# ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΜΟΤΟΠΙΑ

1. Εστω $X$ ένας χώρος και $f : X \to S^n$, $n \geq 1$, μια συνεχής απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι αν η $f$ δεν είναι επί της $S^n$ τότε είναι ομοτοπική με σταθερή.

2. Εστω $a : S^n \to S^n$, $n \geq 1$, η αντιποδική απεικόνιση $a(x) = -x$. Αν $f : S^n \to S^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση χωρίς σταθερά σημεία, να αποδειχθεί οτι η $f$ είναι ομοτοπική με την $a$.

3. Να αποδειχθεί οτι ένας χώρος $X$ είναι συσταλτός τότε και μόνον τότε όταν η διαγώνια απεικόνιση $\delta : X \to X \times X$, δηλαδή $\delta(x) = (x, x)$ για κάθε $x \in X$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

4. Αν ένας χώρος $X$ είναι συσταλτός, να αποδειχθεί οτι για κάθε χώρο $Y$ ο χώρος γινόμενο $X \times Y$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του $Y$.

5. Να αποδειχθεί οτι για κάθε χώρο $X$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $[X, S^1]$ γίνεται αβελιανή ομάδα, αν θέσουμε $[f] + [g] = [f \cdot g]$ για κάθε ζεύγος συνεχών απεικονίσεων $f, g : X \to S^1$.

6. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $X = \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\}$, να αποδειχθεί οτι η $f : S^n \to X$ με $f(x) = (x, x)$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

7. Η 3-σφαίρα είναι ο υπόχωρος $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ του $\mathbb{C}^2$. Αν $C \subset S^3$ είναι ο κύκλος $C = \{(z, 0) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\} \approx S^1$, να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $S^3 \setminus C$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του κύκλου $S^1$.
(Υπόδειξη: Η απεικόνιση $\phi : S^3 \setminus C \to \mathbb{C} \times S^1$ με

$$\phi(z_1, z_2) = \left( \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|} \right)$$

είναι ομοιομορφισμός.)

8. Εστω $X$ ένας χώρος και $A \subset X$ ένα retract του $X$ με retraction $r : X \to A$.
(α) Αν ο $X$ είναι χώρος Hausdorff, να αποδειχθεί οτι το $A$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του $A$ (ως υπόχωρος του $X$) ταυτίζεται με την τοπολογία πηλίκο ως προς $r$.
(γ) Αν ο $X$ είναι τοπικά συμπαγής χώρος, να αποδειχθεί οτι και ο $A$ είναι τοπικά συμπαγής χώρος.

9. Να αποδειχθεί οτι το $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$ είναι (strong) deformation retract του $D^n \times [0, 1]$, $n \geq 1$.
(Υπόδειξη: Περιγράψτε την απαιτούμενη ομοτοπία με ένα σχήμα.)

10. Να αποδειχθεί οτι η ορθογώνια ομάδα $O(n, \mathbb{R})$ είναι (strong) deformation retract της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 1$ (ως υπόχωροι του $\mathbb{R}^{n^2}$).

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΟΜΑΔΑ

1. Εστω $X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος, $x_0$, $x_1 \in X$ και $u$, $v : [0,1] \to X$ δύο τόξα με $u(0) = v(0) = x_0$ και $u(1) = v(1) = x_1$.
(α) Αν $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, να αποδειχθεί οτι $u_+ = v_+ : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$.
(β) Αν $u \simeq v \ \mathrm{rel}\{0,1\}$, να αποδειχθεί οτι $u_+ = v_+$.

2. Εστω $X$ ένας απλά συνεκτικός χώρος, $A \subset X$ και $f : A \to Y$ μία συνεχής απεικόνιση. Αν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε ο επαγόμενος ομομορφισμός $f_\sharp : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ να είναι ο τετριμένος, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει συνεχής επέκταση της $f$ στον $X$.

3. Αν $p : [0,1] \to S^1$ είναι η $p(t) = e^{2\pi i t}$, να αποδειχθεί οτι η κλάση ομοτοπίας με σταθερά άκρα $[p]$ του τόξου $p$ είναι γεννήτορας της $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Να αποδειχθεί οτι το στοιχείο $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$ είναι γεννήτορας τότε και μόνο τότε όταν $\gamma \simeq p \ \mathrm{rel}\{0,1\}$ ή $\gamma^{-1} \simeq p \ \mathrm{rel}\{0,1\}$.

4. Να αποδειχθεί οτι ο $n$-torus $T^n$ δεν έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον $m$-torus $T^m$ για $n \neq m$.

5. Εστω $L \subset \mathbb{R}^3$ μία ευθεία γραμμή. Να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $\mathbb{R}^3 \setminus L$ έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον κύκλο $S^1$ και συνεπώς $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L, x) \cong \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3 \setminus L$.
(Υπόδειξη: Θεωρώντας έναν ομοιομορφισμό του $\mathbb{R}^3$, που είναι σύνθεση μίας μεταφοράς και ενός γραμμικού ισομορφισμού, αναγόμαστε στην περίπτωση που η ευθεία είναι η $L = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ και τότε το $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \setminus \{(0,0,0)\}$ είναι (strong) deformation retract του $\mathbb{R}^3 \setminus L$.)

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε ομομορφισμό ομάδων $h : \pi_1(T^2, (1,1)) \to \pi_1(T^2, (1,1))$ υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $f : T^2 \to T^2$ με $f(1,1) = (1,1)$ ώστε $f_\sharp = h$. Μάλιστα, αν ο $h$ είναι ισομορφισμός, τότε η $f$ μπορεί να επιλεγεί ομοιομορφισμός.

7. Εστω $X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος. Να αποδειχθεί οτι ο $X$ είναι απλά συνεκτικός χώρος τότε και μόνο τότε όταν κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^1 \to X$ είναι ομοτοπική με σταθερή.

8. Να αποδειχθεί οτι ο $n$-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος $\mathbb{C}P^n$ είναι απλά συνεκτικός για κάθε $n \geq 0$.
(Υπόδειξη: Ο $\mathbb{C}P^0$ είναι μονοσύνολο και ο $\mathbb{C}P^1$ είναι ομοιομορφικός με την 2-σφαίρα $S^2$, οπότε είναι απλά συνεκτικοί. Κάνουμε τώρα επαγωγή στο $n$.)

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

1. Εστω $p : \widetilde{X} \to X$ μία απεικόνιση επικάλυψης κατά τόξα συνεκτικών και τοπικά κατά τόξα συνεκτικών χώρων. Αν ο $\widetilde{X}$ είναι συσταλτός χώρος, να αποδειχθεί οτι για κάθε απλά συνεκτικό και τοπικά κατά τόξα συνεκτικό χώρο $Y$ κάθε συνεχής απεικόνιση $f : Y \to X$ είναι ομοτοπική με σταθερή.

2. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^n \to T^n$, $n \geq 2$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

3. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R}P^n \to S^1$, $n \geq 2$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

4. Εστω $n > 1$ ένας ακέραιος. Ποιά απεικόνιση επικάλυψης $p : S^1 \to S^1$ έχει χαρακτηριστική ομάδα την υποομάδα $n\mathbb{Z}$ της $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$;

5. Εστω Εστω $p : \widetilde{X} \to X$ μία απεικόνιση κανονικής επικάλυψης κατά τόξα συνεκτικών και τοπικά κατά τόξα συνεκτικών χώρων. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ με $p \circ h = p$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή αυτομορφισμός της επικάλυψης.