Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 1

1. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την διαφορίσιμη δομή $\mathcal{B}$ που ορίζεται από τον άτλαντα $\{(\mathbb{R},\psi)\}$, όπου $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $\psi(t)=t^3$. Εστω $\mathcal{A}$ η συνηθισμένη διαφορίσιμη δομή του $\mathbb{R}$.

(α) Δείξτε οτι $\mathcal{A}\neq\mathcal{B}$.

(β) Δείξτε οτι η $id:(\mathbb{R},\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ δεν είναι αμφιδιαφόριση.

(γ) Είναι οι λείες πολλαπλότητες $(\mathbb{R},\mathcal{A})$, $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ αμφιδιαφορίσιμες;

2. Για κάθε $t>0$ θεωρούμε την απεικόνιση $h_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h_t(x)=x$, όταν $x\leq 0$ και $h_t(x)=tx$, όταν $x\geq 0$. Εστω $\mathcal{A}_t$ η διαφορίσιμη δομή που ορίζεται στο $\mathbb{R}$ από τον άτλαντα $\{(\mathbb{R},h_t)\}$, $t>0$.

(α) Να αποδειχθεί οτι $\mathcal{A}_t\neq\mathcal{A}_s$ για $t\neq s$.

(β) Είναι οι λείες πολλαπλότητες $(\mathbb{R},\mathcal{A}_t)$ και $(\mathbb{R},\mathcal{A}_s)$ αμφιδιαφορίσιμες για κάθε t, $s>0$;

3. Εστω $U_i^+=\{(x_1,...,x_{n+1})\in S^n : x_i>0\}$ και $U_i^-=\{(x_1,...,x_{n+1})\in S^n : x_i<0\}$, ενώ $h_i^{\pm}:U_i^{\pm}\to\mathbb{R}^n$ είναι η απεικόνιση με τύπο

$$h_i^{\pm}(x_1,...,x_{n+1})=(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_{n+1}),\qquad 1\leq i\leq n+1.$$

(α) Δείξτε οτι ο $\mathcal{B}=\{(U_i^{\pm},h_i^{\pm}):1\leq i\leq n+1\}$ είναι C^∞ άτλας στην S^n.

(β) Δείξτε οτι ο $\mathcal{B}$ ορίζει την ίδια διαφορίσιμη δομή με τον C^∞ άτλαντα $\mathcal{A}=\{(S^n\setminus\{e_{n+1}\},\pi_+),(S^n\setminus\{-e_{n+1}\},\pi_-)\}$, όπου $\pi_\pm : S^n\setminus\{\pm e_{n+1}\}\to\mathbb{R}^n$ είναι η στερεογραφική προβολή.

4. Εστω $(V,\langle,\rangle)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και $S(V)=\{x\in V:\|x\|=1\}$, όπου $\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}$.

(α) Αν $p\in S(V)$, να αποδειχθεί οτι για κάθε $x\in S(V)\setminus\{p\}$ το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα p και x με το ορθογώνιο συμπλήρωμα $\langle p\rangle^\perp$ είναι το

$$\phi(x)=\frac{x-\langle x,p\rangle p}{1-\langle x,p\rangle}.$$

Η απεικόνιση $\phi:S(V)\setminus\{p\}\to\langle p\rangle^\perp$ είναι η στερεογραφική προβολή ως προς το p.

(β) Να υπολογιστεί η $\phi^{-1}:\langle p\rangle^\perp\to S(V)\setminus\{p\}$.

(γ) Αν $\psi:S(V)\setminus\{-p\}\to\langle p\rangle^\perp$ είναι η στερεογραφική προβολή ως προς το $-p$, να υπολογιστεί η $\psi\circ\phi^{-1}:\langle p\rangle^\perp\to\langle p\rangle^\perp$.

5. Εστω $\{(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)\}$ ο κανονικός άτλας του μιγαδικού προβολικού χώρου $\mathbb{C}P^1$. Παρατηρείστε οτι $\mathbb{C}P^1\setminus U_1=\{[0,1]\}$ και $\mathbb{C}P^1\setminus U_2=\{[1,0]\}$. Δείξτε οτι η απεικόνιση $g:\mathbb{C}P^1\to S^2$ με τύπο

$$g[z_1,z_2]=\begin{cases}(\pi_+^{-1}\circ\phi_1)[z_1,z_2], & \text{όταν } z_1\neq 0\\ (0,0,1), & \text{όταν } z_1=0.\end{cases}$$

είναι αμφιδιαφόριση, όπου $\pi_+:S^2\setminus\{(0,0,1)\}\to\mathbb{C}$ είναι η στερεογραφική προβολή ως προς τον βόρειο πόλο.

6. Εστω X ένας χώρος Hausdorff και $H(X)$ η ομάδα των ομοιομορφισμών του X επί του εαυτού του. Μία υποομάδα G της $H(X)$ ορίζει στον X την σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ όταν υπάρχει $g \in G$ ώστε $y = g(x)$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας λέγονται τροχιές της G.

(α) Δείξτε οτι η απεικόνιση πηλίκο $p : X \to X/G$ είναι ανοικτή (και συνεχής, επί, εξ ορισμού).

Η G λέμε οτι δρά γνήσια ασυνεχώς επί του X όταν κάθε $x \in X$ έχει μία ανοιχτή περιοχή U τέτοια ώστε $U \cap g(U) = \varnothing$, για κάθε $g \in G$, $g \neq id$.

(β) Αν η G δρά γνήσια ασυνεχώς, δείξτε οτι κάθε $[x] \in X/G$ έχει μία ανοικτή περιοχή V^* ώστε

$$p^{-1}(V^*) = \bigcup_{g \in G} g(V),$$

όπου V είναι μία κατάλληλη ανοικτή περιοχή του $x \in X$, ώστε $g_1(V) \cap g_2(V) = \varnothing$, για $g_1 \neq g_2$ και η $p|V : V \to V^*$ είναι ομοιομορφισμός.

(γ) Εστω M μία λεία n-πολλαπλότητα και G μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M. Αν ο M/G είναι Hausdorff, δείξτε οτι είναι λεία n-πολλαπλότητα.

(δ) Εστω M μία λεία n-πολλαπλότητα και G μία πεπερασμένη ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M. Αν $g(x) \neq x$ για κάθε $x \in M$, $g \in G$, $g \neq id$, δείξτε οτι η G δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M, ο M/G είναι Hausdorff και συνεπώς λεία n-πολλαπλότητα.

(ε) Στην n-σφαίρα S^n η αντιποδική απεικόνιση $a : S^n \to S^n$ με $a(x) = -x$ είναι αμφιδιαφόριση. Αν $G = \{id, a\}$, ποιά είναι η λεία πολλαπλότητα S^n/G;

(στ) Στον $T^2 = S^1 \times S^1$ ορίζεται η απεικόνιση $f : T^2 \to T^2$ με $f(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{-2\pi ix}, -e^{2\pi iy})$. Αν $G = \{id, f\}$, δείξτε οτι ο $K^2 = T^2/G$ είναι λεία 2-πολλαπλότητα. Η K^2 λέγεται φιάλη του Klein.

(ζ) Στο $\mathbb{R}^n$ δρά η ομάδα των μεταφορών κατά ακέραιο διάνυσμα $\mathbb{Z}^n$. Δείξτε οτι ο $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ είναι λεία πολλαπλότητα αμφιδιαφορίσιμη με τον T^n.

7. Να αποδειχθεί οτι ο $1-$διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^1$ είναι αμφιδιαφορίσιμος με τον κύκλο S^1.

8. Εστω $n \in \mathbb{N}$ και $w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_w : \mathbb{C}P^n \to [0, +\infty)$ με

$$f_w([z]) = \inf\{|w - tz|^2 : t \in \mathbb{C}\}.$$

Δηλαδή, ο $f_w([z])$ είναι το τετράγωνο της ευκλείδειας απόστασης του w από τον μιγαδικά 1-διάστατο υπόχωρο $[z]$.

(α) Να αποδειχθεί οτι $f_w([z]) = |w|^2 - |h(w, z)|^2$, για κάθε $z \in S^{2n+1}$, όπου h είναι το συνηθισμένο ερμιτιανό γινόμενο στον $\mathbb{C}^{n+1}$.

(β) Να αποδειχθεί οτι η f_w είναι συνεχής.

(γ) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $[z]$, $[u] \in \mathbb{C}P^n$ με $[z] \neq [u]$ υπάρχει $w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ώστε $f_w([z]) \neq f([u])$. Ετσι παίρνουμε μία εναλλακτική απόδειξη του γεγονότος ότι ο $\mathbb{C}P^n$ είναι χώρος Hausdorff.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 2

1. Εστω $f : M \to N$ μία 1-1, επί και λεία απεικόνιση. Αν η $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ είναι γραμμικός ισομορφισμός για κάθε $p \in M$, δείξτε οτι η f είναι αμφιδιαφόριση.

2. Εστω $f : M \to Q$ μία λεία απεικόνιση και $q \in Q$ μία κανονική τιμή της, ώστε $N = f^{-1}(q) \neq \varnothing$. Αν $i_N : N \hookrightarrow M$ είναι η ένθεση, δείξτε οτι $(i_N)_{*p}(T_pN) = \mathrm{Ker} f_{*p}$ για κάθε $p \in N$.

3. Να αποδειχθεί οτι $T_pS^n = \{[\gamma]_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1} : \langle \gamma'(0), p\rangle = 0\}$ για κάθε $p \in S^n$, όπου $\langle , \rangle$ είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

4. Εστω M μία λεία m-πολλαπλότητα, N μία λεία n-πολλαπλότητα και $f : M \to N$ μία λεία απεικόνιση. Αν το $q \in N$ είναι τέτοιο ώστε $f^{-1}(q) \neq \varnothing$ και η f έχει σταθερή τάξη k σε κάποια ανοιχτή περιοχή του $f^{-1}(q)$, να αποδειχθεί οτι το $f^{-1}(q)$ είναι κανονική $(m-k)$-υποπολλαπλότητα της M.

5. Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει 1-1, λεία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για $n > 1$.

6. Να αποδειχθεί οτι η ορίζουσα ως λεία συνάρτηση $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι submersion και συνεπώς το σύνολο $N = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \text{ο } A \text{ έχει τάξη } 1\}$ είναι κανονική 3-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{2\times 2} \approx \mathbb{R}^4$.

7. Το σύνολο S των πραγματικών $n \times n$ συμμετρικών πινάκων είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n\times n}$ διαστάσεως $n(n+1)/2$. Εστω $f : GL(n,\mathbb{R}) \to S$ η απεικόνιση με τύπο $f(A) = A \cdot A^t$.

(α) Να αποδειχθεί οτι $f_{*A}(H) = AH^t + HA^t$ για κάθε $H \in T_AGL(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in GL(n,\mathbb{R})$.

(β) Να αποδειχθεί οτι ο ταυτοτικός πίνακας $I_n \in S$ είναι κανονική τιμή της f.

(γ) Να αποδειχθεί οτι η ορθογώνια ομάδα $O(n,\mathbb{R})$ είναι κανονική $n(n-1)/2$-υποπολλαπλότητα της $GL(n,\mathbb{R})$.

(δ) Να αποδειχθεί οτι $T_{I_n}O(n,\mathbb{R}) = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} : H + H^t = 0\}$.

8. Εστω M μία λεία n-πολλαπλότητα, $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ ένας άτλας της και $\bar{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U_i), \bar{\phi}_i) : i \in I\}$ ο αντίστοιχος άτλας της TM, όπου $\pi : TM \to M$ είναι η εφαπτόμενη δέσμη της M. Να αποδειχθεί οτι

$$\det D(\bar{\phi}_i \circ \bar{\phi}_j^{-1})(x,v) > 0$$

για κάθε i, $j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ και $(x,v) \in \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$.

9. Εστω $0 \leq k < n$. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$N_k = \{[z_1, ..., z_{k+1}, 0, ..., 0] \in \mathbb{C}P^n : (z_1, ..., z_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}\}$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $\mathbb{C}P^n$ και η απεικόνιση $j : \mathbb{C}P^k \to N_k$ με $j[z_1, ..., z_{k+1}] = [z_1, ..., z_{k+1}, 0, ..., 0]$ είναι αμφιδιαφόριση.

10. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $g : T^2 \to \mathbb{R}^3$ με

$$g(e^{2\pi i\phi}, e^{2\pi i\theta}) = ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta)$$

είναι embedding του 2-torus T^2 στον $\mathbb{R}^3$ με εικόνα

$$g(T^2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

11. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : S^2 \to \mathbb{R}^6$ με

$$f(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy)$$

είναι immersion, που επάγει ένα embedding του πραγματικού προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ στον $\mathbb{R}^6$.

12. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f([x,y,z]) = (yz, zx, xy)$ είναι immersion και η απεικόνιση $g : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ με $g([x,y,z]) = (yz, zx, xy, x^2+2y^2+3z^2)$ είναι embedding.

13. Εστω M, N δύο λείες n-πολλαπλότητες και $f : M \to N$ μία immersion.

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι ανοιχτή απεικόνιση.

(β) Αν η M είναι συμπαγής και η N είναι συνεκτική, να αποδειχθεί οτι $f(M) = N$.

14. Εστω $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ο ορθογώνιος μετασχηματισμός (μιγαδική δομή του $\mathbb{R}^{2n}$) με $J(x,y) = (-y,x)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(α) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} : A^tJA = J\}$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

(β) Να περιγραφεί ο εφαπτόμενος χώρος $T_{I_{2n}}S$ ως διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

(γ) Ποιά είναι η διάσταση του S;

(Υπόδειξη : Δείξτε οτι η ο $J \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ είναι κανονική τιμή της λείας απεικόνισης $f : GL(2n,\mathbb{R}) \to \{H \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} : H + H^t = 0\}$ με $f(A) = A^tJA$ και εφαρμόστε το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων.)

15. Εστω $d \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και V_d^{2n} το σύνολο των σημείων $(z_0, z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το V_d^{2n} είναι λεία $2n$-πολλαπλότητα.

(β) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $W_d^{2n-1} = V_d^{2n} \cap S^{2n+1}$ είναι λεία $(2n-1)$-πολλαπλότητα. Η W_d^{2n-1} λέγεται πολλαπλότητα του Brieskorn.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 3

1. Εστω $N \subset M$ μία κανονική υπολλαπλότητα της πολλαπλότητας M και $\xi \in \mathcal{X}(M)$, ώστε $\xi(p) \in T_pN$ για κάθε $p \in N$. Δείξτε οτι $\xi|N \in \mathcal{X}(N)$.

2. Στο $\mathbb{R}^{2n}$ θεωρούμε το λείο διανυσματικό πεδίο

$$\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + ... + x^{2n} \frac{\partial}{\partial x^{2n-1}} - x^{2n-1} \frac{\partial}{\partial x^{2n}}.$$

Δείξτε οτι το $\xi|S^{2n-1}$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο της S^{2n-1}, που δεν μηδενίζεται πουθενά.

3. (α) Εστω M μία λεία πολλαπλότητα και G μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M. Αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$, ώστε $g_*\xi = \xi$ για κάθε $g \in G$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένα μοναδικό $\zeta \in \mathcal{X}(M/G)$ ώστε $p_{*x}(\xi(x)) = \zeta(p(x))$ για κάθε $x \in M$, όπου $p : M \to M/G$ είναι η απεικόνιση πιλήκο.

(β) Κατασκευάστε ένα λείο διανυσματικό πεδίο στο πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$, που έχει ακριβώς ένα σημείο μηδενισμού, ενώ κάθε άλλη ολοκληρωτική καμπύλη είναι μή-σταθερή περιοδική.

4. Μία n-πολλαπλότητα M λέγεται παραλληλήσιμη αν υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in \mathcal{X}(M)$, ώστε το $\{\xi_1(p), \xi_2(p), ..., \xi_n(p)\}$ να αποτελεί βάση του T_pM για κάθε $p \in M$. Να αποδειχθεί οτι η M είναι παραλληλήσιμη τότε και μόνον τότε οταν η εφαπτομένη δέσμη της είναι τετριμένη, δηλαδή υπάρχει μία αμφιδιαφόριση $f : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & M \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\text{προβολή}"] \\ M \arrow[r, "id"] & M \end{tikzcd}$$

και η f απεικονίζει γραμμικά τον T_pM στο $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ για κάθε $p \in M$.

5. Να αποδειχθεί οτι οι πολλαπλότητες S^1, $T^2 = S^1 \times S^1$, S^3 είναι παραλληλήσιμες.

6. Να ευρεθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ του $\mathbb{R}^2$.

7. Εστω M μία πολλαπλότητα, $p \in M$ και $\xi \in \mathcal{X}(M)$.

(α) Αν $\xi(p) = 0$, δείξτε οτι η σταθερή καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to M$ με $\gamma(t) = p$ είναι η μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από το p. Συνεπώς, αν $\phi : D \to M$ είναι η ροή του ξ, τότε $\phi_t(p) = p$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Εστω $\gamma : I_p \to M$ η ολοκληρωτική καμπύλη με $\gamma(0) = p$. Αν υπάρχει $T \in I_p$, $T > 0$, ώστε $\gamma(0) = \gamma(T)$ και ο T είναι ο ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα, να αποδειχθεί οτι $I_p = \mathbb{R}$ και υπάρχει μία immersion $\bar{\gamma} : S^1 \to M$ ώστε $\gamma(t) = \bar{\gamma}(e^{2\pi i t/T})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

8. Εστω M μία πολλαπλότητα και $f : M \to M$ μία αμφιδιαφόριση. Αν το $\xi \in \mathcal{X}(M)$ έ-χει ροή $\phi : D \to M$, δείξτε οτι το $f_*\xi$ έχει ροή $\psi : D \to M$ με τύπο $\psi(t, f(p)) = f(\phi(t, p))$.

9. Εστω $h : [0, 1] \to [0, \pi]$ μία λεία συνάρτηση με $h^{-1}(0) = [0, 1/5] \cup [4/5, 1]$ και $h^{-1}(\pi/2) = [2/5, 3/5]$. Επεκτείνουμε την h στο $\mathbb{R}$ περιοδικά θέτοντας $h(x + 1) = h(x)$. Δείξτε οτι τα διανυσματικά πεδία

$$\xi(x) = x^2 \cos^2 h(x) \frac{d}{dx} \text{ και } \zeta(x) = x^2 \sin^2 h(x) \frac{d}{dx}$$

είναι πλήρη στο $\mathbb{R}$, αλλά το $\xi + \zeta$ δεν είναι πλήρες.

10. Εστω M μία πολλαπλότητα και $\xi \in \mathcal{X}(M)$, με ροή $\phi : D \to M$, όπου

$$D = \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\}.$$

Αν $f : M \to (0, 1]$ είναι μία λεία συνάρτηση με την ιδιότητα $f(p) < \min\{-a_p, b_p\}$ για κάθε $p \in M$, να αποδειχθεί οτι το διανυσματικό πεδίο $f \cdot \xi$ είναι πλήρες.
(Υπόδειξη : Εστω $g : D \to \mathbb{R}$ η λεία συνάρτηση με τύπο

$$g(t, p) = \int_0^t \frac{1}{f(\phi(s, p))} ds.$$

Δείξτε οτι η απεικόνιση $h : D \to \mathbb{R} \times M$ με τύπο $h(t, p) = (g(t, p), p)$ είναι αμφιδιαφόριση και η $\psi = \phi \circ h^{-1}$ είναι η ροή του $f \cdot \xi$. Για την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης f και περισσότερα κοιτάξτε την εργασία R.L. Renz, Equivalent flows on smooth Banach manifolds, *Indiana Math. J.* 20 (1971), 695-698.)

11. Εστω M μία πολλαπλότητα και X, $Y \in \mathcal{X}(M)$, πλήρη, με ροές ϕ και ψ αντίστοιχα. Αν υπάρχει μια λεία συνάρτηση $h : M \to \mathbb{R}$ ώστε $[X, Y] = hX$, να αποδειχθεί οτι

$$(\psi_t \circ \phi_s)(p) = (\phi_{T_p(t,s)} \circ \psi_t)(p)$$

για κάθε $p \in M$, t, $s \in \mathbb{R}$, όπου $T_p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η λεία συνάρτηση

$$T_p(t, s) = \int_0^s \left(\exp\Big(\int_0^t h(\psi_\tau(\phi_\sigma(p))) d\tau \Big) \right) d\sigma.$$

12. Στον $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία

$$X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $g : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ με

$$g(a, b, c) = aX + bY + cZ$$

είναι ένας γραμμικός μονομορφισμός με την ιδιότητα $g(A \times B) = [g(A), g(B)]$ για κάθε A, $B \in \mathbb{R}^3$, όπου $\times$ είναι το συνηθισμένο εξωτερικό γινόμενο.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 4

1. Να υπολογιστεί το $d\omega$ όταν
(α) $\omega = x^2 y dy - xy dx$, (β) $\omega = f(x,y)dx$, όπου $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μία λεία συνάρτηση,
(γ) $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, όπου οι P, Q, $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι λείες συναρτήσεις.

2. Αν $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ και $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i dx^i$ στον $\mathbb{R}^n$, δείξτε οτι

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i<j} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) dx^i \wedge dx^j.$$

3. Να υπολογιστεί το $d\omega$, όταν $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

4. Αν $\rho = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge ... \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge ... \wedge dx^n$ στον $\mathbb{R}^n$, να αποδειχθεί οτι $d\rho = dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$.

5. Εστω M μία λεία πολλαπλότητα και $\omega \in A^1(M)$. Αν υπάρχει $f \in C^\infty(M)$, ώστε $f(p) \neq 0$ για κάθε $p \in M$ και η $f\omega$ να είναι κλειστή, δείξτε οτι $\omega \wedge d\omega = 0$.

6. Εστωσαν M, N δύο λείες πολλαπλότητες και $f : M \to N$ μία submersion επί της N. Να αποδειχθεί οτι η $f^* : A(N) \to A(M)$ είναι 1-1.

7. Να αποδειχθεί οτι $H^1(\mathbb{R}) = 0$.

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια λεία, περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1, δηλαδή $f(x+1) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ και μια λεία, περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με περίοδο 1, ώστε $fdx = \lambda dx + dg$ στο $\mathbb{R}$. Κατά συνέπεια $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$.

9. Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ θεωρούμε την διαφορική 1-μορφή

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η ω είναι κλειστή, αλλά δεν είναι ακριβής.
(β) Εστω $F : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ η λεία τοπική αμφιδιαφόριση (εκθετική απεικόνιση) με τύπο

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta).$$

Να αποδειχθεί οτι $F^*\omega = d\theta$.
(γ) Εστω η μια κλειστή, διαφορική 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$, μια λεία, περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με περίοδο 2π και μια λεία συνάρτηση $h : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $h(\rho, \theta + 2\pi) = h(\rho, \theta)$ για κάθε $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$F^*\eta = dh + \lambda d\theta + g'(\theta) d\theta$$

στο $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.
(δ) Να αποδειχθεί οτι $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cong \mathbb{R}$.
(Υπόδειξη : Για το (γ) χρησιμοποιείστε την άσκηση 8 και για το (δ) την άσκηση 6.)

10. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό σύνολο. Για κάθε $\alpha \in A^1(M)$ υπάρχουν μοναδικές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in C^\infty(M)$, ώστε $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$. Η $\phi : \mathcal{X}(M) \to A^1(M)$ με

$$\phi(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3}) = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$$

είναι ισομορφισμός. Για κάθε $\theta \in A^2(M)$ υπάρχουν μοναδικές $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C^\infty(M)$ ώστε $\theta = \beta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \beta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \beta_3 dx^1 \wedge dx^2$ και η $\psi : \mathcal{X}(M) \to A^2(M)$ με

$$\psi(\beta_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x^3}) = \theta$$

είναι ισομορφισμός. Τέλος, η $\mu : C^\infty(M) \to A^3(M)$ με $\mu(f) = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ είναι ισομορφισμός. Να αποδειχθεί οτι $\phi(\xi) \wedge \phi(\zeta) = \psi(\xi \times \zeta)$ και $\phi(\xi) \wedge \psi(\zeta) = \mu(\langle \xi, \zeta \rangle)$ για κάθε $\xi, \zeta \in \mathcal{X}(M)$, όπου $\times$ είναι το εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ και $\langle , \rangle$ είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και οτι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "id"] & \mathcal{X}(M) \arrow[r, "\mathrm{curl}"] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{X}(M) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\psi"] & C^\infty(M) \arrow[d, "\mu"] \\
C^\infty(M) \arrow[r, "d"] & A^1(M) \arrow[r, "d"] & A^2(M) \arrow[r, "d"] & A^3(M)
\end{tikzcd}$$

11. Εστω $M \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\omega \in A^1(M)$, ώστε $\omega \wedge dx^1 \wedge ... \wedge dx^k = 0$, όπου $k < n$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν $f_1, ..., f_k \in C^\infty(M)$ ώστε $\omega = f_1 dx^1 + ... + f_k dx^k$.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 5

1. Να αποδειχθεί οτι η εφαπτομένη δέσμη κάθε λείας πολλαπλότητας είναι προσανατολίσιμη.

2. Εστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση . Αν το $a \in \mathbb{R}$ είναι κανονική τιμή της f και $M = f^{-1}(a) \neq \varnothing$, δείξτε οτι η M είναι προσανατολίσιμη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$.
(Υπόδειξη : Ο περιορισμός της $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot dx^1 \wedge ... \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge ... \wedge dx^n$ είναι ένα στοιχείο όγκου. Η απόδειξη είναι όμοια με την περίπτωση της σφαίρας.)

3. Να αποδειχθεί οτι η έννοια της προσανατολισιμότητας είναι αναλλοίωτη από αμφιδιαφορίσεις.

4. Εστω M μία λεία n-πολλαπλότητα και $\omega \in A^k(M)$, $0 \leq k \leq n$. Εστω G μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M, ώστε ο χώρος M/G να είναι Hausdorff. Αν $g^*\omega = \omega$ για κάθε $g \in G$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία μοναδική $\tilde{\omega} \in A^k(M/G)$ ώστε $p^*\tilde{\omega} = \omega$, όπου $p : M \to M/G$ είναι η απεικόνιση πιλήκο. Να αποδειχθεί μετά από αυτό οτι αν η M είναι προσανατολίσιμη και η ω είναι ένα στοιχείο όγκου ώστε $g^*\omega = \omega$ για κάθε $g \in G$, τότε η M/G είναι προσανατολίσιμη.

5. Εστω M μία λεία n-πολλαπλότητα και $\omega \in A^k(M)$, $0 \leq k \leq n$. Εστω G μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M, ώστε ο χώρος M/G να είναι Hausdorff. Αν $\tilde{\omega} \in A^k(M/G)$, $0 \leq k \leq n$ και $\omega = p^*\tilde{\omega}$, όπου $p : M \to M/G$ είναι η απεικόνιση πιλήκο, δείξτε οτι $g^*\omega = \omega$ για κάθε $g \in G$. Να αποδειχθεί μετά από αυτό οτι αν η M/G είναι προσανατολίσιμη, τότε και η M είναι προσανατολίσιμη.

6. Να αποδειχθεί οτι ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$, $n > 1$, είναι προσανατολίσιμη πολλαπλότητα τότε και μόνον τότε όταν ο n είναι περιττός. Συνεπώς, το πραγματικό προβολικό επίπεδο είναι μη-προσανατολίσιμη, συνεκτική, συμπαγής 2-πολλαπλότητα.

7. Εστω οτι $G =< g, h >$, όπου $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι οι $g(x, y) = (x + 1, y)$ και $h(x, y) = (1 - x, y + 1)$. Δηλαδή, $G =< g, h | h^{-1}gh = g^{-1} >$. Να αποδειχθεί οτι η $K^2 = \mathbb{R}^2/G$, που είναι η φιάλη του Klein, είναι μη-προσανατολίσιμη, συνεκτική, συμπαγής 2-πολλαπλότητα.

8. Εστω M μία προσανατολισμένη n-πολλαπλότητα με στοιχείο όγκου $\omega \in A^n(M)$. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $i_{.}\omega : \mathcal{X}(M) \to A^{n-1}(M)$ με

$$(i_\xi \omega)_p(v_1, ..., v_{n-1}) = \omega_p(\xi(p), v_1, ..., v_{n-1}), v_1, ..., v_{n-1} \in T_pM, p \in M$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Η $i_\xi\omega$ λέγεται flux form του ξ.
(Υπόδειξη : Εστω (U, ϕ) ένας χάρτης με αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία $\partial/\partial x^1, ..., \partial/\partial x^n$ στο U. Υπάρχει μοναδική $f \neq 0$ ώστε $\omega|U = f dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$. Αν

$\xi|U = \sum_{k=1}^n \xi_k(\partial/\partial x^k)$, δείξτε πρώτα οτι

$$i_\xi\omega|U = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f\xi_j \cdot dx^1 \wedge ... \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge ... \wedge dx^n.)$$

9. Εστω M μία προσανατολισμένη n-πολλαπλότητα με στοιχείο όγκου $\omega \in A^n(M)$. Για κάθε $\xi \in \mathcal{X}(M)$ υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση $\mathrm{div}_\omega\xi \in C^\infty(M)$, που λέγεται ω-απόκλιση του ξ, ώστε $d(i_\xi\omega) = (\mathrm{div}_\omega\xi)\omega$. Αν $M = \mathbb{R}^n$ και $\omega = f dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$, όπου $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $f \neq 0$, να αποδειχθεί οτι για

$$\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

έχουμε

$$\mathrm{div}_\omega\xi = \frac{1}{f}\sum_{k=1}^n \frac{\partial(f\xi_k)}{\partial x^k}.$$

10. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία προσανατολισμένη 2-υποπολλαπλότητα, για την οποία υπάρχει μία αμφιδιαφόριση $f = (f_1, f_2, f_3) : U \to M$, που διατηρεί τον προσανατολισμό, όπου $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Αν

$$\xi = \xi_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial x^3} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$$

και $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, τότε

$$i_\xi\omega = \xi_1 dx^2 \wedge dx^3 + \xi_2 dx^3 \wedge dx^1 + \xi_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Να αποδειχθεί οτι

$$f^*(i_\xi\omega) = \begin{vmatrix} \xi_1\circ f_1 & \xi_2\circ f_2 & \xi_3\circ f_3 \\ \partial_u f_1 & \partial_u f_2 & \partial_u f_3 \\ \partial_v f_1 & \partial_v f_2 & \partial_v f_3 \end{vmatrix} du \wedge dv = \langle \xi\circ f, \partial_u f \times \partial_v f\rangle du \wedge dv,$$

όπου $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ είναι τα βασικά διανυσματικά πεδία στο $\mathbb{R}^2$.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 6

1. Εστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο με $0 \in U$ και $f : U \to \mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση, ώστε $f(0) = 1$ και $f_{*0} = 0$. Εστω $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ το γράφημα της f και $g : M \to S^n$ η απεικόνιση Gauss

$$g(p, f(p)) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p))^2 + ... + (\frac{\partial f}{\partial x^n}(p))^2 + 1}} \cdot (\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial x^n}(p), 1).$$

(α) Αν ω είναι το συνηθισμένο στοιχείο όγκου της S^n, να αποδειχθεί οτι

$$(g^*\omega)_{e_{n+1}} = (-1)^n \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)\right) \cdot (dx^1 \wedge ... \wedge dx^n)_{e_{n+1}}.$$

(β) Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια συνεκτική, συμπαγής, προσανατολίσιμη επιφάνεια, δηλαδή κανονική 2-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^3$. Αν K είναι η καμπυλότητα Gauss της M, να αποδειχθεί οτι

$$\int_M K d\sigma = 4\pi \deg g,$$

όπου g είναι η απεικόνιση Gauss και $d\sigma$ είναι το στοιχείο όγκου στην M, που επάγεται από το ευκλείδειο στοιχείο όγκου $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ του $\mathbb{R}^3$.
(Υπόδειξη : Για το (β), αν ω είναι το συνηθισμένο στοιχείο όγκου της S^2, δείξτε οτι $g^*\omega = K d\sigma$. Χρησιμοποιείστε το (α) και το γεγονός οτι τοπικά η M είναι το γράφημα κάποιας C^∞ συνάρτησης.)

2. Εστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας και ω το συνηθισμένο στοιχείο όγκου της S^{n-1}. Να αποδειχθεί οτι

$$\int_{S^{n-1}} \langle Ax, x \rangle \omega = \frac{1}{n} \mathrm{Tr} A \cdot \mathrm{vol}(S^{n-1})$$

όπου $\langle , \rangle$ είναι το συνηθισμένο ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.
(Υπόδειξη : Εφαρμόστε κατάλληλο μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας το φασματικό θεώρημα.)

3. Αν $k \in \mathbb{Z}^+$ να αποδειχθεί οτι η

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{\|x\|^k} \cdot dx^1 \wedge ... \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge ... \wedge dx^{n+1}$$

δεν είναι ακριβής στο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
(Υπόδειξη : Υποθέστε οτι η ω_k είναι ακριβής στο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ και χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Stokes για να φτάσετε σε αντίφαση.)

4. Εστω $p : \mathbb{R} \to S^1$ η $p(t) = e^{2\pi i t}$ και $\omega \in A^1(S^1)$. Υπάρχει $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ώστε $p^*\omega = f dt$.

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι περιοδική με περίοδο 1 και

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^1 f(t)dt.$$

(β) Δείξτε χρησιμοποιώντας το (α) οτι ο $\int_{S^1} : H^1(S^1) \to \mathbb{R}$ είναι ισομορφισμός.

(Υπόδειξη : Για το (α) θεωρείστε για κάθε $\epsilon > 0$ τον άτλαντα $\mathcal{A} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$, όπου $U_1 = p((0,1))$, $\phi_1 = (p|(0,1))^{-1}$, $U_2 = p((-\epsilon, \epsilon))$, $\phi_2 = (p|(-\epsilon, \epsilon))^{-1}$ και μία διαμέριση της μονάδας $\{f_1, f_2\}$ υποκείμενη στο ανοιχτό κάλυμα $\{U_1, U_2\}$. Παρατηρείστε οτι $(\phi_j^{-1})^*(f_j\omega) = (f_j \circ p)p^*\omega$, $j = 1, 2$, ενώ $\mathrm{supp}(f_2 \circ p) \subset (-\epsilon, \epsilon)$.)

5. Εστω $E = \mathbb{C}P^n \setminus \{[0, ..., 0, 1]\}$. Αν $\pi : E \to \mathbb{C}P^{n-1}$ και $i : \mathbb{C}P^{n-1} \to E$ είναι οι απεικονίσεις με τύπους $\pi[z_1, ..., z_n, z_{n+1}] = [z_1, ..., z_n]$ και $i[z_1, ..., z_n] = [z_1, ..., z_n, 0]$, να αποδειχθεί οτι $i \circ \pi \simeq id$. Συνεπώς $H(E) \cong H(\mathbb{C}P^{n-1})$. Χρησιμοποιείστε το γεγονός αυτό, το γεγονός οτι ο $\mathbb{C}P^1$ είναι αμφιδιαφορίσιμος με την S^2 και την ακολουθία Mayer-Vietoris για το ανοιχτό κάλυμα $\mathbb{C}P^n = E \cup U_{n+1}$ για να αποδείξετε επαγωγικά οτι

$$H^k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{για } k = 0, 2, 4, ..., 2n \\ 0, & \text{για } k \text{ αλλιώς.} \end{cases}$$

6. Αν $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, $n \geq 1$, είναι η γενικευμένη απεικόνιση Hopf, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει λεία $s : \mathbb{C}P^n \to S^{2n+1}$ ώστε $\pi \circ s = id$.

7. Να αποδειχθεί οτι η διαβαθμισμένη άλγεβρα $H(\mathbb{C}P^n)$, $n \geq 1$, είναι ισόμορφη με την κόλουρη πολυωνυμική άλγεβρα $\mathbb{R}[X]/ < X^{n+1} >$, όπου X είναι μία μη-μηδενική κλάση συνομολογίας στον βαθμό 2 και $< X^{n+1} >$, είναι το ιδεώδες (ως προς το cup product) που παράγεται από το στοιχείο X^{n+1}.
(Υπόδειξη : Χρησιμοποιείστε επαγωγή και τον δυϊσμό Poincaré.)

8. Να αποδειχθεί οτι $H^k(S^2 \times S^4) \cong H^k(\mathbb{C}P^3)$, για κάθε k, αλλά οι διαβαθμισμένες άλγεβρες $H(S^2 \times S^4)$ και $H(\mathbb{C}P^3)$ δεν είναι ισόμορφες.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 7

1. Εστω M μία n-πολλαπλότητα και $D \subset M$ ένας τόπος με λείο σύνορο. Ενα διάνυσμα $v \in T_pM$, όπου $p \in \partial D$, λέμε οτι έχει κατεύθυνση προς τα έξω του D, αν υπάρχει κάποιος χάρτης τύπου (β) (U, ϕ) με $p \in U$ ώστε $dx^n(\phi_{*p}(v)) < 0$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένα λείο διανυσματικό πεδίο $\nu : \partial D \to TM$ κατά μήκος του ∂D, δηλαδή $\nu(p) \in T_pM$ για κάθε $p \in \partial D$, με κατεύθυνση προς τα έξω του D.
(Υπόδειξη : Ορίστε το ν πρώτα τοπικά και συγκολείστε τους τοπικούς ορισμούς χρησιμοποιώντας μία διαμέριση της μονάδας.)

2. Εστω M μία προσανατολισμένη n-πολλαπλότητα και $\omega \in A^n(M)$, που δίνει τον προσανατολισμό. Αν $D \subset M$ είναι ένας τόπος με λείο σύνορο, να αποδειχθεί οτι ο επαγόμενος προσανατολισμός του ∂D δίνεται από την $\tilde{\omega} \in A^{n-1}(\partial D)$ με τύπο

$$\tilde{\omega}_p(v_1, ..., v_{n-1}) = (-1)^n \omega(\nu(p), v_1, ..., v_{n-1}),$$

για $v_1, ..., v_{n-1} \in T_p\partial D$, $p \in \partial D$, όπου $\nu : \partial D \to TM$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος του ∂D με κατεύθυνση προς τα έξω του D.

3. Εστω M μία προσανατολισμένη n-πολλαπλότητα και $D \subset M$ ένας τόπος με λείο σύνορο. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $f \in C^\infty(M)$ και $\omega \in A_c^{n-1}(M)$ ισχύει ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_D f d\omega = (-1)^n \int_{\partial D} f\omega - \int_D df \wedge \omega.$$

4. Εστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένας φραγμένος τόπος με λείο σύνορο και $F = (P, Q)$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο που ορίζεται σε μία ανοιχτή περιοχή του $\overline{D}$. Να αποδειχθεί το θεώρημα του Green

$$\int_{\partial D} F = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy.$$

5. Εστω $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ μία λεία απλή κλειστή καμπύλη που είναι το σύνορο ενός δίσκου με λείο σύνορο $D \subset \mathbb{C}$ και $f = u + iv$ μία ολόμορφη συνάρτηση που ορίζεται σε μία ανοιχτή περιοχή του $\overline{D}$. Σύμφωνα με τις εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Cauchy

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

(Υπόδειξη : Αποδείξτε πρώτα οτι $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2$, όπου $\omega_1 = udx - vdy$, $\omega_2 = vdx + udy$ και ακολούθως οτι $\int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma \omega_2 = 0$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes.)

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 8

1. Είναι η παράγωγος Lie μία γραμμική συνοχή σε μία λεία πολλαπλότητα;

2. Να αποδειχθεί οτι η ευκλείδεια συνοχή στον $\mathbb{R}^n$ είναι η μοναδική γραμμική συνοχή για την οποία ισχύει $\nabla_X Y = 0$ για κάθε $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ και κάθε σταθερό $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.

3. Εστω ∇ μία γραμμική συνοχή σε μία πολλαπλότητα M. Μία λεία αμφιδιαφόριση $f : M \to M$ λέγεται *συσχετισμένη* (affine), αν διατηρεί την ∇, δηλαδή $f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_* X} f_* Y$, για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Το σύνολο των συσχετισμένων αμφιδιαφορίσεων της ∇ αποτελεί ομάδα. Να αποδειχθεί οτι αν $M = \mathbb{R}^n$ και ∇ είναι η ευλείδεια συνοχή, τότε κάθε συσχετισμένη αμφιδιαφόριση έχει την μορφή

$$f(x) = Ax + b, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $A \in GL(n, \mathbb{R})$ και $b \in \mathbb{R}^n$.

4. Μία λεία n-πολλαπλότητα M λέγεται *συσχετισμένα επίπεδη* (affinely flat), αν έχει έναν άτλαντα $\{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$, ώστε για κάθε i, $j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ υπάρχουν $A_{ij} \in GL(n, \mathbb{R})$ και $b_{ij} \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) = A_{ij} x + b_{ij}$$

για κάθε $x \in \phi_j(U_i \cap U_j)$. Να αποδειχθεί οτι σε μια τέτοια πολλαπλότητα υπάρχει μια φυσική γραμμική συνοχή ∇, ώστε κάθε χάρτης $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ να μεταφέρει την $\nabla | U$ στην ευκλείδεια συνοχή του $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.

5. Εστω $M \subset \mathbb{R}^n$ μία κανονική m-υποπολλαπλότητα. Για κάθε $p \in M$ έχουμε $T_p\mathbb{R}^n = T_pM \oplus N_p(M)$, όπου $N_p(M) = \{v \in T_p\mathbb{R}^n : v \perp T_pM\}$. Εστω $\pi_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_pM$ η προβολή ως προς αυτήν την διάσπαση.

(α) Εστω $X \in \mathcal{X}(M)$. Να αποδειχθεί οτι κάθε $p \in M$ έχει μια ανοιχτή περιοχή $U \subset \mathbb{R}^n$ στην οποία υπάρχει ένα $\tilde{X} \in \mathcal{X}(U)$ ώστε $\tilde{X} | U \cap M = X$.

(β) Αν $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ και $p \in M$ θέτουμε $(\overline{\nabla}_X Y)(p) = \pi_p((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})(p))$, όπου ∇ είναι η ευκλείδεια συνοχή και $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ είναι επεκτάσεις των X, Y, αντίστοιχα, σε μία περιοχή του p στο $\mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί οτι το $(\overline{\nabla}_X Y)(p)$ δεν εξαρτάται απο τις επεκτάσεις.

(γ) Να αποδειχθεί οτι η $\overline{\nabla}$ είναι μία γραμμική συνοχή στην M. Η $\overline{\nabla}$ λέγεται η ευκλείδεια συνοχή της M.

(δ) Εστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικά ορισμένος, συμμετρικός πίνακας και

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^{-1}x, x \rangle = 1\}$$

το $(n-1)$-διάστατο ελλειψοειδές με ημιάξονες τις ιδιοτιμές του A. Να αποδειχθεί οτι μία λεία καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to M$ είναι γεωδαισιακή του M ως πρός την ευκλείδεια συνοχή τότε και μόνον τότε όταν

$$\gamma'' + \frac{\langle A^{-1}\gamma', \gamma' \rangle}{\|A^{-1}\gamma\|^2} A^{-1}\gamma = 0.$$

6. Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε την γραμμική συνοχή για την οποία τα σύμβολα του Christoffel δίνονται από τους τύπους $\Gamma^1_{11} = x$, $\Gamma^1_{12} = 1$, $\Gamma^2_{22} = 2y$, ενώ τα υπόλοιπα μηδενίζονται.

(α) Ποια είναι η διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών αυτής της γραμμικής συνοχής;

(β) Εστω $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ η λεία καμπύλη $\gamma(t) = (t, 0)$. Να υπολογιστεί η παράλληλη μεταφορά του διανύσματος $(\frac{\partial}{\partial y})_{(0,0)}$ κατά μήκος της γ στο $(1,0)$, ως προς αυτήν την γραμμική συνοχή.

7. Εστω M μία λεία πολλαπλότητα με μία γραμμική συνοχή ∇ και $\rho : M \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση. Για κάθε X, $Y \in \mathcal{X}(M)$ θέτουμε

$$\nabla^\rho_X Y = \nabla_X Y - Y(\rho)X - X(\rho)Y.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η ∇^ρ είναι μια γραμμική συνοχή στην M.

(β) Εστω $\epsilon > 0$ και $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ μία γεωδαισιακή της ∇^ρ. Αν $h : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ είναι η λεία συνάρτηση με

$$h(t) = \int_0^t e^{2\rho(\gamma(s))} ds,$$

να αποδειχθεί οτι η $\gamma \circ h^{-1}$ είναι γεωδαισιακή της ∇. Συνεπώς οι γραμμικές συνοχές ∇ και ∇^ρ έχουν τις ίδιες μη-παραμετρισμένες γεωδαισιακές.

8. Εστω M μία λεία πολλαπλότητα και ∇ μια γραμμική συνοχή στην M. Για κάθε X, $Y \in \mathcal{X}(M)$ θέτουμε

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X, Y]).$$

Να αποδειχθεί οτι η $\overline{\nabla}$ είναι μια συμμετρική, γραμμική συνοχή στην M, που έχει τις ίδιες γεωδαισιακές με την ∇.

9. Η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη της 2-σφαίρας S^2 μπορεί να περιγραφεί ως το υποσύνολο

$$T^1S^2 = \{(p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|p\| = 1, \|v\| = 1, \langle p, v\rangle = 0\}$$

του $\mathbb{R}^6$, όπου $\langle , \rangle$ είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

(α) Να αποδειχθεί οτι το T^1S^2 είναι κανονική 3-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^6$.

(β) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $F : SO(3, \mathbb{R}) \to T^1S^2$ με $F(A) = (Ae_3, Ae_1)$ είναι αμφιδιαφόριση.

(γ) Εστω $D^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ και $g : D^3 \to SO(3, \mathbb{R})$ η απεικόνιση με $g(0) = I_3$ και τέτοια ώστε για $x \in D^3 \setminus \{0\}$ το $g(x)$ είναι η περιστροφή περί τον άξονα που παράγει το x κατά γωνία $\|x\| \cdot \pi$. Να αποδειχθεί οτι η g επάγει μία αμφιδιαφόριση $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3, \mathbb{R})$.
(Υπόδειξη : Παρατηρείστε οτι $T^1S^2 = f^{-1}(0)$, όπου $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι η λεία συνάρτηση $f(p, v) = (\|p\|^2 - 1, \|v\|^2 - 1, \langle p, v\rangle)$ και εφαρμόστε το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων.)

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 9

1. Εστω M, N δύο συνεκτικές πολλαπλότητες Riemann και $f : M \to N$ μία λεία αμφιδιαφόριση. Εστω οτι υπάρχει $p \in M$ ώστε η $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ να είναι ισομετρία. Να αποδειχθεί οτι η f είναι ισομετρία τότε και μόνον τότε όταν είναι συσχετισμένη ως προς την συνοχή Levi-Civita.

2. Να αποδειχθεί οτι σε μία n-πολλαπλότητα Riemann ισχύει σε τοπικές συντεταγμένες ο τύπος

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k g_{kl} + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{il}^k g_{kj}.$$

3. Στον $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε την $\nabla : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ από τον τύπο

$$\nabla_X Y = D_X Y + \frac{1}{2} X \times Y,$$

όπου $D_X Y$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος του Y ως προς X και $X \times Y$ είναι εξωτερικό γινόμενο (ως προς την ευκλείδεια μετρική).

(α) Να αποδειχθεί οτι η ∇ είναι συνοχή. Είναι η ∇ συμμετρική;

(β) Είναι η παράλληλη μεταφορά ως προς την ∇ κατά μήκος μιας λείας καμπύλης ευκλείδεια γραμμική ισομετρία;

4. Εστω M μία n-πολλαπλότητα Riemann και $f : M \to \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση. Το gradient της f είναι το μοναδικό λείο διανυσματικό πεδίο $\mathrm{grad} f$ για το οποίο ισχύει

$$f_{*p}(v) = \langle \mathrm{grad} f(p), v \rangle, \qquad v \in T_pM, \quad p \in M.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι στις τοπικές συντεταγμένες ενός χάρτη το gradient της f έχει τύπο

$$\mathrm{grad} f = (g_{ij})^{-1}_{1 \leq i,j \leq n} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

(β) Αν $\|\mathrm{grad} f\| = 1$ παντού στην M, να αποδειχθεί οτι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του $\mathrm{grad} f$ είναι γεωδαισιακές.

5. Εστω M μια λεία πολλαπότητα και $\langle , \rangle$ μια μετρική Riemann με αντίστοιχη συνοχή Levi-Civita ∇. Αν $f : M \to \mathbb{R}$ είναι μια λεία συνάρτηση, να αποδειχθεί οτι η συνοχή Levi-Civita $\overline{\nabla}$ της μετρικής Riemann $e^{2f}\langle , \rangle$ δίνεται από τον τύπο

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - \langle X, Y \rangle \mathrm{grad} f.$$

6. Στον $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ θεωρούμε την μετρική Riemann

$$\langle v, w \rangle = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} \cdot \mathrm{Re}(v\bar{w}), \qquad v, w \in T_z\mathbb{D}^2, \quad z \in \mathbb{D}^2.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $C : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$ με τύπο

$$C(z) = -i\frac{z+i}{z-i}$$

είναι ισομετρία. Η C λέγεται μετασχηματισμός του Cayley.

(β) Να αποδειχθεί οτι αν a, $b \in \mathbb{C}$ και $|a|^2 - |b|^2 = 1$, τότε η

$$h(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$$

είναι ισομετρία του $\mathbb{D}^2$.

(γ) Ποιές είναι οι γεωδαισιακές στον $\mathbb{D}^2$;

7. Εστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ η λεία καμπύλη $\gamma(t) = (t, 1)$. Να ευρεθεί το παράλληλο διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της γ με $X(0) = (\frac{\partial}{\partial y})_{\gamma(0)}$. Σχεδιάστε το X στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$.

8. Εστω M, N δύο συνεκτικές πολλαπλότητες Riemann.

(α) Εστω $p \in M$, $q \in N$ και $T : T_pM \to T_qN$ μία ισομετρία. Αν υπάρχει μία ισομετρία $h : M \to N$ ώστε $h(p) = q$ και $h_{*p} = T$, Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν κανονικές περιοχές V του p και W του q, ώστε $h(V) = W$ και $h|V = \exp_q \circ T \circ \exp_p^{-1}$.

(β) Να αποδειχθεί οτι αν g, $h : M \to N$ είναι δύο ισομετρίες για τις οποίες υπάρχει $p \in M$ ώστε $g(p) = h(p)$ και $g_{*p} = h_{*p}$, τότε $g = h$.

9. Εστω $n \geq 1$ και $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, η γενικευμένη απεικόνιση Hopf. Αν για κάθε $\lambda \in S^1$ θεωρήσουμε την $g_\lambda : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ με $g_\lambda(z) = \lambda z$, τότε η g_λ είναι ισομετρία της S^{2n+1} και ο $\mathbb{C}P^n$ είναι ο χώρος των τροχιών της δράσης της ομάδας $\{g_\lambda : \lambda \in S^1\} \cong S^1$ επί της S^{2n+1}. Για κάθε $[z] \in \mathbb{C}P^n$, το $\pi^{-1}([z])$ είναι ο κύκλος, που παραμετρίζεται από την λεία καμπύλη $\gamma(t) = e^{it}z$, $t \in \mathbb{R}$.

(α) Αν V_z είναι η (πραγματική) ευθεία που παράγεται από την ταχύτητα $\dot{\gamma}(0)$ και $H_z = \{v \in T_zS^{2n+1} : v \perp \dot{\gamma}(0)\}$, να αποδειχθεί οτι $(g_{e^{it}})_{*z}(V_z) = V_{e^{it}z}$ και $(g_{e^{it}})_{*z}(H_z) = H_{e^{it}z}$.

(β) Να αποδειχθεί οτι η $\pi_{*z}|H_z : H_z \to T_{[z]}\mathbb{C}P^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

(γ) Να αποδειχθεί οτι το εσωτερικό γινόμενο στον $T_{[z]}\mathbb{C}P^n$, που ορίζεται από την ισότητα

$$\langle v, w \rangle = \langle (\pi_{*z}|H_z)^{-1}(v), (\pi_{*z}|H_z)^{-1}(w) \rangle, \qquad v, w \in T_{[z]}\mathbb{C}P^n$$

δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο z του σημείου $[z] \in \mathbb{C}P^n$. Η μετρική Riemann που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο στον $\mathbb{C}P^n$ όφείλεται στους Fubini και Study.

(δ) Να αποδειχθεί οτι ο $\mathbb{C}P^n$ με την μετρική Fubini-Study είναι ομογενής πολλαπλότητα Riemann.

10. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann και G ένα μη-κενό σύνολο ισομετριών της. Εστω $F = \{p \in M : g(p) = p$ για κάθε $g \in G\}$. Να αποδειχθεί οτι το F είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε για κάθε $p \in F$ τον γραμμικό υπόχωρο $V = \{v \in T_pM : g_{*p}(v) = v$ για κάθε $g \in G\}$ του T_pM και δείξτε οτι $\exp_p(U \cap V) = F \cap \exp_p(U)$, για μια κατάλληλη ανοιχτή περιοχή U του $0 \in T_pM$.)

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 10

1. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann με ομάδα ισομετριών $I(M)$. Για κάθε γνήσια ασυνεχή υποομάδα G της $I(M)$ να αποδειχθεί οτι η M/G γίνεται πολλαπλότητα Riemann, αν είναι Hausdorff, και η απεκόνιση πηλίκο $p : M \to M/G$ τοπική ισομετρία. Αν η M είναι πλήρης, να αποδειχθεί οτι και η M/G είναι πλήρης. Για παράδειγμα, ο n-torus T^n δέχεται με αυτόν τον τρόπο μία μετρική Riemann μηδενικής καμπυλότητας, ενώ ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ μία μετρική Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής 1. Ποιές είναι οι γεωδαισιακές στον T^2 και ποιές στο $\mathbb{R}P^2$;

2. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann με αντίστοιχη απόσταση Riemann d. Αν $\epsilon > 0$ και $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ είναι μια C^1 καμπύλη, να αποδειχθεί οτι

$$\|\dot{\gamma}(0)\| = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} d(\gamma(t), \gamma(0)).$$

3. Εστω M μια πολλαπλότητα Riemann με απόσταση Riemann d και $f : M \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση.

(α) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $p \in M$ υπάρχουν $\delta > 0$ και $c \geq 0$ τέτοια ώστε $|f(p) - f(q)| \leq cd(p, q)$ για κάθε $q \in M$ με $d(p, q) \leq \delta$.

(β) Αν η M είναι συνεκτική και συμπαγής, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $C \geq 0$ τέτοιο ώστε $|f(p) - f(q)| \leq Cd(p, q)$ για κάθε p, $q \in M$.

4. Να αποδειχθεί οτι κάθε ομογενής πολλαπλότητα Riemann είναι πλήρης.

5. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεκτική, ισοτροπική (σε κάθε σημείο) και πλήρης πολλαπλότητα Riemann είναι ομογενής.

6. Εστω M μία συνεκτική, μη-συμπαγής, πλήρης πολλαπλότητα Riemann με απόσταση Riemann d. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $p \in M$ υπάρχει μια γεωδαισιακή $\gamma : [0, +\infty) \to M$ με $\gamma(0) = p$ και $d(p, \gamma(t)) = t$ για κάθε $t \geq 0$.

7. Εστω M μία συνεκτική, πλήρης πολλαπλότητα Riemann και έστω $\gamma : \mathbb{R} \to M$ μια κλειστή γεωδαισιακή, δηλαδή η γ είναι περιοδική, που σημαίνει οτι το $K = \gamma(\mathbb{R})$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη. Εστω $x \in M \setminus K$ και $a = d(x, K)$, όπου d είναι η απόσταση Riemann. Οπως είναι γνωστό υπάρχει $y \in K$ ώστε $d(x, K) = d(x, y)$. Λόγω της πληρότητας, υπάρχει μια ελάχιστη γεωδαισιακή $c : [0, a] \to M$, παραμετρισμένη με το μήκος της, ώστε $c(0) = x$, $c(a) = y$, $d(x, y) = L(c) = a$.

(α) Να αποδειχθεί οτι $d(c(t), K) = d(c(t), y)$ για κάθε $0 \leq t \leq a$.

(β) Να αποδειχθεί οτι αν $y = \gamma(s)$, τότε τα διανύσματα $\dot{\gamma}(s)$ και $\dot{c}(a)$ είναι κάθετα.

8. Εστω M μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann και $X \in \mathcal{X}(M)$. Αν υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|X(p)\| \leq c$ για κάθε $p \in M$, να αποδειχθεί οτι το X είναι πλήρες.

9. Εστω M και N δύο πολλαπλότητες Riemann και $h : M \to N$ μια αμφιδιαφόριση για την οποία υπάρχει $c > 0$ ώστε $c\|h_{*p}(v)\| \leq \|v\|$ για κάθε $v \in T_pM$ και $p \in M$. Αν η N

είναι πλήρης, να αποδειχθεί οτι και η M είναι πλήρης.

10. Εστω M μία συνεκτική, πλήρης, n-πολλαπλότητα Riemann, N μία n-πολλαπλότητα Riemann και $f : M \to N$ μια λεία, επί, απεικόνιση, ώστε

$$\|v\| \leq \|f_{*p}(v)\|$$

για κάθε $v \in T_pM$ και $p \in M$. Να αποδειχθεί οτι η f είναι απεικόνιση επικάλυψης.

11. Εστω M μια πολλαπλότητα Riemann με απόσταση Riemann d. Για κάθε κατά τμήματα λεία καμπύλη $\gamma : [a, b] \to M$, όπου $a < b$, ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$J(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$$

λέγεται ενέργεια της γ και δεν είναι αναλλοίωτος από αναπαραμετρήσεις.

(α) Να αποδειχθεί οτι $(L(\gamma))^2 \leq 2(b-a)J(\gamma)$ και η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε όταν η $\|\dot{\gamma}\|$ είναι σταθερή.

Για κάθε p, $q \in M$ θέτουμε

$$e(p, q) = \inf\{2J(\gamma)|\gamma : [0, 1] \to M \quad \text{κατά τμήματα λεία με} \quad \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι $(d(p, q))^2 = e(p, q)$ για κάθε p, $q \in M$.

(γ) Αν p, $q \in M$ και γ είναι μια κατά τμήματα λεία καμπύλη από το p στο q, να αποδειχθεί οτι η γ ελαχιστοποιεί την ενέργεια, δηλαδή $2J(\gamma) = e(p, q)$ τότε και μόνον τότε όταν η γ είναι ελάχιστη γεωδαισιακή.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 11

1. Εστω M μία παραλληλήσιμη, λεία n-πολλαπλότητα και X_1, X_2,..., X_n λεία διανυσματικά πεδία της M ώστε το $\{X_1(p), X_2(p), ..., X_n(p)\}$ να αποτελεί βάση του T_pM για κάθε $p \in M$. Να αποδειχθεί οτι η ∇ με

$$\nabla_X\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} X(f_k) \cdot X_k$$

για κάθε $X \in \mathcal{X}(M)$ και f_1, f_2,..., $f_k \in C^{\infty}(M)$ είναι μία γραμμική συνοχή στην M με μηδενικό τανυστή καμπυλότητας.

2. Εστω ∇ μία γραμμική συνοχή σε μία λεία πολλαπλότητα M. Εστω $p \in M$ και V μία κανονική περιοχή του p. Εστω $E(p) \in T_pM$. Για κάθε $q \in V$ θεωρούμε την παράλληλη μεταφορά $E(q) \in T_qM$ του $E(p)$ κατά μήκος της γεωδαισιακής ακτίνας στο V από το p στο q.

(α) Να αποδειχθεί οτι το E είναι λείο διανυσματικό πεδίο στο V.

(β) Αν ο τανυστής καμπυλότητας της ∇ μηδενίζεται, να αποδειχθεί οτι το E είναι παράλληλο, δηλαδή $\nabla_X E = 0$ για κάθε λείο διανυσματικό πεδίο X στο V.

3. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann και $\gamma : [0, l] \to M$ μια γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της. Εστω $X \in \mathcal{X}(M)$ και ϕ η ροή του.

(α) Δείξτε οτι υπάρχει $T > 0$ ώστε η ϕ να ορίζεται τουλάχιστον στο $[-T, T] \times \gamma([0, l])$.

(β) Εστω $\Gamma : [0, T] \times [0, l] \to M$ η λεία μεταβολή της γ με τύπο $\Gamma(s, t) = \phi_s(\gamma(t))$. Αν $\Gamma_T = \Gamma(T, .)$ και $L(\gamma)$, $L(\Gamma_T)$ είναι τα μήκη των γ, Γ_T, αντίστοιχα, να αποδειχθεί οτι

$$|L(\Gamma_T) - L(\gamma)| \leq \int_0^T \int_0^l \|\nabla_{\frac{\partial \Gamma}{\partial t}} X\| ds dt.$$

4. Εστω M μία 2-πολλαπλότητα Riemann και $\gamma : [0, l] \to M$ μια γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της. Εστω X ένα λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ με $\langle X, \dot{\gamma} \rangle = 0$ και $\|X\| = 1$ στο $[0, l]$.

(α) Να αποδειχθεί οτι το X είναι παράλληλο κατά μήκος της γ.

(β) Εστω $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι το fX είναι πεδίο Jacobi κατά μήκος της γ τότε και μόνον τότε οταν $f''(t) + K(\gamma(t))f(t) = 0$ για κάθε $0 \leq t \leq l$, όπου K είναι η καμπυλότητα τομής της M.

5. Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη μετρική Riemann g με

$$g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = 1, \quad g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}) = 0, \quad g(\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi}) = (f(r, \phi))^2$$

σε πολικές συντεταγμένες, όπου η $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ είναι μία λεία συνάρτηση.

(α) Να ευρεθεί η διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών και να αποδειχθεί οτι κάθε ακτίνα γ_ϕ, με το ϕ σταθερό, είναι γεωδαισιακή.

(β) Αν $X(r)$ είναι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ_ϕ, που είναι κάθετο στη γ_ϕ, να αποδειχθεί οτι το $Y(r) = f(r, \phi)X(r)$ είναι πεδίο Jacobi κατά μήκος της γ_ϕ.

(γ) Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα τομής K δίνεται από τον τύπο

$$K(r,\phi) = -\frac{1}{f(r,\phi)}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r,\phi).$$

6. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann με τανυστή καμπυλότητας R. Εστω $p \in M$, $v \in T_pM$ με $\|v\| = 1$ και γ η γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$. Εστω u, $w \in T_pM$ και Y, Z τα διανυσματικά πεδία Jacobi κατά μήκος της γ με $Y(0) = Z(0) = 0$ και

$$\frac{DY}{dt}(0) = u, \qquad \frac{DZ}{dt}(0) = w.$$

Να αποδειχθεί οτι αν το t είναι αρκετά κοντά στο 0, τότε

$$\langle Y(t), Z(t)\rangle = t^2\langle u, w\rangle - \frac{1}{3}\langle R(u,v)v, w\rangle t^4 + o(t^5)$$

όπου $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{o(t^5)}{t^4} = 0$.
(Υπόδειξη : Εφαρμόζουμε του θεώρημα του Taylor για την συνάρτηση $f(t) = \langle Y(t), Z(t)\rangle$. Τότε $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 2\langle u, w\rangle$, $f^{(3)}(0) = 0$ και $f^{(4)}(0) = 8\langle R(u,v)v, w\rangle$. Για το τελευταίο θα χρειαστεί να αποδειχθεί ο τύπος

$$\frac{DR(Y,\dot\gamma)\dot\gamma}{dt}(0) = R(\frac{DY}{dt}(0), \dot\gamma(0))\dot\gamma(0) = R(u,v)v.)$$

7. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann με καμπυλότητα τομής K. Εστω $p \in M$, u, $v \in T_pM$ με $\|u\| = \|v\| = 1$ και $\langle u, v\rangle = 0$. Αν γ είναι η γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για $|t| < \epsilon$ το διανυσματικό πεδίο Jacobi κατά μήκος της γ με αρχικές συνθήκες

$$Y(0) = 0, \qquad \frac{DY}{dt}(0) = u$$

ικανοποιεί τις ισότητες

(α) $\|Y(t)\|^2 = t^2 - \dfrac{1}{3}K_p(\sigma)t^4 + o(t^5)$,

(β) $\|Y(t)\| = t - \dfrac{1}{6}K_p(\sigma)t^3 + o(t^4)$,

όπου σ είναι το επίπεδο στον T_pM με βάση $\{v, u\}$.

8. Εστω M μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann με μηδενική καμπυλότητα. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $p \in M$ υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η $\exp_p : S(0,\epsilon) \to S(p,\epsilon)$ να είναι ισομετρία.

9. Στο παραβολοειδές $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ θεωρούμε την επαγόμενη μετρική Riemann από το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

(α) Δείξτε οτι η καμπυλότητα τομής του παραβολοειδούς δίνεται από τον τύπο

$$K(x,y,z) = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2}$$

και συνεπώς $\inf\{K(x,y,z) : (x,y,z) \in M\} = 0$.

(β) Να αποδειχθεί οτι η M είναι πλήρης.

(γ) Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχουν συζυγή προς το $(0,0,0)$ σημεία, δηλαδή το $(0,0,0)$ είναι πόλος.