

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 1

1. Στο \mathbb{R} θεωρούμε την διαφορίσιμη δομή \mathcal{B} που ορίζεται από τον άτλαντα $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$, όπου $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $\psi(t) = t^3$. Εστω \mathcal{A} η συνηθισμένη διαφορίσιμη δομή του \mathbb{R} .

(α) Δείξτε ότι $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

(β) Δείξτε ότι η $id : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ δεν είναι αμφιδιαφορίση.

(γ) Είναι οι λείες πολλαπλότητες $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ αμφιδιαφορίσιμες;

2. Εστω $U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\}$ και $U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}$, ενώ $h_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η απεικόνιση με τύπο

$$h_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

(α) Δείξτε ότι ο $\mathcal{B} = \{(U_i^\pm, h_i^\pm) : 1 \leq i \leq n+1\}$ είναι C^∞ άτλας στην S^n .

(β) Δείξτε ότι ο \mathcal{B} ορίζει την ίδια διαφορίσιμη δομή με τον C^∞ άτλαντα $\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{e_{n+1}\}, \pi_+), (S^n \setminus \{-e_{n+1}\}, \pi_-)\}$, όπου $\pi_\pm : S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η στερεογραφική προβολή.

3. Εστω $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ ο κανονικός άτλας του μιγαδικού προβολικού χώρου $\mathbb{C}P^1$. Παρατηρήστε ότι $\mathbb{C}P^1 \setminus U_1 = \{[0, 1]\}$ και $\mathbb{C}P^1 \setminus U_2 = \{[1, 0]\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ με τύπο

$$g[z_1, z_2] = \begin{cases} (\pi_+^{-1} \circ \phi_1)[z_1, z_2], & \text{όταν } z_1 \neq 0 \\ (0, 0, 1), & \text{όταν } z_1 = 0. \end{cases}$$

είναι αμφιδιαφορίση, όπου $\pi_+ : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι η στερεογραφική προβολή ως προς τον βόρειο πόλο.

4. Εστω X ένας χώρος Hausdorff και $H(X)$ η ομάδα των ομοιομορφισμών του X επί του εαυτού του. Μία υποομάδα G της $H(X)$ ορίζει στον X την σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ όταν υπάρχει $g \in G$ ώστε $y = g(x)$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας λέγονται τροχιές της G .

(α) Δείξτε ότι η απεικόνιση πηλίκο $p : X \rightarrow X/G$ είναι ανοιχτή (και συνεχής, επί, εξορισμού).

Η G λέμε ότι δρά γνήσια ασυνεχώς επί του X όταν κάθε $x \in X$ έχει μία ανοιχτή περιοχή U τέτοια ώστε $U \cap g(U) = \emptyset$, για κάθε $g \in G$, $g \neq id$.

(β) Αν η G δρά γνήσια ασυνεχώς, δείξτε ότι κάθε $[x] \in X/G$ έχει μία ανοιχτή περιοχή V^* ώστε

$$p^{-1}(V^*) = \bigcup_{g \in G} g(V),$$

όπου V είναι μία κατάλληλη ανοιχτή περιοχή του $x \in X$, ώστε $g_1(V) \cap g_2(V) = \emptyset$, για $g_1 \neq g_2$ και η $p|_V : V \rightarrow V^*$ είναι ομοιομορφισμός.

(γ) Εστω M μία λεία n -πολλαπλότητα και G μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M . Αν ο M/G είναι Hausdorff, δείξτε ότι είναι λεία n -πολλαπλότητα.

(δ) Εστω M μία λεία n -πολλαπλότητα και G μία πεπερασμένη ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M . Αν $g(x) \neq x$ για κάθε $x \in M$, $g \in G$, $g \neq id$, δείξτε ότι η G δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M , ο M/G είναι Hausdorff και συνεπώς λεία n -πολλαπλότητα.

(ε) Στην n -σφαίρα S^n η αντιποδική απεικόνιση $a : S^n \rightarrow S^n$ με $a(x) = -x$ είναι αμφιδιαφόριση. Αν $G = \{id, a\}$, ποιά είναι η λεία πολλαπλότητα S^n/G ;

(στ) Στον $T^2 = S^1 \times S^1$ ορίζεται η απεικόνιση $f : T^2 \rightarrow T^2$ με $f(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{-2\pi ix}, -e^{2\pi iy})$. Αν $G = \{id, f\}$, δείξτε ότι ο $K^2 = T^2/G$ είναι λεία 2-πολλαπλότητα. Η K^2 λέγεται φιάλη του Klein.

(ζ) Στο \mathbb{R}^n δρά η ομάδα των μεταφορών κατά ακέραιο διάνυσμα \mathbb{Z}^n . Δείξτε ότι ο $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ είναι λεία πολλαπλότητα αμφιδιαφορίσιμη με τον T^n .

5. Να αποδειχθεί ότι ο 1-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^1$ είναι αμφιδιαφορίσιμος με τον κύκλο S^1 .

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 2

1. Εστω $f : M \rightarrow N$ μία 1-1, επί και λεία απεικόνιση. Αν η $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ είναι γραμμικός ισομορφισμός για κάθε $p \in M$, δείξτε ότι η f είναι αμφιδιαφόριση.

2. Εστω $f : M \rightarrow Q$ μία λεία απεικόνιση και $q \in Q$ μία κανονική τιμή της, ώστε $N = f^{-1}(q) \neq \emptyset$. Αν $i_N : N \hookrightarrow M$ είναι η ένθεση, δείξτε ότι $(i_N)_{*p}(T_p N) = \text{Ker } f_{*p}$ για κάθε $p \in N$.

3. Να αποδειχθεί ότι $T_p S^n = \{[\gamma]_p \in T_p \mathbb{R}^{n+1} : \langle \gamma'(0), p \rangle = 0\}$ για κάθε $p \in S^n$, όπου \langle, \rangle είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

4. Εστω $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση.

(α) Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία λεία επέκταση της f σε κάποιο ανοικτό σύνολο $S^n \subset A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, δείξτε ότι η $\tilde{f}_{*p}|_{T_p S^n}$ εξαρτάται μόνον από την f , όταν $p \in S^n$.

(β) Δείξτε μ' ένα παράδειγμα ότι η $f_{*p} : T_p \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in S^n$, εξαρτάται από την \tilde{f} .

(Υπόδειξη για το (β) : Θεωρείστε την $f = x^1|_{S^n}$ και τις επεκτάσεις της $\tilde{f}_1(x) = x^1(\frac{x}{\|x\|^2})$ και $\tilde{f}_2(x) = x^1(x \cdot \|x\|^2)$ στο $A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.)

5. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει 1-1, λεία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

6. Το σύνολο S των πραγματικών $n \times n$ συμμετρικών πινάκων είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n \times n}$ διαστάσεως $n(n+1)/2$. Εστω $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow S$ η απεικόνιση με τύπο $f(A) = A \cdot A^t$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $f_{*A}(H) = AH^t + HA^t$ για κάθε $H \in T_A GL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

(β) Να αποδειχθεί ότι ο ταυτοτικός πίνακας $I_n \in S$ είναι κανονική τιμή της f .

(γ) Να αποδειχθεί ότι η ορθογώνια ομάδα $O(n, \mathbb{R})$ είναι κανονική $n(n-1)/2$ -υποπολλαπλότητα της $GL(n, \mathbb{R})$.

(δ) Να αποδειχθεί ότι $T_{I_n} O(n, \mathbb{R}) = \{H \in \mathbb{R}^{n \times n} : H + H^t = 0\}$.

7. Εστω M μία λεία n -πολλαπλότητα, $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ ένας άτλας της και $\bar{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U_i), \bar{\phi}_i) : i \in I\}$ ο αντίστοιχος άτλας της TM , όπου $\pi : TM \rightarrow M$ είναι η εφαπτόμενη δέσμη της M . Να αποδειχθεί ότι

$$\det D(\bar{\phi}_i \circ \bar{\phi}_j^{-1})(x, v) > 0$$

για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ και $(x, v) \in \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$.

8. Εστω $0 \leq k < n$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$N_k = \{[z_1, \dots, z_{k+1}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{C}P^n : (z_1, \dots, z_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}\}$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $\mathbb{C}P^n$ και η απεικόνιση $j : \mathbb{C}P^k \rightarrow N_k$ με $j[z_1, \dots, z_{k+1}] = [z_1, \dots, z_{k+1}, 0, \dots, 0]$ είναι αμφιδιαφόριση.

9. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $g : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$g(e^{2\pi i\phi}, e^{2\pi i\theta}) = ((2 + \cos \theta) \cos \phi, (2 + \cos \theta) \sin \phi, \sin \theta)$$

είναι embedding του 2-torus T^2 στον \mathbb{R}^3 με εικόνα

$$g(T^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

10. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ με

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy)$$

είναι immersion, που επάγει ένα embedding του πραγματικού προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ στον \mathbb{R}^6 .

11. Εστω $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ο ορθογώνιος μετασχηματισμός (μιγαδική δομή του \mathbb{R}^{2n}) με $J(x, y) = (-y, x)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(α) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} : A^t J A = J\}$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

(β) Να περιγραφεί ο εφαπτόμενος χώρος $T_{I_{2n}}S$ ως διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

(γ) Ποιά είναι η διάσταση του S ;

(Υπόδειξη : Δείξτε ότι η $J \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ είναι κανονική τιμή της λείας απεικόνισης $f : GL(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \{H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} : H + H^t = 0\}$ με $f(A) = A^t J A$ και εφαρμόστε το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων.)

12. Εστω $d \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και V_d^{2n} το σύνολο των σημείων $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι το V_d^{2n} είναι λεία $2n$ -πολλαπλότητα.

(β) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $W_d^{2n-1} = V_d^{2n} \cap S^{2n+1}$ είναι λεία $(2n - 1)$ -πολλαπλότητα. Η W_d^{2n-1} λέγεται πολλαπλότητα του Brieskorn.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 3

1. Εστω $N \subset M$ μία κανονική υπολλαπλότητα της πολλαπλότητας M και $\xi \in \mathcal{X}(M)$, ώστε $\xi(p) \in T_p N$ για κάθε $p \in N$. Δείξτε ότι $\xi|_N \in \mathcal{X}(N)$.

2. Στο \mathbb{R}^{2n} θεωρούμε το λείο διανυσματικό πεδίο

$$\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + x^{2n} \frac{\partial}{\partial x^{2n-1}} - x^{2n-1} \frac{\partial}{\partial x^{2n}}.$$

Δείξτε ότι το $\xi|_{S^{2n-1}}$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο της S^{2n-1} , που δεν μηδενίζεται πουθενά.

3. (α) Εστω M μία λεία πολλαπλότητα και G μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M . Αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$, ώστε $g_* \xi = \xi$ για κάθε $g \in G$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\zeta \in \mathcal{X}(M/G)$ ώστε $p_{*x}(\xi(x)) = \zeta(p(x))$ για κάθε $x \in M$, όπου $p : M \rightarrow M/G$ είναι η απεικόνιση πηλίχο.

(β) Κατασκευάστε ένα λείο διανυσματικό πεδίο στο πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$, που έχει ακριβώς ένα σημείο μηδενισμού, ενώ κάθε άλλη ολοκληρωτική καμπύλη είναι μή-σταθερή περιοδική.

4. Μία n -πολλαπλότητα M λέγεται παραλληλήσιμη αν υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathcal{X}(M)$, ώστε το $\{\xi_1(p), \xi_2(p), \dots, \xi_n(p)\}$ να αποτελεί βάση του $T_p M$ για κάθε $p \in M$. Να αποδειχθεί ότι η M είναι παραλληλήσιμη τότε και μόνον τότε όταν η εφαιπτομένη δέσμη της είναι τετριμμένη, δηλαδή υπάρχει μία αμφιδιαφόριση $f : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f} & M \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{προβολή} \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

και η f απεικονίζει γραμμικά τον $T_p M$ στο $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ για κάθε $p \in M$.

5. Να αποδειχθεί ότι οι πολλαπλότητες $S^1, T^2 = S^1 \times S^1, S^3$ είναι παραλληλήσιμες.

6. Να ευρεθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ του \mathbb{R}^2 .

7. Εστω M μία πολλαπλότητα, $p \in M$ και $\xi \in \mathcal{X}(M)$.

(α) Αν $\xi(p) = 0$, δείξτε ότι η σταθερή καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ με $\gamma(t) = p$ είναι η μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από το p . Συνεπώς, αν $\phi : D \rightarrow M$ είναι η ροή του ξ , τότε $\phi_t(p) = p$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Εστω $\gamma : I_p \rightarrow M$ η ολοκληρωτική καμπύλη με $\gamma(0) = p$. Αν υπάρχει $T \in I_p$, $T > 0$, ώστε $\gamma(0) = \gamma(T)$ και ο T είναι ο ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα, να αποδειχθεί ότι $I_p = \mathbb{R}$ και υπάρχει μία immersion $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow M$ ώστε $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(e^{2\pi it/T})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

8. Εστω M μία πολλαπλότητα και $f : M \rightarrow M$ μία αμφιδιαφόριση. Αν το $\xi \in \mathcal{X}(M)$ έχει ροή $\phi : D \rightarrow M$, δείξτε ότι το $f_*\xi$ έχει ροή $\psi : D \rightarrow M$ με τύπο $\psi(t, f(p)) = f(\phi(t, p))$.

9. Εστω $h : [0, 1] \rightarrow [0, \pi]$ μία λεία συνάρτηση με $h^{-1}(0) = [0, 1/5] \cup [4/5, 1]$ και $h^{-1}(\pi/2) = [2/5, 3/5]$. Επεκτείνουμε την h στο \mathbb{R} περιοδικά θέτοντας $h(x+1) = h(x)$. Δείξτε ότι τα διανυσματικά πεδία

$$\xi(x) = x^2 \cos^2 h(x) \frac{d}{dx} \text{ και } \zeta(x) = x^2 \sin^2 h(x) \frac{d}{dx}$$

είναι πλήρη στο \mathbb{R} , αλλά το $\xi + \zeta$ δεν είναι πλήρες.

10. Εστω M μία πολλαπλότητα και $\xi \in \mathcal{X}(M)$, με ροή $\phi : D \rightarrow M$, όπου

$$D = \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\}.$$

Αν $f : M \rightarrow (0, 1]$ είναι μία λεία συνάρτηση με την ιδιότητα $f(p) < \min\{-a_p, b_p\}$ για κάθε $p \in M$, να αποδειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο $f \cdot \xi$ είναι πλήρες.

(Υπόδειξη: Εστω $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ η λεία συνάρτηση με τύπο

$$g(t, p) = \int_0^t \frac{1}{f(\phi(s, p))} ds.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση $h : D \rightarrow \mathbb{R} \times M$ με τύπο $h(t, p) = (g(t, p), p)$ είναι αμφιδιαφόριση και η $\psi = \phi \circ h^{-1}$ είναι η ροή του $f \cdot \xi$. Για την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης f και περισσότερο κοιτάξτε την εργασία R.L. Renz, Equivalent flows on smooth Banach manifolds, *Indiana Math. J.* 20 (1971), 695-698.)

11. Εστω M μία πολλαπλότητα και $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, πλήρη, με ροές ϕ και ψ αντίστοιχα. Αν υπάρχει μια λεία συνάρτηση $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $[X, Y] = hX$, να αποδειχθεί ότι

$$(\psi_t \circ \phi_s)(p) = (\phi_{T_p(t, s)} \circ \psi_t)(p)$$

για κάθε $p \in M$, $t, s \in \mathbb{R}$, όπου $T_p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η λεία συνάρτηση

$$T_p(t, s) = \int_0^s \left(\exp\left(\int_0^t h(\psi_\tau(\phi_\sigma(p))) d\tau\right) \right) d\sigma.$$

12. Στον \mathbb{R}^3 θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία

$$X = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ με

$$g(a, b, c) = aX + bY + cZ$$

είναι ένας γραμμικός μονομορφισμός με την ιδιότητα $g(A \times B) = [g(A), g(B)]$ για κάθε $A, B \in \mathbb{R}^3$, όπου \times είναι το συνηθισμένο εξωτερικό γινόμενο.

Άσκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 4

1. Να υπολογιστεί το $d\omega$ όταν
 (α) $\omega = x^2ydy - xydx$, (β) $\omega = f(x, y)dx$, όπου $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία λεία συνάρτηση,
 (γ) $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, όπου οι $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λείες συναρτήσεις.

2. Αν $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ και $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i dx^i$ στον \mathbb{R}^n , δείξτε ότι

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i < j} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) dx^i \wedge dx^j.$$

3. Να υπολογιστεί το $d\omega$, όταν $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

4. Αν $\rho = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n$ στον \mathbb{R}^n , να αποδειχθεί ότι $d\rho = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

5. Εστω M μία λεία πολλαπλότητα και $\omega \in A^1(M)$. Αν υπάρχει $f \in C^\infty(M)$, ώστε $f(p) \neq 0$ για κάθε $p \in M$ και η $f\omega$ να είναι κλειστή, δείξτε ότι $\omega \wedge d\omega = 0$.

6. Εστωσαν M, N δύο λείες πολλαπλότητες και $f : M \rightarrow N$ μία submersion επί της N . Να αποδειχθεί ότι η $f^* : A(N) \rightarrow A(M)$ είναι 1-1.

7. Να αποδειχθεί ότι $H^1(\mathbb{R}) = 0$.

8. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια λεία, περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1, δηλαδή $f(x+1) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ και μια λεία, περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με περίοδο 1, ώστε $f dx = \lambda dx + dg$ στο \mathbb{R} . Κατά συνέπεια $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$.

9. Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ θεωρούμε την διαφορική 1-μορφή

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η ω είναι κλειστή, αλλά δεν είναι ακριβής.

(β) Εστω $F : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ η λεία τοπική αμφιδιαφόριση (εκθετική απεικόνιση) με τύπο

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Να αποδειχθεί ότι $F^*\omega = d\theta$.

(γ) Εστω η μια κλειστή, διαφορική 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$, μια λεία, περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με περίοδο 2π και μια λεία συνάρτηση $h : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $h(\rho, \theta + 2\pi) = h(\rho, \theta)$ για κάθε $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$F^*\eta = dh + \lambda d\theta + g'(\theta)d\theta$$

στο $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

(δ) Να αποδειχθεί ότι $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \cong \mathbb{R}$.

(Υπόδειξη : Για το (γ) χρησιμοποιείστε την άσκηση 8 και για το (δ) την άσκηση 6.)

10. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοιχτό σύνολο. Για κάθε $\alpha \in A^1(M)$ υπάρχουν μοναδικές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in C^\infty(M)$, ώστε $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$. Η $\phi : \mathcal{X}(M) \rightarrow A^1(M)$ με

$$\phi\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$$

είναι ισομορφισμός. Για κάθε $\theta \in A^2(M)$ υπάρχουν μοναδικές $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C^\infty(M)$ ώστε $\theta = \beta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \beta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \beta_3 dx^1 \wedge dx^2$ και η $\psi : \mathcal{X}(M) \rightarrow A^2(M)$ με

$$\psi\left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \theta$$

είναι ισομορφισμός. Τέλος, η $\mu : C^\infty(M) \rightarrow A^3(M)$ με $\mu(f) = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ είναι ισομορφισμός. Να αποδειχθεί ότι $\phi(\xi) \wedge \phi(\zeta) = \psi(\xi \times \zeta)$ και $\phi(\xi) \wedge \psi(\zeta) = \mu(\langle \xi, \zeta \rangle)$ για κάθε $\xi, \zeta \in \mathcal{X}(M)$, όπου \times είναι το εξωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^3 και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(M) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow \mu \\ C^\infty(M) & \xrightarrow{d} & A^1(M) & \xrightarrow{d} & A^2(M) & \xrightarrow{d} & A^3(M) \end{array}$$

11. Εστω $M \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\omega \in A^1(M)$, ώστε $\omega \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = 0$, όπου $k < n$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M)$ ώστε $\omega = f_1 dx^1 + \dots + f_k dx^k$.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 5

1. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη δέσμη κάθε λείας πολλαπλότητας είναι προσανατολισμένη.

2. Εστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση. Αν το $a \in \mathbb{R}$ είναι κανονική τιμή της f και $M = f^{-1}(a) \neq \emptyset$, δείξτε ότι η M είναι προσανατολισμένη υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^n .

(Υπόδειξη : Ο περιορισμός της $\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n$ είναι ένα στοιχείο όγκου. Η απόδειξη είναι όμοια με την περίπτωση της σφαίρας.)

3. Να αποδειχθεί ότι η έννοια της προσανατολισιμότητας είναι αναλλοίωτη από αμφιδιαφορίσεις.

4. Εστω M μία λεία n -πολλαπλότητα και $\omega \in A^k(M)$, $0 \leq k \leq n$. Εστω G μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M , ώστε ο χώρος M/G να είναι Hausdorff. Αν $g^*\omega = \omega$ για κάθε $g \in G$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία μοναδική $\tilde{\omega} \in A^k(M/G)$ ώστε $p^*\tilde{\omega} = \omega$, όπου $p : M \rightarrow M/G$ είναι η απεικόνιση πιλήκο. Να αποδειχθεί μετά από αυτό ότι αν η M είναι προσανατολισμένη και η ω είναι ένα στοιχείο όγκου ώστε $g^*\omega = \omega$ για κάθε $g \in G$, τότε η M/G είναι προσανατολισμένη.

5. Εστω M μία λεία n -πολλαπλότητα και $\omega \in A^k(M)$, $0 \leq k \leq n$. Εστω G μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της M που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της M , ώστε ο χώρος M/G να είναι Hausdorff. Αν $\tilde{\omega} \in A^k(M/G)$, $0 \leq k \leq n$ και $\omega = p^*\tilde{\omega}$, όπου $p : M \rightarrow M/G$ είναι η απεικόνιση πιλήκο, δείξτε ότι $g^*\omega = \omega$ για κάθε $g \in G$. Να αποδειχθεί μετά από αυτό ότι αν η M/G είναι προσανατολισμένη, τότε και η M είναι προσανατολισμένη.

6. Να αποδειχθεί ότι ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$, $n > 1$, είναι προσανατολισμένη πολλαπλότητα τότε και μόνον τότε όταν ο n είναι περιττός. Συνεπώς, το πραγματικό προβολικό επίπεδο είναι μη-προσανατολισμένη, συνεκτική, συμπαγής 2-πολλαπλότητα.

7. Εστω ότι $G = \langle g, h \rangle$, όπου $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι οι $g(x, y) = (x + 1, y)$ και $h(x, y) = (1 - x, y + 1)$. Δηλαδή, $G = \langle g, h | h^{-1}gh = g^{-1} \rangle$. Να αποδειχθεί ότι η $K^2 = \mathbb{R}^2/G$, που είναι η φιάλη του Klein, είναι μη-προσανατολισμένη, συνεκτική, συμπαγής 2-πολλαπλότητα.

8. Εστω M μία προσανατολισμένη n -πολλαπλότητα με στοιχείο όγκου $\omega \in A^n(M)$. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $i_\omega : \mathcal{X}(M) \rightarrow A^{n-1}(M)$ με

$$(i_\omega)_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega_p(\xi(p), v_1, \dots, v_{n-1}), v_1, \dots, v_{n-1} \in T_pM, p \in M$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Η i_ω λέγεται flux form του ξ .

(Υπόδειξη : Εστω (U, ϕ) ένας χάρτης με αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ στο U . Υπάρχει μοναδική $f \neq 0$ ώστε $\omega|_U = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Αν

$\xi|_U = \sum_{k=1}^n \xi_k(\partial/\partial x^k)$, δείξτε πρώτα ότι

$$i_{\xi}\omega|_U = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f \xi_j \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

9. Εστω M μία προσανατολισμένη n -πολλαπλότητα με στοιχείο όγκου $\omega \in A^n(M)$. Για κάθε $\xi \in \mathcal{X}(M)$ υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση $\operatorname{div}_{\omega}\xi \in C^{\infty}(M)$, που λέγεται ω -απόκλιση του ξ , ώστε $d(i_{\xi}\omega) = (\operatorname{div}_{\omega}\xi)\omega$. Αν $M = \mathbb{R}^n$ και $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, όπου $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ με $f \neq 0$, να αποδειχθεί ότι για

$$\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

έχουμε

$$\operatorname{div}_{\omega}\xi = \frac{1}{f} \sum_{k=1}^n \frac{\partial(f\xi_k)}{\partial x^k}.$$

10. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία προσανατολισμένη 2-υποπολλαπλότητα, για την οποία υπάρχει μία αμφιδιαφόριση $f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow M$, που διατηρεί τον προσανατολισμό, όπου $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Αν

$$\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$$

και $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, τότε

$$i_{\xi}\omega = \xi_1 dx^2 \wedge dx^3 + \xi_2 dx^3 \wedge dx^1 + \xi_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$f^*(i_{\xi}\omega) = \begin{vmatrix} \xi_1 \circ f_1 & \xi_2 \circ f_2 & \xi_3 \circ f_3 \\ \partial_u f_1 & \partial_u f_2 & \partial_u f_3 \\ \partial_v f_1 & \partial_v f_2 & \partial_v f_3 \end{vmatrix} du \wedge dv = \langle \xi \circ f, \partial_u f \times \partial_v f \rangle du \wedge dv,$$

όπου $\partial/\partial u, \partial/\partial v$ είναι τα βασικά διανυσματικά πεδία στο \mathbb{R}^2 .

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 6

1. Εστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο με $0 \in U$ και $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση, ώστε $f(0) = 1$ και $f_{*0} = 0$. Εστω $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ το γράφημα της f και $g : M \rightarrow S^n$ η απεικόνιση Gauss

$$g(p, f(p)) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p)\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}(p)\right)^2 + 1}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p), 1\right).$$

(α) Αν ω είναι το συνηθισμένο στοιχείο όγκου της S^n , να αποδειχθεί ότι

$$(g^*\omega)_{e_{n+1}} = (-1)^n \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)\right) \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_{e_{n+1}}.$$

(β) Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια συνεκτική, συμπαγής, προσανατολίσιμη επιφάνεια, δηλαδή κανονική 2-υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^3 . Αν K είναι η καμπυλότητα Gauss της M , να αποδειχθεί ότι

$$\int_M K d\sigma = 4\pi \deg g,$$

όπου g είναι η απεικόνιση Gauss και $d\sigma$ είναι το στοιχείο όγκου στην M , που επάγεται από το ευκλείδειο στοιχείο όγκου $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ του \mathbb{R}^3 .

(Υπόδειξη : Για το (β), αν ω είναι το συνηθισμένο στοιχείο όγκου της S^2 , δείξτε ότι $g^*\omega = Kd\sigma$. Χρησιμοποιείστε το (α) και το γεγονός ότι τοπικά η M είναι το γράφημα κάποιας C^∞ συνάρτησης.)

2. Εστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας και ω το συνηθισμένο στοιχείο όγκου της S^{n-1} . Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{S^{n-1}} \langle Ax, x \rangle \omega = \frac{1}{n} \text{Tr} A \cdot \text{vol}(S^{n-1})$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το συνηθισμένο ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

(Υπόδειξη : Εφαρμόστε κατάλληλο μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας το φασματικό θεώρημα.)

3. Αν $k \in \mathbb{Z}^+$ να αποδειχθεί ότι η

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{\|x\|^k} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$$

δεν είναι ακριβής στο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

(Υπόδειξη : Υποθέστε ότι η ω_k είναι ακριβής στο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ και χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Stokes για να φτάσετε σε αντίφαση.)

4. Εστω $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ η $p(t) = e^{2\pi i t}$ και $\omega \in A^1(S^1)$. Υπάρχει $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ώστε $p^*\omega = f dt$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 1 και

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^1 f(t) dt.$$

(β) Δείξτε χρησιμοποιώντας το (α) ότι ο $\int_{S^1} : H^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ισομορφισμός.

(Υπόδειξη : Για το (α) θεωρείστε για κάθε $\epsilon > 0$ τον άτλαντα $\mathcal{A} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$, όπου $U_1 = p((0, 1))$, $\phi_1 = (p|(0, 1))^{-1}$, $U_2 = p((-\epsilon, \epsilon))$, $\phi_2 = (p|(-\epsilon, \epsilon))^{-1}$ και μία διαμέριση της μονάδας $\{f_1, f_2\}$ υποκειμένη στο ανοιχτό κάλυμα $\{U_1, U_2\}$. Παρατηρήστε ότι $(\phi_j^{-1})^*(f_j \omega) = (f_j \circ p)p^* \omega$, $j = 1, 2$, ενώ $\text{supp}(f_2 \circ p) \subset (-\epsilon, \epsilon)$.)

5. Εστω $E = \mathbb{C}P^n \setminus \{[0, \dots, 0, 1]\}$. Αν $\pi : E \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ και $i : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow E$ είναι οι απεικονίσεις με τύπους $\pi[z_1, \dots, z_n, z_{n+1}] = [z_1, \dots, z_n]$ και $i[z_1, \dots, z_n] = [z_1, \dots, z_n, 0]$, να αποδειχθεί ότι $i \circ \pi \simeq id$. Συνεπώς $H(E) \cong H(\mathbb{C}P^{n-1})$. Χρησιμοποιείστε το γεγονός αυτό, το γεγονός ότι ο $\mathbb{C}P^1$ είναι αμφιδιαφορίσιμος με την S^2 και την ακολουθία Mayer-Vietoris για το ανοιχτό κάλυμα $\mathbb{C}P^n = E \cup U_{n+1}$ για να αποδείξετε επαγωγικά ότι

$$H^k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{για } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{για } k \text{ αλλιώς.} \end{cases}$$

6. Αν $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, $n \geq 1$, είναι η γενικευμένη απεικόνιση Hopf, να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει λεία $s : \mathbb{C}P^n \rightarrow S^{2n+1}$ ώστε $\pi \circ s = id$.

7. Να αποδειχθεί ότι η διαβαθμισμένη άλγεβρα $H(\mathbb{C}P^n)$, $n \geq 1$, είναι ισόμορφη με την κόλουρη πολυωνυμική άλγεβρα $\mathbb{R}[X]/\langle X^{n+1} \rangle$, όπου X είναι μία μη-μηδενική κλάση συνολογίας στον βαθμό 2 και $\langle X^{n+1} \rangle$, είναι το ιδεώδες (ως προς το cup product) που παράγεται από το στοιχείο X^{n+1} .

(Υπόδειξη : Χρησιμοποιείστε επαγωγή και τον δυϊσμό Poincaré.)

8. Να αποδειχθεί ότι $H^k(S^2 \times S^4) \cong H^k(\mathbb{C}P^3)$, για κάθε k , αλλά οι διαβαθμισμένες άλγεβρες $H(S^2 \times S^4)$ και $H(\mathbb{C}P^3)$ δεν είναι ισόμορφες.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 7

1. Εστω M μία n -πολλαπλότητα και $D \subset M$ ένας τόπος με λείο σύνορο. Ένα διάνυσμα $v \in T_p M$, όπου $p \in \partial D$, λέμε ότι έχει κατεύθυνση προς τα έξω του D , αν υπάρχει κάποιος χάρτης τύπου $(\beta) (U, \phi)$ με $p \in U$ ώστε $dx^n(\phi_{*p}(v)) < 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα λείο διανυσματικό πεδίο $\nu : \partial D \rightarrow TM$ κατά μήκος του ∂D , δηλαδή $\nu(p) \in T_p M$ για κάθε $p \in \partial D$, με κατεύθυνση προς τα έξω του D .

(Υπόδειξη : Ορίστε το ν πρώτα τοπικά και συγχολλείστε τους τοπικούς ορισμούς χρησιμοποιώντας μία διαμέριση της μονάδας.)

2. Εστω M μία προσανατολισμένη n -πολλαπλότητα και $\omega \in A^n(M)$, που δίνει τον προσανατολισμό. Αν $D \subset M$ είναι ένας τόπος με λείο σύνορο, να αποδειχθεί ότι ο επαγόμενος προσανατολισμός του ∂D δίνεται από την $\tilde{\omega} \in A^{n-1}(\partial D)$ με τύπο

$$\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = (-1)^n \omega(\nu(p), v_1, \dots, v_{n-1}),$$

για $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p \partial D$, $p \in \partial D$, όπου $\nu : \partial D \rightarrow TM$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος του ∂D με κατεύθυνση προς τα έξω του D .

3. Εστω M μία προσανατολισμένη n -πολλαπλότητα και $D \subset M$ ένας τόπος με λείο σύνορο. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $f \in C^\infty(M)$ και $\omega \in A_c^{n-1}(M)$ ισχύει ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_D f d\omega = (-1)^n \int_{\partial D} f\omega - \int_D df \wedge \omega.$$

4. Εστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένας φραγμένος τόπος με λείο σύνορο και $F = (P, Q)$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο που ορίζεται σε μία ανοιχτή περιοχή του \overline{D} . Να αποδειχθεί το θεώρημα του Green

$$\int_{\partial D} F = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

5. Εστω $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ μία λεία απλή κλειστή καμπύλη που είναι το σύνορο ενός δίσκου με λείο σύνορο $D \subset \mathbb{C}$ και $f = u + iv$ μία ολόμορφη συνάρτηση που ορίζεται σε μία ανοιχτή περιοχή του \overline{D} . Σύμφωνα με τις εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Cauchy

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

(Υπόδειξη : Αποδείξτε πρώτα ότι $\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2$, όπου $\omega_1 = u dx - v dy$, $\omega_2 = v dx + u dy$ και ακολούθως ότι $\int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma \omega_2 = 0$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes.)

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 8

1. Είναι η παράγωγος Lie μία γραμμική συνοχή σε μία λεία πολλαπλότητα;
2. Να αποδειχθεί ότι η ευκλείδεια συνοχή στον \mathbb{R}^n είναι η μοναδική γραμμική συνοχή για την οποία ισχύει $\nabla_X Y = 0$ για κάθε $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ και κάθε σταθερό $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.
3. Εστω ∇ μία γραμμική συνοχή σε μία πολλαπλότητα M . Μία λεία αμφιδιαφόριση $f : M \rightarrow M$ λέγεται *συσχετισμένη* (affine), αν διατηρεί την ∇ , δηλαδή $f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_*X} f_*Y$, για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Το σύνολο των συσχετισμένων αμφιδιαφορίσεων της ∇ αποτελεί ομάδα. Να αποδειχθεί ότι αν $M = \mathbb{R}^n$ και ∇ είναι η ευκλείδεια συνοχή, τότε κάθε συσχετισμένη αμφιδιαφόριση έχει την μορφή

$$f(x) = Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $A \in GL(n, \mathbb{R})$ και $b \in \mathbb{R}^n$.

4. Μία λεία n -πολλαπλότητα M λέγεται *συσχετισμένα επίπεδη* (affinely flat), αν έχει έναν άτλαντα $\{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$, ώστε για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ υπάρχουν $A_{ij} \in GL(n, \mathbb{R})$ και $b_{ij} \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) = A_{ij}x + b_{ij}$$

για κάθε $x \in \phi_j(U_i \cap U_j)$. Να αποδειχθεί ότι σε μια τέτοια πολλαπλότητα υπάρχει μια φυσική γραμμική συνοχή ∇ , ώστε κάθε χάρτης $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i)$ να μεταφέρει την $\nabla|_U$ στην ευκλείδεια συνοχή του $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.

5. Εστω $M \subset \mathbb{R}^n$ μία κανονική m -υποπολλαπλότητα. Για κάθε $p \in M$ έχουμε $T_p\mathbb{R}^n = T_pM \oplus N_p(M)$, όπου $N_p(M) = \{v \in T_p\mathbb{R}^n : v \perp T_pM\}$. Εστω $\pi_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$ η προβολή ως προς αυτήν την διάσπαση.

(α) Εστω $X \in \mathcal{X}(M)$. Να αποδειχθεί ότι κάθε $p \in M$ έχει μια ανοιχτή περιοχή $U \subset \mathbb{R}^n$ στην οποία υπάρχει ένα $\tilde{X} \in \mathcal{X}(U)$ ώστε $\tilde{X}|_{U \cap M} = X$.

(β) Αν $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ και $p \in M$ θέτουμε $(\bar{\nabla}_X Y)(p) = \pi_p((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})(p))$, όπου ∇ είναι η ευκλείδεια συνοχή και \tilde{X}, \tilde{Y} είναι επεκτάσεις των X, Y , αντίστοιχα, σε μία περιοχή του p στο \mathbb{R}^n . Να αποδειχθεί ότι το $(\bar{\nabla}_X Y)(p)$ δεν εξαρτάται από τις επεκτάσεις.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η $\bar{\nabla}$ είναι μία γραμμική συνοχή στην M . Η $\bar{\nabla}$ λέγεται η ευκλείδεια συνοχή της M .

6. Στο \mathbb{R}^2 θεωρούμε την γραμμική συνοχή για την οποία τα σύμβολα του Christoffel δίνονται από τους τύπους $\Gamma_{11}^1 = x$, $\Gamma_{12}^1 = 1$, $\Gamma_{22}^2 = 2y$, ενώ τα υπόλοιπα μηδενίζονται.

(α) Ποια είναι η διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών αυτής της γραμμικής συνοχής;

(β) Εστω $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ η λεία καμπύλη $\gamma(t) = (t, 0)$. Να υπολογιστεί η παράλληλη μεταφορά του διανύσματος $(\frac{\partial}{\partial y})_{(0,0)}$ κατά μήκος της γ στο $(1, 0)$, ως προς αυτήν την γραμμική συνοχή.

7. Εστω M μία λεία πολλαπλότητα με μία γραμμική συνοχή ∇ και $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση. Για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ θέτουμε

$$\nabla_X^\rho Y = \nabla_X Y - Y(\rho)X - X(\rho)Y.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η ∇^ρ είναι μια γραμμική συνοχή στην M .

(β) Εστω $\epsilon > 0$ και $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ μία γεωδαισιακή της ∇^ρ . Αν $h : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η λεία συνάρτηση με

$$h(t) = \int_0^t e^{2\rho(\gamma(s))} ds,$$

να αποδειχθεί ότι η $\gamma \circ h^{-1}$ είναι γεωδαισιακή της ∇ . Συνεπώς οι γραμμικές συνοχές ∇ και ∇^ρ έχουν τις ίδιες μη-παραμετρισμένες γεωδαισιακές.

8. Η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη της 2-σφαίρας S^2 μπορεί να περιγραφεί ως το υποσύνολο

$$T^1 S^2 = \{(p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|p\| = 1, \|v\| = 1, \langle p, v \rangle = 0\}$$

του \mathbb{R}^6 , όπου \langle, \rangle είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^3 .

(α) Να αποδειχθεί ότι το $T^1 S^2$ είναι κανονική 3-υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^6 .

(β) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $F : SO(3, \mathbb{R}) \rightarrow T^1 S^2$ με $F(A) = (Ae_3, Ae_1)$ είναι αμφιδιαφόριση.

(γ) Εστω $D^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ και $g : D^3 \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ η απεικόνιση με $g(0) = I_3$ και τέτοια ώστε για $x \in D^3 \setminus \{0\}$ το $g(x)$ είναι η περιστροφή περί τον άξονα που παράγει το x κατά γωνία $\|x\| \cdot \pi$. Να αποδειχθεί ότι η g επάγει μία αμφιδιαφόριση $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3, \mathbb{R})$. (Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $T^1 S^2 = f^{-1}(0)$, όπου $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι η λεία συνάρτηση $f(p, v) = (\|p\|^2 - 1, \|v\|^2 - 1, \langle p, v \rangle)$ και εφαρμόστε το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων.)

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 9

1. Εστω M, N δύο συνεκτικές πολλαπλότητες Riemann και $f : M \rightarrow N$ μία λεία αμφιδιαφόριση. Εστω ότι υπάρχει $p \in M$ ώστε η $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ να είναι ισομετρία. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ισομετρία τότε και μόνον τότε όταν είναι συσχετισμένη ως προς την συνοχή Levi-Civita.

2. Να αποδειχθεί ότι σε μία n -πολλαπλότητα Riemann ισχύει σε τοπικές συντεταγμένες ο τύπος

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{il}^k g_{kj}.$$

3. Στον \mathbb{R}^3 ορίζουμε την $\nabla : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ από τον τύπο

$$\nabla_X Y = D_X Y + \frac{1}{2} X \times Y,$$

όπου $D_X Y$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος του Y ως προς X και $X \times Y$ είναι εξωτερικό γινόμενο (ως προς την ευκλείδεια μετρική).

(α) Να αποδειχθεί ότι η ∇ είναι συνοχή. Είναι η ∇ συμμετρική;

(β) Είναι η παράλληλη μεταφορά ως προς την ∇ κατά μήκος μιας λείας καμπύλης ευκλείδεια γραμμική ισομετρία;

4. Εστω M μία n -πολλαπλότητα Riemann και $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση. Το gradient της f είναι το μοναδικό λείο διανυσματικό πεδίο $\text{grad} f$ για το οποίο ισχύει

$$f_{*p}(v) = \langle \text{grad} f(p), v \rangle, \quad v \in T_p M, \quad p \in M.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι στις τοπικές συντεταγμένες ενός χάρτη το gradient της f έχει τύπο

$$\text{grad} f = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

(β) Αν $\|\text{grad} f\| = 1$ παντού στην M , να αποδειχθεί ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του $\text{grad} f$ είναι γεωδαισιακές.

5. Εστω M μια λεία πολλαπλότητα και \langle, \rangle μια μετρική Riemann με αντίστοιχη συνοχή Levi-Civita ∇ . Αν $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια λεία συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι η συνοχή Levi-Civita $\bar{\nabla}$ της μετρικής Riemann $e^{2f} \langle, \rangle$ δίνεται από τον τύπο

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - \langle X, Y \rangle \text{grad} f.$$

6. Στον $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ θεωρούμε την μετρική Riemann

$$\langle v, w \rangle = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} \cdot \text{Re}(v\bar{w}), \quad v, w \in T_z \mathbb{D}^2, \quad z \in \mathbb{D}^2.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $C : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ με τύπο

$$C(z) = -i \frac{z+i}{z-i}$$

είναι ισομετρία. Η C λέγεται μετασχηματισμός του Cayley.

(β) Να αποδειχθεί ότι αν $a, b \in \mathbb{C}$ και $|a|^2 - |b|^2 = 1$, τότε η

$$h(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$$

είναι ισομετρία του \mathbb{D}^2 .

(γ) Ποιές είναι οι γεωδαισιακές στον \mathbb{D}^2 ;

7. Εστω $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ η λεία καμπύλη $\gamma(t) = (t, 1)$. Να ευρεθεί το παράλληλο διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της γ με $X(0) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\gamma(0)}$. Σχεδιάστε το X στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$.

8. Εστω M, N δύο συνεκτικές πολλαπλότητες Riemann.

(α) Εστω $p \in M, q \in N$ και $T : T_p M \rightarrow T_q N$ μία ισομετρία. Αν υπάρχει μία ισομετρία $h : M \rightarrow N$ ώστε $h(p) = q$ και $h_{*p} = T$, Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν κανονικές περιοχές V του p και W του q , ώστε $h(V) = W$ και $h|_V = \exp_q \circ T \circ \exp_p^{-1}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι αν $g, h : M \rightarrow N$ είναι δύο ισομετρίες για τις οποίες υπάρχει $p \in M$ ώστε $g(p) = h(p)$ και $g_{*p} = h_{*p}$, τότε $g = h$.

9. Εστω $n \geq 1$ και $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, η γενικευμένη απεικόνιση Hopf. Αν για κάθε $\lambda \in S^1$ θεωρήσουμε την $g_\lambda : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ με $g_\lambda(z) = \lambda z$, τότε η g_λ είναι ισομετρία της S^{2n+1} και ο $\mathbb{C}P^n$ είναι ο χώρος των τροχιών της δράσης της ομάδας $\{g_\lambda : \lambda \in S^1\} \cong S^1$ επί της S^{2n+1} . Για κάθε $[z] \in \mathbb{C}P^n$, το $\pi^{-1}([z])$ είναι ο κύκλος, που παραμετρίζεται από την λεία καμπύλη $\gamma(t) = e^{it}z, t \in \mathbb{R}$.

(α) Αν V_z είναι η (πραγματική) ευθεία που παράγεται από την ταχύτητα $\dot{\gamma}(0)$ και $H_z = \{v \in T_z S^{2n+1} : v \perp \dot{\gamma}(0)\}$, να αποδειχθεί ότι $(g_{e^{it}})_{*z}(V_z) = V_{e^{it}z}$ και $(g_{e^{it}})_{*z}(H_z) = H_{e^{it}z}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η $\pi_{*z}|_{H_z} : H_z \rightarrow T_{[z]}\mathbb{C}P^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το εσωτερικό γινόμενο στον $T_{[z]}\mathbb{C}P^n$, που ορίζεται από την ισότητα

$$\langle v, w \rangle = \langle (\pi_{*z}|_{H_z})^{-1}(v), (\pi_{*z}|_{H_z})^{-1}(w) \rangle, \quad v, w \in T_{[z]}\mathbb{C}P^n$$

δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο z του σημείου $[z] \in \mathbb{C}P^n$. Η μετρική Riemann που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο στον $\mathbb{C}P^n$ οφείλεται στους Fubini και Study.

(δ) Να αποδειχθεί ότι ο $\mathbb{C}P^n$ με την μετρική Fubini-Study είναι ομογενής πολλαπλότητα Riemann.

10. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann και G ένα μη-κενό σύνολο ισομετριών της. Εστω $F = \{p \in M : g(p) = p \text{ για κάθε } g \in G\}$. Να αποδειχθεί ότι το F είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M .

(Υπόδειξη: Θεωρήστε για κάθε $p \in F$ τον γραμμικό υπόχωρο $V = \{v \in T_p M : g_{*p}(v) = v \text{ για κάθε } g \in G\}$ του $T_p M$ και δείξτε ότι $\exp_p(U \cap V) = F \cap \exp_p(U)$, για μια κατάλληλη ανοιχτή περιοχή U του $0 \in T_p M$.)

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 10

1. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann με ομάδα ισομετριών $I(M)$. Για κάθε γνήσια ασυνεχή υποομάδα G της $I(M)$ να αποδειχθεί ότι η M/G γίνεται πολλαπλότητα Riemann, αν είναι Hausdorff, και η απεκόνιση πηλίκο $p : M \rightarrow M/G$ τοπική ισομετρία. Αν η M είναι πλήρης, να αποδειχθεί ότι και η M/G είναι πλήρης. Για παράδειγμα, ο n -torus T^n δέχεται με αυτόν τον τρόπο μία μετρική Riemann μηδενικής καμπυλότητας, ενώ ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ μία μετρική Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής 1. Ποιές είναι οι γεωδαισιακές στον T^2 και ποιές στο $\mathbb{R}P^2$;

2. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann με αντίστοιχη απόσταση Riemann d . Αν $\epsilon > 0$ και $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ είναι μια C^1 καμπύλη, να αποδειχθεί ότι

$$\|\dot{\gamma}(0)\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} d(\gamma(t), \gamma(0)).$$

3. Εστω M μια πολλαπλότητα Riemann με απόσταση Riemann d και $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση.

(α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $p \in M$ υπάρχουν $\delta > 0$ και $c \geq 0$ τέτοια ώστε $|f(p) - f(q)| \leq cd(p, q)$ για κάθε $q \in M$ με $d(p, q) \leq \delta$.

(β) Αν η M είναι συνεκτική και συμπαγής, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $C \geq 0$ τέτοιο ώστε $|f(p) - f(q)| \leq Cd(p, q)$ για κάθε $p, q \in M$.

4. Να αποδειχθεί ότι κάθε ομογενής πολλαπλότητα Riemann είναι πλήρης.

5. Να αποδειχθεί ότι κάθε συνεκτική, ισοτροπική (σε κάθε σημείο) και πλήρης πολλαπλότητα Riemann είναι ομογενής.

6. Εστω M μία συνεκτική, μη-συμπαγής, πλήρης πολλαπλότητα Riemann με απόσταση Riemann d . Να αποδειχθεί ότι για κάθε $p \in M$ υπάρχει μια γεωδαισιακή $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ με $\gamma(0) = p$ και $d(p, \gamma(t)) = t$ για κάθε $t \geq 0$.

7. Εστω M μία συνεκτική, πλήρης πολλαπλότητα Riemann και έστω $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ μια κλειστή γεωδαισιακή, δηλαδή η γ είναι περιοδική, που σημαίνει ότι το $K = \gamma(\mathbb{R})$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη. Εστω $x \in M \setminus K$ και $a = d(x, K)$, όπου d είναι η απόσταση Riemann. Όπως είναι γνωστό υπάρχει $y \in K$ ώστε $d(x, K) = d(x, y)$. Λόγω της πληρότητας, υπάρχει μια ελάχιστη γεωδαισιακή $c : [0, a] \rightarrow M$, παραμετρισμένη με το μήκος της, ώστε $c(0) = x$, $c(a) = y$, $d(x, y) = L(c) = a$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $d(c(t), K) = d(c(t), y)$ για κάθε $0 \leq t \leq a$.

(β) Να αποδειχθεί ότι αν $y = \gamma(s)$, τότε τα διανύσματα $\dot{\gamma}(s)$ και $\dot{c}(a)$ είναι κάθετα.

8. Εστω M μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann και $X \in \mathcal{X}(M)$. Αν υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|X(p)\| \leq c$ για κάθε $p \in M$, να αποδειχθεί ότι το X είναι πλήρες.

9. Εστω M και N δύο πολλαπλότητες Riemann και $h : M \rightarrow N$ μια αμφιδιαφόριση για την οποία υπάρχει $c > 0$ ώστε $c\|h_{*p}(v)\| \leq \|v\|$ για κάθε $v \in T_pM$ και $p \in M$. Αν η N

είναι πλήρης, να αποδειχθεί ότι και η M είναι πλήρης.

10. Εστω M μία συνεκτική, πλήρης, n -πολλαπλότητα Riemann, N μία n -πολλαπλότητα Riemann και $f : M \rightarrow N$ μια λεία, επί, απεικόνιση, ώστε

$$\|v\| \leq \|f_{*p}(v)\|$$

για κάθε $v \in T_p M$ και $p \in M$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι απεικόνιση επικάλυψης.

11. Εστω M μια πολλαπλότητα Riemann με απόσταση Riemann d . Για κάθε κατά τμήματα λεία καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, όπου $a < b$, ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$J(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$$

λέγεται ενέργεια της γ και δεν είναι αναλλοίωτος από αναπαραμετρήσεις.

(α) Να αποδειχθεί ότι $(L(\gamma))^2 \leq 2(b-a)J(\gamma)$ και η ισότητα ισχύει ακριβώς τότε όταν η $\|\dot{\gamma}\|$ είναι σταθερή.

Για κάθε $p, q \in M$ θέτουμε

$$e(p, q) = \inf\{2J(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ κατά τμήματα λεία με } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

(β) Να αποδειχθεί ότι $(d(p, q))^2 = e(p, q)$ για κάθε $p, q \in M$.

(γ) Αν $p, q \in M$ και γ είναι μια κατά τμήματα λεία καμπύλη από το p στο q , να αποδειχθεί ότι η γ ελαχιστοποιεί την ενέργεια, δηλαδή $2J(\gamma) = e(p, q)$ τότε και μόνον τότε όταν η γ είναι ελάχιστη γεωδαισιακή.

Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλότητας 11

1. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann και $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ μια γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της. Εστω $X \in \mathcal{X}(M)$ και ϕ η ροή του.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $T > 0$ ώστε η ϕ να ορίζεται τουλάχιστον στο $[-T, T] \times \gamma([0, l])$.

(β) Εστω $\Gamma : [0, T] \times [0, l] \rightarrow M$ η λεία μεταβολή της γ με τύπο $\Gamma(s, t) = \phi_s(\gamma(t))$.

Αν $\Gamma_T = \Gamma(T, \cdot)$ και $L(\gamma)$, $L(\Gamma_T)$ είναι τα μήκη των γ , Γ_T , αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι

$$|L(\Gamma_T) - L(\gamma)| \leq \int_0^T \int_0^l \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X\| ds dt.$$

2. Εστω M μία 2-πολλαπλότητα Riemann και $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ μια γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της. Εστω X ένα λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ με $\langle X, \dot{\gamma} \rangle = 0$ και $\|X\| = 1$ στο $[0, l]$.

(α) Να αποδειχθεί ότι το X είναι παράλληλο κατά μήκος της γ .

(β) Εστω $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι το fX είναι πεδίο Jacobi κατά μήκος της γ τότε και μόνον τότε όταν $f''(t) + K(\gamma(t))f(t) = 0$ για κάθε $0 \leq t \leq l$, όπου K είναι η καμπυλότητα τομής της M .

3. Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη μετρική Riemann g με

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right) = (f(r, \phi))^2$$

σε πολικές συντεταγμένες, όπου η $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ είναι μία λεία συνάρτηση.

(α) Να ευρεθεί η διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών και να αποδειχθεί ότι κάθε ακτίνα γ_ϕ , με το ϕ σταθερό, είναι γεωδαισιακή.

(β) Αν $X(r)$ είναι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ_ϕ , που είναι κάθετο στη γ_ϕ , να αποδειχθεί ότι το $Y(r) = f(r, \phi)X(r)$ είναι πεδίο Jacobi κατά μήκος της γ_ϕ .

(γ) Να αποδειχθεί ότι η καμπυλότητα τομής K δίνεται από τον τύπο

$$K(r, \phi) = -\frac{1}{f(r, \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, \phi).$$

4. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann με τανυστή καμπυλότητας R . Εστω $p \in M$, $v \in T_p M$ με $\|v\| = 1$ και γ η γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Εστω $u, w \in T_p M$ και Y, Z τα διανυσματικά πεδία Jacobi κατά μήκος της γ με $Y(0) = Z(0) = 0$ και

$$\frac{DY}{dt}(0) = u, \quad \frac{DZ}{dt}(0) = w.$$

Να αποδειχθεί ότι αν το t είναι αρκετά κοντά στο 0, τότε

$$\langle Y(t), Z(t) \rangle = t^2 \langle u, w \rangle - \frac{1}{3} \langle R(u, v)v, w \rangle t^4 + o(t^5)$$

όπου $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^5)}{t^4} = 0$.

(Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε του θεώρημα του Taylor για την συνάρτηση $f(t) = \langle Y(t), Z(t) \rangle$. Τότε $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 2\langle u, w \rangle$, $f^{(3)}(0) = 0$ και $f^{(4)}(0) = 8\langle R(u, v)v, w \rangle$. Για το τελευταίο θα χρειαστεί να αποδειχθεί ο τύπος

$$\frac{DR(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}}{dt}(0) = R\left(\frac{DY}{dt}(0), \dot{\gamma}(0)\right)\dot{\gamma}(0) = R(u, v)v.$$

5. Εστω M μία πολλαπλότητα Riemann με καμπυλότητα τομής K . Εστω $p \in M$, $u, v \in T_pM$ με $\|u\| = \|v\| = 1$ και $\langle u, v \rangle = 0$. Αν γ είναι η γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για $|t| < \epsilon$ το διανυσματικό πεδίο Jacobi κατά μήκος της γ με αρχικές συνθήκες

$$Y(0) = 0, \quad \frac{DY}{dt}(0) = u$$

ικανοποιεί τις ισότητες

$$(\alpha) \|Y(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K_p(\sigma)t^4 + o(t^5),$$

$$(\beta) \|Y(t)\| = t - \frac{1}{6}K_p(\sigma)t^3 + o(t^4),$$

όπου σ είναι το επίπεδο στον T_pM με βάση $\{v, u\}$.

6. Εστω M μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann με μηδενική καμπυλότητα. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $p \in M$ υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η $\exp_p : S(0, \epsilon) \rightarrow S(p, \epsilon)$ να είναι ισομετρία.

7. Στο παραβολοειδές $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ θεωρούμε την επαγόμενη μετρική Riemann από το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^3 .

(α) Δείξτε ότι η καμπυλότητα τομής του παραβολοειδούς δίνεται από τον τύπο

$$K(x, y, z) = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2}$$

και συνεπώς $\inf\{K(x, y, z) : (x, y, z) \in M\} = 0$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η M είναι πλήρης.

(γ) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν συζυγή προς το $(0, 0, 0)$ σημεία, δηλαδή το $(0, 0, 0)$ είναι πόλος.