Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών

Εισαγωγή στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

Σημειώσεις

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος

Ηράκλειο 2012

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές αντιστοιχούν στο μάθημα *Θέματα Ανάλυσης: Χάος και Δυναμικά Συστήματα*, που δίδαξα κατά το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2011-12 στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Το περιεχόμενο αναφέρεται σε Δυναμικά Συστήματα διακριτού χρόνου σε μονοδιάστατους χώρους και πιο συγκεκριμένα στην πραγματική ευθεία και στον κύκλο. Ενας από τους λόγους για τον περιορισμό αυτό είναι το γεγονός οτι η μελέτη Δυναμικών Συστημάτων σε χώρους ανώτερης διάστασης απαιτεί την χρήση προχωρημένων τεχνικών από περιοχές των Μαθηματικών, με τις οποίες οι προπτυχιακοί φοιτητές των Μαθηματικών Τμημάτων σπάνια έρχονται σε επαφή κατά τη διάρκεια των σπουδών τους, όπως για παράδειγμα η Διαφορική Τοπολογία. Για την ευχερή κατανόηση του περιεχομένου των σημειώσεων αυτών απαιτούνται βασικές γνώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης που (πρέπει να) διδάσκονται όλοι οι προπτυχιακοί φοιτητές Μαθηματικών και καλύπτονται από το δημοφιλές σε παγκόσμια κλίμακα καθιερωμένο βιβλίο του Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw-Hill, που εκδόθηκε το 1952 και έκτοτε έχει υποστεί πολλές επανεκδόσεις.

Η φιλοσοφία με την οποία έχουν γραφτεί αυτές οι σημειώσεις αντανακλά την γενικότερη άποψη του συγγραφέα για το τι είναι τα Μαθηματικά, πώς παράγονται οι μαθηματικές θεωρίες και πώς πρέπει να διδάσκονται. Αντίθετα από τη σχολαστική άποψη των Bourbaki, Hardy κ.ά. που κυριαρχεί στα Τμήματα Μαθηματικών της Ελλάδας, αλλά σε μεγάλο βαθμό και παγκοσμίως, δεν ξεκινάμε με την παράθεση γενικών και αφηρημένων εννοιών. Αντί αυτού, έχει προτιμηθεί η παρουσίαση συγκεκριμένων προβλημάτων και παραδειγμάτων, η μελέτη των οποίων οδηγεί στη δημιουργία γενικών εννοιών και θεωριών, μέσα από τη διαδικασία της αφαίρεσης. Ετσι ο αναγνώστης μπορεί να πάρει μια ιδέα για τον τρόπο λειτουργίας του ερευνητή των Μαθηματικών, αλλά και να αποκτήσει ενδεχομένως το ενδιαφέρον για παραπέρα μελέτη.

Μια ευρύτερη άποψη για τον κλάδο των Δυναμικών Συστημάτων μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να πάρει από τα ακόλουθα βιβλία προπτυχιακού επιπέδου:

1. R.L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley, 1989.
2. R.A. Holmgren, A first course in discrete dynamical systems, Springer, 1996.
3. B. Hasselblatt and A. Katok, A first course in dynamics, Cambridge University Press, 2003.

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος
Ηράκλειο, Μάϊος 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Με την ευρεία έννοια Δυναμικό Σύστημα είναι ένα οποιοδήποτε σύστημα εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Η επαναστατική για την εποχή της θέση του Isaac Newton, που άλλαξε την φυσική φιλοσοφία, ήταν οτι τα φυσικά φαινόμενα υπακούουν σε αναλλοίωτους νόμους, που είναι δυνατόν να διατυπωθούν μαθηματικά. Δηλαδή, οι αρχές που διέπουν τη λειτουργία της Φύσης μπορούν να περιγραφούν με μαθηματικούς όρους και η εξέλιξη των φυσικών φαινομένων μπορεί να προβλεφθεί και να καθοριστεί με μαθηματική βεβαιότητα. Αυτό το φιλοσοφικό ρεύμα στις φυσικές επιστήμες αποκλήθηκε αιτιοκρατία (determinism) και αποτελεί τη φιλοσοφική βάση της επιτυχίας της Κλασικής Μηχανικής. Ιδιαίτερα επιτυχημένη, με βάση αυτό, ήταν η αντιμετώπιση προβλημάτων της Ουράνιας Μηχανικής κατά τον 19ο αιώνα, όπως η περιγραφή της κίνησης των ουρανίων σωμάτων του ηλιακού μας συστήματος.

Η σύγχρονη θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων αρχίζει στα τέλη του 19ου και τις αρχές του 20ου αιώνα με τον Henri Poincaré, που διεύρυνε την αιτιοκρατική φιλοσοφία. Αν και, σύμφωνα με την αιτιοκρατική άποψη, η αρχική κατάσταση ενός συστήματος καθορίζει κάθε επόμενη, στην πράξη είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση μόνο κατά προσέγγιση. Κατά τον Henri Poincaré, αν μπορούμε να προβλέψουμε τις μελλοντικές καταστάσεις με τον ίδιο βαθμό προσέγγισης, τότε αυτό επαρκεί για να πούμε ότι το φαινόμενο είναι αιτιοκρατικό. Δυστυχώς αυτό δεν συμβαίνει πάντα. Είναι δυνατόν πολύ μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες να προκαλέσουν πολύ μεγάλες διαφορές στην εξέλιξη ενός συστήματος. Στην περίπτωση αυτή η πρόβλεψη για μεγάλα χρονικά διαστήματα είναι αδύνατη. Ενα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί μεταξύ των άλλων η πρόγνωση των καιρικών συνθηκών. Αυτή η θέση του Henri Poincaré είναι η βάση της θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων μέχρι τις μέρες μας. Το κεντρικό πρόβλημα είναι η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των πάσης φύσεως συστημάτων με ποιοτικές, δηλαδή γεωμετρικές, μεθόδους που δεν χρειάζονται τον εκ των προτέρων υπολογισμό των λύσεων, από κοινού με πιθανοθεωρητικές μεθόδους.

Τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα, όπως τα μηχανικά, εξελίσσονται σε συνεχή χρόνο και περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Ενας τρόπος μελέτης μπορεί να γίνει με την διακριτοποίηση του χρόνου, για τον επιπλέον λόγο οτι ο ανθρώπινος νούς σκέφτεται σε διακριτά χρονικά διαστήματα. Ομως υπάρχουν και συστήματα που εξελίσσονται σε διακριτό χρόνο, τόσο στη φύση όσο και στην κοινωνία, όπως για παράδειγμα στην οικονομία. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μερικά τέτοια φαινόμενα, καθώς επίσης και το ρόλο των Δυναμικών Συστημάτων στη διευκρίνιση μεθόδων στα Μαθηματικά, όπως είναι η προσεγγιστική εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης με επαναληπτικές μεθόδους.

1.1 Πληθυσμιακά μοντέλα

Οι βιολόγοι που μελετούν την πανίδα ενδιαφέρονται για τη χρονική εξέλιξη των πληθυσμών διαφόρων ειδών μεμονωμένα ή σε αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Το βασικό ερώτημα που καλούνται να απαντήσουν είναι τί συμβαίνει με την πάροδο του χρόνου σε έναν αρχικό πληθυσμό από $x_0 > 0$ άτομα του είδους. Στην εξέλιξη του πληθυσμού παίζουν ρόλο παράγοντες που πρέπει να συνυπολογιστούν, όπως το κλίμα, η ποσότητα της διαθέσιμης τροφής, ο περιορισμένος ενδεχομένως χώρος ή η ύπαρξη ανταγωνιστικών και αρπακτικών ειδών.

Το πιο απλοϊκό μοντέλο παίρνει ως μοναδική υπόθεση οτι ο πληθυσμός ενός μεμονωμένου είδους μεταβάλλεται ανάλογα με τον ήδη υπάρχοντα πληθυσμό. Δηλαδή, η στιγμιαία μεταβολή του πληθυσμού την χρονική στιγμή t είναι ευθέως ανάλογη του πληθυσμού με μια σταθερή αναλογία k. Αν $x(t)$ είναι ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή t, το μοντέλο περιγράφεται μαθηματικά από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

που έχει λύση $x(t) = x_0 e^{kt}$, όπου $x(0) = x_0$. Αν $k > 0$, τότε $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ και έχουμε ανεξέλεγκτο υπερπληθυσμό, ενώ αν $k < 0$, τότε $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ και το είδος τείνει προς εξαφάνιση. Η εμπειρία όμως δείχνει οτι η πραγματικότητα είναι πιο περίπλοκη από αυτό το μοντέλο, που προβλέπει μόνο υπερπληθυσμό ή εξαφάνιση.

Ενα πιο ρεαλιστικό μοντέλο για την εξέλιξη του πληθυσμού ενός μεμονωμένου είδους είναι μια παραλλαγή του προηγούμενου, που θέτει ένα άνω όριο $b > 0$, πέρα από το οποίο θα έχουμε μείωση του πληθυσμού, που μπορεί να οφείλεται στην περιορισμένη τροφή για παράδειγμα. Ετσι, αν $x(t) < b$, τότε ο πληθυσμός θα έχει αυξητική τάση, ενώ αν $x(t) > b$, φθίνουσα. Ενα απλό μαθηματικό μοντέλο που ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = kx(b - x).$$

Υποθέτοντας οτι $k > 0$, έχουμε οτι

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{kx(b-x)} dx = \int_0^t dt$$

και αφού

$$\frac{1}{kx(b-x)} = \frac{1}{bkx} + \frac{1}{bk(b-x)}$$

προκύπτει οτι

$$\frac{x(t)}{b - x(t)} = \frac{x_0 e^{bkt}}{b - x_0}.$$

Κατά συνέπεια

$$x(t) = \frac{bx_0}{(b - x_0)e^{-bkt} + x_0}.$$

Εδώ λοιπόν έχουμε $\lim_{t\to+\infty} x(t) = b$. Δηλαδή, ο πληθυσμός τείνει να σταθεροποιηθεί στο άνω όριο, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε ένα παρόμοιο μοντέλο διακριτού χρόνου. Τα διακριτά μοντέλα είναι πιο φυσικά στη μελέτη της εξέλιξης πληθυσμών, όταν οι γενιές είναι ξένες μεταξύ τους. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, στα έντομα, όπως οι πεταλούδες, όπου κάθε γενιά ζεί από την άνοιξη μέχρι το φθινόπωρο και τα μέλη της δεν έχουν κοινή περίοδο βίου με μέλη της επόμενης. Υποθέτουμε φυσικά σταθερές εξωτερικές συνθήκες, όπως το κλίμα. Αν υποθέσουμε λοιπόν οτι έχουμε μια απομονωμένη αποικία πεταλούδων σ' έναν περιορισμένο χώρο, τότε για τους ίδιους λόγους, όπως προηγουμένως, είναι κάπως ρεαλιστικό να υποθέσουμε οτι, αρχίζοντας από το έτος $n = 0$, αν x_n είναι ο πληθυσμός της αποικίας το έτος n, το επόμενο έτος $n + 1$ ο πληθυσμός είναι

$$x_{n+1} = kx_n(b - x_n),$$

όπου k, $b > 0$. Ετσι, αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $g(x) = kx(b - x)$, τότε

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(g(x_{n-1})) = \cdots = g^{n+1}(x_0),$$

όπου $g^i = g \circ g \circ \cdots \circ g$ i φορές. Ενα προφανές τεχνικό μειονέκτημα του μοντέλου αυτού είναι οτι αν $x_n > b$, τότε $x_{n+1} < 0$.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = x/b$, παίρνουμε το ισοδύναμο μοντέλο $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(y) = (h \circ g \circ h^{-1})(y) = h(f(by)) = h(bkby(1 - y)) = \lambda y(1 - y),$$

όπου θέσαμε $\lambda = bk$ να είναι η νέα σταθερά. Με άλλα λόγια, το ισοδύναμο μοντέλο f παίρνεται πηγαίνοντας από τη νέα μεταβλητή y στη παλιά με την h^{-1}, εφαρμόζοντας την παλιά απεικόνιση g και επιστρέφοντας πάλι στη νέα μεταβλητή με την h. Σχηματικά, αυτή η διαδικασία παριστάνεται απο το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \big\downarrow h & & \big\downarrow h \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

Η αλλαγή μεταβλητής που κάναμε μπορεί να εκληφθεί και ως αλλαγή του συστήματος μονάδων που χρησιμοποιούμε για τις μετρήσεις μας. Δεν έχουμε καμία απαίτηση για χρήση κάποιου συγκεκριμένου συστήματος μονάδων μέτρησης.

Ετσι καταλήγουμε σ' ένα μοντέλο για την εξέλιξη του πληθυσμού των πεταλούδων, που παρίσταται από τις επαναλήψεις της συνεχούς απεικόνισης $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x), \qquad \lambda > 0,$$

που λέγεται *λογιστική απεικόνιση*.

Αν $0 < \lambda < 1$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = 0$ για κάθε $0 < x < 1$, γιατί $0 < f_\lambda^n(x) < \lambda^n x$. Επίσης, για $\lambda = 1$, η ακολουθία $(f_1^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνει και κατά συνέπεια συγκλίνει σε κάποιο όριο $0 \le a < 1$, αφού είναι κάτω φραγμένη από το 0. Επειδή $a = \lim\limits_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_\lambda^{n+1}(x)$, προκύπτει οτι $a = a(1-a)$, δηλαδή $a = 0$. Αυτά σημαίνουν οτι άν $0 < \lambda \le 1$, τότε για κάθε αρχικό πληθυσμό $0 < x < 1$ η αποικία θα εξαφανιστεί.

Είναι αναμενόμενο οτι η αλλαγή της παραμέτρου λ μπορεί να επιφέρει αλλαγή στη συμπεριφορά του μοντέλου. Βιολογική σημασία έχει το μοντέλο για αρχικούς πληθυσμούς $0 \le x \le 1$ για τους οποίους $0 \le f_\lambda^n(x) \le 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, όταν $0 < \lambda \le 4$, τότε $0 \le f_\lambda(x) \le 1$ για κάθε $0 \le x \le 1$. Για παράδειγμα, ας πάρουμε $\lambda = 2$. Αν έχουμε έναν αρχικό πληθυσμό $0 < x < 1/2$, τότε $x < f_2(x) = 2x(1 - x) < 1/2$. Συνεπώς, η ακολουθία

$(f_2^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το 1/2. Το όριο a ικανοποιεί την εξίσωση $a = 2a(1-a)$, δηλαδή $a = 1/2$. Αυτό σημαίνει οτι ένας αρχικά μικρός πληθυσμός αυξάνει με την πάροδο του χρόνου και τείνει να σταθεροποιηθεί κοντά στο 1/2.

Η λογιστική απεικόνιση θα μελετηθεί λεπτομερώς σε επόμενο κεφάλαιο. Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με μια απλή αναφορά σε ένα δημοφιλές μοντέλο αλληλεπίδρασης δύο ανταγωνιστικών μεταξύ τους πληθυσμών x και y. Το μοντέλο οφείλεται στους Alfred Lotka και Vito Volterra και περιγράφεται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + c_1 xy, \qquad \frac{dy}{dt} = a_2 y + c_2 xy,$$

όπου a_1, $c_2 > 0$ και a_2, $c_1 < 0$. Αυτά σημαίνουν ότι ο πληθυσμός $y > 0$ είναι αρπακτικό είδος που τρέφεται από το είδος με πληθυσμό $x > 0$. Οπως δείχνει η πρώτη εξίσωση, η μείωση του πληθυσμού x είναι ανάλογη του αριθμού του πληθυσμού των αρπακτικών και η αύξηση του αριθμού των αρπακτικών είναι ανάλογη του αριθμού του πληθυσμού του είδους με το οποίο τρέφονται. Ελλάτωση αυτού του πληθυσμού προκαλεί ελλάτωση του πληθυσμού των αρπακτικών, αφού αυτά δεν θα βρίσκουν επαρκή τροφή.

Βιολογική σημασία έχουν μόνο λύσεις που ικανοποιούν αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0 > 0$ και $y(0) = y_0 > 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Μια προφανής λύση στο $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ είναι η σταθερή $(-a_2/c_2, -a_1/c_1)$. Εστω $H : (0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση με

$$H(x,y) = a_1 \log y - a_2 \log x + c_1 y - c_2 x.$$

Αν $(x(t), y(t))$, $t \in I$, είναι μια λύση ορισμένη σ′ ένα ανοιχτό διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει οτι

$$\frac{d}{dt}(H(x(t),y(t))) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t))(a_1 x + c_1 xy) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t))(a_2 y + c_2 xy)$$

$$= -(\frac{a_2}{x} + c_2)(a_1 x + c_1 xy) + (\frac{a_1}{y} + c_1)(a_2 y + c_2 xy) = 0.$$

Αυτό σημαίνει οτι οι τροχιές των λύσεων βρίσκινται πάνω στα σύνολα της μορφής

$$\{(x,y) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty) : H(x,y) = \text{σταθ.}\}.$$

Τα σύνολα αυτά είναι κλειστές καμπύλες. Μάλιστα για την τιμή της σταθεράς ίση με $a_1 \log(-a_1/c_1) - a_2 \log(-a_2/c_2) - a_1 + a_2$ αυτό είναι το μονοσύνολο $\{(-a_2/c_2, -a_1/c_1)\}$, ενώ για τις υπόλοιπες τιμές είναι απλή κλειστή καμπύλη. Από αυτό προκύπτει οτι οι μη-σταθερές λύσεις στο $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ είναι περιοδικές.

1.2 Η μέθοδος Newton-Raphson

Η αναζήτηση μεθόδων υπολογισμού των λύσεων, αν υπάρχουν, της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου f είναι μια συνάρτηση, χρονολογείται από πολύ παλιά. Ιδιαίτερα, η προσπάθεια επίλυσης της πολυωνυμικής εξίσωσης 2ου βαθμού $ax^2 + bx + c = 0$ άρχισε από την αρχαιότητα. Κατά τον 16ο αιώνα κατέστη δυνατή η επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού, ενώ στις αρχές του 19ου αιώνα αποδείχθηκε οτι αυτό δεν είναι πάντα δυνατό για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 5ου ή ανώτερου βαθμού. Ο Isaac Newton ανέπτυξε μια μέθοδο για την προσεγγιστική εκτίμηση των λύσεων εξισώσεων, η οποία αργότερα βελτιώθηκε από τον Joseph Raphson και είναι σήμερα γνωστή ως η *μέθοδος Newton-Raphson*. Η μέθοδος προϋποθέτει οτι η συνάρτηση f είναι τουλάχιστον διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα 1.2.1. *Εστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Εστω $a < \xi < b$ με $f(\xi) = 0$. Αν $f'(\xi) \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\xi - \delta < x_0 < \xi + \delta$, η επαγωγικά ορισμένη ακολουθία*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

συγκλίνει στο ξ.

Απόδειξη. Επειδή η f' υποτίθεται συνεχής και $f'(\xi) \neq 0$, υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $\xi - \theta \leq x \leq \xi + \theta$. Ορίζεται λοιπόν καλά η συνάρτηση $g : [\xi - \theta, \xi + \theta] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Προφανώς, $g(\xi) = \xi$ και $x_{n+1} = g(x_n)$. Επειδή η f υποτίθεται C^2, η g είναι C^1 και

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

για κάθε $\xi - \theta \leq x \leq \xi + \theta$. Προφανώς, $g'(\xi) = 0$, αφού $f(\xi) = 0$. Η συνέχεια της g' στο ξ σημαίνει οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta < \theta$ ώστε $|g'(x)| = |g'(x) - g'(\xi)| < \epsilon$, όταν $|x - \xi| < \delta$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, όταν $|x - \xi| < \delta$ υπάρχει κάποιο ζ μεταξύ του x και του ξ ώστε

$$|g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| = |g'(\zeta)| \cdot |x - \xi| < \epsilon |x - \xi|.$$

Επιλέγοντας ένα οποιοδήποτε $0 < \epsilon < 1$, παραδείγματος χάριν $\epsilon = \frac{1}{2}$, καταλήγουμε οτι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|g(x) - \xi| < \frac{1}{2}|x - \xi|$$

όταν $|x - \xi| < \delta$. Κατά συνέπεια, για κάθε $\xi - \delta < x_0 < \xi + \delta$ έχουμε

$$|g(g(x_0)) - \xi| < \frac{1}{2}|g(x_0) - \xi| < \frac{1}{2^2}|x_0 - \xi|$$

και επαγωγικά

$$|x_n - \xi| < \frac{1}{2^n}|x_0 - \xi|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι τώρα φανερό οτι $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$. □

Από τον επαγωγικό ορισμό της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φανερό οτι ο όρος x_{n+1} είναι η ρίζα της γραμμικής προσέγγισης της f στο x_n, δηλαδή της συνάρτησης

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

για κάθε $n \geq 0$. Αυτή είναι η γεωμετρική ιδέα πάνω στην οποία βασίζεται η μέθοδος Newton-Raphson. Αν η f είναι της μορφής $f(x) = \lambda x + \mu$, όπου $\lambda \neq 0$, τότε η εξίσωση

$f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = -\lambda/\mu$. Αν η f είναι μια οποιαδήποτε διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε προσεγγίζεται κοντά στο x_0 από την

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Η ιδέα του Newton ήταν οτι η ρίζα x_1 της εξίσωσης $y = 0$ πρέπει να είναι καλύτερη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όταν το x_0 είναι αρκετά κοντά στο ξ, καλύτερη από το x_0. Αν εφαρμόσουμε στη συνέχεια την ίδια διαδικασία με το x_1 στη θέση του x_0, αναμένουμε να πάρουμε μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση του ξ. Συνεχίζουμε έτσι μέχρι να πάρουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του ξ.

Οπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1, η ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι σταθερό σημείο της απεικόνισης g και $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x_0) = \xi$. Ενα μειονέκτημα της μεθόδου Newton-Raphson είναι οτι δεν είναι καθορισμένο το δ, δηλαδή το πόσο κοντά στο ξ πρέπει να επιλέξουμε την αρχική εκτίμηση x_0. Με άλλα λόγια, για να ξεκινήσουμε, πρέπει με κάποιο ακαθόριστο τρόπο να εκτιμήσουμε πού περίπου βρίσκεται το ξ και να επιλέξουμε το x_0. Αυτό εξαρτάται απο τη συνάρτηση f, που έχουμε κάθε φορά και μειώνει την αξιοπιστία της μεθόδου. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.1, το πρόβλημα του καθορισμού του συνόλου

$$\{x \in (\xi - \theta, \xi + \theta) : \lim_{n\to+\infty} g^n(x) = \xi\},$$

που λέγεται *πεδίο έλξης* του σταθερού σημείου ξ της g, δεν είναι τετριμένο.

Παράδειγμα 1.2.2. Η (θετική) τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού αριθμού $c > 0$ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - c = 0$. Εδώ λοιπόν έχουμε $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - c$. Επειδή $f'(x) = 2x$ για κάθε $x > 0$, η απεικόνιση g ορίζεται σ' όλο το $(0, +\infty)$ και έχει τύπο

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{c}{x}\Big).$$

Προφανώς, η g είναι C^∞ και $g(x) > \sqrt{c}$ για κάθε $x > 0$. Επιπλέον,

$$g'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{c}{x^2}\Big)$$

και συνεπώς $0 < g'(x) < \dfrac{1}{2}$ για κάθε $x > \sqrt{c}$. Αν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε $x_0 > 0$, τότε έχουμε $x_1 = g(x_0) > \sqrt{c}$ και από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει κάποιο $\sqrt{c} < \zeta < x_1$ ώστε

$$g(x_1) - \sqrt{c} = g(x_1) - g(\sqrt{c}) = g'(\zeta)(x_1 - \sqrt{c}) < \frac{1}{2}(x_1 - \sqrt{c}).$$

Επαγωγικά βλέπουμε οτι

$$|g^n(x_1) - \sqrt{c}| < \frac{1}{2^n}|x_1 - \sqrt{c}|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_1) = \sqrt{c}$ για κάθε $x_0 > 0$. Στη περίπτωση αυτή λοιπόν το πεδίο έλξης του σταθερού σημείου $\sqrt{c}$ της g είναι το $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 1.2.3. Η πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα $-2 < \xi < -1$, γιατί $f(-2) = -2 < 0$ και $f(-1) = 3 > 0$. Εχουμε $f'(x) = 3x^2 - 2$ και αν $f'(x) = 0$ τότε $f(x) \neq 0$, όπως αμέσως υπολογίζουμε. Συνεπώς, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.1. Η συνάρτηση g της απόδειξης του 1.2.1 ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$ και έχει τύπο

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2}.$$

Αν επιλέξουμε $x_0 = 0$, τότε παρατηρούμε οτι $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, οπότε

$$g^n(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{για } n \text{ περιττό} \\ 0, & \text{για } n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

και προφανώς το 0 και το 1 δεν είναι ρίζες. Η ακολουθία λοιπόν $(g^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει σε καμία ρίζα της f και βέβαια όχι στην ξ. Η επιλογή αυτή του αρχικού σημείου αποδείχθηκε ανεπιτυχής, δηλαδή δεν βρίσκεται στο πεδίο έλξης του ξ, γιατί μεταξύ του ξ και του x_0 υπάρχει κρίσιμο σημείο της f, συγκεκριμένα το $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Η υπόθεση $f'(\xi) \neq 0$ στο Θεώρημα 1.2.1 σημαίνει οτι η ρίζα ξ είναι απλή. Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολυωνυμικές συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε οτι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, ένας πραγματικός αριθμός ξ λέγεται ρίζα της f με πολλαπλότητα $k > 1$ όταν $f(\xi) = 0$, $f'(\xi) = 0, ..., f^{(k-1)}(\xi) = 0$, και $f^{(k)}(\xi) \neq 0$ ή ισοδύναμα υπάρχει μια πολυωνυμική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = (x - \xi)^k h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h(\xi) \neq 0$. Ακολουθώντας τα βήματα τις απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.1, υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $f^{(k)}(x) \neq 0$ για κάθε $\xi - \theta \leq x \leq \xi + \theta$. Η συνάρτηση g ορίζεται στο $[\xi - \theta, \xi + \theta] \setminus \{\xi\}$ και έχει τύπο

$$g(x) = x - \frac{(x-\xi)^k h(x)}{k(x-\xi)^{k-1}h(x) + (x-\xi)^k h'(x)} = x - \frac{(x-\xi)h(x)}{kh(x) + (x-\xi)h'(x)}.$$

Κατά συνέπεια, η g ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα $[\xi - \theta, \xi + \theta]$ και βέβαια $g(\xi) = \xi$. Επιπλέον, η g είναι C^1 και υπολογίζουμε

$$g'(x) = \frac{k(k-1)(h(x))^2 + 2k(x-\xi)(h'(x))^2 + (x-\xi)^2 h(x)h''(x)}{[kh(x) + (x-\xi)h'(x)]^2}$$

για κάθε $\xi - \theta < x < \xi + \theta$. Ειδικά,

$$g'(\xi) = 1 - \frac{1}{k}.$$

Αρα υπάρχει $0 < \delta < \theta$ ώστε

$$|g(x) - \xi| < (1 - \frac{1}{k+1})|x - \xi|$$

όταν $|x - \xi| < \delta$. Οπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1, για κάθε $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ έχουμε

$$|g^n(x) - \xi| < (1 - \frac{1}{k+1})^n |x - \xi|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από όπου συμπεραίνουμε πάλι οτι $\lim_{n\to+\infty} g^n(x) = \xi$.

1.3 Μηχανικά Συστήματα

Στο κέντρο της Κλασικής Μηχανικής βρίσκεται ο νόμος του Newton, που συμπυκνώνει την φιλοσοφία του, στην οποία αναφερθήκαμε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου. Μια εξωτερική δύναμη F που δρά πάνω σ′ ένα μηχανικό σύστημα (π.χ. ένα υλικό σημείο, ένα στερεό σώμα, ένας πλανήτης, κ.ο.κ.) προκαλεί μια ανάλογη μεταβολή της ταχύτητας. Με μαθηματικούς όρους

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

όπου m είναι η συνολική μάζα και x είναι το διάνυσμα θέσης. Αυτή είναι μια 2ης τάξης διαφορική εξίσωση.

Αν η θέση είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$, τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση ανάγεται στην $2n$-διάστατη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

$$\frac{dx}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F,$$

όπου έχουμε εισάγει ως νέα ανεξάρτητη μεταβλητή την ταχύτητα $v = dx/dt$.

Οταν η εξωτερική δύναμη F είναι συνάρτηση μόνο της θέσης x και όχι του χρόνου t (αυτό δεν συμβαίνει για τις δυνάμεις τριβής, για παράδειγμα), τότε η προηγούμενη $2n$-διάστατη διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $X' = f(X)$, όπου στην περίπτωσή μας $X = (x, v)$ και $f(x, v) = (v, \frac{1}{m}F(x))$. Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, v) λέγεται συνήθως *χώρος φάσεων* του μηχανικού συστήματος. Επιπλέον, αν το διανυσματικό πεδίο F είναι C^1, το ίδιο είναι και το διανυσματικό πεδίο f και όπως παρατηρούμε $\mathrm{div} f = 0$.

Εστω $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένα C^k διανυσματικό πεδίο, $1 \leq k \leq \infty$. Υποθέτουμε οτι οι λύσεις της n-διάστατης διαφορικής εξίσωσης $x' = f(x)$, όπου $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επειδή η f υποτίθεται C^k, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μια μοναδική λύση $\phi(., x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ με αρχική συνθήκη $\phi(0, x) = x$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται η συνάρτηση ροής $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x)).$$

Συνήθως γράφουμε $\phi(t, x) = \phi_t(x)$. Αποδεικνύεται οτι η ϕ είναι C^k (και C^{k+1} ως προς t) και δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί οτι έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (α) $\phi_0(x) = x$ και (β) $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, t, $s \in \mathbb{R}$. Από αυτό προκύπτει οτι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η απεικόνιση $\phi_t = \phi(t, .) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι C^k, αντιστρέψιμη και $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$. Αφού $\phi_{-t} \circ \phi_t = id$, παραγωγίζοντας προκύπτει οτι $D\phi_{-t}(\phi_t(x)) \cdot D\phi_t(x) = I_n$, από τον κανόνα της αλυσίδας. Συνεπώς, ο ιακωβιανός πίνακας $D\phi_t(x)$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\det D\phi_t(x) \neq 0$. Ειδικά για $t = 0$ έχουμε $D\phi_0(x) = I_n$. Η συνάρτηση $\delta_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $\delta_x(t) = \det D\phi_t(x)$ είναι συνεχής και άρα διατηρεί πρόσημο. Αφού $\delta_x(0) = 1$, προκύπτει οτι $\det D\phi_t(x) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^n$.

Αν $I \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τότε ο όγκος του $\phi_t(I)$ είναι

$$\mathrm{Vol}(\phi_t(I)) = \int_{\phi_t(I)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_I \det D\phi_t \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε για λόγους απλότητας οτι το αρχικό διανυσματικό πεδίο είναι C^∞, οπότε και η αντίστοιχη συνάρτηση ροής ϕ είναι επίσης C^∞.

Θεώρημα 1.3.1. *Εστω $I \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση με $g(t) = \mathrm{Vol}(\phi_t(I))$. Τότε*

$$g'(t) = \int_{\phi_t(I)} \mathrm{div} f \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Απόδειξη. Εχουμε

$$g'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\int_{\phi_h(\phi_t(I))} dx_1 dx_2 \cdots dx_n - \int_{\phi_t(I)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n\Big]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\phi_t(I)} [\det D\phi_h(x) - 1] dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής. Επειδή η ϕ είναι C^∞ ως προς t, από το Θεώρημα του Taylor, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $h \in \mathbb{R}$ υπάρχει $0 < |\xi| < |h|$ ώστε

$$\phi_h(x) = \phi_0(x) + h\frac{\partial \phi}{\partial t}(0,x) + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(\xi,x) = x + hf(x) + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(\xi,x).$$

Παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$D\phi_h(x) = I_n + hDf(x) + h^2 G(h,x),$$

όπου η $G = (G_{ij}) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Υπολογίζουμε τώρα οτι

$$\det D\phi_h(x) = \begin{vmatrix} 1 + h\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h^2 G_{11}(h,x) & \cdots & h\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + h^2 G_{1n}(h,x) \\ h\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h^2 G_{21}(h,x) & \cdots & h\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + h^2 G_{2n}(h,x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h\frac{\partial f_n}{\partial x_1} + h^2 G_{n1}(h,x) & \cdots & 1 + h\frac{\partial f_n}{\partial x_n} + h^2 G_{nn}(h,x) \end{vmatrix}$$

$$= \Big[1 + h\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h^2 G_{11}(h,x)\Big]\cdot \begin{vmatrix} 1 + h\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + h^2 G_{22}(h,x) & \cdots & h\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + h^2 G_{2n}(h,x) \\ h\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + h^2 G_{32}(h,x) & \cdots & h\frac{\partial f_3}{\partial x_n} + h^2 G_{3n}(h,x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h\frac{\partial f_n}{\partial x_2} + h^2 G_{n2}(h,x) & \cdots & 1 + h\frac{\partial f_n}{\partial x_n} + h^2 G_{nn}(h,x) \end{vmatrix}$$

$$+ h^2 B_1(h,x)$$

$$= \cdots = 1 + h\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h^2 B(h,x),$$

όπου η $B : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Συνεπώς,

$$\frac{1}{h}[\det D\phi_h(x) - 1] = \mathrm{div} f + hB(h,x).$$

Επειδή το $\phi_t(I)$ είναι συμπαγές σύνολο και η B είναι συνεχής, προκύπτει οτι

$$g'(t) = \lim_{h\to 0}\int_{\phi_t(I)}\Big[\mathrm{div} f + hB(h,x)\Big]dx_1dx_2\cdots dx_n = \int_{\phi_t(I)}\mathrm{div} f\cdot dx_1dx_2\cdots dx_n. \quad \square$$

Το διανυσματικό πεδίο f λέγεται *ασυμπίεστο* και η αντίστοιχη ροή $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ασυμπίεστη, όταν $\mathrm{Vol}(\phi_t(I)) = \mathrm{Vol}(I)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ και για κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $I\subset\mathbb{R}^n$.

Πόρισμα 1.3.2. *Ενα C^∞ διανυσματικό πεδίο $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι ασυμπίεστο τότε και μόνο τότε όταν* $\mathrm{div} f = 0$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του προηγουμένου Θεωρήματος 1.3.1, το f είναι ασυμπίεστο τότε και μόνο τότε όταν για κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $I\subset\mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $g(t) = \mathrm{Vol}(\phi_t(I))$ είναι σταθερή, δηλαδή

$$\int_{\phi_t(I)}\mathrm{div} f\cdot dx_1dx_2\cdots dx_n = 0$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Ειδικά για $t=0$ παίρνουμε

$$\int_I \mathrm{div} f\cdot dx_1dx_2\cdots dx_n = 0$$

για κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $I\subset\mathbb{R}^n$. Αν τώρα $x\in\mathbb{R}^n$ και I_k είναι ο κύβος κέντρου x και ακμής $1/k$, $k\in\mathbb{N}$, υπάρχει $x_k\in I_k$ ώστε

$$0 = \int_{I_k}\mathrm{div} f\cdot dx_1dx_2\cdots dx_n = \mathrm{div} f(x_k)\cdot\mathrm{Vol}(I_k)$$

και συνεπώς από την συνέχεια $\mathrm{div} f(x) = \lim_{k\to+\infty}\mathrm{div} f(x_k) = 0$. $\square$

Από τα προηγούμενα προκύπτει οτι οι μετασχηματισμοί του χώρου φάσεων ενός κλασικού μηχανικού συστήματος του Newton που συναπαρτίζουν την αντίστοιχη ροή διατηρούν τους όγκους των υποσυνόλων του, για τα οποία αυτός ορίζεται.

Κεφάλαιο 2

Δυναμικά Συστήματα στο $\mathbb{R}$

2.1 Συστολές και σταθερά σημεία

Εστω X ένα μη-κενό σύνολο, $A \subset X$ και $f : A \to X$ μια απεκόνιση. Το $x \in A$ λέγεται σταθερό σημείο της f όταν $f(x) = x$. Τα σταθερά σημεία είναι πολύ σημαντικά, όχι μόνο στα Δυναμικά Συστήματα, αλλά γενικά στα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους στις άλλες επιστήμες. Η πιο απλή πρόταση ύπαρξης σταθερού σημείου είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 2.1.1. *Εστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $[a, b] \subset f([a, b])$ (ή $f([a, b]) \subset [a, b]$), τότε υπάρχει $a \leq x_0 \leq b$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει $a \leq x_0 \leq b$ ώστε $g(x_0) = 0$. Από την υπόθεση, υπάρχουν c, $d \in [a, b]$ ώστε $a = f(c)$ και $b = f(d)$. Συνεπώς, $g(c) = a - c \leq 0$ και $g(d) = b - d \geq 0$. Αν $g(c) = 0$ ή $g(d) = 0$, τότε το c ή το d, αντίστοιχα, είναι σταθερό σημείο. Αλλιώς, $g(c) < 0$ και $g(d) > 0$, οπότε $c \neq d$ και από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει κάποιο x_0 μεταξύ των c και d ώστε $g(x_0) = 0$. □

Το σταθερό σημείο της Πρότασης 2.1.1 ενδέχεται να μην είναι μοναδικό. Μια συνθήκη για μοναδικότητα δίνεται στη συνέχεια.

Πρόταση 2.1.2. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα κλειστό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση με $I \subset f(I)$. Αν $|f'(x)| < 1$ για κάθε $x \in I$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in I$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, για κάθε x, $y \in I$ με $x \neq y$ υπάρχει $\zeta \in I$ μεταξύ των x και y ώστε $f(x) - f(y) = f'(\zeta)(x - y)$. Συνεπώς, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Αν λοιπόν υπάρχουν δύο διαφορετικά σταθερά σημεία x και y, τότε προκύπτει ότι

$$|x - y| < |f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

που είναι αντίφαση. □

Οπως δείχνει η προηγούμενη απόδειξη, η συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.1.2, έχει την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ για κάθε x, $y \in I$ με $x \neq y$.

Δηλαδή η f είναι Lipschitz με σταθερά 1. Γενικά, αν (X, d) και (Y, ρ) είναι δύο μετρικοί χώροι, μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται Lipschitz με σταθερά λ όταν

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

για κάθε x, $y \in X$. Προφανώς, κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\lambda < 1$ λέγεται *συστολή*.

Λήμμα 2.1.3. *Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση. Αν υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\|Df(x)\| \leq \lambda$ για κάθε $x \in A$, τότε*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

για κάθε x, $y \in A$.

Απόδειξη. Επειδή το A υποτίθεται κυρτό, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x και y περιέχεται στο A, δηλαδή $\gamma(t) = (1-t)x + ty \in A$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Από τον κανόνα της αλυσίδας, η συνάρτηση (παραμετρισμένη καμπύλη) $f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ είναι C^1 και

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = Df((1-t)x + ty) \cdot (y - x).$$

Συνεπώς και η συνάρτηση $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $F(t) = \langle f(y) - f(x), f((1-t)x + ty)\rangle$ είναι C^1, όπου $\langle , \rangle$ είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, υπάρχει $0 < \zeta < 1$ ώστε $F(1) - F(0) = F'(\zeta)$. Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \langle f(y) - f(x), Df((1-\zeta)x + \zeta y) \cdot (y - x)\rangle$$

$$\leq \|f(y) - f(x)\| \cdot \|Df((1-\zeta)x + \zeta y) \cdot (y - x)\| \leq \|f(y) - f(x)\| \cdot \lambda \cdot \|y - x\|. \quad \square$$

Πόρισμα 2.1.4. *Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο και $f : A \to A$ μια C^1 απεικόνιση. Αν υπάρχει $\lambda < 1$ ώστε $\|Df(x)\| \leq \lambda$ για κάθε $x \in A$, η f είναι συστολή.* $\square$

Παραδείγματα 2.1.5. (α) Εστω $c \in \mathbb{R}$ και $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση

$$f_c(x) = \frac{1}{2}x + \frac{c}{2}.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο Πόρισμα 2.1.4 η f_c είναι συστολή. Τα σταθερά σημεία της είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f_c(x) = x$. Συνεπώς, το μοναδικό σταθερό σημείο της f_c είναι το c. Προκύπτει επαγωγικά ότι

$$|f_c^n(x) - c| = |f_c^n(x) - f_c^n(c)| = \frac{1}{2^n}|x - c|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αρα $\lim\limits_{n \to +\infty} f_c^n(x) = c$.

(β) Οπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1, η συνάρτηση g, που ορίστηκε εκεί, είναι συστολή και το όριο $\lim\limits_{n \to +\infty} g^n(x)$ είναι το σταθερό σημείο της.

(γ) Εστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Αν $|f'(x)| < 1$ για κάθε $a \le x \le b$, η f είναι συστολή. Πράγματι, επειδή η f είναι C^1, υπάρχει $a \le x_0 \le b$ ώστε $|f'(x)| \le |f'(x_0)|$ για κάθε $a \le x \le b$. Αν λοιπόν θέσουμε $\lambda = |f(x_0)|$, τότε $\lambda < 1$ και η f είναι συστολή, αφού από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής έχουμε $|f(x) - f(y)| \le \lambda |x - y|$ για κάθε x, $y \in [a, b]$.

Το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μοναδικού σταθερού σημείου για τις συστολές.

Θεώρημα 2.1.6. *Εστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια συστολή, δηλαδή υπάρχει $\lambda < 1$ ώστε $d(f(x), f(y)) \le \lambda d(x, y)$ για κάθε x, $y \in X$. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Αν η f έχει δύο σταθερά σημεία $x_0 \ne y_0$, τότε

$$0 < d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \le \lambda d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0),$$

που είναι αντίφαση. Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη της ύπαρξης σταθερού σημείου. Εστω $x \in X$ ένα οποιοδήποτε σημείο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \le \lambda d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \le ... \le \lambda^n d(x, f(x))$$

και συνεπώς για κάθε m, $n \in \mathbb{N}$ με $m > n$ έχουμε

$$d(f^n(x), f^m(x)) \le d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)) + \cdots + d(f^{m-1}(x), f^m(x))$$

$$\le (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1}) d(x, f(x)) \le \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+n}\Big) d(x, f(x)) = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x, f(x)).$$

Αφού $\lambda < 1$, η $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy. Επειδή ο X είναι πλήρης, υπάρχει ένα $x_0 \in X$ ώστε $\lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x) = x_0$. Το x_0 είναι σταθερό σημείο της f, γιατί λόγω της συνέχειας $f(x_0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{n+1}(x) = x_0$. $\square$

Παράδειγμα 2.1.7. Εστω $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ η απεικόνιση με τύπο

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Η f είναι C^∞ και $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνήσια φθίνουσα. Το διάστημα $(0, +\infty)$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη απόσταση δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος. Εχουμε όμως $f(3/2) = 5/3$ και $f(2) = 3/2$. Λόγω της μονοτονίας λοιπόν

$$f([\frac{3}{2}, 2]) \subset [\frac{3}{2}, 2].$$

Επιπλέον,

$$|f'(x)| = \frac{1}{x^2} \le \frac{4}{9} < 1$$

για κάθε $\dfrac{3}{2} \le x \le 2$. Το κλειστό διάστημα $[\dfrac{3}{2}, 2]$ είναι τώρα πλήρης μετρικός χώρος και η $f|[\dfrac{3}{2}, 2]$ είναι συστολή. Κατά συνέπεια, η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο a στο διάστημα

$[\frac{3}{2}, 2]$ και $a = \lim_{n\to+\infty} f^n(x)$ για κάθε $\frac{3}{2} \le x \le 2$, όπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.6. Το όριο a είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$a = 1 + \frac{1}{a},$$

δηλαδή $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Δίνουμε τώρα μερικούς γενικούς ορισμούς εννοιών που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει.

Ορισμός 2.1.8. Εστω X ένα μη-κενό σύνολο και $f : X \to X$ μια απεικόνιση. Για κάθε $x \in X$ το σύνολο

$$\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\} = \{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), ...\}$$

λέγεται *τροχιά* του σημείου x. Οταν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε *τροχιά* λέγεται το σύνολο

$$\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = \{..., f^{-n}(x), ..., f^{-1}(x), x, f(x), ..., f^n(x), ...\},$$

ενώ το προηγούμενο λέγεται *θετική ημιτροχιά*.

Ορισμός 2.1.9. Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν το $x_0 \in X$ είναι ένα σταθερό σημείο της f, το σύνολο

$$W(x_0) = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = x_0\}$$

λέγεται *πεδίο έλξης* του σταθερού σημείου x_0.

Οπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.6, το πεδίο έλξης του μοναδικού σταθερού σημείου μιας συστολής $f : X \to X$ ενός πλήρους μετρικού χώρου (X, d) είναι ολόκληρος ο χώρος X.

Παράδειγμα 2.1.10. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = -x^3$. Οπως βλέπουμε επαγωγικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f^n(x) = (-1)^n x^{3^n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Προφανώς, $f(0) = 0$ και $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. Αν $|x| > 1$, τότε $\lim_{n\to+\infty} |f^n(x)| = +\infty$, ενώ για $|x| < 1$ έχουμε $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = 0$. Συνεπώς, το πεδίο έλξης του σταθερού σημείου 0 είναι το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$.

Ασκήσεις

1. Εστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{2x}.$$

Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} f^n(2) = \sqrt{5}$.

2. Εστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ η απεικόνιση $f(x) = \sqrt{x+2}$. Να αποδειχθεί οτι $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = 2$ για κάθε $x \geq 0$.

3. Εστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ η απεικόνιση $f(x) = x + e^{-x}$. Να αποδειχθεί οτι $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, όταν $x \neq y$, αλλά η f δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.

4. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια C^2 απεικόνιση και $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σταθερό σημείο της ώστε $|f'(x_0)| = 1$ και $f''(x_0) \neq 0$. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ ώστε $x \notin W(x_0)$.

5. Εστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ μια απεικόνιση με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, όταν $x \neq y$. Να αποδειχθεί οτι η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο x_0 και $W(x_0) = [0, 1]$.

2.2 Υπερβολικά περιοδικά σημεία

Εστω X ένα μη-κενό σύνολο, $A \subset X$ και $f : A \to X$ μια απεκόνιση. Το $x \in A$ λέγεται περιοδικό σημείο της f όταν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f^n(x) = x$. Ο θετικός ακέραιος

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$$

λέγεται περίοδος του περιοδικού σημείου x. Προφανώς, αν το x είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου N, τότε η τροχιά του είναι το πεπερασμένο σύνολο $\{x, f(x), ..., f^{N-1}(x)\}$. Κάθε σταθερό σημείο είναι περιοδικό σημείο περιόδου 1. Αν το $x \in X$ είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου N και $f^n(x) = x$, τότε ο N διαιρεί τον n, όπως εύκολα βλέπουμε.

Το $x \in A$ λέγεται τελικά σταθερό σημείο της f όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{n+1}(x) = f^n(x)$ για κάθε $n \geq n_0$. Το x λέγεται τελικά περιοδικό σημείο όταν υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{n+N}(x) = f^n(x)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Ορισμός 2.2.1. Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν το $x_0 \in X$ είναι ένα περιοδικό σημείο της f περιόδου N, το σύνολο

$$W(x_0) = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} f^{nN}(x) = x_0\}$$

λέγεται *πεδίο έλξης* του x_0.

Από τη συνέχεια είναι προφανές οτι αν $x \in W(x_0)$, τότε $f^k(x) \in W(f^k(x_0))$ για κάθε ακέραιο $0 \leq k < N$.

Παραδείγματα 2.2.2. (α) Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = -x^3$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο το 0 και $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. Συνεπώς, τα 1 και -1 είναι περιοδικά σημεία της f περιόδου 2 και συναποτελούν μια περιοδική τροχιά. Δεν υπάρχουν άλλα περιοδικά σημεία της f. Εύκολα βλέπουμε οτι $W(1) = \{1\}$ και $W(-1) = \{-1\}$.

(β) Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = |x - 1|$. Προφανώς, $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$, που σημαίνει οτι τα 0 και 1 είναι περιοδικά περιόδου 2. Ομως, $f(-1) = 2$ και $f(-k) = k + 1$, $f(k) = k - 1$ για κάθε ακέραιο $k \geq 2$. Αυτό σημαίνει οτι κάθε ακέραιος είναι τελικά περιοδικό σημείο της f. Το $W(0)$ είναι το σύνολο των άρτιων ακεραίων, γιατί αν ο k είναι ένας θετικός ακέραιος τότε $f^{2(n+1)}(-2k) = f^{2n}(2k) = 0$ για $n \geq k$.

Πρόταση 2.2.3. *Εστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν x_1, $x_2 \in X$ είναι δύο περιοδικά σημεία της f και $x_1 \neq x_2$, τότε $W(x_1) \cap W(x_2) = \varnothing$.*

Απόδειξη. Εστω N_1 και N_2 οι περίοδοι των x_1 και x_2, αντίστοιχα. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο υποθέτοντας οτι υπάρχει κάποιο $x \in W(x_1) \cap W(x_2)$, δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} f^{nN_1}(x) = x_1$ και $\lim_{n\to+\infty} f^{nN_2}(x) = x_2$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_1, f^{nN_1}(x)) < \epsilon/2$ και $d(x_2, f^{nN_2}(x)) < \epsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Προκύπτει ότι

$$d(x_1,x_2) \leq d(x_1, f^{n_0N_1N_2}(x)) + d(x_2, f^{n_0N_1N_2}(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$, δηλαδή $d(x_1,x_2) = 0$. Συνεπώς, $x_1 = x_2$. $\square$

Ορισμός 2.2.4. Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση. Ενα περιοδικό σημείο $x_0 \in I$ της f με περίοδο N λέγεται *υπερβολικό* όταν $|(f^N)'(x_0)| \neq 1$.

Η σημασία της υπερβολικότητας καταδεικνύεται από την ακόλουθη.

Πρόταση 2.2.5. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση. Εστω $x_0 \in I$ ένα υπερβολικό σταθερό σημείο της f.*
(α) Αν $|f'(x_0)| < 1$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με $x_0 \in J \subset W(x_0)$.
(β) Αν $|f'(x_0)| > 1$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με $x_0 \in J$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in J$ με $x \neq x_0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f^n(x) \notin J$.

Απόδειξη. (α) Επειδή η f είναι C^1, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με κέντρο x_0 ώστε

$$|f'(x)| < \frac{1}{2}(1 + |f'(x_0)|) < 1$$

για κάθε $x \in J$. Αν θέσουμε $\lambda = \dfrac{1}{2}(1 + |f'(x_0)|)$, για κάθε $x \in J$ με $x \neq x_0$ έχουμε

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| < \lambda |x - x_0|$$

από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Ειδικά, $f(x) \in J$ και το $f^2(x) = f(f(x))$ ορίζεται. Επαγωγικά τώρα βλέπουμε οτι

$$|f^n(x) - x_0| < \lambda^n |x - x_0|$$

και $f^n(x) \subset J$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $0 < \lambda < 1$, προκύπτει οτι $\lim_{n\to+\infty} |f^n(x) - x_0| = 0$.
(β) Υπάρχει $1 < \lambda < |f'(x_0)|$ και πάλι λόγω της συνέχειας της f' υπάρχει ένα φραγμένο ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με κέντρο x_0 ώστε $|f'(x_0| > \lambda$ για κάθε $x \in J$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, για κάθε $x \in J$ με $x \neq x_0$ έχουμε

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| > \lambda |x - x_0|.$$

Αν $f^n(x) \in J$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε επαγωγικά βλέπουμε οτι

$$|f^n(x) - x_0| > \lambda^n |x - x_0|,$$

οπότε $\lim_{n\to+\infty} |f^n(x) - x_0| = +\infty$, αφού $\lambda > 1$. Αυτή η αντίφαση ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης. $\square$

Πόρισμα 2.2.6. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση. Εστω $x_0 \in I$ ένα υπερβολικό περιοδικό σημείο της f περιόδου N.*
(α) Αν $|(f^N)'(x_0)| < 1$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με $x_0 \in J \subset W(x_0)$.
(β) Αν $|(f^N)'(x_0)| > 1$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με $x_0 \in J$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in J$ με $x \neq x_0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{nN}(x) \notin J$. $\square$

Οδηγούματε έτσι στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.7. Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση. Ενα υπερβολικό περιοδικό σημείο $x_0 \in I$ της f με περίοδο N λέγεται ***ελκυστικό*** όταν $|(f^N)'(x_0)| < 1$ και ***απωθητικό*** όταν $|(f^N)'(x_0)| > 1$.

Παραδείγματα 2.2.6. (α) Η πολυωνυμική απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^3 + x)$ έχει τα σταθερά σημεία 0, 1 και -1. Εχουμε $f'(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ειδικά $f'(0) = 1/2$, $f'(\pm 1) = 2$. Συνεπώς, το 0 είναι ελκυστικό υπερβολικό σταθερό σημείο και τα 1, -1 είναι απωθητικά.

(β) Η πολυωνυμική απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - x^3$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο το 0. Εδώ έχουμε $f'(x) = 1 - 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ειδικά $f'(0) = 1$. Συνεπώς, το 0 δεν είναι υπερβολικό σταθερό σημείο. Ομως, $|f'(x)| < 1$ για $0 < |x| < \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, οπότε από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής προκύπτει οτι $(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}) \subset W(0)$.

(γ) Το 0 είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της πολυωνυμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + x^3$ και $f'(x) = 1 + 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $f'(0) = 1$, το 0 δεν είναι υπερβολικό σταθερό σημείο. Εδώ έχουμε $f'(x) > 1$ για κάθε $x \neq 0$ και συνεπώς $W(0) = \{0\}$, ενώ $\lim_{n\to+\infty} |f^n(x)| = +\infty$ για $x \neq 0$.

(δ) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - 1$ είναι C^∞ και το 0 είναι σταθερό σημείο της. Εχουμε $f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ειδικά $f'(0) = 1$. Συνεπώς, το 0 δεν είναι υπερβολικό σταθερό σημείο. Προφανώς, $f'(x) > 1$ για $x > 0$ και $0 < f'(x) < 1$ για $x < 0$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής προκύπτει οτι $W(0) = (-\infty, 0]$ και $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = +\infty$ για $x > 0$.

Ασκήσεις

1. Να ευρεθούν τα περιοδικά σημεία των παρακάτω απεικονίσεων.
(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - x^2$.
(β) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$.
(γ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \arctan x$.
(δ) $f : (-1, 1) \to (-1, 1)$ με $f(x) = \sin x$.
(ε) $f : (-1, 1) \to (-1, 1)$ με $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$.

Ποιά από αυτά είναι υπερβολικά; Ποιά είναι τα πεδία έλξης τους;

2. Να αποδειχθεί οτι το μοναδικό σταθερό σημείο της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ είναι υπερβολικό και ελκυστικό, και έχει πεδίο έλξης όλο το $\mathbb{R}$.

3. Εστω $a > 0$ και $f_a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ η απεικόνιση με

$$f_a(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big).$$

Να ευρεθούν τα περιοδικά σημεία της f_a και να εξεταστεί αν είναι υπερβολικά. Αν $x_0 > 0$, ποιό είναι το όριο της $(f_a^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$;

4. Για κάθε $c > 0$ να ευρεθούν τα σταθερά σημεία της $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_c(x) = x^2 + c$ και να εξεταστεί αν είναι υπερβολικά.

2.3 Η λογιστική απεικόνιση

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την δυναμική της λογιστικής απεικόνισης $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda > 0$. Στην πραγματικότητα έχουμε μια οικογένεια πολυωνυμικών απεικονίσεων 2ου βαθμού. Οπως είδαμε στην παράγραφο 1.1, η απεικόνιση αυτή περιγράφει ένα σχετικά ρεαλιστικό μοντέλο για την εξέλιξη πληθυσμών στα οποία οι γενιές είναι ξένες μεταξύ τους. Η παράμετρος λ είναι ο συντελεστής γονιμότητας. Βιολογικό ενδιαφέρον έχει η δυναμική στο διάστημα $[0, 1]$, γιατί η μεταβλητή x παριστά τον ποσοστιαίο πληθυσμό σε σχέση με ένα άνω όριο, πέρα από το οποίο έχουμε μείωση.

Η f_λ έχει σταθερά σημεία τα 0 και $1 - \frac{1}{\lambda}$, ενώ $f_\lambda(1) = 0$ και $f_\lambda(\frac{1}{\lambda}) = 1 - \frac{1}{\lambda}$, δηλαδή τα 1 και $1/\lambda$ είναι τελικά σταθερά. Προφανώς, $f'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ειδικά

$$f'_\lambda(0) = \lambda, \quad f'_\lambda(1 - \frac{1}{\lambda}) = 2 - \lambda.$$

Η μέγιστη τιμή της f είναι $f_\lambda(1/2) = \lambda/4$. Συνεπώς, $f_\lambda([0, 1]) \subset [0, 1]$, για $0 < \lambda \leq 4$.

Αν $0 < \lambda < 1$, τα σταθερά σημεία είναι υπερβολικά. Το 0 είναι ελκυστικό και το $1 - \frac{1}{\lambda}$ είναι απωθητικό. Στην περίπτωση $\lambda = 1$, το 0 είναι το μοναδικό σταθερό σημείο και δεν είναι υπερβολικό. Οπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 1.1, η δυναμική στο $[0, 1]$ για $0 < \lambda \leq 1$ είναι πολύ απλή, αφού τότε $\lim_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = 0$, για κάθε $0 \leq x \leq 1$.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε οτι $\lambda > 1$. Τότε το 0 είναι απωθητικό υπερβολικό σταθερό σημείο και το δεύτερο σταθερό σημείο $1 - \frac{1}{\lambda}$ ανήκει στο ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$. Σύμφωνα με την πρόταση που ακολουθεί, η δυναμική των σημείων εκτός του διαστήματος $[0, 1]$ είναι πολύ απλή και συνεπώς στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην δυναμική στο $[0, 1]$.

Πρόταση 2.3.1. *Αν $x < 0$ ή $x > 1$, τότε* $\lim_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = -\infty$.

Απόδειξη. Οταν $x > 1$, τότε $f_\lambda(x) < 0$, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται στην περίπτωση $x < 0$. Αν $x < 0$, τότε $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) < x$ και συνεπώς η ακολουθία $(f_\lambda^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα. Αν είναι κάτω φραγμένη, τότε τό όριο της είναι σταθερό σημείο της f_λ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, που δεν υπάρχει. □

Πρόταση 2.3.2. *Αν* $1 < \lambda < 3$, *τότε* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ *για κάθε* $0 < x < 1$.

Απόδειξη. Εστω πρώτα οτι $1 < \lambda \le 2$. Σε αυτή την περίπτωση $1 - \frac{1}{\lambda} \le \frac{1}{2}$ και η f_λ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0, 1-\frac{1}{\lambda}]$, οπότε $x < f_\lambda(x) < 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $0 < x < 1 - \frac{1}{\lambda}$. Από αυτό προκύπτει οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $0 < x < 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Επειδή η f_λ είναι συμμετρική περί το $1/2$, δηλαδή $f_\lambda(1-x) = f_\lambda(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $0 < f_\lambda(x) = f_\lambda(1-x) < 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\frac{1}{\lambda} < x < 1$ και συνεπώς $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Τέλος, για $1 - \frac{1}{\lambda} < x \le \frac{1}{\lambda}$ έχουμε

$$1 - \frac{1}{\lambda} \le f_\lambda(x) \le \frac{1}{\lambda}$$

και $|f_\lambda'(x)| \le |f_\lambda'(1-\frac{1}{\lambda})| = 2 - \lambda$. Συνεπώς, $f_\lambda([1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]) \subset [1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$ και η $f_\lambda|[1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$ είναι συστολή. Επειδή το μοναδικό σταθερό σημείο της f_λ σε αυτό το διάστημα είναι το $1 - \frac{1}{\lambda}$, από το Θεώρημα 2.1.6 προκύπτει οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $1 - \frac{1}{\lambda} < x \le \frac{1}{\lambda}$. Ετσι ολοκληρώνεται η απόδειξη στην περίπτωση $1 < \lambda \le 2$.

Η απόδειξη στην περίπτωση $2 < \lambda < 3$ είναι λίγο πιο περίπλοκη, παρότι το σταθερό σημείο $1 - \frac{1}{\lambda}$ είναι υπερβολικό και ελκυστικό, αφού $|f_\lambda'(1-\frac{1}{\lambda})| = |2-\lambda|$. Τώρα $1 - \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{2}$ και η f_λ δεν είναι πλέον γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0, 1-\frac{1}{\lambda}]$.

Αν $I = [\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{4}]$, θα δείξουμε πρώτα οτι $f_\lambda(I) \subset I$. Προφανώς, $1 - \frac{1}{\lambda} \in I$, $1/2 \in I$ και βέβαια $0 \le f_\lambda(x) \le f_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4}$ για κάθε $0 \le x \le 1$. Από την άλλη μεριά,

$$f_\lambda(\frac{\lambda}{4}) = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^3}{16} > \frac{1}{\lambda},$$

γιατί αν $g(\lambda) = \frac{\lambda^3}{4} - \frac{\lambda^4}{16}$, τότε $g'(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^3}{4} = \frac{\lambda^2}{4}(3-\lambda) > 0$, για $2 < \lambda < 3$, και συνεπώς $g(\lambda) > g(2) = 1$. Αφού όμως $\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda}$, το $f_\lambda(\frac{\lambda}{4})$ είναι η ελάχιστη τιμή της f_λ στο I. Κατά συνέπεια, $f_\lambda(x) \ge f_\lambda(\frac{\lambda}{4}) > \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $x \in I$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε οτι η τροχιά κάθε σημείου $0 < x < 1$ τελικά εισέρχεται στο I. Αυτό είναι τετριμένο όταν $x \in I$. Παρατηρούμε οτι

$$f_\lambda([0, \frac{1}{\lambda}]) = [0, 1 - \frac{1}{\lambda}],$$

γιατί η f_λ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{\lambda}]$, αφού $\lambda > 2$. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο, υποθέτοντας οτι υπάρχει $0 < x < \frac{1}{\lambda}$ ώστε $f_\lambda^n(x) \notin I$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$f_\lambda^n(x) < \dfrac{1}{\lambda}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η $(f_\lambda^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα, γιατί

$$f_\lambda(y) = \lambda y(1-y) > \lambda y(1-\frac{1}{\lambda}) = y(\lambda-1) > y$$

για κάθε $0 < y < 1/\lambda$, αφού $\lambda > 2$. Το όριο της είναι ένα σταθερό σημείο της f_λ στο διάστημα $[0, \dfrac{1}{\lambda}]$, που όμως δεν υπάρχει. Αυτό δείχνει οτι η τροχιά κάθε σημείου του διαστήματος $[0, \dfrac{\lambda}{4}] = [0, \dfrac{1}{\lambda}] \cup I$ τελικά εισέρχεται στο I. Παρατηρούμε τέλος οτι για κάθε $\dfrac{\lambda}{4} \leq x \leq 1$ έχουμε $0 \leq f_\lambda(x) \leq \dfrac{\lambda}{4}$, αφού το $\lambda/4$ είναι η μέγιστη τιμή της f_λ. Συνεπώς οι τροχιές και αυτών των σημείων τελικά εισέρχονται στο I.

Λόγω των προηγουμένων, αρκεί να δείξουμε τώρα οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ για κάθε $x \in I$. Δυστυχώς ο περιορισμός της f_λ στο I δεν είναι συστολή, γιατί

$$f'_\lambda(\frac{\lambda}{4}) = \lambda(1-\frac{\lambda}{2}),$$

που είναι μικρότερο απο -1, όταν το $2 < \lambda < 3$ είναι πολύ κοντά στο 3. Γιαυτό θεωρούμε την f_λ^2, για την οποία επίσης ισχύει $f_\lambda^2(I) \subset I$. Επειδή η f_λ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[\dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{1}{2}]$, γνήσια φθίνουσα στο $[\dfrac{1}{2}, 1-\dfrac{1}{\lambda}]$ και

$$f_\lambda([\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{2}]) = f_\lambda([\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{\lambda}]) = [1-\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{4}],$$

έχουμε $f_\lambda([\dfrac{1}{\lambda}, 1-\dfrac{1}{\lambda}]) = [1-\dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{\lambda}{4}]$. Από την άλλη μεριά

$$f_\lambda([1-\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{4}]) = [f_\lambda(\frac{\lambda}{4}), 1-\frac{1}{\lambda}] \subset [\frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}],$$

γιατί η f_λ είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $[1-\dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{\lambda}{4}]$ και $f_\lambda(\dfrac{\lambda}{4}) > \dfrac{1}{\lambda}$, όπως είδαμε παραπάνω. Κατά συνέπεια,

$$f_\lambda^2([\frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}]) \subset f_\lambda^2([\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{\lambda}] \subset [\frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}].$$

Εκτιμούμε τώρα το $f_\lambda^2(1/2)$ σε σχέση με το $1/2$. Υπολογίζουμε οτι

$$f_\lambda^2(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda^2(4-\lambda)}{16}.$$

Η C^∞ συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(\lambda) = \dfrac{\lambda^2(4-\lambda)}{16}$ έχει τιμές $h(2) = 1/2$ και $h(3) = 9/16 > 1/2$. Επιπλέον,

$$h'(\lambda) = \frac{8\lambda - 3\lambda^2}{16} \quad \text{και} \quad h''(\lambda) = \frac{8-6\lambda}{16} < 0$$

για $\lambda \geq 2$. Συνεπώς, η h είναι αύξουσα από το 2 μέχρι το $8/3$, φθίνουσα από το $8/3$ μέχρι το 3 και σε αυτό το διάστημα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Συμπεραίνουμε από αυτά οτι $f_\lambda^2(1/2) > 1/2$, που δείχνει οτι

$$f_\lambda^2([\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{\lambda}]) \subset (\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{\lambda}].$$

Επειδή

$$f_\lambda^2(x) - x = -\lambda x(x - \frac{\lambda-1}{\lambda})[\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda+1)x + (\lambda+1)]$$

και η διακρίνουσα του τριωνύμου μέσα στην αγκύλη είναι $\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3) < 0$, για $2 < \lambda < 3$, προκύπτει οτι $f_\lambda^2(x) < x$ για κάθε $\frac{1}{2} \leq x < 1 - \frac{1}{\lambda}$. Αφού το $1 - \frac{1}{\lambda}$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f_λ^2 στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\lambda}]$, συμπεραίνουμε οτι $\lim_{n\to+\infty} f_\lambda^{2n}(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{\lambda}$. Λόγω της συνέχειας όμως έχουμε και $\lim_{n\to+\infty} f_\lambda^{2n+1}(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Αυτό δείχνει οτι $\lim_{n\to+\infty} f_\lambda^{n}(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{\lambda}$ και κατά συνέπεια για κάθε $x \in I$. $\square$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη δυναμική της λογιστικής απεικόνισης f_λ στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ για τιμές της παραμέτρου $\lambda > 4$, όπου όπως θα δούμε η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών μπορεί να είναι εξαιρετικά περίπλοκη, σε αντίθεση με τις τιμές $1 < \lambda < 3$, όπου σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση 2.3.2 είναι πολύ απλή. Στην περίπτωση $\lambda > 4$ υπάρχουν σημεία στο $[0,1]$ των οποίων η τροχιά σε κάποιο χρόνο βρίσκεται εκτός του $[0,1]$ και συνεπώς αποκλίνει προς το $-\infty$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1. Ενα τέτοιο σημείο είναι για παράδειγμα το $1/2$. Μας ενδιαφέρει λοιπόν το σύνολο των σημείων, των οποίων η τροχιά βρίσκεται ολόκληρη στο $[0,1]$. Ας σημειωθεί οτι αν $0 \leq f_\lambda(x) \leq 1$ τότε οπωσδήποτε $0 \leq x \leq 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq f_\lambda^n(x) \leq 1\} = \{x \in [0,1] : f_\lambda(x), f_\lambda^2(x), ..., f_\lambda^n(x) \in [0,1]\}.$$

Προφανώς, $A_{n+1} \subset A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε το σύνολο

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

που είναι συμπαγές, ως τομή κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$ και f_λ-αναλλοίωτο, δηλαδή $f_\lambda(A) = A$.

Ως πρώτο βήμα, παρατηρούμε οτι

$$[0,1] \setminus A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \lambda x(1-x) > 1\} = \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}\right).$$

Το A_1 λοιπόν αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα I_0 και I_1. Συγκεκριμένα,

$$I_0 = \left[0, \frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}\right], \quad I_1 = \left[\frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}, 1\right]$$

και $A = I_0 \cup I_1$. Αφού $f_\lambda(0) = f_\lambda(1) = 0$ και

$$f_\lambda\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}\right) = 1,$$

τα άκρα καθενός από τα διαστήματα I_0 και I_1 απεικονίζονται στα 0 και 1 και είναι τελικά σταθερά. Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει οτι $f_\lambda(I_0) = f_\lambda(I_1) = [0,1]$.

Επιπλέον, η f_λ είναι γνήσια άξουσα στο I_0 και γνήσια φθίνουσα στο I_1, γιατί $I_0 \subset [0, 1/2)$ και $I_1 \subset (1/2, 1]$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τώρα την ακόλουθη παρόμοια περιγραφή.

Πρόταση 2.3.3. *Το σύνολο A_n αποτελείται από 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα. Αν I είναι ένα από αυτά, τότε $f_\lambda^n(I) = [0, 1]$ και η f_λ^n είναι γνήσια μονότονη στο I.*

Απόδειξη. Προχωρούμε επαγωγικά. Η περίπτωση $n = 1$ αποδείχθηκε από τις αμέσως προηγούμενες παρατηρήσεις. Υποθέτουμε οτι το A_n αποτελείται από 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα και αν $I = [a, b]$ είναι ένα από αυτά, τότε $f_\lambda^n(I) = [0, 1]$ και η f_λ^n είναι γνήσια μονότονη στο I. Θα υποθέσουμε οτι η f_λ^n είναι γνήσια αύξουσα στο I. Η απόδειξη είναι όμοια όταν είναι γνήσια φθίνουσα.

Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής και τη μονοντονία στο $[a, b]$ υπάρχουν μοναδικά $a < x_1 < x_2 < b$, ώστε

$$f_\lambda^n([a, x_1]) = I_0 = \left[0, \frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}\right],$$

$$f_\lambda^n([x_1, x_2]) = \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}\right) \quad \text{και}$$

$$f_\lambda^n([x_2, b]) = I_1 = \left[\frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}, 1\right].$$

Συνεπώς τα δύο κλειστά διαστήματα $[a, x_1]$ και $[x_2, b]$ είναι ξένα μεταξύ τους και

$$f_\lambda^{n+1}([a, x_1]) = f_\lambda^{n+1}([x_2, b]) = [0, 1],$$

ενώ $f_\lambda^{n+1}(x) > 1$ για κάθε $x_1 < x < x_2$. Αυτό σημαίνει οτι το σύνολο $I \cap A_{n+1}$ αποτελείται από τα δύο ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα $[a, x_1]$ και $[x_2, b]$ και δείχνει οτι το A_{n+1} αποτελείται από 2^{n+1} ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα.

Τέλος, για κάθε $a \le x \le x_1$ έχουμε $f'_\lambda(f_\lambda^n(x)) > 0$ και συνεπώς

$$(f_\lambda^{n+1})'(x) = f'_\lambda(f_\lambda^n(x)) \cdot (f_\lambda^n)'(x) > 0$$

από τον κανόνα της αλυσίδας. Ομοια, $(f_\lambda^{n+1})'(x) < 0$ για κάθε $x_2 \le x \le b$. Με άλλα λόγια η f_λ^{n+1} είναι γνήσια μονότονη σε καθένα απο τα διαστήματα $[a, x_1]$ και $[x_2, b]$. □

Αξίζει να σημειωθεί οτι τα άκρα καθενός απο τα 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα που συναποτελούν το A_n ανήκουν στο A και είναι τελικά σταθερά. Πράγματι, αν το a είναι άκρο ενός τέτοιου διαστήματος, τότε $f_\lambda^n(a) = 0$ ή 1, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.3, και συνεπώς $f_\lambda^k(a) = 0$ για κάθε $k \ge n + 1$.

Οπως δείχνει η απόδειξη της Πρότασης 2.3.3, τα 2^n κλειστά διαστήματα που συναποτελούν το A_n είναι δυνατόν να περιγραφούν κωδικοποιημένα. Για κάθε s_0, s_1,...,$s_n \in \{0, 1\}$ θέτουμε

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = \{0 \le x \le 1 : f_\lambda^k(x) \in I_{s_k} \quad \text{για κάθε } 0 \le k \le n\}.$$

Αυτά είναι ακριβώς τα 2^{n+1} διαστήματα, από τα οποία αποτελείται το σύνολο A_{n+1}, όπως μπορούμε να δούμε επαγωγικά. Για $n = 0$ αυτό είναι τετριμένο, αφού $A_1 = I_0 \cup I_1$. Εστω οτι το $I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}}$ είναι ένα από τα 2^n κλειστά διαστήματα που αποτελούν το A_n. Προφανώς,

$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} \subset I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}}$, από τον ορισμό τους. Εστω οτι $I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}} = [a, b]$. Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 2.3.3, έχουμε $f_\lambda^n([a, b]) = [0, 1]$ και η f_λ^n είναι μονότονη στο $[a, b]$. Υποθέτουμε οτι είναι αύξουσα, αφού η απόδειξη είναι όμοια όταν είναι φθίνουσα. Το $I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}} \cap A_{n+1}$ αποτελείται από τα διαστήματα $[a, x_1]$ και $[x_2, b]$. Επειδή τα x_1 και x_2 της απόδειξης είναι μοναδικά λόγω της μονοτονίας, προκύπτει οτι αν $s_n = 0$, τότε $I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = [a, x_1]$, αφού $f_\lambda^n([a, x_1]) = I_0$, ενώ αν $s_n = 1$, τότε $I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = [x_2, b]$, αφού $f_\lambda^n([x_2, b]) = I_1$.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε οτι $\lambda > 2 + \sqrt{5}$. Ο κύριος λόγος είναι οτι τότε μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα το ακόλουθο.

Λήμμα 2.3.4. *Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, τότε υπάρχει $M > 1$ ώστε $|f_\lambda'(x)| \geq M$ για κάθε $x \in A_1$ και το μήκος κάθε διαστήματος που περιέχεται στο σύνολο A_n είναι το πολύ $\dfrac{1}{M^n}$.*

Απόδειξη. Επειδή τα κλειστά διαστήματα I_0 και I_1, που συναποτελούν το A_1, κείνται συμμετρικά ως προς το $1/2$ και $f_\lambda'(1 - x) = -f_\lambda'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$|f_\lambda'(x)| \geq \inf\{f_\lambda'(x)| : x \in I_0\}$$

για κάθε $x \in A_1$. Η f_λ' είναι γνήσια φθίνουσα και συνεπώς

$$\lambda = f_\lambda'(0) \geq f_\lambda'(x) \geq f_\lambda'\left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}\right) = \sqrt{\lambda(\lambda - 4)} > 0$$

για κάθε $x \in I_0$. Προκύπτει από αυτό οτι

$$|f_\lambda'(x)| \geq \sqrt{\lambda(\lambda - 4)} > \sqrt{(2 + \sqrt{5})(-2 + \sqrt{5})} = 1$$

για κάθε $x \in A_1$. Επειδή η f_λ' είναι συνεχής και το A_1 είναι συμπαγές σύνολο, υπάρχει $M > 1$ ώστε $|f_\lambda'(x)| > M$ για κάθε $x \in A_1$.

Εστω τώρα $a < b$ ώστε $[a, b] \subset A_n$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει $a < \xi < b$ ώστε

$$|f_\lambda^n(b) - f_\lambda^n(a)| = |(f_\lambda^n)'(\xi)|(b - a) = (b - a) \prod_{k=0}^{n-1} f_\lambda'(f_\lambda^k(\xi)) \geq (b - a) M^n,$$

από τον κανόνα της αλυσίδας. Από την Πρόταση 2.3.3 όμως έχουμε οτι $|f_\lambda^n(b) - f_\lambda^n(a)| \leq 1$ και συνεπώς $b - a \leq (1/M)^n$. □

Προχωρούμε τώρα στον καθορισμό της τοπολογικής δομής του συνόλου A. Υπενθυμίζουμε οτι ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}$ λέγεται τέλειο, ή γενικότερα ένας μετρικός χώρος λέγεται τέλειος, όταν δεν έχει μενονωμένα σημεία ή ισοδύναμα κάθε σημείο του X είναι σημείο συσσώρευσης του X. Κάθε μη-κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Επίσης ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}$ είναι ολικά-μη-συνεκτικό όταν δεν περιέχει κανένα διάστημα.

Πρόταση 2.3.5. *Το σύνολο A είναι ολικά-μη-συνεκτικό και τέλειο.*

Απόδειξη. Αν το σύνολο A περιέχει κάποιο διάστημα $[a,b]$, όπου $a < b$, τότε $[a,b] \subset A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο Λήμμα 2.3.4, υπάρχει $M > 1$ ώστε

$$0 < b - a \leq \frac{1}{M^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι αντίφαση και αποδεικνύει οτι το A είναι ολικά-μη-συνεκτικό.

Για την τελειότητα πρέπει να δείξουμε οτι για κάθε $x \in A$ και κάθε $\epsilon > 0$ στο διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ περιέχεται τουλάχιστον ακόμα ένα σημείο του A διαφορετικό από το x. Αφού $M > 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $(1/M)^n < \epsilon$. Το x περιέχεται (ακριβώς) σε ένα διάστημα $[a,b]$, $a < b$, από τα 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα που συναποτελούν το A_n και a, $b \in A$, όπως σημειώθηκε αμέσως μετά από την Πρόταση 2.3.3. Πάλι από το Λήμμα 2.3.4 έχουμε

$$0 < b - a \leq \frac{1}{M^n} < \epsilon$$

και συνεπώς $x - \epsilon < a \leq x \leq b < x + \epsilon$. Με άλλα λόγια, a, $b \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A$ και τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι διαφορετικό από το x. $\square$

Ετσι ολοκληρώνεται η τοπολογική περιγραφή του συνόλου A, έχοντας αποδείξει οτι είναι ένα σύνολο Cantor. Υπενθυμίζουμε οτι ένας οποιοσδήποτε συμπαγής, ολικά-μη-συνεκτικός, τέλειος μετρικός χώρος λέγεται σύνολο Cantor. Αποδεικνύεται στην Τοπολογία οτι όλα τα σύνολα Cantor είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους. Δηλαδή, όλα τα σύνολα Cantor ταυτίζονται από τοπολογική άποψη.

Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί οτι αν $\lambda > 4$, τότε για κάθε πρώτο αριθμό $p \in \mathbb{N}$ η λογιστική απεικόνιση f_λ έχει τουλάχιστον 2^p περιοδικά σημεία περιόδου p. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Πρόταση 2.1.1.)

2. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, να αποδειχθεί οτι όλα τα περιοδικά σημεία της λογιστικής απεικόνισης f_λ είναι υπερβολικά και απωθητικά.

3. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, να αποδειχθεί οτι το σύνολο όλων των περιοδικών σημείων της λογιστικής απεικόνισης f_λ είναι πυκνό υποσύνολο του συνόλου A.

4. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $C = \{0 \leq x \leq 1 : 0 \leq f^n(x) \leq 1 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$ είναι το συνηθισμένο σύνολο του Cantor. Να αποδειχθεί επιπλέον οτι η f απεικονίζει το $C \cap [0, \frac{1}{2}]$ ομοιομορφικά επί του C.

5. Αν $\lambda > 2+\sqrt{5}$, να αποδειχθεί οτι για κάθε $x \in A$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in A$ ώστε $|x-y| < \epsilon$ και $|f_\lambda^n(x) - f_\lambda^n(y) > \frac{1}{2}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την παρατήρηση που ακολουθεί αμέσως μετά την Πρόταση 2.3.3 και ένα παρόμοιο επιχείρημα με αυτό της απόδειξης της Πρότασης 2.3.5.)

2.4 Η μετατόπιση στο χώρο ακολουθιών δύο συμβόλων

Συνεχίζοντας τη μελέτη της λογιστικής απεικόνισης για τιμές της παραμέτρου $\lambda > 2+\sqrt{5}$, χρειάζεται να περιγράψουμε την δυναμική μέσα στο σύνολο Cantor A. Αυτό μπορεί να γίνει βολικά μέσα από την κατασκευή ενός μοντέλου του A, που ενδεχομένως να φαίνεται τεχνητό και περίεργο από πρώτη άποψη. Εκ των υστέρων όμως θα διαπιστώσουμε οτι αυτός είναι ο πιο απλός και υπολογιστικά αποτελεσματικός τρόπος περιγραφής της δυναμικής της λογιστικής απεικόνισης f_λ μέσα στο A. Οποτε αναφερόμαστε στη λογιστική απεικόνιση f_λ, θα χρησιμοποιούμε χωρίς υπενθύμιση τους συμβολισμούς της προηγουμένης παραγράφου 2.3.

Εστω $\Sigma_2 = \prod_{n=0}^{\infty}\{0,1\}$, δηλαδή το Σ_2 αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(s_0, s_1, ..., s_n, ...)$, όπου για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ έχουμε $s_n = 0$ ή 1. Στο Σ_2 ορίζεται η συνάρτηση απόστασης $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}^+$ με

$$d(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n},$$

όπου $s = (s_n)_{n\geq 0}$ και $t = (t_n)_{n\geq 0}$. Με αυτόν τον τρόπο το Σ_2 γίνεται μετρικός χώρος.

Παρατηρούμε οτι αν οι $N+1$ πρώτοι όροι των ακολουθιών s και t ταυτίζονται, δηλαδή $s_n = t_n$ για $0 \leq n \leq N$, τότε

$$d(s,t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_{n+N+1} - t_{n+N+1}|}{2^n} \leq \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}.$$

Αντίστροφα, αν υπάρχει κάποιο $0 \leq m < N$ ώστε $s_m \neq t_m$, τότε

$$d(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n} \geq \frac{1}{2^m} > \frac{1}{2^N}.$$

Με άλλα λόγια, αν $d(s,t) \leq \frac{1}{2^N}$, τότε $s_n = t_n$ για κάθε $0 \leq n < N$.

Παραδείγματα 2.4.1. (α) Η απόσταση των σημείων $s = 000...000...$ και $t = 0101...0101...$ είναι

$$d(s,t) = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\big) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}.$$

(β) Το σύνολο όλων των τελικά μηδενικών σταθερών ακολουθιών

$$D = \{s = (s_n)_{n\geq 0} : \text{υπάρχει ακέραιος } N \geq 0 \text{ ώστε } s_n = 0 \text{ για κάθε } n \geq N\}$$

είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2. Πράγματι, έστω $t = (t_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ και $\epsilon > 0$ οποιαδήποτε. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Θεωρούμε το σημείο $s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ με $s_n = t_n$ για $0 \leq n \leq N$ και $s_n = 0$ για $n > N$. Οπως παρατηρήσαμε προηγουμένως,

$$d(s,t) \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Δηλαδή, $s \in D \cap S(t,\epsilon)$ και γιαυτό το λόγο το $D \cap S(t,\epsilon)$ δεν είναι το κενό σύνολο. Αυτό δείχνει οτι το D είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2.

Ο χώρος Σ_2 είναι ένα τοπολογικό μοντέλο για το f_λ-αναλλοίωτο σύνολο Cantor A, όταν $\lambda > 2+\sqrt{5}$. Εστω $h : A \to \Sigma_2$ η απεικόνιση με $h(x) = (s_n)_{n\geq 0}$, όπου

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{όταν } f_\lambda^n(x) \in I_0 \\ 1, & \text{όταν } f_\lambda^n(x) \in I_1. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια $h(x) = (s_n)_{n\geq 0}$, όταν $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$.

Πρόταση 2.4.2. *Αν $\lambda > 2+\sqrt{5}$, η απεικόνιση $h : A \to \Sigma_2$ είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα οτι η h είναι ένα προς ένα. Από το Λήμμα 2.3.4 προκύπτει ότι για κάθε σημείο $s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ το $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ είναι μονοσύνολο, γιατί το μήκος του $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ είναι το πολύ $\frac{1}{M^{n+1}}$ και $M > 1$. Αν λοιπόν $h(x) = h(y) = s$, τότε $x = y$, γιατί $x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια οτι η h είναι επί. Εστω $s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$. Επειδή $I_{s_0 s_1 \ldots s_n} \subset I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}}$ για κάθε $n \geq 1$ και καθένα $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ είναι κλειστό υποδιάστημα του $[0,1]$, προκύπτει ότι $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n} \neq \varnothing$, γιατί το $[0,1]$ είναι συμπαγές. Αν τώρα $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$, τότε $h(x) = s$, από το ορισμό της h.

Αποδεικνύουμε τώρα οτι η h είναι συνεχής. Εστω $x \in A$ με $h(x) = (s_n)_{n\geq 0}$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Για κάθε $0 \leq n \leq N$ έχουμε $f_\lambda^n(x) \in I_{s_n}$. Επειδή $I_0 \subset [0,1/2)$ και $I_1 \subset (1/2,1]$, και οι f_λ, f_λ^2,...,f_λ^N είναι συνεχείς, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f_\lambda^n(y) \in I_{s_n}$, $0 \leq n \leq N$, για κάθε $y \in A$ με $|x-y| < \delta$. Αυτό σημαίνει οτι

$$A \cap (x-\delta, x+\delta) \subset \bigcap_{n=0}^{N} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}.$$

Συνεπώς, αν $y \in A \cap (x-\delta, x+\delta)$, τότε οι $N+1$ πρώτοι όροι των ακολουθιών $h(x)$ και $h(y)$ ταυτίζονται και όπως είδαμε παραπάνω

$$d(h(x), h(y)) \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Αυτό δείχνει οτι η h είναι συνεχής. Επειδή, τέλος, το A είναι συμπαγές και η h είναι συνεχής, προκύπτει οτι η h^{-1} είναι επίσης συνεχής και άρα είναι ομοιομορφισμός. □

Οι χώροι A και Σ_2 ταυτίζονται λοιπόν τοπολογικά, αφού η h είναι ομοιομορφισμός. Χρησιμοποιώντας την h μπορούμε να μεταφέρουμε την λογιστική απεικόνιση $f_\lambda|A$ σε μια τοπολογικά ισοδύναμη συνεχή απεικόνιση $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, που είναι η $\sigma = h \circ (f_\lambda|A) \circ h^{-1}$. Δηλαδή, η σ κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_\lambda|A} & A \\ \big\downarrow h & & \big\downarrow h \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \end{array}$$

Για τον υπολογισμό της σ υπενθυμίζουμε οτι $h(x) = (s_n)_{n\geq 0}$ τότε και μόνον τότε όταν $\{x\} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$. Οπότε $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots) = h(f_\lambda(x))$ και

$$\{f_\lambda(x)\} = f_\lambda\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}\right) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f_\lambda(I_{s_0 s_1 \dots s_n}).$$

Ομως, $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \{0 \leq x \leq 1 : x \in I_{s_0}, f_\lambda(x) \in I_{s_1}, f_\lambda^2(x) \in I_{s_2}, \dots, f_\lambda^n(x) \in I_{s_n}\}$, από όπου προκύπτει οτι

$$f_\lambda(I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}) = \{0 \leq y \leq 1 : y \in I_{s_1}, f_\lambda(y) \in I_{s_2}, \dots, f_\lambda^{n-1}(y) \in I_{s_n}\} = I_{s_1 s_2 \dots s_n}.$$

Συνεπώς,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f_\lambda(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n},$$

από όπου προκύπτει οτι $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots) = (s_1 s_2 \dots s_n \dots)$.

Ορισμός 2.4.3. Η συνεχής απεικόνιση $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ με

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots) = (s_1 s_2 \dots s_n \dots)$$

λέγεται (αριστερή) μετατόπιση στον χώρο των ακολουθιών σε δύο σύμβολα.

Θα περιγράψουμε μερικές βασικές δυναμικές ιδιότητες της μετατόπισης. Προφανώς οι σταθερές ακολουθίες 000... και 111... είναι σταθερά σημεία της σ. Επίσης, κάθε τελικά σταθερή ακολουθία είναι τελικά σταθερό σημείο της σ. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.4.1(β), το σύνολο των τελικά σταθερών σημείων της σ είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2.

Εστω $s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ ένα περιοδικό σημείο της σ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma^N(s) = s$. Τότε, $s_N = s_0$, $s_{N+1} = s_1$,...,$s_{2N-1} = s_{N-1}$ και επαγωγικά $s_{n+N} = s_n$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Με άλλα λόγια, το μπλόκ των N πρώτων διαδοχικών όρων της s επαναλαμβάνεται. Είναι προφανές οτι το σύνολο $P_N(\sigma) = \{s \in \Sigma_2 : \sigma^N(s) = s\}$ έχει 2^N στοιχεία, όσο είναι το πλήθος των διατάξεων των δύο συμβόλων 0 και 1 σε N θέσεις. Συνεπώς, το σύνολο των περιοδικών σημείων $P(\sigma) = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} P_N(\sigma)$ είναι αριθμήσιμο.

Πρόταση 2.4.4. *Το σύνολο $P(\sigma)$ των περιοδικών σημείων της μετατόπισης είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2.*

Απόδειξη. Εστω $t = (t_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^N < \epsilon$. Αν $s = (s_n)_{n\geq 0}$ είναι η ακολουθία με $s_n = t_n$ για $0 \leq n \leq N$ και $s_{n+N} = s_n$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, τότε $s \in P_N(\sigma)$ και $d(s,t) \leq \dfrac{1}{2^N} < \epsilon$. Αυτό δείχνει οτι το $P(\sigma)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2. □

Εστω τώρα $t = (t_n)_{n\geq 0}$ και $s = (s_n)_{n\geq 0}$ δύο σημεία του Σ_2. Το t είναι οριακό σημείο της τροχιάς $\{\sigma^n(s) : n \in \mathbb{N}\}$ του s ακριβώς τότε όταν για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(t, \sigma^n(s)) < 1/2^N$. Τότε όμως $t_0 = s_n$, $t_1 = s_{n+1}$,...,$t_{N-1} = s_{n+N-1}$. Αυτό σημαίνει οτι το t είναι οριακό σημείο της τροχιάς του s ακριβώς τότε όταν κάθε πεπερασμένο μπλόκ διαδοχικών όρων της t εμφανίζεται κάπου στην s.

Πρόταση 2.4.5. *Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του Σ_2, του οποίου η τροχιά ως προς τη μετατόπιση είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2.*

Απόδειξη. Το σύνολο των λέξεων μήκους m από το αλφάβητο $\{0, 1\}$ αποτελείται από 2^m λέξεις. Συνεπώς, το σύνολο όλων των λέξεων οποιουδήποτε μήκους είναι αριθμήσιμο. Εστω $s^{(0)}$, $s^{(1)}$, $s^{(2)}$,..., $s^{(n)}$,... μια οποιαδήποτε αρίθμηση. Η ακολουθία $s = (s^{(0)}, s^{(1)}, s^{(2)}, ..., s^{(n)}, ...)$ είναι σημείο του Σ_2 στο οποίο εμφανίζονται όλα τα δυνατά πεπερασμένα μπλόκ διαδοχικών όρων οποιουδήποτε μήκους. Σύμφωνα με την παρατήρηση που προηγήθηκε, κάθε σημείο του Σ_2 είναι οριακό σημείο της τροχιάς του s. Δηλαδή, η τροχιά του s είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2. □

Ενα παράδειγμα σημείου του Σ_2 με τροχιά που είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 είναι η ακολουθία με αρχικούς όρους

$$0100011011...$$

και στη συνέχεια ακολουθούν όλες οι δυνατές λέξεις μήκους 3, ακολουθούμενες από όλες τις δυνατές λέξεις μήκους 4 κ.ο.κ. Το στοιχείο αυτό του Σ_2 λέγεται ακολουθία Morse και δεν είναι περιοδικό ούτε τελικά περιοδικό, αλλά η τροχιά του είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2.

Ασκήσεις

1. Εστω $X = \{s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2 : s_{n+1} = 1, \quad \text{όταν } s_n = 0\}$, δηλαδή το σύνολο X αποτελείται από όλες τις ακολουθίες στο Σ_2 που δεν έχουν δύο διαδοχικούς μηδενικούς όρους.
(α) Να αποδειχθεί οτι το X είναι σ-αναλλοίωτο, δηλαδή $\sigma(X) = X$.
(β) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο όλων των περιοδικών σημείων της μετατόπισης που περιέχονται στο X είναι πυκνό υποσύνολο του X.
(γ) Να αποδειχθεί οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του X, του οποίου η τροχιά ως προς τη μετατόπιση είναι πυκνό υποσύνολο του X.

2. Εστω $s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ το στοιχείο με $s_{2k} = 1$ και $s_{2k+1} = 0$ για κάθε ακέραιο $k \geq 0$. Να αποδειχθεί οτι το s είναι περιοδικό σημείο της μετατόπισης και να ευρεθεί το πεδίο έλξης του.

2.5 Τοπολογική συζυγία

Εστω X και Y δύο μετρικοί χώροι. Οι συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to X$ και $g : Y \to Y$ λέγονται *τοπολογικά συζυγείς* αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h : X \to Y$ ώστε $h \circ f = g \circ h$, δηλαδή το διάγραμμα που ακολουθεί είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Ο ομοιομορφισμός h λέγεται *τοπολογική συζυγία* της f με την g. Ειδικά, οι χώροι X και Y ταυτίζονται από τοπολογική άποψη. Επιπλέον, η δυναμική της f ταυτίζεται με τη δυναμική της g.

Αν η απεικόνιση h, όπως παραπάνω, δεν είναι ομοιομορφισμός, αλλά μόνο συνεχής και επί, τότε λέγεται *τοπολογική ημισυζυγία* και η f λέγεται *τοπολογικά ημισυζυγής* προς την g.

Πρόταση 2.5.1. *Εστω X και Y δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to X$ και $g : Y \to Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Αν η f είναι τοπολογικά συζυγής με την g μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας $h : X \to Y$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*
(α) Η $h^{-1} : Y \to X$ είναι τοπολογκή συζυγία της g με την f.
(β) $h \circ f^n = g^n \circ h$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(γ) Το $x \in X$ είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου N τότε και μόνον τότε όταν το $h(x) \in Y$ είναι περιοδικό σημείο της g περιόδου N. Επιπλέον, $W(h(x)) = h(W(x))$.
(δ) Η τροχιά του $x \in X$ από την f είναι πυκνό υποσύνολο του X τότε και μόνον τότε όταν η τροχιά του $h(x) \in Y$ από την g είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

Απόδειξη. Το (α) είναι προφανές γιατί η h^{-1} είναι επίσης ομοιομορφισμός και η ισότητα $h \circ f = g \circ h$ είναι ισοδύναμη με την $g = h \circ f \circ h^{-1}$, δηλαδή $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$.

Το (β) προκύπτει επαγωγικά, γιατί

$$h \circ f^n = (h \circ f) \circ f^{n-1} = (g \circ h) \circ f^{n-1} = g \circ (h \circ f^{n-1}) = \cdots = g^n \circ h.$$

Για το (γ) έχουμε $f^N(x) = x$ και ο ακέραιος $N \geq 1$ είναι ο ελάχιστος με αυτή την ιδιότητα. Συνεπώς,

$$h(x) = h(f^N(x)) = (h \circ f^N)(x) = (g^N \circ h)(x) = g^N(h(x)).$$

Επιπλέον, για κάθε $1 \leq n < N$ έχουμε

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) \neq h(x),$$

γιατί η h είναι ένα προς ένα, ως ομοιομορφισμός. Συνεπώς το $h(x) \in Y$ είναι περιοδικό σημείο της g περιόδου N. Το αντίστροφο αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Επειδή η h είναι ομοιομορφισμός, έχουμε τώρα $y \in W(h(x))$ ακριβώς τότε όταν $\lim\limits_{n \to +\infty} g^{nN}(y) = h(x)$, που είναι ισοδύναμο με $\lim\limits_{n \to +\infty} h^{-1}(g^{nN}(y)) = x$, δηλαδή $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{nN}(h^{-1}(y)) = x$ ή με άλλα λόγια $h^{-1}(y) \in W(x)$.

Τέλος, για το (δ), έστω $x \in X$ ένα σημείο του οποίου η τροχιά από την f είναι πυκνό υποσύνολο του X. Τότε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει μια ακολουθία θετικών ακεραίων $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{n_k}(x) = h^{-1}(y)$ και συνεπώς

$$y = \lim_{n \to +\infty} h(f^{n_k}(x)) = \lim_{n \to +\infty} g^{n_k}(h(x)),$$

αφού η h είναι συνεχής. Αυτό δείχνει οτι η τροχιά του $h(x)$ από την g είναι πυκνό υποσύνολο του Y. Το αντίστροφο αποδεικνύεται όμοια, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της h^{-1}. $\square$

Συνδυάζοντας την προηγούμενη Πρόταση 2.5.1 με την Πρόταση 2.4.2 και όσα την ακολουθούν, μαζύ με τις Προτάσεις 2.4.4 και 2.4.5, προκύπτει το ακόλουθο.

Πόρισμα 2.5.2. *Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, ο περιορισμός της λογιστικής απεικόνισης $f_\lambda|A : A \to A$ στο σύνολο Cantor $A \subset [0,1]$ είναι τοπολογικά συζυγής με τη μετατόπιση $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ στο χώρο των ακολουθιών δύο συμβόλων. Συνεπώς, ισχύουν τα ακόλουθα.*
(α) Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{x \in A : f_\lambda^N(x) = x\}$ έχει ακριβώς 2^N στοιχεία.
(β) Το σύνολο των περιοδικών σημείων της $f_\lambda|A$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του A.
(γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του A του οποίου η τροχιά από την f_λ είναι πυκνό υποσύνολο του A. $\square$

Παράδειγμα 2.5.3. Η λογιστική απεικόνιση f_4, που έχει τύπο $f_4(x) = 4x(1-x)$, είναι τοπολογικά συζυγής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ με την απεικόνιση «τέντα» $T : [0,1] \to [0,1]$ με

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{όταν } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2-2x, & \text{όταν } \dfrac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Πράγματι, η απεικόνιση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \sin^2(\pi x/2)$ είναι C^∞ και

$$h'(x) = \frac{\pi}{2}\sin(\pi x).$$

Συνεπώς, $h'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ και αφού $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, συμπεραίνουμε οτι η $h|[0,1] : [0,1] \to [0,1]$ είναι αύξων ομοιομορφισμός. Επιπλέον,

$$f_4(h(x)) = \sin^2(\pi x) = h(T(x))$$

για κάθε $0 \le x \le 1$, όπως εύκολα βλέπουμε. Με άλλα λόγια η $h|[0,1]$ είναι τοπολογική συζυγία της $f_4|[0,1]$ με την απεικόνιση «τέντα» T.

Ασκήσεις

1. Εστω a, b, $c \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = ax^2 + bx + c$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν λ, $\mu \in \mathbb{R}$, με $\lambda \neq 0$ και $d \in \mathbb{R}$, ώστε η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \lambda x + \mu$ να είναι τοπολογική συζυγία της f με την $q_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $q_d(x) = x^2 + d$.

2. Για κάθε $d \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την απεικόνιση $q_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $q_d(x) = x^2 + d$. Αν $d < 1/4$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένα μοναδικό $\lambda > 1$ ώστε η q_d να είναι τοπολογικά συζυγής με τη λογιστική απεικόνιση f_λ μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της μορφής $h(x) = \alpha x + \beta$, για κατάλληλα α, $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Να αποδειχθεί οτι για την απεικόνιση «τέντα» $T : [0,1] \to [0,1]$ το σύνολο

$$\{0 \le x \le 1 : T^N(x) = x\}$$

έχει 2^N στοιχεία για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί επίσης οτι το σύνολο των περιοδικών σημείων της T είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$. (Υπόδειξη: Το σύνολο των δυαδικών ρητών $D = \{k/2^n : 0 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από τελικά σταθερά σημεία της T. Δείξτε επαγωγικά οτι η T^n απεικονίζει «γραμμικά» κάθε κλειστό διάστημα $[k/2^n, k+1/2^n]$, $0 \leq k < 2^n$, επί του $[0,1]$. Χρησιμοποιείστε το γεγονός οτι το D είναι πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$.)

4. Να αποδειχθεί οτι για την λογιστική απεικόνιση f_4 το σύνολο $\{0 \leq x \leq 1 : f_4^N(x) = x\}$ έχει 2^N στοιχεία για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί επίσης οτι το σύνολο των περιοδικών σημείων της f_4 είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$.

2.6 Χάος

Στην παράγραφο αυτή θα συστηματοποιήσουμε σε θεωρία τις δυναμικές συμπεριφορές που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους μέσα από την έννοια του χάους. Η προσέγγιση μας είναι κατά βάση τοπολογική. Τα τρία συστατικά στοιχεία της χαοτικής συμπεριφοράς είναι η τοπολογική μεταβατικότητα, που είναι η ανάγωγη συμπεριφορά, η ύπαρξη περιοδικής συμπεριφοράς και η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, που αντιπροσωπεύει την μη-προβλέψιμη εξέλιξη.

Ορισμός 2.6.1. Εστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Η f λέγεται *τοπολογικά μεταβατική* όταν για κάθε ζεύγος μη-κενών ανοιχτών συνόλων U, $V \subset X$ υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ ώστε $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Αν η f είναι τοπολογικά μεταβατική, τότε προφανώς δεν υπάρχουν μη-κενά ανοιχτά σύνολα X_1, X_2 ξένα μεταξύ τους ώστε $f(X_1) \subset X_1$ και $f(X_2) \subset X_2$. Με αυτή την έννοια η δυναμική συμπεριφορά της f είναι ανάγωγη.

Παράδειγμα 2.6.2. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, η λογιστική απεικόνιση $f_\lambda|A : A \to A$ στο σύνολο Cantor $A \subset [0,1]$ είναι τοπολογικά μεταβατική. Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς της παραγράφου 2.3. Εστω x, $y \in A$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ ώστε $1/M^n < \epsilon$, όπου το $M > 1$ είναι αυτό του Λήμματος 2.3.4. Υπάρχουν $s_0, s_2, ..., s_{n-1} \in \{0,1\}$ ώστε $x \in I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.3, η $f_\lambda^n | I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}} : I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}} \to [0,1]$ είναι μονότονη και επί, οπότε υπάρχει ένα μοναδικό $z \in I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}}$ ώστε $f_\lambda^n(z) = y$, οπότε $z \in A$. Επειδή το μήκος του $I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}}$ είναι το πολύ $1/M^n$, έχουμε $|x - z| < \epsilon$. Δηλαδή υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ ώστε $y \in f_\lambda^n(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Από αυτό προκύπτει αμέσως οτι η $f_\lambda|A$ είναι τοπολογικά μεταβατική.

Είναι προφανές οτι η ιδιότητα της τοπολογικής μεταβατικότητας διατηρείται από τις τοπολογικές συζυγίες. Οπως δείχνει το επόμενο λήμμα, διατηρείται και από τις τοπολογικές ημισυζυγίες.

Λήμμα 2.6.3. *Εστω X και Y δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Υποθέτουμε οτι η f είναι τοπολογικά ημισυζυγής προς την g, δηλαδή υπάρχει μια συνεχής και επί απεικόνιση $h : X \to Y$ ώστε $h \circ f = g \circ h$. Αν η f είναι τοπολογικά μεταβατική, τότε και η g είναι τοπολογικά μεταβατική.*

Απόδειξη. Εστω U, $V \subset Y$ δύο μη-κενά ανοιχτά σύνολα. Τα $h^{-1}(U)$, $h^{-1}(V) \subset X$ είναι μη-κενά και ανοιχτά, επειδή η h είναι συνεχής και επί. Αφού η f είναι τοπολογικά μεταβατική, υπάρχει κάποιος ακέραιος $n \geq 1$ ώστε $f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \varnothing$. Ομως, $f^n(h^{-1}(U)) \subset h^{-1}(g^n(U))$, όπως εύκολα βλέπουμε. Συνεπώς,

$$h^{-1}(g^n(U) \cap V) = h^{-1}(g^n(U)) \cap h^{-1}(V) \supset f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \varnothing,$$

από όπου προκύπτει οτι $g^n(U) \cap V \neq \varnothing$. □

Η τοπολογική μεταβατικότητα μπορεί να περιγραφεί και με άλλους τρόπους, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Πρόταση 2.6.4. *Εστω X ένας πλήρης, διαχωρίσιμος μετρικός χώρος χωρίς μενονωμένα σημεία και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Η f είναι τοπολογικά μεταβατική τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x \in X$ του οποίου η τροχιά $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Εστω οτι η f είναι τοπολογικά μεταβατική. Αφού ο X υποτίθεται διαχωρίσιμος, έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο S. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ που αποτελείται από τις ανοιχτές μπάλλες με κέντρα τα σημεία του S και ρητές ακτίνες είναι αριθμήσιμη και αποτελεί βάση της τοπολογίας του X, δηλαδή κάθε ανοιχτό υποσύνολο του X είναι ένωση στοιχείων της οικογένειας $\mathcal{B}$. Αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει ένα σημείο του οποίου η τροχιά τέμνει κάθε στοιχείο της $\mathcal{B}$. Εστω B_1, B_2,..., B_n,... μια αρίθμηση της $\mathcal{B}$. Από την τοπολογική μεταβατικότητα, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{n_1}(B_1) \cap B_2 \neq \varnothing$. Εστω V_1 μια ανοιχτή μπάλλα ακτίνας το πολύ $1/2$ ώστε $\overline{V_1} \subset B_1 \cap f^{-n_1}(B_2)$. Υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{n_2}(V_1) \cap B_3 \neq \varnothing$. Εστω V_2 μια ανοιχτή μπάλλα ακτίνας το πολύ $1/4$ ώστε $\overline{V_2} \subset V_1 \cap f^{-n_1}(B_3)$. Επαγωγικά, υπάρχει μια ακολουθία θετικών ακεραίων $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και μια ακολουθία από ανοιχτές μπάλλες $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $\overline{V_{k+1}} \subset V_k \cap f^{-n_{k+1}}(B_{k+2})$ και η ακτίνα της V_k είναι το πολύ $1/2^k$. Τα κέντρα των μπαλλών αυτών αποτελούν μια ακολουθία Cauchy, που λόγω της πληρότητας συγκλίνει σε ένα σημείο $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$. Εχουμε τώρα $x \in B_1$ και $f^{n_{k-1}}(x) \in B_k$ για κάθε ακέραιο $k \geq 2$. Συνεπώς, η τροχιά $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ τέμνει κάθε στοιχείο της $\mathcal{B}$ και γιαυτό το λόγο είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Για το αντίστροφο, έστω οτι υπάρχει ένα σημείο $x \in X$ του οποίου η τροχιά είναι πυκνό υποσύνολο του X. Εστω U, $V \subset X$ δύο μη-κενά ανοιχτά σύνολα. Τότε υπάρχουν ακέραιοι $n \geq 0$, $m \geq 0$ ώστε $f^n(x) \in U$ και $f^m(x) \in V$. Επειδή υποτίθεται οτι ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, υπάρχει μια ακολουθία θετικών ακεραίων $n_k \to +\infty$ ώστε $\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = f^m(x)$. Υπάρχει λοιπόν $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n_k > n$ και $f^{n_k}(x) \in V$. Αν θέσουμε $N = n_k - n$, τότε $N \geq 1$ και $f^{n_k}(x) \in f^N(U) \cap V$. Αυτό δείχνει οτι η f είναι τοπολογικά μεταβατική. □

Οπως είναι γνωστό, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης και διαχωρίσιμος. Συνεπώς μια συνεχής απεικόνιση ενός συμπαγούς μετρικού χώρου χωρίς μεμονωμένα σημεία είναι τοπολογικά μεταβατική τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει τουλάχιστον μια παντού πυκνή τροχιά. Το ίδιο ισχύει και για συνεχείς απεικονίσεις του $\mathbb{R}$, αφού το $\mathbb{R}$ είναι ένας μη-συμπαγής, διαχωρίσιμος και χωρίς μεμονωμένα σημεία πλήρης μετρικός χώρος με τη συνηθισμένη απόσταση.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την έννοια της μη-προβλέψιμης εξέλιξης ενός διακριτού συστήματος.

Ορισμός 2.6.5. Εστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \to X$ παρουσιάζει *ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες* όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$ υπάρχουν $y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ με $d(x,y) < \epsilon$ και $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

Είναι προφανές οτι μια συστολή δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 2.6.6. Η μετατόπιση $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ του μετρικού χώρου των ακολουθιών σε δύο σύμβολα 0 και 1 παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Εστω $s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^N < \epsilon$. Θεωρούμε το στοιχείο $t = (t_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2$ με $t_n = s_n$ για $0 \leq n \leq N$ και $t_n \neq s_n$ για $n > N$. Τότε $d(s,t) \leq 1/2^N < \epsilon$ και για κάθε $n > N$ έχουμε

$$d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_{k+n} - t_{k+n}|}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Σε αντίθεση με την τοπολογική μεταβατικότητα η ιδιότητα της ευαίσθητης εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες δεν διατηρείται απο τις τοπολογικές συζυγίες, εκτός εάν οι χώροι είναι συμπαγείς, όπως θα δείξουμε παρακάτω. Για παράδειγμα, οι συνεχείς απεικονίσεις $f : (0,1) \to (0,1)$ με $f(x) = x^2$ και $g : (1,+\infty) \to (1,+\infty)$ με τον ίδιο τύπο $g(x) = x^2$ είναι τοπολογικά συζυγείς. Μια τοπολογική συζυγία είναι η $h : (0,1) \to (1,+\infty)$ με $h(x) = 1/x$. Η f δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Πράγματι, επειδή $0 < f'(x) < 1$ για κάθε $0 < x < 1/2$, προκύπτει οτι $f(0,1/2) \subset (0,1/2)$ και $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ για κάθε $x,\ y \in (0,1/2)$. Επαγωγικά,

$$|f^n(x) - f^n(y)| < |x - y|$$

για κάθε $x,\ y \in (0,1/2)$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $\delta > 0$ αν διαλέξουμε οποιοδήποτε $0 < x < 1/2$ και $0 < \epsilon < \delta$ αρκετά μικρό ώστε $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (0,1/2)$, τότε για κάθε $y \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ έχουμε $|f^n(x) - f^n(y)| < \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει οτι η f δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Από την άλλη μεριά, $g'(x) > 2$ για κάθε $x > 1$ και συνεπώς

$$|g^n(x) - g^n(y)| \geq 2^n |x - y|$$

για κάθε $x,\ y > 1$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εστω τώρα $x > 1$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^{n-1} < \epsilon$ και τότε

$$|g^n(x) - g^n(x + \frac{\epsilon}{2})| \geq 2^{n-1}\epsilon > 1.$$

Αυτό σημαίνει οτι η g παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Πρόταση 2.6.7. *Εστω (X,d) και (Y,ρ) δύο συμπαγείς μετρικοί χώροι και $f : X \to X$ και $g : Y \to Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Υποθέτουμε οτι η f παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Αν η f είναι τοπολογικά συζυγής με τη g, τότε και η*

g παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.5.1, αρκεί να δείξουμε οτι αν η f δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, το ίδιο ισχύει και για την g. Υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h : X \to Y$ με $h \circ f = g \circ h$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, η h είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ετσι, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $\rho(h(x), h(x')) < \delta$ για κάθε x, $x' \in X$ με $d(x, x') < \theta$. Αφού η f δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, υπάρχουν $x \in X$ και $\epsilon > 0$ ώστε $d(f^n(x), f^n(x')) < \theta$ για κάθε $x' \in X$ με $d(x, x') < \epsilon$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\rho(g^n(h(x)), g^n(h(x'))) = \rho(h(f^n(x)), h(f^n(x'))) < \delta$$

για κάθε $x' \in X$ με $d(x, x') < \epsilon$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $y = h(x)$. Από τη συνέχεια της h^{-1}, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε $d(x, h^{-1}(y')) < \epsilon$ για κάθε $y' \in Y$ με $d(y, y') < \eta$. Προκύπτει οτι $\rho(g^n(y), g^n(y')) < \delta$ για κάθε $y' \in Y$ με $d(y, y') < \eta$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει οτι η g δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. □

Το γενικό Θεώρημα που ακολουθεί εξασφαλίζει την ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες από άλλες καθαρά τοπολογικού χαρακτήρα δυναμικές ιδιότητες.

Θεώρημα 2.6.8. *Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος που δεν είναι πεπερασμένο σύνολο και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν το σύνολο των περιοδικών σημείων της f είναι πυκνό υποσύνολο του X και η f είναι τοπολογικά μεταβατική, τότε παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα την ύπαρξη ενός $\delta > 0$ τέτοιου ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα περιοδικό σημείο $p \in X$ της f με $d(x, f^n(p)) \geq 4\delta$ για κάθε $n \geq 0$. Επειδή υποθέτουμε οτι ο X δεν είναι πεπερασμένο σύνολο, το σύνολο των περιοδικών σημείων δεν είναι πεπερασμένο, γιατί είναι πυκνό υποσύνολο του X, από υπόθεση. Ειδικά, υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικές περιοδικές τροχιές, δηλαδή υπάρχουν δύο περιοδικά σημεία p_1, $p_2 \in X$ ώστε $f^n(p_1) \neq f^m(p_2)$ για κάθε ζεύγος ακεραίων $n \geq 0$, $m \geq 0$. Λόγω της περιοδικότητας, υπάρχει δ με

$$0 < \delta < \frac{1}{8} d(f^n(p_1), f^m(p_2))$$

για κάθε $n \geq 0$, $m \geq 0$. Για κάθε $x \in X$ έχουμε τώρα

$$8\delta < d(f^n(p_1), x) + d(x, f^m(p_2))$$

για κάθε $n \geq 0$, $m \geq 0$, από την τριγωνική ανισότητα. Αρα είτε $d(x, f^n(p_1)) \geq 4\delta$ για κάθε $n \geq 0$ είτε $d(x, f^n(p_2)) \geq 4\delta$ για κάθε $m \geq 0$. Αυτό αποδεικνύει τον αρχικό ισχυρισμό.

Εστω τώρα $x \in X$ και $0 < \epsilon < \delta$ οποιαδήποτε. Επιλεγουμε ένα περιοδικό σημείο $p \in X$ της f με $d(x, f^n(p)) \geq 4\delta$ για κάθε $n \geq 0$. Λόγω της πυκνότητας, υπάρχει ένα περιοδικό σημείο $q \in X$ με $d(x, q) < \epsilon$. Εστω $N \in \mathbb{N}$ η περίοδος του q. Από τη συνέχεια, υπάρχει $0 < \theta < \delta$ ώστε $d(f^n(z), f^n(p)) < \delta$ για κάθε $0 \leq n \leq N$, όταν $z \in X$ και $d(z, p) < \theta$. Επειδή η f είναι τοπολογικά μεταβατική, υπάρχει $y \in X$ με $d(x, y) < \epsilon$ και κάποιος ακέραιος $m \geq 1$ ώστε $d(f^m(y), p) < \theta$, οπότε

$$d(f^{m+n}(y), f^n(p)) < \delta$$

για κάθε $0 \leq n \leq N$.

Υπάρχει κάποιος ακέραιος $m \leq n \leq m+N$ που διαιρείται από το N και επειδή το q είναι περιοδικό σημείο περιόδου N έχουμε

$$4\delta \leq d(x, f^{n-m}(p)) \leq d(x, f^n(q)) + d(f^n(q), f^n(y)) + d(f^n(y), f^{n-m}(p))$$
$$< d(x,q) + d(f^n(q), f^n(y)) + \delta < 2\delta + d(f^n(q), f^n(y)),$$

δηλαδή

$$2\delta < d(f^n(q), f^n(y)) \leq d(f^n(q), f^n(x)) + d(f^n(x), f^n(y)).$$

Από αυτό προκύπτει οτι είτε $d(f^n(q), f^n(x)) > \delta$ είτε $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Σε κάθε περίπτωση, συμπεραίνουμε οτι υπάρχει $w \in X$, που μπορεί να είναι το q ή το y, ώστε $d(x, w) < \epsilon$ και $d(f^n(x), f^n(w)) > \delta$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, αυτό που εντοπίσαμε παραπάνω. Αυτά δείχνουν οτι η f παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. $\square$

Αν ο μετρικός χώρος X είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε οι υποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος 2.6.8 για την f συνεπάγονται οτι ολόκληρος ο X είναι μια περιοδική τροχιά. Η περίπτωση αυτή λοιπόν είναι τετριμένη και δεν έχει ενδιαφέρον.

Οι προηγούμενες δυναμικές συμπεριφορές συμποσούνται στην έννοια του χάους.

Ορισμός 2.6.9. Εστω X ένας μετρικός χώρος. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \to X$ λέγεται *χαοτική* όταν
(α) το σύνολο των περιοδικών σημείων της f είναι πυκνό υποσύνολο του X,
(β) η f είναι τοπολογικά μεταβατική και
(γ) η f παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση απο τις αρχικές συνθήκες.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.6.8, η ιδιότητα (γ) προκύπτει από τις άλλες δύο, όταν ο X δεν είναι πεπερασμένο σύνολο. Δηλαδή, μια συνεχής απεικόνιση ενός μη-πεπερασμένου μετρικού χώρου είναι χαοτική όταν είναι τοπολογικά μεταβατική και το σύνολο των περιοδικών σημείων της είναι παντού πυκνό. Συνεπώς, η χαοτική συμπεριφορά διατηρείται από τοπολογικές συζυγίες συνεχών απεικονίσεων μη-πεπερασμένων μετρικών χώρων.

Τα αποτελέσματα των παραγράφων 2.3, 2.4 και 2.5 δείχνουν οτι για $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ η λογιστική απεικόνιση $f_\lambda | A : A \to A$ στο σύνολο Cantor $A \subset [0,1]$ είναι χαοτική, όπως επίσης και η τοπολογικά συζυγής της μετατόπιση $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ στο χώρο των ακολουθιών σε δύο σύμβολα.

Ασκήσεις

1. Εστω $T : [0,1] \to [0,1]$ η απεικόνιση «τέντα» με

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{όταν } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η T είναι τοπολογικά μεταβατική.
(β) Να αποδειχθεί, χωρίς χρήση του Θεωρήματος 2.6.8, οτι η T παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.
(γ) Να αποδειχθεί οτι η T είναι χαοτική.

2. Να αποδειχθεί οτι η λογιστική απεικόνιση $f_4 : [0,1] \to [0,1]$ με $f_4(x) = 4x(1-x)$ είναι χαοτική.

3. Αν $X = \{s = (s_n)_{n\geq 0} \in \Sigma_2 : s_{n+1} = 1, \quad \text{όταν } s_n = 0\}$, να αποδειχθεί οτι ο περιορισμός της μετατόπισης $\sigma|X$ στο X είναι χαοτική απεικόνιση.

4. Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν για οποιαδήποτε δύο κλειστά διαστήματα (όχι μονοσύνολα) $I,\ J \subset X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $J \subset f^n(I)$, να αποδειχθεί οτι η f είναι χαοτική.

5. Να αποδειχθεί οτι η τετραγωνική απεικόνιση $q : [-2,2] \to [-2,2]$ με $q(x) = x^2 - 2$ είναι χαοτική. (Υπόδειξη: Δείξτε οτι η q είναι τοπολογικά συζυγής με τη λογιστική απεικόνιση $f_4 : [0,1] \to [0,1]$.)

2.7 Το Θεώρημα του Sarkovskii

Η θεωρία του A.N. Sarkovskii αφορά την ύπαρξη περιοδικών σημείων για συνεχείς απεικονίσεις του $\mathbb{R}$. Η περίπτωση των ομοιομορφισμών είναι σχετικά απλή.

Πρόταση 2.7.1. *Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ένας ομοιομορφισμός. Αν ο f είναι αύξων, δεν έχει κανένα μη-σταθερό περιοδικό σημείο. Αν είναι φθίνων, τότε κάθε μη-σταθερό περιοδικό σημείο του έχει περίοδο* 2.

Απόδειξη. Εστω οτι ο f είναι ένας αύξων ομοιομορφισμός και $x \in \mathbb{R}$ ένα μή-σταθερό σημείο, δηλαδή $f(x) \neq x$. Αν $f(x) > x$, επαγωγικά βλέπουμε οτι $f^n(x) > \cdots > f(x) > x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, το x δεν είναι περιοδικό σημείο του f. Ομοια όταν $f(x) < x$, τότε $f^n(x) < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εστω τώρα οτι ο f είναι ένας φθίνων ομοιομορφισμός και $x \in \mathbb{R}$ ένα περιοδικό σημείο περιόδου $N > 1$. Τότε ο f^2 είναι αύξων ομοιομορφισμός και $(f^2)^N = f^N(f^N(x)) = x$. Κατά συνέπεια, το x είναι σταθερό σημείο του f^2, οπότε το x είναι είτε σταθερό σημείο είτε περιοδικό σημείο της f περιόδου 2. $\square$

Στην περίπτωση των μη-αντιστρέψιμων συνεχών απεικονίσεων του $\mathbb{R}$ η κατάσταση όσο αφορά την ύπαρξη περιοδικών σημείων είναι πολύ πιο περίπλοκη.

Λήμμα 2.7.2. *Εστω $J = [a,b]$ και $I = [c,d]$, όπου $a < b$ και $c < d$. Αν $f : J \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $I \subset f(J)$, τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $J_0 \subset J$ ώστε $f(J_0) = I$.*

Απόδειξη. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχουν $x_0,\ y \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = c$ και $f(y) = d$. Προφανώς $x_0 \neq y$. Θα υποθέσουμε οτι $y > x_0$, ενώ η αποδειξη είναι ανάλογη όταν $y < x_0$. Θέτουμε $b_0 = \inf\{y \in (x_0, b] : f(y) = d\}$ και $a_0 = \sup\{x \in [x_0, b_0] : f(x) = c\}$. Τότε $f(a_0) = c$ και $f(b_0) = d$, ενώ από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε $f(I_0) = I$, αν θέσουμε $J_0 = [a_0, b_0]$. $\square$

Λήμμα 2.7.3. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \to I$ μια συνεχής απεικόνιση. Εστω $(I_n)_{n\geq 0}$ μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων στο I με την ιδιότητα $I_{n+1} \subset f(I_n)$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Τότε υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $(J_n)_{n\geq 0}$ στο*

I_0 ώστε $f^n(J_n) = I_n$ για κάθε $n \geq 1$ και συνεπώς υπάρχει $x_0 \in I_0$ ώστε $f^n(x_0) \in I_n$ για κάθε $n \geq 0$.

Απόδειξη. Επειδή $I_1 \subset f(I_0)$, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $J_1 \subset I_0$ ώστε $f(J_1) = I_1$, από το Λήμμα 2.7.2. Προχωρούμε επαγωγικά. Εστω οτι υπάρχουν κλειστά διαστήματα $J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n$ ώστε $f^k(J_k) = I_k$ για κάθε $1 \leq k \leq n$. Αφού $I_{n+1} \subset f(I_n)$, από το Λήμμα 2.7.2 υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $\tilde{I}_{n+1} \subset I_n = f(J_n)$ ώστε $f(\tilde{I}_{n+1}) = I_{n+1}$ και για τον ίδιο λόγο υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $J_{n+1} \subset J_n$ ώστε $f^n(J_{n+1}) = \tilde{I}_{n+1}$. Κατά συνέπεια, $f^{n+1}(J_{n+1}) = I_{n+1}$. □

Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Ενα πεπερασμένο σύνολο $\{I_0, I_1, ..., I_n\}$ κλειστών διαστημάτων, που περιέχονται στο I, λέγεται διαμέριση όταν ανά δύο μεταξύ τους δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Αν $f : I \to I$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε λέμε γράφημα Markov της f ως προς αυτή τη διαμέριση το γράφημα με κορυφές τα στοιχεία της διαμέρισης και πλευρές τα ζεύγη (I_i, I_j) με $f(I_i) \supset I_j$. Συνήθως τις πλευρές θα συμβολίζουμε με $I_i \to I_j$.

Ενα κλειστό τόξο στο γράφημα Markov είναι της μορφής

$$I_{i_0} \to I_{i_1} \to \cdots \to I_{i_{k-1}} \to I_{i_0}$$

και μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ένός περιοδικού σημείου $x \in I_{i_0}$ με $f^k(x) = x$. Η περίοδος του x ενδεχομένως να είναι μικρότερη από k. Αν τα κλειστά διαστήματα I_{i_0}, I_{i_1},...,$I_{i_{k-1}}$ είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε το x έχει περίοδο k.

Πρόταση 2.7.4. *Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 3, τότε έχει περιοδικά σημεία κάθε περιόδου.*

Απόδειξη. Εστω $\{p_1, p_2, p_3\}$ μια περιοδική τροχιά περιόδου 3, δηλαδή $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_3$ και $f(p_3) = p_1$. Θα αποδείξουμε το συμπέρασμα στην περίπτωση που $p_1 < p_2 < p_3$. Ο χειρισμός της περίπτωσης $p_1 < p_3 < p_2$ είναι ανάλογος. Θεωρούμε τη διαμέριση $\{I_1, I_2\}$, όπου $I_1 = [p_2, p_3]$ και $I_2 = [p_1, p_2]$. Τότε $f(I_2) \supset I_1$ και $f(I_1) \supset I_1 \cup I_2$. Συνεπώς, στο γράφημα Markov της f ως προς αυτή τη διαμέριση περιέχεται το υπογράφημα

$$\circlearrowright I_1 \leftrightarrows I_2.$$

Το γράφημα Markov ενδεχομένως να περιέχει και την πλευρά $I_2 \to I_2$. Το τόξο

$$I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_2 \to I_1$$

που αποτελείται από $n > 3$ πλευρές και το Λήμμα 2.7.3 εξασφαλίζουν την ύπαρξη ενός κλειστού διαστήματος $J \subset I_1$ ώστε $f^k(J) \subset I_1$, για $1 \leq k \leq n-2$, $f^{n-1}(J) \subset I_2$ και $f^n(J) = I_1 \supset J$. Συνεπώς, υπάρχει $x_0 \in J$ ώστε $f^n(x_0) = x_0$, από την Πρόταση 2.1.1. Θα δείξουμε οτι το x_0 έχει περίοδο n. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο, υποθέτοντας οτι υπάρχει κάποιο $0 < i < n$ ώστε $f^i(x_0) = x_0$. Αν συμβαίνει αυτό, τότε $f^{n-1}(x_0) = f^{i-1}(x_0) \in I_1$, οπότε $f^{n-1}(x_0) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ και κατά συνέπεια

$$x_0 = f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0)) = f(p_2) = p_3.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον, γιατί $f(p_3) = p_1 \notin I_1$. Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει οτι για κάθε ακέραιο $n > 3$ η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου n.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται οτι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2 θεωρώντας το τόξο

$$I_2 \to I_1 \to I_2.$$

Σε αυτή την περίπτωση, το Λήμμα 2.7.3 εξασφαλιζει την ύπαρξη ενός κλειστού διαστήματος $J \subset I_2$ ώστε $f(J) \subset I_1$ και $f^2(J) = I_2 \supset J$. Συνεπώς, υπάρχει $y_0 \in J$ ώστε $f^2(y_0) = y_0$. Αν το y_0 είναι σταθερό σημείο της f, τότε $y_0 \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ και $y_0 = f(y_0) = p_3$, που είναι αντίφαση. □

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να φαίνεται ενδεχομένως μη-αναμενόμενη, δεν είναι όμως παρά ειδική περίπτωση ενός πολύ γενικότερου θεωρήματος, που αποδείχθηκε από τον A.N. Sarkovskii το 1964. Για την διατύπωση του Θεωρήματος ο Sarkovskii όρισε μια διάταξη $\rhd$ των φυσικών αριθμών ως εξής:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd 2\cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd 2^2\cdot 7 \rhd \cdots$$

$$\cdots \rhd 2^n\cdot 3 \rhd 2^n\cdot 5 \rhd 2^n\cdot 7 \rhd \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots \rhd 2^m \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

Δηλαδή, πρώτα έχουμε γράψει τους περιττούς φυσικούς αριθμούς με αύξουσα σειρά, εκτός από το 1, μετά τα διπλάσια τους, μετά τα τετραπλάσια τους, μετά τα οκτακλάσια τους κ.ο.κ. Στο τέλος υπάρχουν οι δυνάμεις του 2 σε φθίνουσα σειρά και τελευταίο το 1.

Θεώρημα 2.7.5. *Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου $n \geq 1$ και $n \rhd m$, τότε η f έχει και περιοδικό σημείο περιόδου m.*

Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια δεν είναι αυτή του Sarkovskii, η οποία ήταν περίπλοκη, αλλά νεότερη. Παρουσιάστηκε το 1980 από τους L.S. Block, J. Guckenheimmr, M. Misiurewicz, L.S. Young και είναι στοιχειώδους συνδυαστικού χαρακτήρα. Για την καλυτερη παρουσίαση, την έχουμε χωρίσει σε μια σειρά από Λήμματα.

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση και x ένα περιοδικό σημείο της f περιόδου n. Εστω $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1}$ τα σημεία της τροχιάς του x, που φυσικά ορίζουν μια διαμέριση του κλειστού διαστήματος $[x_0, x_{n-1}]$ σε $n-1$ κλειστά υποδιαστήματα. Θα περιγράψουμε πρώτα ιδιότητες του γραφήματος Markov της f ως προς αυτή τη διαμέριση.

Λήμμα 2.7.6. *Υπάρχει μια κορυφή $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$ ώστε $I_1 \to I_1$ και μάλιστα*

$$f(x_{a+1}) \leq x_a < x_{a+1} \leq f(x_a).$$

Συνεπώς η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο I_1.

Απόδειξη. Αφού $f(x_0) > x_0$ και $f(x_{n-1}) < x_{n-1}$, υπάρχει κάποιος ακέραιος $0 < a < n-1$ ώστε

$$x_a = \max\{x_k : f(x_k) > x_k\}.$$

Θέτουμε $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$. Τότε $f(x_a) > x_a$ και συνεπώς $f(x_a) \geq x_{a+1}$, ενώ $f(x_{a+1}) < x_{a+1}$, οπότε $f(x_{a+1}) \leq x_a$. Προφανώς $f(I_1) \supset I_1$. □

Στη συνέχεια με I_1 θα συμβολίζουμε πάντα το κλειστό διάστημα του Λήμματος 2.7.6.

Λήμμα 2.7.7. *Για κάθε κορυφή J του γραφήματος Markov υπάρχει ένα τόξο από το I_1 στο J.*

Απόδειξη. Εστω V_i το σύνολο των κορυφών του γραφήματος Markov που είναι τελικές τόξων μήκους i με αρχική κορυφή το I_1. Δηλαδή, $K \in V_i$ όταν υπάρχει ένα τόξο

$$I_1 \to K_2 \to \cdots \to K_i,$$

όπου $K_i = K$. Αφού $I_1 \to I_1$, το τόξο $I_1 \to I_1 \to K_2 \to \cdots \to K_i = K$ από το I_1 στο K έχει μήκος $i+1$. Αυτό δείχνει οτι $V_i \subset V_{i+1}$. Αν λοιπόν θέσουμε $U_i = \bigcup_{K \in V_i} K$, τότε $U_i \subset U_{i+1}$. Επειδή το πλήθος των κορυφών είναι $n-1$, υπάρχει κάποιο $1 \leq i \leq n$ ώστε $V_i = V_{i+1}$. Από αυτό προκύπτει οτι για κάθε $K \in V_i$ η f απεικονίζει τα άκρα του K μέσα στο U_i. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή $f(z) \notin U_i$, για κάποιο άκρο z του K, τότε το κλειστό διάστημα $f(K)$ περιέχει κάποια κορυφή του γραφήματος Markov, με ένα άκρο το z, η οποία δεν περιέχεται στο V_i, αλλά περιέχεται στο V_{i+1}. Αυτό αντιφάσκει με την επιλογή του i. Από αυτό προκύπτει οτι $f(U_i \cap \{x_0, x_1, ..., n_{n-1}\}) \subset U_i \cap \{x_0, x_1, ..., n_{n-1}\}$. Αυτό όμως μπορεί να συμβεί μόνο όταν $U_i = [x_0, x_{n-1}]$, που σημαίνει οτι το V_i είναι το σύνολο όλων των κορυφών. □

Λήμμα 2.7.8. *Εστω οτι δεν υπάρχει κορυφή του γραφήματος Markov διαφορετική από το I_1, από την οποία εκκινεί τόξο με κατάληξη το I_1. Τότε η f απεικονίζει τα σημεία της τροχιάς του x που βρίσκονται στα αριστερά του εσωτερικού του I_1 στα σημεία που βρίσκονται στα δεξιά και αντίστροφα. Συνεπώς, η περίοδος του x είναι άρτια και η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 2.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει $x_i < x_a$ ώστε $f(x_i) \leq x_a$, τότε θέτοντας

$$x_{i_0} = \max\{x_i < x_a : f(x_i) \leq x_a\}$$

έχουμε $f(x_{i_0+1}) \geq x_{a+1}$. Συνεπώς, $f([x_{i_0}, x_{i_0+1}]) \supset [x_a, x_{a+1}] = I_1$, που αντιφάσκει με την υπόθεση. Αυτό δείχνει οτι για κάθε $x_i \leq x_a$ έχουμε $f(x_i) \geq x_{a+1}$, ενώ όμοια αποδεικνύεται οτι $f(x_i) \leq x_a$ για κάθε $x_i \geq x_{a+1}$. Συμπεραίνουμε από αυτό οτι το x έχει άρτια περίοδο. Αν τώρα $J_0 = [x_0, x_a]$ και $J_1 = [x_{a+1}, x_{n-1}]$, τότε $f(J_0) \supset J_1$ και $f(J_1) \supset J_0$. Κατά συνέπεια υπάρχει $y \in J_0$ με $f(y) \in J_1$ και $f^2(y) = y$, δηλαδή το y είναι περιοδικό σημείο περιόδου 2. □

Λήμμα 2.7.9. *Εστω οτι υπάρχουν περιοδικά σημεία με περιττές περιόδους. Εστω οτι $n > 1$ είναι η ελάχιστη περιττή περίοδος και οτι το x είναι ένα περιοδικό σημείο περιόδου n. Τότε το γράφημα Markov περιέχει τα τόξα*

$$I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_1 \to I_1$$

και $I_{n-1} \to I_{2i+1}$ για κάθε $2i+1 < n$. Επιπλέον, δεν υπάρχει πλευρά της μορφής $I_j \to I_{j+k}$ για $k > 1$.

Απόδειξη. Από τα Λήμματα 2.7.6, 2.7.7 και 2.7.8 προκύπτει οτι υπάρχουν κορυφές I_2,...,I_k ώστε $f(I_k) \supset I_1$, για τις οποίες υπάρχει ένα τόξο

$$I_1 \to I_2 \to \cdots I_k \to I_1$$

Εστω $k > 1$ ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο υπάρχει τέτοιο τόξο. Αν $k < n-1$ και ο k είναι περιττός, τότε το παραπάνω τόξο δίνει ένα περιοδικό σημείο περιττής περιόδου μικρότερης από n, που αντιφάσκει με την επιλογή του n. Αν $k < n-1$ και ο k είναι άρτιος, τότε το τόξο

$$I_1 \to I_2 \to \cdots I_k \to I_1 \to I_1$$

δίνει πάλι ένα περιοδικό σημείο περιττής περιόδου μικρότερης από n. Κατά συνέπεια, πράπει $k = n-1$, δηλαδή ο $n-1$ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος για τον οποίο υπάρχει τόξο της μορφής

$$I_1 \to I_2 \to \cdots I_{n-1} \to I_1.$$

Αυτό σημαίνει οτι δεν υπάρχει πλευρά της μορφής $I_j \to I_{j+k}$ για $k > 1$.

Επειδή το x δεν έχει περίοδο 2, έχουμε $f(x_a) > x_{a+1}$ ή $f(x_{a+1}) < x_a$. Θα υποθέσουμε το δεύτερο, αφού η συνέχεια της απόδειξης υποθέτοντας το πρώτο είναι ανάλογη. Τότε $f(x_a) = x_{a+1}$ και $f(x_{a+1}) = x_{a-1}$, γιατί αλλιώς το διάστημα $f(I_1)$ εκτός από τα I_1, I_2 θα περιείχε ακόμα μια κορυφή και θα είχαμε μια πλευρά της μορφής $I_1 \to I_{1+k}$ για κάποιο $k > 1$, που είναι αδύνατον, όπως είδαμε. Αυτό όμως σημαίνει οτι $I_2 = [x_{a-1}, x_a]$, δηλαδή το I_2 είναι το πρώτο διάστημα της διαμέρισης αριστερά του I_1. Αφού $f(x_a) = x_{a+1}$ και $f(x_{a-1}) \neq x_{a+1}, x_a, x_{a-1}$, πρέπει $f(x_{a-1}) = x_{a+2}$, γιατί αλλιώς το $f(I_2)$ θα περιείχε περισσότερες από μια κορυφές, οπότε πάλι θα υπήρχε πλευρά της μορφής $I_2 \to I_{2+k}$ για κάποιο $k > 1$, που είναι αδύνατον. Συνεπώς, $I_3 = [x_{a+1}, x_{a+2}]$, δηλαδή το I_3 είναι το πρώτο διάστημα της διαμέρισης δεξιά του I_1. Επαγωγικά τώρα επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε οτι τα διαστήματα με άρτιο δείκτη βρίσκονται αριστερά του I_1, ενώ αυτά με περιττό δείκτη βρισκονται δεξιά του I_1. Μάλιστα είναι διατεταγμένα με την παρακάτω σειρά

$$I_{n-1}, ..., I_2, I_1, I_3, ..., I_{n-2}.$$

Για $1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}$, το $f(I_{2i})$ περιέχει το I_{2i+1} και καμία άλλη κορυφή. Κατά συνέπεια, $f(x_1) = x_{n-1}$ και $x_{n-1} \in f(I_{n-1})$. Από την άλλη μεριά, $f(I_{n-1}) \supset I_1$, από όπου συμπεραίνουμε οτι $f(I_{n-1}) \supset [x_a, x_{n-1}]$, οπότε το $f(I_{n-1})$ περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος Markov που βρίσκονται δεξιά του I_1 και είναι αυτές με περιττό δείκτη. Δηλαδή, το γράφημα Markov περιέχει τα τόξα της μορφής $I_{n-1} \to I_{2i+1}$ για κάθε $2i+1 < n$. $\square$

$$\begin{array}{ccccc}
I_1 & \leftrightarrows & I_1 & \longrightarrow & I_2 \\
 & & \big\uparrow & & \big\downarrow \\
I_{n-2} & \leftrightarrows & I_{n-1} & \longrightarrow & I_3 \\
\big\uparrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\cdots & \longleftarrow & I_5 & \longleftarrow & I_4
\end{array}$$

Πόρισμα 2.7.10. *Αν το x είναι περιοδικό σημείο της f περιττής περιόδου $n > 1$, τότε η f έχει περιοδικά σημεία κάθε περιόδου μεγαλύτερης του n και κάθε άρτιας περιόδου μικρότερης από n.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οτι το x είναι ένα περιοδικό σημείο με την ελάχιστη περιττή περίοδο $n > 1$. Από την υπόθεση προκύπτει οτι τέτοιο σημείο υπάρχει. Εστω $m > n$ ένας ακέραιος. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Λήμμα 2.7.9. Θεωρώντας το τόξο μήκους m

$$I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_1$$

εξασφαλίζουμε την ύπαρξη περιοδικού σημείου περιόδου m.

Αν πάλι $m = 2i < n$, τότε το τόξο

$$I_{n-1} \to I_{n-2i} \to I_{n-2i+1} \to \cdots \to I_{n-1}$$

εξασφαλίζει την ύπαρξη περιοδικού σημείου περιόδου $2i$. $\square$

Λήμμα 2.7.11. *Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο άρτιας περιόδου, τότε έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 2.*

Απόδειξη. Εστω $n \geq 2$ ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο η f έχει περιοδικό σημείο x περιόδου n. Θα δείξουμε οτι $n = 2$ με απαγωγή στο άτοπο. Εστω λοιπόν οτι $n > 2$. Τότε ο n είναι άρτιος, από το Πόρισμα 2.7.10 και υπάρχει μια κορυφή I_k του γραφήματος Markov με $f(I_k) \supset I_1$, από το Λήμμα 2.7.8. Οπως στην αρχή της απόδειξης του Λήμματος 2.7.9, αποδεικνύεται οτι ο ελάχιστος k για τον οποίο υπάρχει ένα τόξο της μορφής

$$I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1$$

είναι ο $k = n-1$ και δεν υπάρχει πλευρά της μορφής $I_i \to I_{i+j}$ με $j > 1$, επειδή η f δεν έχει περιοδικά σημεία με περίοδο μικρότερη από n. Επειδή υποθέτουμε οτι το x δεν έχει περίοδο 2, δηλαδή $n > 2$, όπως στην κατάληξη της απόδειξης του Λήμματος 2.7.9, αποδεικνύεται οτι $I_{n-1} \to I_{2i}$, όταν $2i < n$. Υπάρχει λοιπόν ένα τόξο της μορφής

$$I_{n-1} \to I_{n-2} \to I_{n-1},$$

γιατί ο $n-2$ είναι άρτιος. Αυτό συνεπάγεται όμως την ύπαρξη ενός περιοδικού σημείου περιόδου 2. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.7.5. (α) Εστω οτι η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου $n = 2^k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και $n \rhd m$. Τότε $m = 2^l$ για κάποιο ακέραιο $l \geq 0$ με $l < k$. Αν $l = 0$, τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο, γιατί $I_1 \to I_1$ και η f έχει σταθερό σημείο στο I_1, από το Λήμμα 2.7.6. Εστω λοιπόν οτι $l > 0$. Θέτουμε $g = f^{m/2}$. Τότε

$$g^{2^{k-l+1}} = (f^{2^{l-1}})^{2^{k-l+1}} = f^{2^k}$$

και συνεπώς η g έχει περιοδικό σημείο άρτιας περιόδου. Από το Λήμμα 2.7.10, η g έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2, το οποίο είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου m.

(β) Εστω οτι η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου $n = 2^k p$, για κάποιο περιττό $p \in \mathbb{N}$ και κάποιο ακέραιο $k \geq 0$. Αν $n \rhd m$, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

(β1) Οταν $m = 2^k q$, για κάποιο περιττό ακέραιο $q > p$, τότε η $g = f^{2^k}$ έχει περιοδικό σημείο περιόδου p και επειδή $q > p$, έχει περιοδικό σημείο περιόδου q, από το Πόρισμα 2.7.10. Αυτό είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου m.

(β2) Οταν $m = 2^k q$, για κάποιο άρτιο ακέραιο $q > 0$, τότε πάλι η $g = f^{2^k}$ έχει περιοδικό σημείο περιόδου p και το Πόρισμα 2.7.10 εξασφαλίζει περιοδικό σημείο y περιόδου q για την g. Δηλαδή, $(f^{2^k})^q(y) = y$ και τα σημεία y, $f^{2^k}(y)$, $f^{2\cdot 2^k}(y)$,..., $f^{(q-1)2^k}(y)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν N είναι η περίοδος του y ως προς την f, τότε $N = 2^r t$ για κάποιους ακέραιους $0 \leq r \leq k$, $1 \leq t \leq q$. Αφού $2^k t = 2^{k-r} \cdot 2^r t$, προκύπτει οτι $r = k$ και $t = q$, δηλαδή το y είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου m.

(β3) Τέλος, έστω οτι $m = 2^l$, για κάποιο $l \leq m$. Από το (β2) υπάρχει περιοδικό σημείο περιόδου 2^{k+1}. Αφού $l < k+1$, η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου m, από το (α).

Ετσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος. □

Αν και το Θεώρημα του Sarkovskii διατυπώθηκε για συνεχείς απεικονίσεις του $\mathbb{R}$, είναι προφανές οτι ισχύει και για συνεχείς απεικονίσεις ενός αποιουδήποτε κλειστού διαστήματος στον εαυτό του, αφού κάθε τέτοια συνεχής απεικόνιση μπορεί να επεκταθεί σε μια συνεχή απεικόνιση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, με τρόπο ώστε έξω από το διάστημα να είναι σταθερή. Ετσι, όλα τα μη-σταθερά περιοδικά σημεία της επέκτασης βρίσκονται μέσα στο διάστημα και φυσικά μέσα στο διάστημα υπάρχουν σταθερά σημεία.

Ασκήσεις

1. Εστω $f : [0,1] \to [0,1]$ η απεικόνιση με

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{όταν } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου n.

2. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση και ένας ακέραιος $n > 3$. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο $x \in \mathbb{R}$ περιόδου n ώστε

$$x < f(x) < f^2(x) < \cdots < f^{n-1}(x),$$

να αποδειχθεί οτι η f έχει περιοδικά σημεία για κάθε περίοδο.

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 176, να αποδειχθεί οτι έχει τουλάχιστον ένα περιοδικό σημείο περιόδου 96.

4. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση, που έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 48. Εχει η f περιοδικό σημείο περιόδου 56;

5. Εστω $f : [0,1] \to [0,1]$ η μη-συνεχής απεικόνιση με

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{3}, & \text{όταν } 0 \leq x < \dfrac{2}{3} \\ x - \dfrac{2}{3}, & \text{όταν } \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Η f παρουσιάζει ασυνέχεια μόνο στο σημείο $2/3$. Να αποδειχθεί οτι κάθε σημείο $0 \leq x < 1$ είναι περιοδικό με περίοδο 3, ενώ το 1 είναι τελικά περιοδικό περιόδου 3.

Κεφάλαιο 3

Δυναμικά Συστήματα στον κύκλο

3.1 Στροφές του κύκλου

Ο μοναδιαίος κύκλος, που θα αποκαλείται απλά κύκλος στη συνέχεια, είναι το υποσύνολο

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

του μιγαδικού επιπέδου. Η «εκθετική» απεικόνιση $p : \mathbb{R} \to S^1$ με τύπο

$$p(x) = e^{2\pi ix} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$$

είναι συνεχής και επί. Επιπλέον, $p(x + y) = p(x)p(y)$ για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$, όπου η πράξη στο δεύτερο μέλος είναι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών. Προφανώς, $p([0, 1)) = S^1$ και ο περιορισμός $p|[0, 1)$ είναι ένα προς ένα. Μάλιστα, ο περιορισμός της p σε κάθε διάστημα με μήκος μικρότερο από 1 είναι ένα προς ένα. Τέλος, η p απεικονίζει κάθε ανοιχτό διάστημα σε ένα ανοιχτό τόξο πάνω στον κύκλο και συνεπώς απεικονίζει κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ σε ανοιχτό υποσύνολο του κύκλου, θεωρώντας τον κύκλο ως μετρικό χώρο με την απόσταση που κληρονομεί από το $\mathbb{C}$.

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με $R_a : S^1 \to S^1$ την απεικόνιση με

$$R_a(z) = ze^{2\pi ia}$$

που είναι η *στροφή κατά γωνία* $2\pi a$. Η R_a είναι προφανώς ομοιομορφισμός και έχει αντίστροφη την R_{-a}, που είναι η στροφή κατά γωνία $-2\pi a$. Αν $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η μεταφορά κατά a, δηλαδή $T_a(x) = x + a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $p \circ T_a = R_a \circ p$, που σημαίνει οτι το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{T_a} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S^1 & \xrightarrow{R_a} & S^1 \end{array}$$

Αν $a \in \mathbb{Q}$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ πρώτοι μεταξύ τους ώστε $a = m/n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$(T_a)^k(x) = x + k\frac{m}{n}$$

και συνεπώς

$$(R_a)^k(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i(x+k\frac{m}{n})}.$$

Από αυτό προκύπτει οτι $(R_a)^n(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi ix}$ και $(R_a)^k(e^{2\pi ix}) \neq e^{2\pi ix}$ για κάθε ακέραιο $0 < k < n$, γιατί οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, $(R_a)^n = id$ και κάθε σημείο του κύκλου είναι περιοδικό με περίοδο n. Στην περίπτωση λοιπόν των ρητών στροφών του κύκλου η δυναμική είναι περιοδική.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη δυναμική των άρρητων στροφών. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο.

Λήμμα 3.1.1. *Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < |na - m| < \epsilon$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \epsilon$. Θεωρούμε τη διαμέριση του διαστήματος $[0, 1]$ με σύνολο διαδοχικών κορυφών

$$\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, 1\}$$

σε k διαδοχικά διαστήματα μήκους $1/k$. Συμβολίζουμε με $[x]$ ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x. Επειδή ο a είναι άρρητος, το πλήθος των σημείων $ma - [ma] \in [0, 1)$, $m = 0, 1, 2, ..., k$, είναι k. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο διάστημα της διαμέρισης που περιέχει τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία. Δηλαδή, υπάρχουν $0 \leq m_2 < m_1 \leq k$ ώστε

$$|(m_1a - [m_1a]) - (m_2a - [m_2a])| \leq \frac{1}{k} < \epsilon.$$

Αν τώρα θέσουμε $n = m_1 - m_2$ και $m = [m_1a] - [m_2a]$, έχουμε $|na - m| < \epsilon$. $\square$

Από το Λήμμα 3.1.1 προκύπτει αμέσως οτι το $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \{m + an : m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.1, υπάρχει $y \in \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ ώστε $0 < y < \epsilon$. Διαιρώντας το x με το y, υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ και $r \in \mathbb{R}$ ώστε $x = ky + r$ και $0 \leq |r| < y$. Προφανώς, $ky \in \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ και $|x - ky| = |r| < y < \epsilon$.

Η πρόταση που ακολουθεί και περιγράφει τη δυναμική των τροχιών των άρρητων στροφών οφείλεται στον αστρονόμο Nicole Oresme, που έζησε περίπου από το 1320 μέχρι το 1382.

Πρόταση 3.1.2. *Αν $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, τότε για κάθε $z \in S^1$ η θετική ημιτροχιά $\{(R_a)^k(z) : k \geq 0\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του S^1.*

Απόδειξη. Υπάρχει μοναδικό $0 \leq x < 1$ ώστε $z = e^{2\pi ix}$. Επειδή

$$(R_a)^k(z) = (R_a)^k(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i(x+ka)}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε $0 \leq y < 1$ με $y \neq x$ και $0 < \epsilon < |y - x|$ υπάρχουν ακέραιοι $k \geq 0$ και l ώστε

$$|y - (x + ka) + l| < \epsilon.$$

Από το προηγούμενο Λήμμα 3.1.1, υπάρχουν $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < |na - m| < \epsilon$. Διαιρώντας το $y - x$ με $|na - m|$, υπάρχουν $q \in \mathbb{N}$ και $0 \leq r < |na - m|$ ώστε

$$y - x = q|na - m| + r.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $k = \pm qn$ και $l = \mp qm$. $\square$

Επειδή $(R_a)^{-k}(z) = (R_{-a})^k(z)$, η αρνητική ημιτροχιά κάθε σημείου $z \in S^1$ ως προς τη στροφή R_a ταυτίζεται με τη θετική ημιτροχιά του ως προς την αντίστροφη R_{-a}. Συνεπώς, η προηγούμενη Πρόταση 3.1.2 δείχνει οτι και οι αρνητικές ημιτροχιές των άρρητων ροών είναι πυκνά υποσύνολα του κύκλου. Οι άρρητες στροφές είναι παράδειγμα ελαχιστικού ομοιομορφισμού.

Ορισμός 3.1.3. Ενας ομοιομορφισμός $f : X \to X$ σε ένα μετρικό χώρο X λέγεται *ελαχιστικός* όταν η τροχιά κάθε σημείου του X ως προς τον f είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στη στατιστική μελέτη της κατανομής των τροχιών μιας άρρητης στροφής κατά μήκος του κύκλου. Θα χρειαστούμε την έννοια του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης του κύκλου. Σε κάθε συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{C}$ αντιστοιχεί η συνάρτηση $\tilde{\phi} = \phi \circ p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, που είναι περιοδική με περίοδο 1 ή σύντομα 1-περιοδική, δηλαδή $\tilde{\phi}(x+1) = \tilde{\phi}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, κάθε 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ επάγει μια καλά ορισμένη συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{C}$ ώστε $\tilde{\phi} = \phi \circ p$.

Μια συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann, όταν η αντίστοιχη 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $[0, 1]$. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε ως κανονικοποιημένο ολοκλήρωμα Riemann της ϕ το

$$\int_{S^1} \phi = \int_0^1 \tilde{\phi}(x)dx.$$

Μια συνάρτηση $\phi = \phi_1 + i\phi_2 : S^1 \to \mathbb{C}$, όπου οι ϕ_1, ϕ_2 είναι πραγματικές συναρτήσεις, λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann, όταν οι ϕ_1, ϕ_2 είναι και τότε θέτουμε

$$\int_{S^1} \phi = \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x)dx + i\int_0^1 \tilde{\phi}_2(x)dx.$$

Με τον ορισμό αυτό, το μήκος του κύκλου είναι

$$\int_{S^1} 1 = \int_0^1 dx = 1.$$

Για αυτό το λόγο αποκλήθηκε κανονικοποιημένο ολοκλήρωμα Riemann. Στη συνέχεια θα αποκαλείται απλά ολοκλήρωμα ή χωρικός μέσος. Κάθε συνεχής συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, αφού η αντίστοιχη 1-περιοδική είναι συνεχής και συνεπώς ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1]$.

Λήμμα 3.1.4. *Το ολοκλήρωμα Riemann παραμένει αναλλοίωτο από τις στροφές, δηλαδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{C}$ ισχύει*

$$\int_{S^1} \phi \circ R_a = \int_{S^1} \phi.$$

Απόδειξη. Επειδή $\widetilde{\phi \circ R_a} = \tilde{\phi} \circ T_a$, έχουμε

$$\int_{S^1} \phi \circ R_a = \int_0^1 \tilde{\phi}(x+a)dx = \int_a^{a+1} \tilde{\phi}(x)dx = \int_0^1 \tilde{\phi}(x)dx + \int_1^{a+1} \tilde{\phi}(x)dx - \int_0^a \tilde{\phi}(x)dx$$

$$= \int_0^1 \tilde{\phi}(x)dx + \int_1^{a+1} \tilde{\phi}(x+1)dx - \int_0^a \tilde{\phi}(x)dx = \int_0^1 \tilde{\phi}(x)dx = \int_{S^1} \phi,$$

αφού η $\tilde{\phi}$ είναι 1-περιοδική. $\square$

Η στατιστική συμπεριφορά των τροχιών μιας άρρητης στροφής περιγράφεται από το ακόλουθο θεώρημα και τη γενίκευση του για ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις, που οφείλεται στους Kronecker-Weyl.

Θεώρημα 3.1.5. *Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{C}$ ισχύει*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi((R_a)^k(z)) = \int_{S^1} \phi$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, υπενθυμίζουμε οτι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση $q : S^1 \to \mathbb{C}$ της μορφής

$$q(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n,$$

όπου $a_n \in \mathbb{C}$, $|n| \leq N$. Κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο q είναι προφανώς συνεχής συνάρτηση και

$$\int_{S^1} q = a_0 + \sum_{0<|n|\leq N} a_n \left[\int_0^1 \cos 2\pi nx dx + i \int_0^1 \sin 2\pi nx dx \right] = a_0.$$

Από το θεώρημα Stone-Weierstrass προκύπτει αμέσως οτι κάθε συνεχής συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{C}$ είναι το ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας τριγωνομετρικών πολυωνύμων.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.5. Θα αποδείξουμε το συμπέρασμα πρώτα για ένα οποιοδήποτε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $q(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$. Υπολογίζουμε οτι

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[a_0 + \sum_{0<|l|\leq N} a_l z^l e^{2\pi ikla} \right] = a_0 + \sum_{0<|l|\leq N} a_l z^l \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ikla} \right]$$

$$= \int_{S^1} q + \sum_{0<|l|\leq N} a_l z^l \cdot \frac{1-e^{2\pi inla}}{n(1-e^{2\pi ila})}.$$

Συνεπώς,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) - \int_{S^1} q \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{0<|l|\leq N} |a_l z^l| \cdot \frac{|1-e^{2\pi inla}|}{|1-e^{2\pi ila}|} \leq \frac{1}{n} \sum_{0<|l|\leq N} |a_l z^l| \cdot \frac{2}{|1-e^{2\pi ila}|},$$

από όπου προκύπτει αμέσως οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) = \int_{S^1} q$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$.

Εστω τώρα $\phi : S^1 \to \mathbb{C}$ μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο q ώστε $|\phi(z) - q(z)| < \epsilon/3$ για κάθε $z \in S^1$. Συνεπώς,

$$\left| \int_{S^1} \phi - \int_{S^1} q \right| \leq \int_{S^1} |\phi - q| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) - \int_{S^1} q \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

για κάθε S^1 και κάθε $n \geq n_0$. Προκύπτει οτι

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi((R_a)^k(z)) - \int_{S^1} \phi \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\phi((R_a)^k(z)) - q((R_a)^k(z))| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) - \int_{S^1} q \right| + \left| \int_{S^1} \phi - \int_{S^1} q \right| < \epsilon$$

για κάθε S^1 και κάθε $n \geq n_0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Το όριο

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi((R_a)^k(z))$$

λέγεται χρονικός μέσος της συνεχούς συνάρτησης ϕ. Η ορολογία προέρχεται από τις φυσικές επιστήμες, όπου η συνάρτηση ϕ είναι μια μετρήσιμη ποσότητα που μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, καθώς το σύστημα εξελίσσεται. Για συστήματα των οποίων η εξέλιξη είναι μη-προβλέψιμη, είναι φυσικό να γίνονται μετρήσεις σε πολλούς διαδοχικούς χρόνους και να υπολογίζεται η μέση τιμή τους. Ενδιαφέρει λοιπόν το όριο αυτών των μέσων, αν υπάρχει, που είναι ο χρονικός μέσος. Αν αυτός ταυτίζεται με τον χωρικό μέσο, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των άρρητων στροφών, ο τελευταίος αποτελεί πρόβλεψη του χρονικού μέσου της ποσότητας που μετρείται.

Το Θεώρημα 3.1.5 είναι ισοδύναμο, όπως θα δούμε σε λίγο, με την ομοιόμορφη κατανομή των τροχιών των άρρητων στροφών στον κύκλο. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται στην ακόλουθη έννοια.

Ορισμός 3.1.6. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \to X$ σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο X λέγεται *μονοσήμαντα εργοδική* αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια σταθερά.

Είναι φανερό οτι μια ισοδύναμη διατύπωση του Θεωρήματος 3.1.5 είναι η ακόλουθη.

Πόρισμα 3.1.7. *Για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και κάθε συνεχή 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x+ka) = \int_0^1 \tilde{\phi}(t)dt$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε το Θεώρημα 3.1.5 για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann. Η γενίκευση αυτή οφείλεται στον H. Weyl (1916).

Υπενθυμίζουμε οτι αν X είναι ένα μη-κενό σύνολο και $A \subset X$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι η συνάρτηση $\chi_A : X \to \{0,1\}$ με

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \in A \\ 0, & \text{όταν } x \notin A. \end{cases}$$

Εστω οτι $0 < b < c < 1$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{N} < \min\{b, 1-c, \frac{c-b}{2}\}$. Για κάθε $n > N$ θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f_n, $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < b - \frac{1}{n} \text{ ή } x > c + \frac{1}{n} \\ nx + (1-nb), & \text{όταν } b - \frac{1}{n} \le x \le b \\ 1, & \text{όταν } b \le x \le c \\ -nx + (1+nc), & \text{όταν } c \le x \le c + \frac{1}{n} \end{cases}$$

και

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < b \text{ ή } x > c \\ nx - nb, & \text{όταν } b \le x \le b + \frac{1}{n} \\ 1, & \text{όταν } b + \frac{1}{n} \le x \le c - \frac{1}{n} \\ -nx + nc, & \text{όταν } c - \frac{1}{n} \le x \le c. \end{cases}$$

Προφανώς $f_n(0) = f_n(1) = g_n(0) = g_n(1) = 0$ και $f_n \ge f_{n+1}$, $g_n \le g_{n+1}$ για κάθε $n > N$. Επιπλέον, $g_n \le \chi_{[b,c]} \le f_n$ και

$$\int_0^1 g_n(t)dt = c - b - \frac{1}{n} < c - b < c - b + \frac{1}{n} = \int_0^1 f_n(t)dt,$$

οπότε

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)dt = c - b.$$

Εστω τώρα οτι $J = [b,c] + \mathbb{Z} = \{x + m : b \le x \le c \text{ και } m \in \mathbb{Z}\}$.

Λήμμα 3.1.8. *Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_J(x+ka) = c - b$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f_n, $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, όπως ορίστηκαν παραπάνω, και τις επεκτείνουμε περιοδικά σε συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1, που συμβολίζουμε επίσης με f_n και g_n, αντίστοιχα. Για κάθε $m > N$, $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_m(x+ka) \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_J(x+ka) \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_m(x+ka).$$

Εστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $m > N$ ώστε $1/m < \epsilon/2$. Επίσης, από το Πόρισμα 3.1.7 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_m(x+ka) - \int_0^1 g_m(t)dt$$

και

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_m(x+ka) - \int_0^1 f_m(t)dt < \frac{\epsilon}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \ge n_0$. Κατά συνέπεια,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_m(x+ka) - (c-b) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_m(x+ka) - \int_0^1 f_m(t)dt + \frac{1}{m} < \epsilon$$

και όμοια

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_m(x+ka) - (c-b) > -\epsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \ge n_0$. Προκύπτει οτι

$$-\epsilon < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_J(x+ka) - (c-b) < \epsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \ge n_0$. $\square$

Το προηγούμενο Λήμμα 3.1.8 ισχύει και για το διάστημα $[b,c)$ στη θέση του κλειστού διαστήματος $[b,c]$. Πράγματι, υπάρχει το πολύ ένα $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $x+ka \in \{c\}+\mathbb{Z}$, γιατί $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Αφού $\chi_{[b,c]} = \chi_{[b,c)} + \chi_{\{c\}}$, το συμπέρασμα προκύπτει για το $[b,c)$. Ομοια βλέπουμε οτι το ίδιο ισχύει και για τα διαστήματα $(b,c]$ και (b,c). Επίσης, αν $b=0$ και $c<1$, τότε επιλέγοντας ένα κατάλληλα μικρό $\delta > 0$ ώστε $c+\delta < 1$ έχουμε $\chi_{[\delta,c+\delta]} \circ T_\delta = \chi_{[0,c]}$. Από αυτό προκύπτει οτι το Λήμμα 3.1.8 ισχύει και για διάστημα της μορφής $[0,c]$ ή $[0,c)$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε οτι ισχύει και για διάστημα της μορφής $[b,1]$ ή $[b,1)$.

Σε κάθε περίπτωση το $I = p(J) \subset S^1$ είναι το τόξο στον κύκλο που διαγράφεται από το σημείο $e^{2\pi ib}$ μέχρι το $e^{2\pi ic}$ αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και έχει κανονικοποιημένο μήκος $\ell(I) = c-b$. Επειδή $\chi_I \circ p = \chi_J$, προκύπτει οτι

$$\chi_J(x+ka) = \chi_I((R_a)^k(e^{2\pi ix})).$$

Συνεπώς, το Λήμμα 3.1.8 μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα στην ακόλουθη μορφή.

Πόρισμα 3.1.9. *Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε τόξο $I \subset S^1$ ισχύει*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_I((R_a)^k(z)) = \ell(I)$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$. $\square$

Προφανώς ο θετικός ακέραιος $\sum_{k=0}^{n-1} \chi_I((R_a)^k(z))$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου

$$\{0 \leq k < n : (R_a)^k(z) \in I\}.$$

Αυτό σημαίνει οτι οι τροχιές μιας άρρητης στροφής είναι ομοόμορφα κατανεμημένες στον κύκλο.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα του H. Weyl.

Θεώρημα 3.1.10. *Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{C}$ που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann ισχύει*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi((R_a)^k(z)) = \int_{S^1} \phi$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$.

Απόδειξη. Αν $\tilde{\phi} = \phi \circ p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι η αντίστοιχη 1-περιοδική συνάρτηση της ϕ, αρκεί να δείξουμε οτι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x + ka) = \int_0^1 \tilde{\phi}(t)dt$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εστω $\epsilon > 0$. Επειδή η $\tilde{\phi}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, 1]$, υπάρχει μια διαμέριση $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1\}$ ώστε $U(\tilde{\phi}, P) - L(\tilde{\phi}, P) < \epsilon$. Από το Λήμμα 3.1.8 έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{N} m_j \chi_{[t_{j-1},t_j)+\mathbb{Z}}(x + ka) = L(\tilde{\phi}, P)$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{N} M_j \chi_{[t_{j-1},t_j)+\mathbb{Z}}(x + ka) = U(\tilde{\phi}, P)$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου ως συνήθως $m_j = \inf\{\tilde{\phi}(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$ και $M_j = \sup\{\tilde{\phi}(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$. Υπάρχει λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$0 \leq \int_0^1 \tilde{\phi}(t)dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{N} m_j \chi_{[t_{j-1},t_j)+\mathbb{Z}}(x + ka) < \epsilon$$

και

$$-\epsilon < \int_0^1 \tilde{\phi}(t)dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{N} M_j \chi_{[t_{j-1},t_j)+\mathbb{Z}}(x + ka) \leq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq n_0$. Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε ακέραιο k υπάρχει ένα μοναδικό $1 \leq j \leq N$ ώστε $x + ka \in [t_{j-1}, t_j) + \mathbb{Z}$, οπότε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{N} m_j \chi_{[t_{j-1},t_j)+\mathbb{Z}}(x+ka) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{\phi}(x+ka) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{N} M_j \chi_{[t_{j-1},t_j)+\mathbb{Z}}(x+ka).$$

Προκύπτει τώρα οτι

$$\int_0^1 \tilde{\phi}(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{\phi}(x+ka) < \epsilon$$

και

$$\int_0^1 \tilde{\phi}(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{\phi}(x+ka) > -\epsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq n_0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ασκήσεις

1. Εστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Εστω A, $B \subset X$ δύο μη-κενά κλειστά σύνολα, που είναι f-αναλλοίωτα και ελαχιστικά, δηλαδή $f(A) = A$, $f(B) = B$ και οι $f|A$, $f|B$ είναι ελαχιστικοί ομοιομορφισμοί. Να αποδειχθεί οτι αν $A \cap B \neq \varnothing$, τότε $A = B$.

2. Εστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Να αποδειχθεί οτι ο f είναι ελαχιστικός τότε και μόνον τότε όταν δεν υπάρχει κανένα μη-κενό, κλειστό και f-αναλλοίωτο γνήσιο υποσύνολο του X.

3. Εστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Να αποδειχθεί οτι κάθε συστολή $f : X \to X$ είναι μονοσήμαντα εργοδική.

4. Εστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια τοπολογικά μεταβατική συνεχής απεικόνιση. Αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ f^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, να αποδειχθεί οτι η f είναι μονοσήμαντα εργοδική.

5. Να αποδειχθεί οτι η ιδιότητα της μονοσήμαντης εργοδικότητας διατηρείται από τοπολογικές συζυγίες συνεχών απεικονίσεων συμπαγών μετρικών χώρων.

6. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(x + 2k\pi a) = 0$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Εστω $f : [0,1] \to [0,1]$ η C^∞ απεικόνιση με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{10}\sin^2(\pi x)$. Είναι η f μονοσήμαντα εργοδική;

8. Εστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x_k + ka) = \int_0^1 \tilde{\phi}(t)dt.$$

3.2 Ομοιομορφισμοί του κύκλου

Οπως είδαμε στην Πρόταση 2.7.1, η δυναμική των ομοιομορφισμών του $\mathbb{R}$ είναι εξαιρετικά απλή. Αντίθετα, η δυναμική ενός ομοιομορφισμού του κύκλου ενδέχεται να είναι περίπλοκη. Μια πρώτη ένδειξη γιαυτό αποτελεί η δυναμική των άρρητων στροφών, που είναι ελαχιστικές, δηλαδή όλες οι τροχιές είναι πυκνά υποσύνολα του κύκλου. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη δυναμική οποιουδήποτε ομοιομορφισμού του S^1. Μια καθιερωμένη μέθοδος τοπολογικής μελέτης συνεχών απεικονίσεων με τιμές στον S^1 είναι η ανύψωση σε μια συνεχή απεικόνιση με τιμές στο $\mathbb{R}$, αν αυτό είναι δυνατόν. Οπως στην προηγούμενη παράγραφο, θα συμβολίζουμε με p την «εκθετική» απεικόνιση $p(x) = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λήμμα 3.2.1. *Εστω $g : [0,1] \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση και $t_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(0) = p(t_0)$. Υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση $\tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\tilde{g}(0) = t_0$ που ανυψώνει την g, δηλαδή $g = p \circ \tilde{g}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα οτι μια τέτοια ανύψωση της g είναι μοναδική, αν υπάρχει. Πράγματι, αν υπάρχει και μια δεύτερη ανύψωση $\hat{g}$ με τις ίδιες ιδιότητες, τότε $\tilde{g}(x) - \hat{g}(x) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $0 \le x \le 1$ και $\tilde{g}(0) - \hat{g}(0) = t_0 - t_0 = 0$. Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει τώρα αμέσως οτι $\tilde{g} = \hat{g}$.

Προχωρούμε τώρα στην κατασκευή της ανύψωσης. Επειδή η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|g(x) - g(y)| < 1$ για κάθε x, $y \in [0,1]$ με $|x - y| < \delta$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\delta > 1$. Για κάθε ακέραιο $0 \le k \le n$ θέτουμε $x_k = k/n$. Για κάθε ακέραιο $0 \le k < n$ και $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε λοιπόν

$$|g(x) - g(x_k)| < 1.$$

Για $k = 0$, αυτό σημαίνει οτι $g([0, x_1]) \subset p((t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}))$. Επειδή το ανοιχτό διάστημα $(t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4})$ έχει μήκος μικρότερο από 1 και η p απεικονίζει ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ σε ανοιχτά υποσύνολα του μετρικού χώρου S^1, η

$$p_0 = p|(t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}) : (t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}) \to p((t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}))$$

είναι ομοιομορφισμός. Η $\tilde{g}_0 = (p_0)^{-1} \circ g : [0, x_1] \to \mathbb{R}$ είναι τώρα συνεχής και προφανώς $g(x) = p(\tilde{g}_0(x))$, όταν $x \in [0, x_1]$. Ειδικά, $\tilde{g}_0(0) = t_0$.

Αν $t_1 = \tilde{g}_0(x_1)$, τότε για $k = 1$ βλέπουμε οτι $g([x_1, x_2]) \subset p((t_1 - \frac{1}{4}, t_1 + \frac{1}{4}))$. Για τους ίδιους λόγους, όπως προηγουμένως, η

$$p_1 = p|(t_1 - \frac{1}{4}, t_1 + \frac{1}{4}) : (t_1 - \frac{1}{4}, t_1 + \frac{1}{4}) \to p((t_1 - \frac{1}{4}, t_1 + \frac{1}{4}))$$

είναι ομοιομορφισμός. Η $\tilde{g}_1 = (p_1)^{-1} \circ g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ είναι τώρα συνεχής και προφανώς $g(x) = p(\tilde{g}_1(x))$, όταν $x \in [x_1, x_2]$. Ειδικά, $\tilde{g}_1(x_1) = t_1 = \tilde{g}_0(x_1)$.

Προχωρώντας επαγωγικά με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε για κάθε $1 \leq k < n$ μια συνεχή συνάρτηση $\tilde{g}_k : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{R}$, ώστε $g(x) = p(\tilde{g}_k(x))$, όταν $x \in [x_k, x_{k+1}]$ και $\tilde{g}_k(x_k) = \tilde{g}_{k-1}(x_k)$, όταν $1 < k < n$, ενώ $\tilde{g}_0(0) = t_0$. Συνεπώς ορίζεται καλά η συνάρτηση $\tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\tilde{g}(x) = \tilde{g}_k(x))$, όταν $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k < n$, που είναι συνεχής ανύψωση της g με $\tilde{g}(0) = t_0$. $\Box$

Εστω τώρα $f : S^1 \to S^1$ μια συνεχής απεικόνιση. Από το Λήμμα 3.2.1 προκύπτει οτι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(p(x)) = p(F(x))$ για κάθε $0 \leq x \leq 1$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Αφού $p(F(0)) = p(F(1))$, έχουμε οτι $F(1) - F(0) \in \mathbb{Z}$.

Υποθέτουμε τώρα οτι η f είναι ομοιομορφισμός. Αν $x, y \in [0,1)$ και $F(x) = F(y)$, τότε $f(p(x)) = f(p(y))$ και συνεπώς $x = y$, γιατί η $p|[0,1)$ είναι ένα προς ένα. Αυτό δείχνει οτι η F είναι γνήσια μονότονη στο $[0,1)$ και κατ' επέκταση στο $[0,1]$, λόγω της συνέχειας. Ειδικά, $F(1) \neq F(0)$. Αν $|F(1) - F(0)| > 1$, τότε υπάρχει $0 < x < 1$ ώστε $|F(x) - F(0)| = 1$, από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής. Αλλά τότε $f(p(x)) = f(p(0))$, που είναι αδύνατον, γιατί η f είναι ένα προς ένα. Αυτό δείχνει οτι $|F(1) - F(0)| = 1$.

Αν η F είναι γνήσια αύξουσα, πρέπει $F(1) = F(0) + 1$ και επαγωγικά μπορούμε να επεκτείνουμε την F σε έναν αύξοντα ομοιομορφισμό $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $F(x+k) = F(x) + k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$. Αν η F είναι γνήσια φθίνουσα, πρέπει $F(1) = F(0) - 1$ και επαγωγικά η F επεκτείνεται σε έναν φθινοντα ομοιομορφισμό $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $F(x + k) = F(x) - k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει $f \circ p = p \circ F$.

Συμπερασματικά, για κάθε ομοιομορφισμό $f : S^1 \to S^1$ υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Ο F λέγεται ανύψωση του f. Είναι προφανές οτι αν ο F είναι ανύψωση του f, τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ο $F + k$ είναι επίσης ανύψωση. Αντίστροφα, αν οι F, G είναι ανυψώσεις της f, τότε $p(F(x)) = f(p(x)) = p(G(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, $p(F(x)) - p(G(x)) \in \mathbb{Z}$ και από το από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $F - G = k$.

Ενας ομοιομορφισμός $f : S^1 \to S^1$ διατηρεί τον προσανατολισμό του κύκλου όταν έχει κάποια ανύψωση που είναι αύξων ομοιομορφισμός, οπότε όλες οι ανψώσεις του είναι αύξοντες ομοιομορφισμοί του $\mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε ανύψωση F του f έχει την ιδιότητα $F(x + k) = F(x) + k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$. Ο ομοιομορφισμός $f : S^1 \to S^1$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό όταν έχει κάποια ανύψωση που είναι φθίνων ομοιομορφισμός, οπότε όλες οι ανψώσεις του είναι φθίνοντες ομοιομορφισμοί του $\mathbb{R}$. Τότε κάθε ανύψωση F του f έχει την ιδιότητα $F(x + k) = F(x) - k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$.

Παραδείγματα 3.2.2. (α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η μεταφορά $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ανύψωση της στροφής $R_a : S^1 \to S^1$ κατά γωνία $2\pi a$, όπως είδαμε στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου 3.1. Συνεπώς, όλες οι στροφές του κύκλου είναι ομοιομορφισμοί που διατηρούν τον πρασανατολισμό.

(β) Η ανάκλαση $f : S^1 \to S^1$ με $f(z) = \bar{z}$ είναι ομοιομορφισμός, που ανυψώνεται στην $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = -x$. Επειδή η F είναι φθίνων ομοιομορφισμός, η ανάκλαση f αντιστρέφει τον προσανατολισμό του S^1. Αξίζει να σημειωθεί οτι η f έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, τα $p(0) = 1$ και $p(1/2) = -1$ στη συγκεκριμένη περίπτωση. Αυτή είναι μια ιδιότητα που έχουν όλοι οι ομοιομορφισμοί του κύκλου που αντιστρέφουν τον προσανατολισμό, όπως θα δούμε αμέσως.

Πρόταση 3.2.3. *Κάθε ομοιομορφισμός $f : S^1 \to S^1$ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία.*

Απόδειξη. Εστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια ανύψωση του f. Εστω οτι ο $n \in \mathbb{Z}$ είναι το ακέραιο μέρος του $F(0)$. Τότε

$$n - 2 < F(1) - 1 = F(0) - 2 < n - 1 < n \leq F(0) < n + 1.$$

Επειδή η $F - id$ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής, από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει οτι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία x, $y \in [0, 1)$ ώστε $F(x) - x = n - 1$ και $F(y) - y = n$. Αυτό σημαίνει οτι τα $p(x)$, $p(y) \in S^1$ είναι τα μοναδικά σταθερά σημεία του f. $\square$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με ομοιομορφισμούς του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό. Το σύνολο των ομοιομορφισμών του κύκλου αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Το σύνολο $\mathcal{H}_+$ των ομοιομορφισμών του S^1 που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι υποομάδα της. Αν $f \in \mathcal{H}_+$ και F είναι οποιαδήποτε ανύψωση του f, τότε $F^n(x + k) = F^n(x) + k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε k, $n \in \mathbb{Z}$. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η συνεχής συνάρτηση $F^n - id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-περιοδική. Εστω $\mathcal{D}$ το σύνολο των αυξόντων ομοιομορφισμών του $\mathbb{R}$ της μορφής $F = \phi + id$, όπου η $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και 1-περιοδική. Το $\mathcal{D}$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Κάθε $F \in \mathcal{D}$ επάγει ένα καλά ορισμένο $f \in \mathcal{H}_+$ με $f(p(x)) = p(F(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.2.4. *Για κάθε $F \in \mathcal{D}$ η ακολουθία των συνεχών 1-περιοδικών συναρτήσεων*

$$\phi_n = \frac{1}{n}(F^n - id), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια σταθερά, που συμβολίζουμε με $\rho(F) \in \mathbb{R}$. Επιπλέον,

$$\min\{F^n(x) - x : x \in \mathbb{R}\} \leq n\rho(F) \leq \max\{F^n(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Επειδή η ϕ_n είναι συνεχής και 1-περιοδική, υπάρχουν οι πραγματικοί αριθμοί

$$a_n = \min\{\phi_n(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad b_n = \max\{\phi_n(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για οποιαδήποτε $x,\ y \in \mathbb{R}$ με $y \le x < y+1$ έχουμε

$$\phi_n(y) - \phi_n(x) = \frac{1}{n}[F^n(y) - F^n(x) + x - y] \le \frac{1}{n}(x-y) < \frac{1}{n}.$$

Από αυτό προκύπτει οτι $b_n - a_n < 1/n$ και συνεπώς $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Για κάθε $n,\ m \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $F^{nm}(x) - F^{(n-1)m}(x) = m\phi_m(F^{(n-1)m}(x))$ και συνεπώς $ma_m \le F^{nm}(x) - F^{(n-1)m}(x) \le mb_m$. Ειδικά, για $m = 1$ έχουμε οτι $a_1 \le F^n(x) - F^{n-1}(x) \le b_1$.

Εστω τώρα $k,\ n \in \mathbb{N}$ με $k < n$. Υπάρχουν $q_n \in \mathbb{N}$ και $0 \le r_n < k$ ώστε $n = kq_n + r_n$. Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα έχουμε

$$q_n k a_k \le \sum_{j=1}^{q_n} [F^{jk}(x) - F^{(j-1)k}(x)] \le q_n k b_k,$$

$$r_n a_1 \le \sum_{j=q_n k+1}^{n} [F^j(x) - F^{j-1}(x)] \le r_n b_1,$$

οπότε $q_n k a_k \le F^{q_n k}(x) - x \le q_n k b_k$ και $r_n a_1 \le F^n(x) - F^{q_n k}(x) \le r_n b_1$. Προσθέτοντας κατά μέλη,

$$q_n k a_k + r_n a_1 \le F^n(x) - x \le q_n k b_k + r_n b_1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από αυτό προκύπτει αμέσως οτι

$$q_n k a_k + r_n a_1 \le n a_n \le n b_n \le q_n k b_k + r_n b_1$$

και συνεπώς

$$a_k \le \liminf_{n\to+\infty} a_n \le \limsup_{n\to+\infty} b_n \le b_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αφού $\lim_{k\to+\infty}(b_k - a_k) = 0$, όπως είδαμε στην αρχή, πρέπει

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Αυτόν τον πραγματικό αριθμό συμβολίζουμε με $\rho(F)$. Προφανώς

$$\min\{F^k(x) - x : x \in \mathbb{R}\} \le k\rho(F) \le \max\{F^k(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, γιατί $ka_k = \min\{F^k(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$ και $kb_k = \max\{F^k(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$. Επειδή

$$a_n - \rho(F) \le \phi_n(x) - \rho(F) \le b_n - \rho(F)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει αμέσως οτι $\lim_{n\to+\infty} \phi_n = \rho(F)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. □

Παράδειγμα 3.2.5. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η μεταφορά T_a κατά a είναι προφανώς στοιχείο της $\mathcal{D}$ και

$$\rho(T_a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(T_a)^n(0)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{na}{n} = a.$$

Ας σημειωθεί οτι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η T_k μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της $\mathcal{D}$. Με άλλα λόγια η υποομάδα $\{T_k : k \in \mathbb{Z}\}$ περιέχεται στο κέντρο της $\mathcal{D}$.

Λήμμα 3.2.6. *Αν οι F, $G \in \mathcal{D}$ μετατίθενται, δηλαδή $G \circ F = F \circ G$, τότε*

$$\rho(G \circ F) = \rho(G) + \rho(F).$$

Απόδειξη. Επειδή οι F και G μετατίθενται, επαγωγικά βλέπουμε οτι $(G \circ F)^n = G^n \circ F^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίζουμε τώρα οτι

$$\rho(G \circ F) - \rho(F) = \lim_{n \to +\infty} \frac{G^n(F^n(0))}{n} - \lim_{n \to +\infty} \frac{F^n(0)}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{G^n(F^n(0)) - F^n(0)}{n} = \rho(G). \quad \square$$

Εστω τώρα $f \in \mathcal{H}_+$ και F, $G \in \mathcal{D}$ δύο ανυψώσεις του. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $F = G + k$. Αυτό σημαίνει οτι $F = T_k \circ G = G \circ T_k$. Από το προηγούμενο Λήμμα 3.2.6 προκύπτει οτι $\rho(F) = \rho(G) + \rho(T_k) = \rho(G) + k$. Συνεπώς ο μιγαδικός αριθμός $\rho(f) = e^{2\pi i \rho(F)} \in S^1$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ανύψωσης F του f, αλλά μόνο από τον f. Ο $\rho(f)$ λέγεται *αριθμός στροφής του* Poincaré του f και όπως θα δείξουμε σε λίγο είναι αναλλοίωτος από τοπολογικές συζυγίες που διατηρούν τον προσανατολισμό. Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση. Η ανύψωση F του f είναι της μορφής $F = \tilde{\phi} + id$, όπου η $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση. Η $\tilde{\phi}$ επάγει μια συνεχή συνάρτηση $\phi : S^1 \to \mathbb{R}$ με $\tilde{\phi} = \phi \circ p$. Αφού

$$F^n(x) - x = \sum_{k=0}^{n-1} [F^{k+1}(x) - F^k(x)] = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(F^k(x)),$$

το Θεώρημα 3.2.4 λέει οτι

$$\rho(F) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(z))$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$.

Λήμμα 3.2.7. *Εστω οτι F, $G \in \mathcal{D}$ και $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση της μορφής $H = \psi + id$, όπου η $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση. Αν $H \circ F = G \circ H$, τότε $\rho(F) = \rho(G)$.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $H \circ F^n = G^n \circ H$, οπότε

$$\frac{\psi(F^n(0))}{n} + \frac{F^n(0)}{n} = \frac{G^n(H(0))}{n}.$$

Επειδή όμως η ψ είναι συνεχής και 1-περιοδική,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\psi(F^n(0))}{n} = 0.$$

Κατά συνέπεια

$$\rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(0)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{G^n(H(0))}{n} = \rho(G). \quad \square$$

Πρόταση 3.2.8. *Αν οι f, $g \in \mathcal{H}_+$ είναι συζυγή στοιχεία της $\mathcal{H}_+$, δηλαδή οι f, g είναι τοπολογικά συζυγείς μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας που διατηρεί τον προσανατολισμό του S^1, τότε $\rho(f) = \rho(g)$.*

Απόδειξη. Εστω $h \in \mathcal{H}_+$ ώστε $h \circ f = g \circ h$. Εστω επίσης F, G, $H \in \mathcal{D}$ ανυψώσεις των f, g, h, αντίστοιχα. Τότε

$$p \circ H \circ F = h \circ p \circ F = h \circ f \circ p = g \circ h \circ p = g \circ p \circ H = p \circ G \circ H.$$

Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $H \circ F = T_k \circ G \circ H = T_k \circ G \circ H$. Ομως, ο $T_k \circ G \in \mathcal{D}$ είναι επίσης ανύψωση του f. Από το προηγούμενο Λήμμα 3.2.7 έχουμε $\rho(F) = \rho(T_k \circ G) = \rho(G) + k$ και κατά συνέπεια $\rho(f) = \rho(g)$. $\square$

Χρησιμοποιώντας τον αριθμό στροφής μπορούμε να χαρακτηρήσουμε τα στοιχεία της $\mathcal{H}_+$ που έχουν τουλάχιστον μια περιοδική τροχιά.

Πρόταση 3.2.9. *Ο $f \in \mathcal{H}_+$ έχει τουλάχιστον μια περιοδική τροχιά τότε και μόνον τότε όταν $\rho(F) \in \mathbb{Q}$ για κάποια (και συνεπώς για κάθε) ανύψωση F του f.*

Απόδειξη. Αν το $z_0 = p(x_0)$ είναι περιοδικό σημείο του f με περίοδο $n \in \mathbb{N}$, τότε $p(x_0) = z_0 = f^n(z_0) = p(F^n(x_0))$. Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $F^n(x_0) = x_0 + m$. Προκύπτει οτι

$$\rho(F) = \lim_{k\to+\infty} \frac{F^{kn}(x_0) - x_0}{kn} = \lim_{k\to+\infty} \frac{x_0 + km - x_0}{kn} = \frac{m}{n}.$$

Αντίστροφα, αν $\rho(F) = m/n$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.4 έχουμε

$$\min\{F^n(x) - x : x \in \mathbb{R}\} \le m \le \max\{F^n(x) - x : x \in \mathbb{R}\}.$$

Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $F^n(x_0) - x_0 = m$. Οπως είδαμε προηγουμένως, αυτό σημαίνει οτι το $p(x_0) \in S^1$ είναι περιοδικό σημείο του f. $\square$

Οπως δείχνει η απόδειξη της Πρότασης 3.2.9, αν οι $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και $\rho(F) = m/n$, τότε κάθε περιοδικό σημείο της f έχει περίοδο που είναι διαιρέτης του n. Μάλιστα, αν $P \subset S^1$ είναι το σύνολο των περιοδικών σημείων του f, τότε το $p^{-1}(P) \subset \mathbb{R}$ είναι ακριβώς το σύνολο των σταθερών σημείων του $F^n - m$. Πράγματι, έστω οτι $p(x_0) \in P$ με περίοδο $r \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 3.2.9, υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $F^r(x_0) = x_0 + s$ και τότε $m/n = \rho(F) = s/r$, δηλαδή υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $s = lm$ και $r = ln$. Συνεπώς, $F^{ln}(x_0) = x_0 + lm$. Από αυτό προκύπτει οτι $F^n(x_0) = x_0 + m$, γιατί αν $F^n(x_0) > x_0 + m$, από τη μονοτονία της F έχουμε

$$F^{2n}(x_0) - 2m = F^n(F^n(x_0) - m) - m > F^n(x_0) - m > x_0,$$

και επαγωγικά $F^{ln}(x_0) > x_0 + lm$. Ομοια, αν $F^n(x_0) < x_0 + m$, τότε $F^{ln}(x_0) < x_0 + lm$. Συμπεραίνουμε λοιπόν οτι όλα τα περιοδικά σημεία της f έχουν περίοδο διαιρέτη του n.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ομοιομορφισμούς του S^1 που διατηρούν τον πρασανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής, δηλαδή ο αριθμός στροφής κάποιας ανύψωσης είναι άρρητος. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη έννοια, που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει πεπλεγμένα.

Ορισμός 3.2.10. Εστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Αν $x \in X$, το σύνολο

$$L^+(x) = \{y \in X : f^{n_k}(x) \to y \text{ για κάποια } n_k \to +\infty\}$$

λέγεται *θετικό οριακό σύνολο* του x.

Το $L^+(x)$ είναι κλειστό και f-αναλλοίωτο σύνολο. Είναι προφανές οτι $L^+(f(x)) = L^+(x)$, δηλαδή το θετικό οριακό σύνολο του σημείου $x \in X$ εξαρτάται από την τροχιά του x και όχι από το ίδιο το σημείο x. Ομοια ορίζεται το αρνητικό οριακό σύνολο $L^-(x)$, που έχει ανάλογες ιδιότητες.

Πρόταση 3.2.11. *Αν ο $f \in \mathcal{H}_+$ έχει άρρητο αριθμό στροφής, τότε υπάρχει ένα μοναδικό συμπαγές f-αναλλοίωτο σύνολο $K \subset S^1$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(α) $L^+(z) = L^-(z) = K$ για κάθε $z \in S^1$ και συνεπώς ο $f|K$ είναι ελαχιστικός.

(β) Είτε $K = S^1$ είτε το K είναι σύνολο Cantor.

Απόδειξη. Εστω $z \in S^1$ ένα οποιοδήποτε σημείο και $K = L^+(z)$. Επειδή το K είναι κλειστό και f-αναλλοίωτο, έχουμε $L^+(y) \cup L^-(y) \subset K$ για κάθε $y \in K$. Το σύνολο $S^1 \setminus K$ είναι η ένωση αριθμήσιμου πλήθους ξένων μεταξύ τους τόξων I_n, $n \in \mathbb{Z}$, που είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $S^1 \setminus K$, τις οποίες η f μεταθέτει. Εστω $y \in S^1 \setminus K$. Αν $L^+(y) \cap (S^1 \setminus K) \neq \varnothing$, υπάρχουν n, k, $l \in \mathbb{Z}$ με $k > l$ ώστε $f^k(y)$, $f^l(y) \in I_n$. Αυτό σημαίνει οτι $y \in f^{-k}(I_n) \cap f^{-l}(I_n)$ και συνεπώς $f^{k-l}(I_n) \cap I_n \neq \varnothing$. Τότε $f^{k-l}(\bar{I}_n) = \bar{I}_n$, και η f^{k-l} έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο $\bar{I}_n$, από την Πρόταση 2.1.1. Αυτό όμως αντιφάσκει με την Πρόταση 3.2.9, αφού υποτίθεται οτι ο αριθμός στροφής του f είναι άρρητος. Αυτό δείχνει οτι $L^+(y) \subset K$ και όμοια $L^-(y) \subset K$ για κάθε $y \in S^1$. Με άλλα λόγια, $L^+(y) \cup L^-(y) \subset L^+(z)$ για κάθε z, $y \in S^1$ και όμοια $L^+(y) \cup L^-(y) \subset L^-(z)$. Κατά συνέπεια $L^+(y) \cup L^-(y) \subset L^+(z) \cap L^-(z)$ για κάθε z, $y \in S^1$ και συμμετρικά

$$L^+(z) \cup L^-(z) \subset L^+(y) \cap L^-(y) \subset L^+(y) \cup L^-(y) \subset L^+(z) \cap L^-(z)$$

για κάθε z, $y \in S^1$. Προκύπτει οτι $K = L^+(y) = L^-(y) = L^+(z) = L^-(z)$ για κάθε z, $y \in S^1$. Από αυτό είναι προφανές οτι το K είναι τέλειο σύνολο. Αν το K δεν είναι ολικά-μη-συνεκτικό, περιέχει κάποιο ανοιχτό τόξο $J \subset S^1$. Τότε για κάθε $z \in S^1$ υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $f^n(z) \in J$, δηλαδή $z \in f^{-n}(J) \subset K$. Αυτό δείχνει οτι $K = S^1$, αν το K δεν είναι σύνολο Cantor. □

Παράδειγμα στοιχείου της $\mathcal{H}_+$ για το οποίο το σύνολο K είναι ολόκληρος ο κύκλος, είναι οποιαδήποτε άρρητη στροφή, όπως είδαμε στην προηγούμενη περάγραφο 3.1. Αργότερα θα κατασκευάσουμε παραδείγματα στα οποία το K είναι σύνολο Cantor.

Γενικά, αν X είναι ένας μετρικός χώρος και $f : X \to X$ είναι ένας ομοιομορφισμός, ένα συμπαγές f-αναλλοίωτο σύνολο $K \subset X$ λέγεται ελαχιστικό, όταν η $f|K : K \to K$ είναι ελαχιστικός ομοιομορφισμός.

Λήμμα 3.2.12. *Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ και F μια ανύψωση του f. Εστω οτι $\rho(F) = a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $C(x) = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$, τότε η συνάρτηση $F_x : C(x) \to \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ με*

$$F_x(F^n(x) + m) = m + an$$

είναι γνήσια αύξουσα και επί.

Απόδειξη. Αν $F^n(x) + m < F^k(x) + l$, τότε $F^{n-k}(x) < x + l - m$ και συνεπώς

$$F^{2(n-k)}(x) < F^{n-k}(x + l - m) = F^{n-k}(x) + (l - m) < x + 2(l - m).$$

Επαγωγικά τώρα βλέπουμε οτι

$$F^{q(n-k)}(x) < F^{n-k}(x) + (q - 1)(l - m) < x + q(l - m)$$

για κάθε $q \in \mathbb{N}$. Διαιρώντας με q και παίρνοντας το όριο όταν $q \to +\infty$ βρίσκουμε οτι $(n - k)a \leq l - m$. Επειδή ο a είναι άρρητος, πρέπει $(n - k)a < l - m$. □

Είμαστε σε θέση τώρα να δώσουμε μια περιγραφή των ομοιομορφισμών του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής, αποδεικνύοντας το ακόλουθο Θεώρημα του H. Poincaré.

Θεώρημα 3.2.13. *Αν ο $f \in \mathcal{H}_+$ έχει αριθμό στροφής $\rho(f) = e^{2\pi i a}$, όπου $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε είναι τοπολογικά ημισυζυγής προς την άρρητη στροφή R_a, δηλαδή υπάρχει μια συνεχής και επί απεικόνιση $h : S^1 \to S^1$ ώστε $h \circ f = R_a \circ h$. Αν ο f είναι τοπολογικά μεταβατικός, τότε ο h είναι ομοιομορφισμός και συνεπώς ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την άρρητη στροφή R_a.*

Απόδειξη. Εστω K το μοναδικό ελαχιστικό σύνολο του f και έστω $z_0 = e^{2\pi i x_0} \in K$ ένα οποιοδήποτε σημείο. Εστω F μια ανύψωση του f, ώστε $\rho(F) = a$. Αν C είναι η τροχιά του z_0, η συνάρτηση $H : p^{-1}(C) \to \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ με $H(F^n(x_0) + m) = m + an$ είναι γνήσια αύξουσα και επί, από το προηγούμενο Λήμμα 3.2.12. Επιπλέον, $H(F^n(x_0) + m + 1) = m + 1 + an = H(F^n(x_0) + m) + 1$ και

$$H(F(F^n(x_0) + m)) = H(F^{n+1}(x_0) + m) = m + (n + 1)a = T_a(H(F^n(x_0) + m)),$$

δηλαδή $H \circ F = T_a \circ H$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την H στο $\overline{p^{-1}(C)}$ θέτοντας

$$H(x) = \lim_{t \in p^{-1}(C), t \to x} H(t).$$

Το δεξιό και το αριστερό όριο υπάρχουν, λόγω της μονοτονίας της H και είναι ίσα γιατί το $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, από το Λήμμα 3.1.1, αφού ο a είναι άρρητος.

Η συνάρτηση H είναι συνεχής και αύξουσα, αλλά ενδεχομένως όχι γνήσια αύξουσα. Πράγματι, αν το διάστημα I είναι μια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R} \setminus \overline{p^{-1}(C)}$, τότε η H παίρνει την ίδια τιμή στα άκρα του I. Η H επεκτείνεται τώρα σε μια συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, ορίζοντας η H να απεικονίζει κάθε συνεκτική συνιστώσα I του $\mathbb{R} \setminus \overline{p^{-1}(C)}$ στην κοινή τιμή που παίρνει στα άκρα του. Ετσι κατασκευάζεται μια συνεχής, επί και αύξουσα συνάρτηση $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $H(x + 1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $H \circ F = T_a \circ H$. Συνεπώς, η $h : S^1 \to S^1$ με $h(p(x)) = p(H(x))$ είναι μια καλά ορισμένη, συνεχής και επί απεικόνιση και $h \circ f = R_a \circ h$. Επιπλέον, $h(K) = h(f(K)) = R_a(h(K))$, οπότε $h(K) = S^1$, από την Πρόταση 3.1.2. Είναι προφανές από την κατασκευή της H οτι αν $K = S^1$, τότε η H είναι γνήσια αύξουσα και ο h είναι ομοιομορφισμός. $\square$

Οπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.13, στην περίπτωση που ο $f \in \mathcal{H}_+$ έχει άρρητο αριθμό στροφής και δεν είναι τοπολογικά μεταβατικός (ή ισοδύναμα ελαχιστικός), τότε η ημισυζυγία h που κατασκευάσαμε απεικονίζει το μοναδικό ελαχιστικό σύνολο Cantor K της f επί του κύκλου και είναι σταθερή σε καθένα ανοιχτό τόξο στο $S^1 \setminus K$. Αυτό δείχνει και μια κατεύθυνση για την κατασκευή παραδειγμάτων τέτοιων ομοιομορφισμών του κύκλου.

Ασκήσεις

1. Εστω $\chi : \mathcal{D} \to \mathcal{H}_+$ η απεικόνιση με $\chi(F) = f$, δηλαδή σε κάθε $F \in \mathcal{D}$ αντιστοιχεί τον $f \in \mathcal{H}_+$ που ορίζεται από τον τύπο $f(p(x)) = p(F(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η χ είναι επιμορφισμός ομάδων.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\mathrm{Ker}\chi = \{T_k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ και συνεπώς $\mathcal{D}/\mathbb{Z} \cong \mathcal{H}_+$.

2. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $F \in \mathcal{D}$ ισχύει

$$\rho(F) = \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n}(F^n - id)$$

ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

3. Εστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση με $F(x) = x + \dfrac{1}{10}\sin^2 \pi x$. Να αποδειχθεί οτι $F \in \mathcal{D}$ και να υπολογιστεί ο $\rho(F)$.

4. Εστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση με $F(x) = x + \dfrac{1}{4\pi}\sin 2\pi x$. Να αποδειχθεί οτι $F \in \mathcal{D}$ και να υπολογιστεί ο $\rho(F)$.

5. Να αποδειχθεί οτι δύο στροφές R_a και R_b, όπου $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, είναι τοπολογικά συζυγείς μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας που διατηρεί τον προσανατολισμό του S^1 τότε και μόνον τότε όταν $a = b$.

6. Εστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $h \in \mathcal{H}_+$ ώστε $h \circ R_a = R_a \circ h$. Να αποδειχθεί οτι η h είναι στροφή κατά γωνία $2\pi H(0)$, όπου H είναι μια ανύψωση της h.

7. Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής $\rho(f) = e^{2\pi i a}$, δηλαδή $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Εστω επιπλέον οτι η f είναι τοπολογικά μεταβατική. Αν οι h, $g \in \mathcal{H}_+$ είναι δύο τοπολογικές συζυγίες της f με τη στροφή R_a, να αποδειχθεί οτι η $h \circ g^{-1}$ είναι στροφή. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 6.)

8. Να αποδειχθεί οτι αν $F \in \mathcal{D}$, τότε $\rho(F^n) = n\rho(F)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

9. Εστω $F \in \mathcal{D}$ και $\phi = F - id$.
(α) Να αποδειχθεί οτι $|\phi(x) - \phi(0)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $|F^n(0) - nF(0)| \leq n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

10. Αν F, $G \in \mathcal{D}$, να αποδειχθεί οτι $|(G \circ F)^n(0) - G^n(0) - F^n(0)| \leq 4n - 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια $|\rho(G \circ F) - \rho(G) - \rho(F)| \leq 4$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 9.)

3.3 Ο ρόλος του βαθμού διαφορισιμότητας

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε το περίφημο θεώρημα που απέδειξε ο A. Denjoy το 1932 για τις αμφιδιαφορίσεις του κύκλου που διατηρούν τον πρασανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής. Εστω $f : S^1 \to S^1$ μια C^2 αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό και F μια ανύψωση του f. Δηλαδή, η $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι C^2, όπως επίσης και η F^{-1}. Τότε $F'(x) > 0$ και $F'(x - [x]) = F'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εστω

$$c = \sup\{\frac{|F''(x)|}{F'(x)} : x \in [0,1]\}.$$

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.3.1. *Αν x, $y \in \mathbb{R}$ και $x \neq y$, τότε*

$$\left|\log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)}\right| \leq c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(y)|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(F^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} F'(F^k(x)),$$

οπότε από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής

$$\left|\log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\log F'(F^k(x)) - \log F'(F^k(y))| \leq c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(y)|. \quad \square$$

Θεώρημα 3.3.2. *Εστω $f : S^1 \to S^1$ μια C^2 αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό με αριθμό στοφής $\rho(f) = e^{2\pi i a}$. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε η f είναι τοπολογικά συζυγής με την άρρητη στροφή R_a.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2.13, αρκεί να δείξουμε οτι το μοναδικό ελαχιστικό σύνολο K της f είναι ο ίδιος ο κύκλος. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο, υποθέτοντας οτι αυτό δεν συμβαίνει, οπότε το K είναι σύνολο Cantor, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.11. Εστω I μια συνεκτική συνιστώσα του $S^1 \setminus K$, δηλαδή ένα μέγιστο ανοιχτό τόξο που περιέχεται στο $S^1 \setminus K$. Υπάρχουν x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$ με $0 \leq y_0 - x_0 < 1$ ώστε $I = p((x_0, y_0))$. Εστω l_n το μήκος του διαστήματος $p^{-1}(f^n(I)) \cap [0,1]$. Για κάθε x, $y \in [x_0, y_0]$ έχουμε

$$\left|\log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)}\right| \leq c \sum_{k=0}^{n-1} l_k \leq c$$

από το προηγούμενο Λήμμα 3.3.1, οπότε $(F^n)'(x) \leq e^c (F^n)'(y)$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0 < \xi_n < y_0$, ώστε $F^n(y_0) - F^n(x_0) = (F^n)'(\xi_n)(y_0 - x_0)$. Συνεπώς, $l_n = l_0 \cdot (F^n)'(\xi_n)$. Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα για $y = \xi_n$ προκύπτει οτι

$$(F^n)'(x) \leq e^c \cdot \frac{l_n}{l_0}$$

για κάθε $x \in [x_0, y_0]$. Επειδή η f δεν έχει περιοδικά σημεία, αφού έχει άρρητο αριθμό στροφής, τα διαστήματα $p^{-1}(f^n(I)) \cap [0,1]$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι ξένα μεταξύ τους και

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n \leq 1.$$

Αρα $\lim_{n \to \pm\infty} l_n = 0$ και $\lim_{n \to \pm\infty} (F^n)' = 0$ ομοιόμορφα στο $[x_0, y_0]$.

Αν $0 < d < \min\{1, l_0/ce^{c+1}\}$, τότε για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ και κάθε $x_0 - d \leq x < x_0$ έχουμε

$$(F^n)'(x) \leq e(F^n)'(x_0).$$

Πράγματι, για $n = 0$ αυτό είναι τετριμένο. Προχωρούμε επαγωγικά υποθέτοντας οτι ισχύει για κάθε $0 \leq k < n$. Από το Λήμμα 3.3.1, για κάθε $x_0 - d \leq x < x_0$ έχουμε

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(x_0)} \right| \leq c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(x_0)|.$$

Από το Θεώτημα της Μέσης Τιμής, υπάρχει $u_k \in (x, x_0)$ ώστε

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(x_0)} \right| \leq cd \sum_{k=0}^{n-1} (F^k)'(u_k)$$

και από την επαγωγική υπόθεση

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(x_0)} \right| \leq cde \sum_{k=0}^{n-1} (F^k)'(x_0) \leq cde^{c+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_k}{l_0} \leq \frac{1}{l_0} cde^{c+1} < 1,$$

οπότε $(F^n)'(x) \leq e(F^n)'(x_0)$.

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε οτι

$$(F^n)'(x) \leq e^{c+1} \frac{l_n}{l_0}$$

για κάθε $x \in [x_0 - d, y_0]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lim_{n \to +\infty} (F^n)' = 0$ ομοιόμορφα στο $[x_0 - d, y_0]$.

Αν $z_0 = e^{2\pi i x_0}$, υπάρχουν $n_k \to +\infty$ ώστε $\lim_{k \to +\infty} f^{n_k}(z_0) = z_0$, γιατί $z_0 \in K$ και η $f|K$ είναι ελαχιστικός ομοιομορφισμός. Υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(F^{n_k})'(x) < 1/2$ για κάθε $x \in [x_0 - d, y_0]$ και $f^{n_k}(z_0) \in p((x_0 - \frac{d}{2}, y_0))$. Τότε,

$$|F^{n_k}(x) - F^{n_k}(x_0)| < \frac{d}{2}$$

για κάθε $x \in [x_0 - d, x_0]$, από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής και υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$|F^{n_k}(x_0) + m - x_0| < \frac{d}{2}.$$

Συνεπώς, $|F^{n_k}(x) + m - x_0| < d$ για κάθε $x \in [x_0 - d, x_0]$. Αυτό σημαίνει οτι $f^{n_k}(J) \subset J$, όπου $J = p([x_0 - d, x_0])$. Επειδή το J είναι κλειστό τόξο, άρα ομοιομορφικό με κλειστό διάστημα, η f^{n_k} πρέπει να έχει ένα σταθερό σημείο στο J. Αυτό όμως είναι αντίφαση. □

Το Θεώρημα 3.3.2 δεν ισχύει με την υπόθεση οτι η f είναι C^1 αμφιδιαφόριση. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε μια C^1 αμφιδιαφόριση $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής που δεν είναι τοπολογικά μεταβατική και συνεπώς δεν είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή.

Εστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $x_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + a\mathbb{Z})$. Επειδή το $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, το ίδιο ισχύει και για το $x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Εστω $l_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, τέτοιοι ώστε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n = 1.$$

Για παράδειγμα $l_n = \dfrac{c}{|n|^2 + 1}$, $n \in \mathbb{Z}$, όπου $c = \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}\right]^{-1}$. Εστω $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ η συνάρτηση με

$$q(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z} \\ l_n, & \text{αν } t = x_0 + m + an \text{ για κάποια } m, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

και $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$J(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \le s \le t} q(s), & \text{αν } t \ge 0 \\ \displaystyle -\sum_{t < s \le 0} q(s), & \text{αν } t < 0\ . \end{cases}$$

Λήμμα 3.3.3 *Η συνάρτηση J είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R} \setminus x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Στο σημείο $x_0 + m + an \in x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι δεξιά συνεχής, ενώ από αριστερά παρουσιάζει άλμα l_n. Επιπλέον, η J έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*
(α) $J(0) = 0$ και $J(t+1) = J(t) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
(β) Το σύνολο $C = \overline{J(\mathbb{R})}$ είναι κλειστό, τέλειο, ολικά-μη-συνεκτικό και $T_1(C) = C$.

Απόδειξη. Αν $t_1 > t_2 \ge 0$, τότε

$$J(t_1) = \sum_{0 \le s \le t_1} q(s) > \sum_{0 \le s \le t_2} q(s) = J(t_2),$$

γιατί το $x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και συνεπώς υπάρχει $s \in x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ με $t_1 > s > t_2$. Ομοια, αν $t_1 < t_2 < 0$, τότε $J(t_1) < J(t_2)$. Επίσης, αν $t_1 < 0 < t_2$, τότε προφανώς $J(t_1) < 0 < J(t_2)$.

Για τη συνέχεια της J έστω $t \ge 0$. Αν $t_k \searrow t$, τότε

$$J(t_k) = \sum_{0 \le s \le t_k} q(s) \searrow \sum_{0 \le s \le t} q(s) = J(t),$$

που δείχνει οτι η J είναι δεξιά συνεχής στο t. Αν τώρα $t_k \nearrow t$, τότε

$$J(t_k) = \sum_{0 \le s \le t_k} q(s) \nearrow \sum_{0 \le s < t} q(s) = J(t) - q(t).$$

Συνεπώς, όταν $t \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, τότε $q(t) = 0$ και $\lim_{s \to t^-} J(s) = J(t)$, ενώ όταν $t = x_0 + m + an$, τότε $q(t) = l_n$ και $\lim_{s \to t^-} J(s) = J(t) - l_n$. Με άλλα λόγια, η J είναι αριστερά συνεχής σε κάθε $t \ge 0$ με $t \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, αλλά στο $t = x_0 + m + an$ παρουσιάζει άλμα l_n από αριστερά. Ομοια για $t < 0$.

(α) Επειδή $0 \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ έχουμε $q(0) = 0$ και $J(0) = 0$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας μοναδικός $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $t < x_0 + m + an \le t + 1$, γιατί το διάστημα $(t, t+1]$ έχει μήκος 1. Συνεπώς,

$$\sum_{t < s \le t+1} q(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n = 1.$$

Αν $t \ge 0$, τότε

$$J(t+1) = \sum_{0 \le s \le t+1} q(s) = \sum_{0 \le s \le t} q(s) \sum_{t < s \le t+1} q(s) = J(t) + 1.$$

Αν $-1 \le t < 0$, τότε

$$J(t+1) = \sum_{0 \le s \le t+1} q(s) = -\sum_{t < s \le 0} q(s) + \sum_{t < s \le t+1} q(s) = J(t) + 1.$$

Τέλος, αν $t < -1$, τότε $t + 1 < 0$ και έχουμε

$$J(t+1) = -\sum_{t+1 < s \le 0} q(s) = -\sum_{t < s \le 0} q(s) + \sum_{t < s \le t+1} q(s) = J(t) + 1.$$

(β) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει μια ακόλουθία $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ σημείων του $x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ που συγκλίνει από δεξιά στο t και $t_k > t$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η ακολουθία $(J(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει από δεξιά στο $J(t)$ και $J(t_k) > J(t)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, από τη γνήσια μονοτονία της J. Από αυτό προκύπτει οτι το C είναι τέλειο σύνολο.

Αν το C περιέχει κάποιο ανοιχτό διάστημα I, τότε $I \cap J(\mathbb{R}) \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $J(t) \in I$. Αν $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία σημείων του $x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, όπως προηγουμένως, δηλαδή που συγκλίνει από δεξιά στο t, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $J(t_k) \in I$. Υπάρχουν m, $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $t_k = x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Συνεπώς,

$$\varnothing \neq (J(t_k) - l_n, J(t_k)) \cap I \subset (\mathbb{R} \setminus C) \cap I = \varnothing,$$

που είναι αντίφαση. $\square$

Σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς και το Λήμμα 3.3.3, έχουμε

$$J(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} [J(x_0 + m + an) - l_n, J(x_0 + m + an))$$

και

$$C = \overline{J(\mathbb{R})} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} (J(x_0 + m + an) - l_n, J(x_0 + m + an)).$$

Θέτουμε $I_{n,m} = [J(x_0 + m + an) - l_n, J(x_0 + m + an)]$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Από τις ιδιότητες της J, υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $H \circ J = id$ και $H(x) = x_0 + m + an$, όταν $x \in I_{n,m}$, για κάποια m, $n \in \mathbb{Z}$. Προφανώς, $H(C) \supset H(J(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$, δηλαδή $H(C) = \mathbb{R}$. Επειδή η J είναι γνήσια αύξουσα, η H είναι αύξουσα, αλλά όχι γνήσια, αφού είναι σταθερή σε κάθε διάστημα $I_{n,m}$. Είναι φανερό οτι $H(0) = 0$, γιατί $J(0) = 0$. Τέλος, $H(x + 1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $x \in J(\mathbb{R})$ και $x = J(t)$, τότε $H(x + 1) = H(J(t) + 1) = H(J(t + 1)) = t + 1 = H(x) + 1$. Από τη συνέχεια, $H(x + 1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in C$. Αν τώρα $x \in \mathbb{R} \setminus C$, υπάρχουν m, $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in I_{n,m}$, οπότε $x+1 \in I_{n,m+1}$ και $H(x+1) = x_0+(m+1)+an = x_0+m+an+1 = H(x)+1$.

Αν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ επιλέξουμε έναν οποιοδήποτε αύξοντα ομοιομορφισμό

$$F_{n,0} : I_{n,0} \to I_{n+1,0}$$

και θέσουμε $F_{n,m} = T_m \circ F_{n,0} \circ T_{-m} : I_{n,m} \to I_{n+1,m}$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, τότε

$$F_{n,m}(J(x_0 + m + an)) = J(x_0 + m + an + a)$$

για κάθε m, $n \in \mathbb{Z}$. Από τη δεξιά συνέχεια και τη μονοτονία της J προκύπτει οτι οι $F_{n,m}$, n, $m \in \mathbb{Z}$ επεκτείνονται σε έναν αύξοντα ομοιομορφισμό $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $F(x) = J(H(x) + a)$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$. Επιπλέον, $F(x + 1) = F(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τις αντίστοιχες ιδιότητες των J και H.

Είναι φανερό οτι $H(F(x)) = H(J(H(x) + a)) = T_a(H(x))$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$ και συνεπώς για κάθε $x \in C$, λόγω της συνέχειας. Επιπλέον, αν $x \in I_{n,m}$, τότε

$$H(F(x)) = x_0 + m + an + a = T_a(H(x)).$$

Αυτά δείχνουν οτι $H \circ F = T_a \circ H$ παντού στο $\mathbb{R}$.

Τέλος, το C είναι F-αναλλοίωτο σύνολο, γιατί $F(J(t)) = J(t + a)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, που σημαίνει οτι $F(J(\mathbb{R})) = J(\mathbb{R})$, οπότε $F(C) = C$, γιατί η F είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον, αν επιλέξουμε ένα $x \in J(\mathbb{R})$ ώστε $H(x) \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, τότε

$$H(F^k(x) + l) = H(x) + ak + l \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$$

και $F^k(x) + l = J(H(x) + ak + l)$ για κάθε k, $l \in \mathbb{Z}$. Επειδή το $H(x) + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, το σύνολο $\{F^k(x) + l : k, l \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $J(\mathbb{R})$ και συνεπώς στο C, από τη δεξιά συνέχεια της J.

Με αυτό τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει έναν $F \in \mathcal{D}$, που βέβαια επάγει έναν $f \in \mathcal{H}_+$. Η H με τη σειρά της επάγει μια συνεχή και επί απεικόνιση $h : S^1 \to S^1$ και είναι φανερό οτι $h \circ f = R_a \circ h$, δηλαδή η h είναι τοπολογική ημισυζυγία της f προς την άρρητη στροφή R_a. Το $K = p(C)$ είναι ένα f-αναλλοίωτο σύνολο Cantor στον S^1, μέσα στο οποίο υπάρχει τουλάχιστον μια πυκνή στο K τροχιά, που μπορεί να είναι η τροχιά οποιουδήποτε σημείου $p(x)$ τέτοιου ώστε $H(x) \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Από την Πρόταση 3.2.11 προκύπτει οτι η f δεν είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή και το K είναι το μοναδικό ελαχιστικό σύνολο της f.

Αν επιλέξουμε τους l_n, $n \in \mathbb{Z}$, κατάλληλα, είναι δυνατό να κατασκευάσουμε μια C^1 αμφιδιαφόριση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με όλες τις παραπάνω ιδιότητες. Ετσι θα πάρουμε ένα παράδειγμα που δείχνει οτι το Θεώρημα 3.3.2 δεν ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση οτι η f είναι C^1 αμφιδιαφόριση.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε οτι επιπλέον

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{l_{n+1}}{l_n} > \frac{1}{3} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Αυτές οι ιδιότητες ικανοποιούνται αν για παράδειγμα επιλέξουμε $l_n = \dfrac{c}{|n|^2+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, όπου $c = \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}\right]^{-1}$

Λήμμα 3.3.4. *Υπάρχουν C^1 αμφιδιαφορίσεις $F_{n,0} : I_{n,0} \to I_{n+1,0}$, $n \in \mathbb{Z}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(α) $F'_{n,0}(J(x_0+an) - l_n) = F'_{n,0}(J(x_0+an)) = 1$.

(β) $0 < F'_{n,0}(x) \leq 1 + 6|\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1|$ *για κάθε* $x \in I_{n,0}$, $n \in \mathbb{Z}$ *και*

(γ) $\lim_{n\to\pm\infty}(\sup\{|F'_{n,0}(x) - 1| : x \in I_{n,0}\}) = 0$.

Απόδειξη. Για απλότητα στο συμβολισμό θέτουμε $a_n = J(x_0+an) - l_n$, $b_n = J(x_0+an)$, οπότε $I_{n,0} = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Θέτουμε επίσης

$$c_n = 6(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) > -4.$$

Ορίζουμε την $F_{n,0} : I_{n,0} \to I_{n+1,0}$ απο τον τύπο

$$F_{n,0}(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^{x} [1 + \frac{c_n}{l_n^2}(y-a_n)(b_n-y)]dy.$$

Η $F_{n,0}$ είναι προφανώς C^1, $F_{n,0}(a_n) = a_{n+1}$ και

$$\begin{aligned} F_{n,0}(b_n) &= a_{n+1} + \int_{a_n}^{b_n} dy + \frac{c_n}{l_n^2}\int_{a_n}^{b_n}(y-a_n)(b_n-y)dy \\ &= a_{n+1} + (b_n - a_n) + \frac{c_n}{l_n^2}\frac{(b_n-a_n)^3}{6} \\ &= a_{n+1} + l_n + (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)l_n \\ &= a_{n+1} + l_n + l_{n+1} - l_n = a_{n+1} + l_{n+1} = b_{n+1}. \end{aligned}$$

Η $F_{n,0}$ είναι γνήσια αύξουσα, γιατί

$$F'_{n,0}(x) = 1 + \frac{c_n}{l_n^2}(x-a_n)(b_n-x) > 1 - \frac{4}{l_n^2}(x-a_n)(b_n-x) \geq 1 - \frac{4}{l_n^2}\cdot\frac{l_n^2}{4} = 0.$$

για κάθε $x \in I_{n,0}$. Συνεπώς,

$$F_{n,0}(I_{n,0}) = F_{n,0}([a_n, b_n]) = [a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1,0}$$

και η $F_{n,0}$ είναι C^1 αμφιδιαφόριση επί του $I_{n+1,0}$.

Επιπλέον,

$$F'_{n,0}(J(x_0+an) - l_n) = F'_{n,0}(a_n) = 1 + \frac{c_n}{l_n^2}(a_n-a_n)(b_n-a_n) = 1$$

και όμοια $F'_{n,0}(J(x_0+an)) = F'_{n,0}(b_n) = 1$.

Τέλος

$$|F'_{n,0}(x) - 1| = \frac{|c_n|}{l_n^2}(x-a_n)(b_n-x) \leq \frac{|c_n|}{l_n^2}(b_n-a_n)^2 = \frac{|c_n|}{l_n^2}\cdot l_n^2 = |c_n|,$$

για κάθε $x \in I_{n,0}$, από όπου προκύπτει αμέσως ο τελευταίος ισχυρισμός. □

Ξεκινώντας τώρα από τις C^1 αμφιδιαφορίσεις $F_{n,0} : I_{n,0} \to I_{n+1,0}$, $n \in \mathbb{Z}$, του Λήμματος 3.3.4, θέτουμε όπως προηγουμένως $F_{n,m} = T_m \circ F_{n,0} \circ T_{-m} : I_{n,m} \to I_{n+1,m}$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

Εστω $G : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ η συνάρτηση με

$$G(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in C \\ F'_{n,m}(x), & \text{αν } x \in I_{n,m},\ n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Η G είναι συνεχής και φραγμένη από το Λήμμα 3.3.4.

Εστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση με

$$F(x) = J(a) + \int_0^x G(s)ds.$$

Η F αύξουσα C^1 αμφιδιαφόριση επί του $\mathbb{R}$, αφού $G > 0$.

Επιπλέον, $F(x) = J(H(x) + a)$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$. Πράγματι, έστω οτι $x \in J(\mathbb{R})$ και $x \geq 0$. Αν $I_{n,m} \subset [0, x]$, τότε

$$\int_{I_{n,m}} G(s)ds = \int_{I_{n,m}} F'_{n,m}(s)ds = \int_{I_{n,0}} F'_{n,0}(s)$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} [1 + \frac{c_n}{l_n^2}(s - a_n)(b_n - s)]ds = l_n + \frac{c_n}{l_n^2} \frac{(b_n - a_n)^3}{6}$$

$$= l_n + (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)l_n = l_{n+1} = q(x_0 + m + (n+1)a).$$

Συνεπώς,

$$\int_0^x G(s)ds = \sum_{\{n,m \in \mathbb{Z}: I_{n,m} \subset [0,x]\}} \int_{I_{n,m}} G(s)ds$$

$$= \sum_{\{n,m \in \mathbb{Z}: I_{n,m} \subset [0,x]\}} q(x_0 + m + an + a) = \sum_{0 \leq s \leq H(x)} q(s + a),$$

οπότε

$$F(x) = J(a) + \int_0^x G(s)ds = \sum_{0 \leq s \leq a} q(s) + \sum_{0 \leq s \leq H(x)} q(s + a)$$

$$= \sum_{0 \leq s \leq a} q(s) + \sum_{a \leq s \leq H(x)+a} q(s) = \sum_{0 \leq s \leq H(x)+a} q(s) = J(H(x) + a).$$

Ομοια, $F(x) = J(H(x) + a)$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$ με $x < 0$.

Τέλος, η F είναι επέκταση των $F_{n,m}$, n, $m \in \mathbb{Z}$, γιατί

$$F(a_n) = J(a) + \int_0^{a_n} G(s)ds = J(a) + \int_0^{b_n} G(s)ds - \int_{I_{n,m}} G(s)ds$$

$$= F(b_n) - \int_{I_{n,m}} F'_{n,m}(s)ds = J(H(J(x_0 + an)) + a) - (b_{n+1} - a_{n+1})$$

$$= J(x_0 + an + a) - (b_{n+1} - a_{n+1}) = b_{n+1} - (b_{n+1} - a_{n+1}) = a_{n+1}$$

και συνεπώς

$$F(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^{x} F'_{n,m}(s)ds = F_{n,m}(x)$$

για κάθε $x \in I_{n,m}$.

Συνοψίζοντας, τα προηγούμενα δείχνουν οτι υπάρχει μια C^1 αμφιδιαφόριση $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής $\rho(f) = e^{2\pi i a}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, που είναι τοπολογικά ημισυζυγής με τη στροφή R_a του κύκλου, αλλά δεν είναι τοπολογικά συζυγής με αυτή και φυσικά με καμία άλλη στροφή και έχει ένα μοναδικό αναλλοίωτο συμπαγές σύνολο $K \neq S^1$, το οποίο είναι ελαχιστικό και τοπολογικά σύνολο Cantor. Συνεπώς, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.3.2 του A. Denjoy δεν ισχύει πάντα για C^1 αμφιδιαφορίσεις του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής.

Το παράδειγμα που κατασκευάσαμε παραπάνω οφείλεται στον A. Denjoy, που το παρουσίασε το 1932 μαζύ με το Θεώρημα 3.3.2. Παρόμοια παραδείγματα είχαν κατασκευαστεί από τον P. Bohl το 1916.

Ασκήσεις

1. Εστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $0 < |a| < \dfrac{1}{2\pi}$ και $F_a \in \mathcal{D}$ με

$$F_a(x) = x + a + a \sin 2\pi x.$$

Αν $f_a \in \mathcal{H}_+$ είναι ο επαγόμενος ομοιομορφισμός του κύκλου με ανύψωση τον F_a, να αποδειχθεί οτι ο f_a είναι τοπολογικά συζυγής με την άρρητη στροφή R_a. (Υπόδειξη: Δείξτε επαγωγικά οτι υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, ώστε

$$F_a^n(x) = x + na + \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(x) + ka)$$

και υπολογίστε τον αριθμό στροφής εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ισοκατανομής του H. Weyl.)

2. Να αποδειχθεί οτι το Θεώρημα 3.3.2 του A. Denjoy ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση οτι η $f \in \mathcal{H}_+$ είναι C^1 αμφιδιαφόριση με άρρητο αριθμό στροφής, που ανυψώνεται σε μια C^1 αμφιδιαφόριση $F \in \mathcal{D}$ για την οποία η συνάρτηση $\log F'$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz.

3. Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής που έχει ένα αναλλοίωτο σύνολο Cantor K. Το $S^1 \setminus K$ είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων μεταξύ τους ανοιχτών τόξων.
(α) Αν I_n, $n \in \mathbb{Z}$, είναι μια οποιαδήποτε αρίθμηση αυτών των τόξων, να αποδειχθεί οτι $\lim_{n \to \pm\infty} \ell(I_n) = 0$.
(β) Να αποδειχθεί οτι αν $I \subset S^1 \setminus K$ είναι ένα οποιοδήποτε τόξο, τότε για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset S^1$ με $K \subset V$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^n(I) \subset V$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $|n| \geq n_0$.

4. Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ μια C^1 αμφιδιαφόριση και $F \in \mathcal{D}$ μια οποιαδήποτε ανύψωση της f. Αν $z = e^{2\pi i x}$, θέτουμε $f'(z) = F'(x)$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η $f' : S^1 \to \mathbb{R}$ είναι μια καλά ορισμένη συνάρτηση. Η f' λέγεται πάράγωγος της f.

(β) Αν η f έχει άρρητο αριθμό στροφής και ένα αναλλοίωτο σύνολο Cantor K, να αποδειχθεί οτι υπάρχουν z_1, $z_2 \in K$ ώστε $f'(z_1) \geq 1$ και $f'(z_2) \leq 1$.

5. Να κατασκευαστεί μια C^1 αμφιδιαφόριση $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής που έχει ένα αναλλοίωτο σύνολο Cantor K τέτοιο ώστε $f'(z) \neq 1$ για κάθε $z \in K$.