $\Omega^+(x) = \Omega^+(y)$ και συνεπώς $x \sim y$. Αυτό δείχνει και το (β).

Η συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ που κατασκευάσαμε λέγεται συνάρτηση Lyapunov της ροής και περιέχει τις πληροφορίες για την δυναμική των τροχιών έξω από το σύνολο της αλυσωτής επαναφοράς.

3.8. Πόρισμα. *Για κάθε $x \in X$ ισχύει $L^+(x) \subset R(\phi)$.*

4. Παρατηρήσεις

Η αρχική υπόθεση οτι ο μετρικοποιήσιμος χώρος X είναι συμπαγής είναι ουσιαστική για την θεωρία της αλυσωτής επαναφοράς. Ενδεικτικά αναφέρουμε οτι αν ο X δεν είναι συμπαγής τότε η διμελής σχέση P εξαρτάται από την μετρική βάσει της οποίας ορίζεται. Μια θεωρία αλυσωτής επαναφοράς σε μη-συμπαγείς χώρους έχει αναπτυχθεί στο [6].

Οταν ο X είναι μια συμπαγής C^∞ πολλαπλότητα και η ροή C^r, $1 \leq r \leq \infty$, τότε υπάρχει μια C^r συνάρτηση Lyapunov. Γι αυτό παραπέμπουμε στο [1]. Επίσης για μια άλλη θεώρηση των συναρτήσεων Lyapunov παραπέμπουμε στο [7].

Στο [5] αποδεικνύεται ότι για κάθε $x \in X$ το περιορισμένο δυναμικό σύστημα στο $L^+(x)$ είναι αλυσωτά επαναφερώμενο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ισχυρότερο από το πόρισμα 3.8.

Η θεωρία της παραγράφου 2, εκτός από το θεώρημα 2.10, έχει την αντίστοιχή της για δυναμικά συστήματα με διακριτό χρόνο που ορίζονται από μια συνεχή απεικόνιση ή πιο γενικά από μια κλειστή διμελή σχέση. Γι αυτό παραπέμπουμε στα [1] και [4]. Το μεγαλύτερο μέρος όσων εκθέσαμε αποτελούν επεξεργασμένη και επεκταμένη απόδοση του [3].

Βιβλιογραφία

1. E. Akin, *The general topology of dynamical systems*, Graduate Studies in Math. vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1993.

2. C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Publ. vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1978.

3. C. Conley, The gradient structure of a flow:I, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 8* (1988), 11-26.

4. R. Easton, Isolating blocks and epsilon chains for maps, *Physica D* 39 (1989), 95-110.

5. J. Franke-J. Selgrade, Abstract ω-limit sets, chain recurrent sets and basic sets for flows, *Proc. Amer. Math. Soc.* 60 (1976), 309-316.

6. M. Hurley, Noncompact chain recurrence and attraction, *Proc. Amer. Math. Soc.* 115 (1992), 1139-1148.

7. W. Robbin-D. A. Salamon, Lyapunov maps, simplicial complexes and the Stone functor, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 12 (1992), 153-183.