ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 1992

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

1. Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ

1. Μήκος και εσωτερικό γινόμενο

Ο n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι εξ ορισμού το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ n-φορές, δηλαδή $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n) : x_i\in\mathbb{R},\ 1\le i\le n\}$ όπου με $(x_1,\dots,x_n)$ συμβολίζουμε μια διατεταγμένη n-άδα. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ αποκαλούνται <u>σημεία</u>. Αν $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, τότε ο πραγματικός αριθμός x_i λέγεται i-συντεταγμένη του x.

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει την δομή διανυσματικού χώρου, όταν αν $x=(x_1,\dots,x_n)$ $y=(y_1,\dots,y_n)$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε:

$x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ και $\lambda x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$

Για τον λόγο αυτό τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ αποκαλούνται και <u>διανύσματα</u> όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στην διανυσματική δομή του $\mathbb{R}^n$.

Αν $x=(x_1,\dots,x_n)$, τότε ο μη-αρνητικός αριθμός

$$\|x\|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$$

λέγεται <u>μήκος</u> του x. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η σχέση του μήκους με την διανυσματική δομή του $\mathbb{R}^n$.

<u>1.1 Λήμμα</u> Για κάθε $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\|x\|\ge 0$ και $\|x\|=0 \iff x=0$

(β) $\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \le \|x\|\,\|y\|$

(γ) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

(δ) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$.

<u>Απόδειξη</u> (α) Προφανές

(β) Αν τα x,y είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ισχύει προφανώς η ισότητα. Αν όχι τότε $ty-x\neq 0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ και συνεπώς

$$0<\|ty-x\|^2=\sum_{i=1}^{n}(ty_i-x_i)^2=t^2\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)-2t\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)+\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν η διακρίνουσα του τριωνύμου (ως προς t) είναι αρνητική, δηλαδή

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) < 0 \iff$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \|x\|\,\|y\|$$

(γ) $\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$

(δ) Προφανές

Η ποσότητα $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ λέγεται <u>εσωτερικό γινόμενο</u> των x, y. Έτσι το (β) του Λήμματος 1.1 γράφεται $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$.

<u>1.2 Λήμμα</u> Η $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συμμετρική, διγραμμική μορφή, θετικά ορισμένη. Επίσης

(α) $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και

(β) $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

<u>Απόδειξη</u> Μόνο το (β) χρειάζεται απόδειξη. Έχουμε:

$$\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left[\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left(4\langle x,y\rangle\right) = \langle x,y\rangle.$$

Τα διανύσματα $e_i = (0,\dots,1,\dots,0)$, $1 \le i \le n$, με το 1 στην i-συντεταγμένη, αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, την οποία αποκαλούμε <u>κανονική βάση</u> του $\mathbb{R}^n$. Αν $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ είναι μία γραμμική απεικόνιση, τότε ο πίνακας της T ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ είναι ο $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ όπου $T(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j$, $1 \le i \le n$. Οι συντελεστές λοιπόν στην παράσταση του $T(e_i)$ σαν γραμμικού συνδυασμού των στοιχείων της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^m$ παρουσιάζονται σαν η i-στήλη του πίνακα της T. Αν λοιπόν $T(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_m)$, τότε

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Αν $S:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ είναι μία γραμμική απεικόνιση με πίνακα B, τότε ο πίνακας της σύνθεσης $S\circ T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ είναι ο $B\cdot A\in\mathbb{R}^{k\times n}$

2. Σύγκλιση και υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

Αν $x,y\in\mathbb{R}^n$, τότε ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός $\|x-y\|$ λέγεται *απόσταση* των x,y. Μία ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι *συγκλίνει στο σημείο* $x\in\mathbb{R}^n$ αν $\lim_{k\to\infty}\|x^k-x\|=0$. Αν $x^k=(x_1^k,\dots,x_n^k)$ και $x=(x_1,\dots,x_n)$ αυτό είναι ισοδύναμο με $\lim_{k\to\infty}x_i^k=x_i$ για κάθε $1\le i\le n$. Είναι προφανές ότι αν $\lim_{k\to\infty} x^k = x$, $\lim_{k\to\infty} y^k=y$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ τότε $\lim_{k\to\infty}(\lambda x^k+\mu y^k)=\lambda x+\mu y$ και $\lim_{k\to\infty}\langle x^k,y^k\rangle=\langle x,y\rangle$. Από το Θεώρημα του Cauchy για την πληρότητα του $\mathbb{R}$ έχουμε αμέσως:

2.1. Θεώρημα Μία ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}^n$ τότε και μόνο τότε όταν

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \|x^k-x^\lambda\|<\varepsilon\quad \forall k,\lambda\ge N$.

Μία ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}^n$ λέγεται *φραγμένη* αν υπάρχει $M>0$ ώστε $\|x^k\|\le M$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Προφανώς κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ έχουμε αμέσως:

2.2. Θεώρημα Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}^n$ έχει μία υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $\mathbb{R}^n$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $r>0$ το σύνολο $S(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n: \|x-y\|<r\}$ λέγεται *ανοικτή μπάλλα* με κέντρο x και ακτίνα r. Έτσι $\lim_{k\to\infty} x^k=x$ τότε και μόνο τότε όταν $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: x^k\in S(x,\varepsilon)\ \forall k\ge N$.
Το σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$ λέγεται *ανοικτό* όταν για κάθε $x\in A$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε $S(x,\delta)\subset A$. Αν το $\mathbb{R}^n\setminus A$ είναι ανοικτό τότε το A λέγεται *κλειστό*.

2.3. Λήμμα Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό τότε και μόνο τότε όταν το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του A ανήκει επίσης στο A.

Απόδειξη Έστω ότι το A είναι κλειστό και $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία σημείων του A που συγκλίνει στο $x\in\mathbb{R}^n$. Αν $x\in\mathbb{R}^n\setminus A$, τότε υπάρχει $\delta>0$ με $S(x,\delta)\subset\mathbb{R}^n\setminus A$. Επομένως, υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ με $x^k\in S(x,\delta)\subset\mathbb{R}^n\setminus A$ για κάθε $k\geq N$, άτοπο. Αντίστροφα έστω ότι το A δεν είναι κλειστό, δηλαδή το $\mathbb{R}^n\setminus A$ δεν είναι ανοικτό. Τότε υπάρχει $x\in\mathbb{R}^n\setminus A$ ώστε $S(x,\delta)\not\subset\mathbb{R}^n\setminus A$ για κάθε $\delta>0$, δηλαδή $S(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$ για κάθε $\delta>0$. Συνεπώς για κάθε $k\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x^k\in S(x,\frac{1}{k})\cap A$. Τότε $\|x^k-x\|<\frac{1}{k}\to 0$. Άρα $\lim_{k\to\infty}x^k=x\in\mathbb{R}^n\setminus A$.

Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $M>0$ ώστε $\|x\|\leq M$ για κάθε $x\in A$.

2.4. Πρόταση Το σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και φραγμένο, τότε και μόνο τότε όταν κάθε ακολουθία σημείων του A έχει μία υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα σημείο του A.

Απόδειξη Το ευθύ προκύπτει από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass και το Λήμμα 2.3. Αντίστροφα αν το A δεν είναι φραγμένο, τότε για κάθε $k\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x^k\in A$ με $\|x^k\|>k$. Προφανώς τότε η ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ δεν έχει καμμία συγκλίνουσα υπακολουθία. Από το Λήμμα 2.1 προκύπτει επίσης ότι το A είναι κλειστό.

Υπάρχει και ένας άλλος, πιο αφηρημένος τρόπος για να περιγράφει κανείς τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Η οικογένεια $\{U_i : i\in I\}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ανοικτό κάλυμμα* του συνόλου $A\subset\mathbb{R}^n$ αν $A\subset\bigcup_{i\in I}U_i$. Το σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του A έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του A.

2.5. Πρόταση (α) Κάθε κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές

(β) Κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο

Απόδειξη (α) Έστω $B\subset A$ ένα κλειστό σύνολο, όπου το A είναι συμπαγές και $\{U_i : i\in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του B. Τότε το $\{U_i : i\in I\}\cup\{\mathbb{R}^n\setminus B\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του A. Άρα υπάρχουν $i_1,\dots,i_k\in I$ ώστε $A\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}\cup(\mathbb{R}^n\setminus B)$. Τότε όμως $B\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}$.

(γ) Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο και $x\in\mathbb{R}^n\setminus A$. Για κάθε $\alpha\in A$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε $S(x,\delta_\alpha)\cap S(\alpha,\delta_\alpha)=\emptyset$. Η οικογένεια $\{S(\alpha,\delta_\alpha):\alpha\in A\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του A. Συνεπώς, υπάρχουν $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in A$ ώστε $A\subset S(\alpha_1,\delta_{\alpha_1})\cup\dots\cup S(\alpha_k,\delta_{\alpha_k})$. Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_{\alpha_1},\dots,\delta_{\alpha_k}\}$. Τότε προφανώς $S(x,\delta)\subset\mathbb{R}^n\setminus A$. Αυτό δείχνει ότι το A είναι κλειστό. Θεωρώντας τώρα το ανοικτό κάλυμμα $\{S(0,k):k\in\mathbb{N}\}$ του A βλέπουμε ότι υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ ώστε $A\subset S(0,k)$, που σημαίνει ότι το A είναι φραγμένο.

<u>2.6. Θεώρημα</u> Για κάθε $a<b$, το κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\mathcal{U}=\{U_i:i\in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $[a,b]$ και $A=\{x\in[a,b]:$ το $[a,x]$ καλύπτεται από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{U}\}$. Τότε $a\in A$ και συνεπώς το A είναι μη-κενό και φραγμένο. Υπάρχει λοιπόν το $t=\sup A$. Προφανώς $a<t\le b$. Αρκεί να δείξουμε ότι $t\in A$ και $t=b$. Υπάρχει $i\in I$ ώστε $t\in U_i$. Αφού το U_i είναι ανοικτό και $t=\sup A$ υπάρχει $x\in A$ ώστε $x\in U_i$. Μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $[x,t]\subset U_i$, αφού στο U_i περιέχεται ένα ανοικτό διάστημα με κέντρο το t. Αν τώρα $[a,x]\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}$, τότε $[a,t]\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}\cup U_i$, που δείχνει ότι $t\in A$. Έστω τώρα ότι $t<b$. Τότε υπάρχει $t<y<b$ με $y\in U_i$. Τότε το $[a,y]\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}\cup U_i$ που αντιφάσκει με τον ορισμό του t.

<u>2.7. Λήμμα</u> Έστω $B\subset\mathbb{R}^m$ ένα συμπαγές σύνολο, $x\in\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{U}=\{U_i:i\in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $\{x\}\times B\subset\mathbb{R}^{n+m}$. Τότε υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $U\subset\mathbb{R}^n$ του x ώστε το $U\times B$ καλύπτεται από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{U}$.

<u>Απόδειξη</u> Επειδή το $\{x\}\times B$ είναι συμπαγές (αφού η προβολή ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο) υπάρχουν $i_1,\dots,i_k\in I$ με $\{x\}\times B\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}$. Για κάθε $y\in B$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε $S(x,\delta_y)\times S(y,\delta_y)\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}$. Επειδή το B είναι συμπαγές υπάρχουν $y_1,\dots,y_\lambda\in B$ με $B\subset S(y_1,\delta_{y_1})\cup\dots\cup S(y_\lambda,\delta_{y_\lambda})$. Θέτουμε $U=S(x,\delta)$, όπου $\delta=\min\{\delta_{y_1},\dots,\delta_{y_\lambda}\}$. Αν $(x',y')\in U\times B$ τότε υπάρχει $y_i\in B$ με $y'\in S(y_i,\delta_{y_i})$, $1\le i\le\lambda$ και βέβαια $x'\in S(x,\delta_{y_i})$.

Αφού $(x',y') \in S(x,\delta_{y_i}) \times S(y_i,\delta_{y_i}) \subset V_{i_1}\cup\dots\cup V_{i_k}$. ο.ε.δ.

2.8 Πόρισμα Αν τα $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^m$ είναι συμπαγή σύνολα, τότε το $A\times B\subset\mathbb{R}^{n+m}$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{V}=\{V_i : i\in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $A\times B$. Τότε από το Λήμμα 2.7, κάθε $x\in A$ έχει μια ανοικτή περιοχή V_x ώστε το $V_x\times B$ καλύπτεται από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Επειδή το A είναι συμπαγές υπάρχουν $x_1,\dots,x_k\in A$ με $A\subset V_{x_1}\cup\dots\cup V_{x_k}$. Συνεπώς $A\times B\subset (V_{x_1}\times B)\cup\dots\cup(V_{x_k}\times B)$ από που προκύπτει το συμπέρασμα.

2.9 Πόρισμα (α) Αν τα $A_1,\dots,A_k$ είναι συμπαγή, και το $A_1\times\dots\times A_k$ είναι.
(β) Το $[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, $a_i<b_i$, $1\le i\le n$
(γ) Η κλειστή μπάλα $S[x,r]=\{y\in\mathbb{R}^n : \|x-y\|\le r\}$ είναι συμπαγής.

2.10 Θεώρημα (Heine-Borel) Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα
(α) Το A είναι συμπαγές
(β) Το A είναι κλειστό και φραγμένο
(γ) κάθε ακολουθία σημείων του A έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο σημείο του A.

Απόδειξη Μόνο το (β) $\Rightarrow$ (α) χρειάζεται απόδειξη. Αφού το A είναι φραγμένο υπάρχει $M>0$ ώστε $A\subset S[0,M]$. Όμως το $S[0,M]$ είναι συμπαγές. Αφού το A είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου είναι το ίδιο συμπαγές.

Αν $A\subset\mathbb{R}^n$, τότε το σύνολο $A^\circ=\{x\in A : \exists\,\delta>0 : S(x,\delta)\subset A\}$ λέγεται *εσωτερικό* του A και το $\partial A=\{x\in\mathbb{R}^n : A\cap S(x,\delta)\neq\emptyset,\ (\mathbb{R}^n\setminus A)\cap S(x,\delta)\neq\emptyset\ \forall\,\delta>0\}$ λέγεται *σύνορο* του A. Το A° είναι πάντα ανοικτό σύνολο ενώ το ∂A κλειστό. Συνεπώς το ∂A είναι συμπαγές όταν το A είναι. Το σύνολο $\bar{A}=A^\circ\cup\partial A$ λέγεται *κλειστότητα* του A και είναι πάντα κλειστό. Αν το A είναι φραγμένο τότε το $\bar{A}$ είναι συμπαγές.

3. Συναρτήσεις και συνέχεια

Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ και $f : A\to\mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση. Αν $B\subset A$, το σύνολο $f(B)=\{f(x) : x\in B\}$ λέγεται *εικόνα* του B μέσω της f. Αν $C\subset\mathbb{R}^m$, τότε το σύνολο $f^{-1}(C)=\{x\in A : f(x)\in C\}$ λέγεται αντίστροφη εικόνα του C μέσω της f. Το σύνολο $G(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m : x\in A,\ y=f(x)\}$ λέγεται γράφημα της f.

Αν $m=1$ και $f,g: A\to\mathbb{R}$ τότε ορίζονται κατά τον προφανή τρόπο οι $f\pm g$, $f\cdot g$ και f/g, η τελευταία στο $\{x\in A : g(x)\neq 0\}$. Αν $f: A\to\mathbb{R}^m$, $B\subset\mathbb{R}^m$ και $g: B\to\mathbb{R}^k$, τότε ορίζεται η σύνθεση $g\circ f: f^{-1}(B)\to\mathbb{R}^k$. Αν η f είναι 1-1, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: f(A)\to\mathbb{R}^n$.

Μία συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}^m$ έχει m-συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1,\dots,f_m: A\to\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))$, $x\in A$. Αντίστροφα οι συναρτήσεις $f_1,\dots,f_m: A\to\mathbb{R}$ ορίζουν μία συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}^m$. Συμβολίζω $f=(f_1,\dots,f_m)$. Ειδικά αν $\pi_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι η i-προβολή, ισχύει, τότε $id=(\pi_1,\dots,\pi_n)$.

Μία συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}^m$ λέγεται συνεχής στο $x_0\in A$ αν $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 :\ x\in A$ και $\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$ ή ισοδύναμα $f(A\cap S(x_0,\delta))\subset S(f(x_0),\varepsilon)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $f=(f_1,\dots,f_m): A\to\mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο x_0, τότε και μόνο τότε όταν οι $f_i: A\to\mathbb{R}$, ισχύει είναι όλες συνεχείς στο x_0. Η $f: A\to\mathbb{R}^m$ λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

3.1. Θεώρημα Μία συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}^m$ είναι συνεχής τότε και μόνο τότε αν για κάθε ανοικτό σύνολο $V\subset\mathbb{R}^m$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U\subset\mathbb{R}^n$ ώστε $f^{-1}(V)=U\cap A$.

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι συνεχής και το $V\subset\mathbb{R}^m$ ανοικτό. Αν $x\in f^{-1}(V)$, τότε $f(x)\in V$. Υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $S(f(x),\varepsilon)\subset V$, αφού το V είναι ανοικτό. Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχει $\delta_x>0$ ώστε $f(A\cap S(x,\delta_x))\subset S(f(x),\varepsilon)\subset V$. Θέτουμε $U=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)} S(x,\delta_x)$. Τότε προφανώς $f^{-1}(V)=U\cap A$. Αντίστροφα: Έστω $x_0\in A$ και $\varepsilon>0$. Το $S(f(x_0),\varepsilon)$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}^m$ και συνεπώς, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U\subset\mathbb{R}^n$ με $f^{-1}(S(f(x_0),\varepsilon))=U\cap A$. Προφανώς $x_0\in U\cap A\subset U$ συνεπώς υπάρχει $\delta>0$ ώστε $S(x_0,\delta)\subset U$. Τότε $f(A\cap S(x_0,\delta))\subset S(f(x_0),\varepsilon)$.

Εύκολα επίσης αποδεικνύεται ότι η $f: A \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ τότε και μόνο τότε όταν $\lim_{k\to+\infty} x^k = x_0 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(x^k) = f(x_0)$.
Το επόμενο θεώρημα είναι εξαιρετικής σημασίας.

3.2. Θεώρημα Έστω $f: A \to \mathbb{R}^m$ μία συνεχής συνάρτηση. Αν το A είναι συμπαγές, τότε το $f(A)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη Έστω $\{V_i : i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $f(A)$. Τότε, για κάθε $i \in I$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U_i \subset \mathbb{R}^n$ ώστε $f^{-1}(V_i) = U_i \cap A$. Προφανώς, η οικογένεια $\{U_i : i \in I\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του A. Άρα υπάρχουν $i_1, \dots, i_k$ με $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$. Συνεπώς $f(A) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}$.

3.3. Πόρισμα Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Αν το A είναι συμπαγές τότε υπάρχουν $x_0, y_0 \in A$ με $f(x_0) = \inf f(A)$ και $f(y_0) = \sup f(A)$.

Μία ακόμα ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε συμπαγή σύνολα είναι η ακόλουθη:

3.4. Θεώρημα Έστω $f: A \to \mathbb{R}^m$ μία συνεχής συνάρτηση. Αν το A είναι συμπαγές τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, δηλαδή
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :\ x, y \in A$ και $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $f(A \cap S(x, \delta_x)) \subset S(f(x), \varepsilon/2)$. Επειδή το A είναι συμπαγές και η οικογένεια $\{S(x, \delta_x/2) : x \in A\}$ ανοικτό κάλυμμα του A υπάρχουν $x_1, \dots, x_k \in A$ με $A \subset S(x_1, \delta_{x_1}/2) \cup \dots \cup S(x_k, \delta_{x_k}/2)$. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\} > 0$. Έστω τώρα $x, y \in A$ με $\|x - y\| < \delta$. Τότε υπάρχει κάποιος x_i, $1 \le i \le k$ ώστε $\|x - x_i\| < \delta_{x_i}/2$. Επίσης $\|x_i - y\| \le \|x - x_i\| + \|x - y\| < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \le \delta_{x_i}$.
Άρα $\|f(x) - f(y)\| \le \|f(x) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(y)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Ένα τυπικό παράδειγμα ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων που δεν ορίζονται σε συμπαγή σύνολα είναι οι γραμμικές απεικονίσεις. Έστω $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία γραμμική απεικόνιση. Για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n)$ με $\|x\| \le 1$ ισχύει $|x_i| \le 1$, $1 \le i \le n$. Τότε έχουμε

$$\|T(x)\| = \left\|T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum x_i T(e_i)\right\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|T(e_i)\| \le \sum_{i=1}^{n} \|T(e_i)\|$$

Συνεπώς το σύνολο $\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\}$ είναι άνω φραγμένο. Ορίζουμε

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Ο μη-αρνητικός αριθμός $\|T\|$ λέγεται νόρμα της T. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ έχουμε τώρα $\|x/\|x\|\|=1$ συνεπώς $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|T\|$ $\Longrightarrow$

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\|.$$

Αυτό δείχνει ότι η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Η νόρμα των γραμμικών απεικονίσεων έχει ανάλογες ιδιότητες με τα μέτρα στο $\mathbb{R}^n$.

<u>3.5. Πρόταση</u> (α) Αν οι $T, S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικές και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$ και $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$

(β) $\|T\|=0$ τότε και μόνο τότε όταν $T=0$.

(γ) Αν οι $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ είναι γραμμικές, τότε $\|S\circ T\| \leq \|S\|\cdot\|T\|$.

<u>Απόδειξη.</u> Είναι προφανή τα (α), (β). Όσο αφορά το (γ), για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ έχουμε $\|S\circ T(x)\| \leq \|S\|\cdot\|T(x)\| \leq \|S\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|$, απ' όπου προκύπτει το συμπέρασμα.

Τα (α), (β) της Πρότασης 3.5 δείχνουν ότι ο χώρος των γραμμικών απεικονίσεων $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ εφοδιασμένος με την $\|\ \|$ είναι χώρος με νόρμα. Μάλιστα είναι χώρος Banach. Πράγματι έστω $\{T_k : k\in\mathbb{N}\}$ μια ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Τότε $\|T_k(x)-T_\lambda(x)\| \leq \|T_k - T_\lambda\|\,\|x\|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, που σημαίνει ότι η $\{T_k(x) : k\in\mathbb{N}\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}^m$. Αφού ο $\mathbb{R}^m$ είναι πλήρης, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ υπάρχει ακριβώς ένα $T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x)$. Η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ που ορίζεται έτσι είναι προφανώς γραμμική. Απομένει να δείξουμε ότι $\lim_{k\to\infty}\|T_k - T\| = 0$. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε $\|T_k - T_\lambda\| < \varepsilon/2$, όταν $k,\lambda \geq N$. Αν $\|x\|\leq 1$, τότε $\|T_k(x) - T_\lambda(x)\| \leq \|T_k - T_\lambda\|\,\|x\| < \varepsilon/2$, οπότε για $\lambda\to+\infty$ έχουμε $\|T_k(x) - T(x)\| \leq \varepsilon/2$ για κάθε $\|x\|\leq 1$. Άρα $\|T_k - T\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, $k\geq N$.

<u>3.6 Λήμμα</u> Έστω $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ με πίνακα $(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$, τότε

$$\|T\| \leq \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

<u>Απόδειξη</u> Για κάθε $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ έχουμε από την ανισότητα Cauchy–Schwarz: $\|T(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{m}\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big]\Big[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big] = \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)\cdot\|x\|^2$

Αν λοιπόν $\|x\|\leq 1$ τότε

$$\|T(x)\| \leq \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{1/2} \text{ οεδ.}$$

Επίσης, αφού $\|T(e_j)\| = \|\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e_i\| = \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2\Big)^{1/2} \geq |a_{ij}|$ έχουμε,

$$\max\{|a_{ij}| : 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\} \le \|T\| \le \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

Η απόδειξη τώρα της παρακάτω πρότασης είναι προφανής.

<u>3.7. Πρόταση</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^p$ και $a_{ij} : A \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. Για κάθε $y\in A$ θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με πίνακα $(a_{ij}(y)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Η απεικόνιση $T : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ είναι συνεχής, τότε και μόνον τότε όταν οι συναρτήσεις a_{ij} είναι συνεχείς, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

Λαμβανομένου υπ' όψιν ότι $\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{1/2} \le \max\{|a_{ij}| : 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε την

$$\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{1/2} \le \|T\| \le \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

που δείχνει ότι η norm $\| \ \|$ όπως ορίστηκε στο $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{m\cdot n}$ είναι ισοδύναμη με το ευκλείδειο μήκος.

Έστω τώρα $GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων.

<u>3.8 Θεώρημα</u> (α) Αν $T\in GL(n,\mathbb{R})$ και $S\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ με $\|S-T\|\,\|T^{-1}\|<1$, τότε $S\in GL(n,\mathbb{R})$. Συνεπώς το $GL(n,\mathbb{R})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$.
(β) Η απεικόνιση $\gamma : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ με $\gamma(T) = T^{-1}$ είναι συνεχής.

<u>Απόδειξη</u> (α) Θέτουμε $\|T^{-1}\| = 1/a$ και $\|S-T\| = b$, οπότε $b<a$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ έχουμε $a\|x\| = a\|T^{-1}\circ T(x)\| \le a\|T^{-1}\|\,\|T(x)\| = \|T(x)\| \le \|T(x) - S(x) + S(x)\| \le \|(T-S)(x)\| + \|S(x)\| \le \|T-S\|\,\|x\| + \|S(x)\| = b\|x\| + \|S(x)\|$.
Δηλαδή $(a-b)\|x\| \le \|S(x)\|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Αφού $a>b$, αυτό δείχνει ότι $S(x)\ne 0$, όταν $x\ne 0$, δηλαδή η S είναι "1−1", άρα ισομορφισμός.
(β) Έχουμε $(a-b)\|S^{-1}y\| \le \|S\circ S^{-1}(y)\| = \|y\|$ για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$.
Συνεπώς $\|S^{-1}\| \le \frac{1}{a-b}$. Επίσης $S^{-1} - T^{-1} = S^{-1}(T-S)\cdot T^{-1}$, και κατά συνέπεια, από την Πρόταση 3.5 (γ), $\|S^{-1}-T^{-1}\| \le \|S^{-1}\|\,\|T-S\|\,\|T^{-1}\| \le \frac{b}{(a-b)a}$. Έτσι για κάθε $\varepsilon>0$ αν $\delta = \frac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon}$ έχουμε

$$\|S-T\|<\delta \Rightarrow \|S^{-1}-T^{-1}\|<\varepsilon$$ ο.ε.δ.

II. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

1. Μερικές και κατευθυνόμενες παράγωγοι

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Για κάθε $1 \le i \le n$ το σύνολο $\pi_i(A)$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$. Έστω $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ και $g_i : \pi_i(A) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$g_i(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

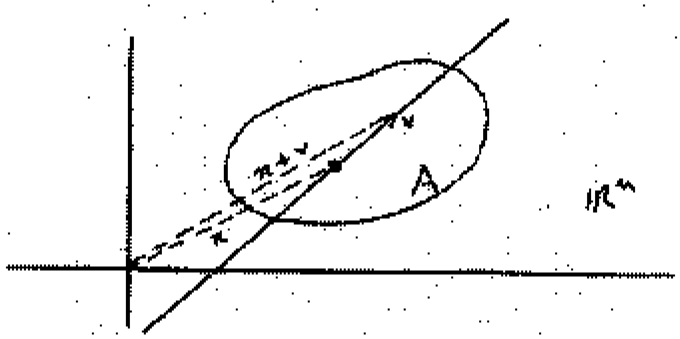
Αν η g_i είναι διαφορίσιμη στο σημείο $x_i \in \pi_i(A)$, τότε η f λέγεται διαφορίσιμη ως προς την i-μεταβλητή και η $\partial_i f(x) = g_i'(x_i)$ λέγεται i-μερική παράγωγος της f στο σημείο x, δηλαδή

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g_i(x_i + h) - g_i(x_i)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, η $\partial_i f(x)$ είναι η παράγωγος του περιορισμού της f πάνω στην ευθεία που περνάει από το x με κατεύθυνση e_i. Μπορούμε λοιπόν να γενικεύσουμε την έννοια της μερικής παραγώγου ως εξής:

1.1. Ορισμός Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Έστω ακόμα $x \in A$ και $v \in \mathbb{R}^n$. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση v είναι το όριο

$$f'(x; v) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}, \text{ αν υπάρχει.}$$



Επειδή το A είναι ανοιχτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(x, \delta) \subset A$. Επομένως, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε $|h| < \eta \Rightarrow \|x + hv - x\| = |h| \|v\| < \delta$. Συνεπώς για κάθε $|h| < \eta$ το $f(x + hv)$ ορίζεται.

Γενικεύοντας, ακόμα περισσότερο, αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση με $f = (f_1, \dots, f_m)$ τότε για κάθε $x \in A$ και $v \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε ως κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο x στην κατεύθυνση v το διάνυσμα

$$f'(x;v) = \begin{pmatrix} f_1'(x;v) \\ \vdots \\ f_m'(x;v) \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό από τους ορισμούς ότι $\partial_i f(x) = f'(x;e_i)$, $1 \le i \le n$.

<u>1.2 Παραδείγματα</u> (α) Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \|x\|^2$, δηλαδή $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Τότε $\partial_i f(x) = 2x_i$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$. Γενικότερα αν $v \in \mathbb{R}^n$, τότε θέτουμε $F(t) = f(x+tv)$, οπότε $F'(0) = f'(x;v)$. Όμως $F(t) = \|x+tv\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x,v\rangle + t^2\|v\|^2$. Άρα $f'(x;v) = 2\langle x,v\rangle$.

(β) Αν η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση και $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, τότε $F(t) = f(x+tv) = f(x) + t f(v)$. Συνεπώς, $f'(x;v) = F'(0) = f(v)$.

Ένα αρκετά σημαντικό γεγονός είναι ότι η ύπαρξη όλων των κατευθυνόμενων παραγώγων $f'(x;v)$, $v \in \mathbb{R}^n$ μιας συνάρτησης f δεν εξασφαλίζει την συνέχεια της f στο σημείο x, όπως θα περίμενε κανείς.

<u>1.3 Παράδειγμα</u> Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Η f είναι ασυνεχής στο $0 = (0,0)$, αφού $\lim_{k \to +\infty} f\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$. Αν τώρα $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ τότε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+hv) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} = \begin{cases} \dfrac{v_2^2}{v_1}, & v_1 \neq 0 \\ 0, & v_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα η $f'(0;v)$ υπάρχει για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$. Ειδικά βέβαια υπάρχουν και οι μερικές παράγωγοι $\partial_1 f(0)$, $\partial_2 f(0)$.

Συνεπώς η έννοια της κατευθυνόμενης παραγώγου και πολύ περισσότερο της μερικής, δεν είναι ικανοποιητική γενίκευση της παραγώγου πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Μία περίπτωση στην οποία η έννοια της μερικής παραγώγου συμπεριφέρεται ικανοποιητικά είναι η ακόλουθη:

<u>1.4. Θεώρημα</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχει η $\partial_2 f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in A$, και η $\partial_2 f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν $[a,b] \times [c,d] \subset A$ και $F : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx ,$$

τότε η F είναι διαφορίσιμη και $F'(y) = \int_a^b \partial_2 f(x,y)\,dx$

<u>Απόδειξη</u> Επειδή η f είναι διαφορίσιμη ως προς την δεύτερη μεταβλητή αν $(x,y) \in A$ και $E(x,y,h) = \frac{1}{h}\left[f(x,y+h) - f(x,y) - h\,\partial_2 f(x,y)\right]$, $h \neq 0$, τότε $\lim_{h\to 0} E(x,y,h) = 0$. Απ' την άλλη μεριά επειδή η $\partial_2 f$ είναι συνεχής και το $[a,b]\times[c,d]$ συμπαγές, η $\partial_2 f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]\times[c,d]$. Έχουμε επίσης

$$\frac{1}{h}\left[F(y+h) - F(y)\right] = \frac{1}{h}\left[\int_a^b h\,\partial_2 f(x,y)\,dx + \int_a^b h\,E(x,y,h)\,dx\right] =$$

$$\int_a^b \partial_2 f(x,y)\,dx + \int_a^b E(x,y,h)\,dx.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lim_{h\to 0} \int_a^b E(x,y,h)\,dx = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της $\partial_2 f$ στο $[a,b]\times[c,d]$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\left|\partial_2 f(x,z) - \partial_2 f(x,y)\right| < \varepsilon / b-a$$

για κάθε $x \in [a,b]$ και $y \in [c,d]$ με $|z-y| < \delta$. Έστω τώρα $0 < |h| < \delta$. Από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $|z-y| < |h|$ ώστε $f(x,y+h) - f(x,y) = h\,\partial_2 f(x,z)$. Άρα $E(x,y,h) = \partial_2 f(x,z) - \partial_2 f(x,y)$ και συνεπώς $|E(x,y,h)| < \varepsilon / b-a$, για κάθε $x \in [a,b]$. Έχουμε λοιπόν:

$$\left|\int_a^b E(x,y,h)\,dx\right| \leq \int_a^b |E(x,y,h)|\,dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Οι κατευθυνόμενες και μερικές παράγωγοι μας βοηθάνε σε ορισμένες περιπτώσεις να ανιχνεύσουμε τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση έχει ακρότατα. Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και και $x_0 \in A$, τότε η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο x_0 όταν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$. Αντίστοιχα παίρνει μέγιστη τιμή όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

<u>1.5. Θεώρημα</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $x_0 \in A$ και $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x_0;v)$ όπου $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, τότε και αναγκαία $f'(x_0;v) = 0$

<u>Απόδειξη</u> Επειδή το A είναι ανοιχτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(x_0,\delta) \subset A$. Για $0<|h|<\delta/\|v\|$ έχουμε $\|x_0+hv-x_0\|<\delta$ και $f(x_0+hv) \geq f(x_0)$

Συνεπώς

$$0 \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h} = f'(x_0,v) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

που σημαίνει ότι $f'(x_0;v)=0$.

Είναι ενδεχόμενο $f'(x_0;v)=0$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ αλλά η f να μην παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x_1,x_2) = (x_2-x_1)^2(x_2-2x_1^2)$. Τότε $f'((0,0);v)=0$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ αλλά όπως εύκολα βλέπουμε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $(0,0)$.

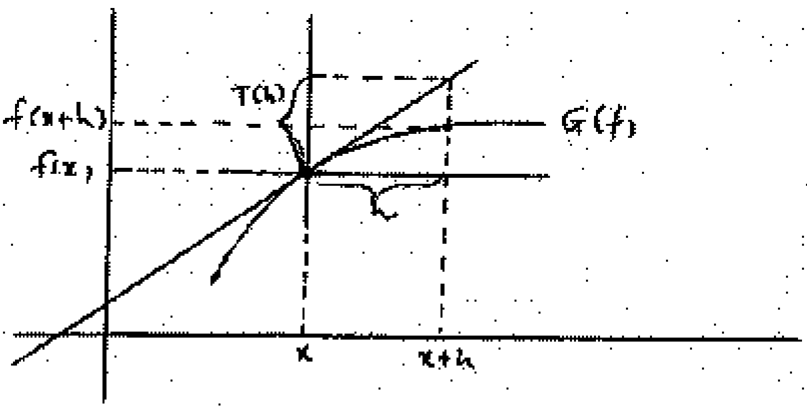
2. Η έννοια της παραγώγου

Έστω $a<b$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Η f είναι διαφορίσιμη στο $x\in(a,b)$ όταν υπάρχει το όριο

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

στο $\mathbb{R}$ ή ισοδύναμα αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $f'(x)$ ώστε

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h|}{|h|}=0.$$



Θεωρώντας άξονες με αρχή το σημείο $(x,f(x))$ παρατηρούμε ότι η διαφορά $f(x+h)-f(x)$ είναι η τιμή της f στο σημείο h ως προς αυτούς τους άξονες και η ποσότητα $f'(x)\cdot h$ είναι η τιμή της γραμμικής απεικόνισης $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $T(h)=f'(x)\cdot h$. Η παραπάνω ισότητα λέει ότι οι τιμές της συνάρτησης f κοντά στο 0 (που είναι το x των παλιών αξόνων) προσεγγίζονται από τις τιμές της γραμμικής απεικόνισης T και μάλιστα η προσέγγιση γίνεται πιο γρήγορα απ' ότι το h (που είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή στους νέους άξονες) προσεγγίζει το 0.

Ο ορισμός αυτός γενικεύεται τώρα και σε συναρτήσεις ευκλείδειων χώρων.

2.1. Ορισμός Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση. Η f λέγεται διαφορίσιμη στο σημείο $x\in A$ αν υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ώστε

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h)-f(x)-T(h)\|}{\|h\|}=0$$

2.2. Θεώρημα Αν η $f:A\to\mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $x\in A$, όπου το $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, τότε η γραμμική απεικόνιση T είναι μοναδική.

Απόδειξη Έστω $T,S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ δυο γραμμικές απεικονίσεις για τις οποίες ικανοποιείται ο ορισμός 2.1. Έχουμε:

$\|T(h)-S(h)\| = \|T(h)-f(x+h)+f(x)+f(x+h)-f(x)-S(h)\| \leq$
$\|f(x+h)-f(x)-T(h)\| + \|f(x+h)-f(x)-S(h)\|$. Άρα
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|T(h)-S(h)\|}{\|h\|} = 0$. Για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ έχουμε $\lim\limits_{t\to 0} ty = 0$. Έτσι για

κάθε $y\neq 0$ $0=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|T(ty)-S(ty)\|}{\|ty\|} = \dfrac{1}{\|y\|}\|T(y)-S(y)\|$ που σημαίνει ότι
$T(y)=S(y)$ οεδ.

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x, τότε η μονοσήμαντα ορισμένη γραμμική απεικόνιση T λέγεται <u>παράγωγος</u> της f στο x και συμβολίζεται με $Df(x)$. Μερικές ιδιότητες των διαφορίσιμων συναρτήσεων είναι οι ακόλουθες.

<u>2.3. Πρόταση</u> Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x, τότε είναι συνεχής στο x.

<u>Απόδειξη</u> Αν $E(h)=\frac{1}{\|h\|}[f(x+h)-f(x)-Df(x)h]$, τότε $\lim\limits_{h\to 0}E(h)=0$
Όμως, $f(x+h)-f(x) = Df(x)h + \|h\|E(h)$. Άρα
$\lim\limits_{h\to 0}(f(x+h)-f(x)) = \lim\limits_{h\to 0} Df(x).h + \lim\limits_{h\to 0}\|h\|E(h) = 0+0=0$. οεδ.

<u>2.4. Πρόταση</u> Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x, τότε για κάθε $v\in\mathbb{R}^n$ υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x;v)$ και $f'(x;v)=Df(x)v$.

<u>Απόδειξη</u> Αν $v=0$, τότε προφανώς $f'(x;v)=0$. Έστω ότι $v\neq 0$.
Θέτουμε $E(h)=\frac{1}{\|h\|}[f(x+h)-f(x)-Df(x)h]$ και έχουμε:

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \frac{Df(x)(tv)+\|tv\|E(tv)}{t} = Df(x)v + \frac{|t|}{t}\|v\|E(tv)$$

Αφού $\lim\limits_{h\to 0}E(h)=0$, έχουμε αμέσως $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+tv)-f(x)}{t} = Df(x)v$ οεδ.

Αν λοιπόν η f είναι διαφορίσιμη στο x, τότε υπάρχει η i-μερική παράγωγος $\partial_i f(x) = Df(x)e_i$, $1\leq i\leq n$. Συνεπώς, η i-στήλη του πίνακα της παραγώγου $Df(x)$ της f στο x είναι ακριβώς η i-μερική παράγωγος της f. Αν $f=(f_1,\dots,f_m)$, τότε ο πίνακας της $Df(x)$ είναι ο $(\partial_i f_j(x))_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq i\leq n}} \in\mathbb{R}^{m\times n}$ που λέγεται <u>ιακωβιανός</u> πίνακας της f στο x (ή πίνακας του Jacobi της f στο x).

Ειδικά όταν $m=1$, δηλαδή $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$, τότε ο ιακωβιανός πίνακας της f στο $x \in A$ είναι η γραμμή $(\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Το διάνυσμα

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

λέγεται <u>gradient</u> της f στο σημείο x και είναι το μοναδικό για το οποίο ισχύει $Df(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$ για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$.

<u>2.5. Λήμμα</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση. Η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in A$ τότε και μόνο τότε όταν οι $f_1, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες στο x. Επιπλέον

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{pmatrix}$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x. Αν $\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ είναι η j-προβολή, $1 \le j \le m$, τότε

$$\| f_j(x+h) - f_j(x) - \pi_j \circ Df(x)h \| \le \| f(x+h) - f(x) - Df(x)h \|$$

από όπου προκύπτει ότι η f_j είναι διαφορίσιμη στο x.

Αν οι $f_1, \dots, f_m$ είναι διαφορίσιμες στο x και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι η γραμμική απεικόνιση με τύπο $T(h) = (Df_1(x)h, \dots, Df_m(x)h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\| f(x+h) - f(x) - T(h) \| = \Big[\sum_{j=1}^{m} | f_j(x+h) - f_j(x) - Df_j(x)h |^2 \Big]^{1/2}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - T(h) \|}{\|h\|} = 0.$$

Όπως προκύπτει από το Παράδειγμα 1.3 για μία συνάρτηση μπορεί να υπάρχουν σ' ένα σημείο όλες οι μερικές παράγωγοι αλλά η συνάρτηση να μην είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό (ούτε καν συνεχής). Η επιπλέον συνθήκες που χρειάζονται και οι οποίες μαζί με την ύπαρξη των μερικών παραγώγων εξασφαλίζουν διαφορισιμότητα δίνονται από το ακόλουθο:

<u>2.6. Θεώρημα.</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση και $x \in A$. Αν οι μερικές παράγωγοι $\partial_i f_j(y)$ υπάρχουν για κάθε $y \in A$ και είναι συνεχείς στο x, δηλαδή οι συναρτήσεις $\partial_i f_j : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς

στο x, $1\le j\le m$, $1\le i\le n$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x με ιακωβιανό πίνακα $(\partial_i f_j(x))_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le i\le n}}$.

<u>Απόδειξη</u> Λόγω του Λήμματος 2.5 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m=1$. Έστω $\varepsilon>0$. Από την συνέχεια των $\partial_i f$ στο x, υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$y\in S(x,\delta) \Longrightarrow |\partial_i f(x)-\partial_i f(y)|<\varepsilon/n, \quad 1\le i\le n$$

Έστω ότι $x=(x_1,\dots,x_n)$ και $h=(h_1,\dots,h_n)\in S(0,\delta)$, $h\neq 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)-f(x_1,\dots,x_n)\\
&= f(x_1+h_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad + f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3,\dots,x_n)-f(x_1+h_1,x_2,\dots,x_n)\\
&\quad -\\
&\quad + f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)-f(x_1+h_1,\dots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[f(x+v_i)-f(x+v_{i-1})\right]
\end{aligned}$$

όπου $v_0=0$ και $v_i=h_1e_1+\dots+h_ie_i$, δηλαδή $v_i=v_{i-1}+h_ie_i$, $1\le i\le n$.
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_i:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ με τύπο

$g_i(t)=f(x_1+h_1,\dots,x_{i-1}+h_{i-1},x_i+th_i,x_{i+1},\dots,x_n)=f(x+v_{i-1}+th_ie_i)$, $1\le i\le n$

Η g_i είναι προφανώς διαφορίσιμη στο $(0,1)$ και συνεπώς από το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\theta_i\in(0,1)$ ώστε

$$f(x+v_i)-f(x+v_{i-1}) = h_i\cdot\partial_i f(x+v_{i-1}+\theta_i h_i e_i), \quad 1\le i\le n$$

Άρα $\displaystyle f(x+h)-f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i\,\partial_i f(x+v_{i-1}+\theta_i h_i e_i)$

Από την άλλη μεριά $\|x+v_{i-1}+\theta_i h_i e_i-x\|=\|v_{i-1}+\theta_i h_i e_i\|\le\|v_i\|\le\|h\|<\delta$
και συνεπώς

$$\frac{1}{\|h\|}\left|f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}h_i\partial_i f(x)\right| = \frac{1}{\|h\|}\left|\sum_{i=1}^{n}h_i\left(\partial_i f(x)-\partial_i f(x+v_{i-1}+\theta_i h_i e_i)\right)\right|$$

$$\le \frac{1}{\|h\|}\sum_{i=1}^{n}|h_i|\left|\partial_i f(x)-\partial_i f(x+v_{i-1}+\theta_i h_i e_i)\right| < \frac{1}{\|h\|}\sum_{i=1}^{n}|h_i|\frac{\varepsilon}{n} \le$$

$$\le \frac{1}{\|h\|}\sum_{i=1}^{n}\|h\|\frac{\varepsilon}{n} = \frac{1}{\|h\|}n\cdot\|h\|\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

Αυτό δείχνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x και $Df(x)=(\partial_1 f(x),\dots,\partial_n f(x))$.

Από την Πρόταση 3.7 του κεφαλαίου 1 προκύπτει τώρα ότι επιπλέον η συνάρτηση $Df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ είναι συνεχής.

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ ορισμένη σ' ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται C^1 αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $\partial_i f_j$ στο A, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ και είναι συνεχείς στο A. Ισοδύναμα, λόγω της πρότασης 3.7 του κεφαλαίου I, όταν η $Df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ είναι συνεχής.

3. Κανόνες παραγωγίσεως

3.1. Θεώρημα (κανόνας της αλυσίδας) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$ ένα ανοικτό σύνολο με $f(A) \subset B$ και $g : B \to \mathbb{R}^k$. Αν $x \in A$, η f είναι διαφορίσιμη στο x και η g είναι διαφορίσιμη στο $f(x)$, τότε η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμη στο x και

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| g(f(x+h)) - g(f(x)) - (Dg(f(x)) \circ Df(x))h \|}{\|h\|} = 0$$

Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο x και η g στο $f(x)$ έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)h + \|h\| E(h) \quad \text{και}$$

$$g(f(x)+y) - g(f(x)) = Dg(f(x))y + \|y\| \Delta(y)$$

όπου $\lim_{h \to 0} E(h) = 0$ και $\lim_{y \to 0} \Delta(y) = 0$.

Για $y = f(x+h) - f(x)$ έχουμε:

$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(f(x) + f(x+h) - f(x)) - g(f(x)) =$
$Dg(f(x)) \cdot [f(x+h) - f(x)] + \|f(x+h) - f(x)\| \cdot \Delta(f(x+h) - f(x)) =$
$Dg(f(x)) [Df(x)h + \|h\| E(h)] + \|f(x+h) - f(x)\| \, \Delta(f(x+h) - f(x)) =$
$Dg(f(x)) \circ Df(x)h + \|h\| Dg(f(x)) E(h) + \|f(x+h) - f(x)\| \, \Delta(f(x+h) - f(x))$. Άρα

$$\frac{\| g(f(x+h)) - g(f(x)) - (Dg(f(x)) \circ Df(x))h \|}{\|h\|} = Dg(f(x))E(h) + \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \Delta(f(x+h) - f(x))$$

Επειδή $\lim_{h \to 0} E(h) = 0$, έχουμε $\lim_{h \to 0} Dg(f(x)) E(h) = 0$.

Επίσης $\lim_{h \to 0} \Delta(f(x+h) - f(x)) = 0$, αφού $\lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x)) = 0$, επειδή η f

είναι συνεχής. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο πηλίκο γοντας $\frac{\|f(x+h)-f(x)\|}{\|h\|}$ είναι φραγμένος στο $h \to 0$. Έχουμε:

$$\frac{\|f(x+h)-f(x)\|}{\|h\|} = \frac{\|Df(x)h + \|h\| E(h)\|}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}\|Df(x)h\| + \|E(h)\| \leq$$

$\frac{1}{\|h\|}\|Df(x)\| \cdot \|h\| + E(h) = \|Df(x)\| + E(h)$. Αφού λοιπόν

$\lim_{h\to 0} E(h) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\frac{\|f(x+h)-f(x)\|}{\|h\|} \leq 1 + \|Df(x)\| \quad , \text{ όταν } \quad 0 < \|h\| < \delta. \quad \text{ο.ε.δ.}$$

3.2. Παράδειγμα Έστω $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \to A \subset \mathbb{R}^n$ μία διαφορίσιμη καμπύλη στο ανοιχτό σύνολο A, όπου το I είναι κάποιο ανοιχτό διάστημα και $f : A \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε η $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη και

$$(f\circ\gamma)'(t) = D(f\circ\gamma)(t) = Df(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t) =$$

$$(\partial_1 f(\gamma(t)), \dots, \partial_n f(\gamma(t))) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\gamma(t))\gamma_i'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

3.3. Πρόταση Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε η f είναι διαφορίσιμη και $Df(x) = f$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη Έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x) + f(h) - f(x) - f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

3.4. Πρόταση (α) Η συνάρτηση $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $\pi(x,y) = x+y$ είναι διαφορίσιμη και $D\pi(x,y) = \pi$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Η συνάρτηση $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $p(x,y) = x \cdot y$ είναι διαφορίσιμη και $Dp(x,y)(h_1,h_2) = yh_1 + xh_2$

Απόδειξη Το (α) είναι προφανές αφού η π είναι γραμμική.

(β) Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(h_1,h_2) = yh_1 + xh_2$. Τότε έχουμε

$$E(h_1,h_2) = \frac{p(x+h_1, y+h_2) - p(x,y) - T(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Αρα $|E(h_1,h_2)| \leq \frac{1}{2}\frac{|h_1|^2+|h_2|^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0$, όταν $(h_1,h_2)\to(0,0)$.

3.5. Πρόταση Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $x\in A$ και $f,g: A\to\mathbb{R}$ δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε οι $f+g$, $f\cdot g$ είναι διαφορίσιμες και

$$D(f+g)(x) = Df(x)+Dg(x)$$
$$D(f\cdot g)(x) = g(x)Df(x)+f(x)Dg(x)$$

Αν επιπλέον $g(x)\neq 0$, τότε η f/g είναι διαφορίσιμη στο x και

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(g(x))^2}\left(g(x)Df(x)-f(x)Dg(x)\right)$$

Απόδειξη Από τον κανόνα της αλυσίδας και την Πρόταση 3.4 έχουμε

(α) $f+g = \pi\circ(f,g)$, συνεπώς $D(f+g)(x) = D\pi(f(x),g(x))\circ D(f,g)(x) = \pi(Df(x),Dg(x)) = Df(x)+Dg(x)$

(β) $f\cdot g = \mathrm{p}\circ(f,g)$, άρα $D(f\cdot g)(x) = D\mathrm{p}(f(x),g(x))\circ D(f,g)(x) = D\mathrm{p}(f(x),g(x))(Df(x),Dg(x)) = g(x)Df(x)+f(x)Dg(x)$.

(γ) $\frac{f}{g} = \mathrm{p}\circ\left(f,\frac{1}{g}\right)$. Άρα $D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}Df(x)+f(x)D\left(\frac{1}{g}\right)(x)$

Όμως $\frac{1}{g} = F\circ g$, όπου $F:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $F(t)=\frac{1}{t}$. Συνεπώς από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε $D\left(\frac{1}{g}\right)(x) = -\frac{1}{(g(x))^2}Dg(x)$, από όπου το συμπέρασμα.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας μπορούμε τώρα ν' αποδείξουμε τον επόμενο κανόνα παραγώγισης ενός ολοκληρώματος ως προς μία παράμετρο που εμφανίζεται και στον ολοκληρωτέο και στα άκρα ολοκλήρωσης.

3.6. Θεώρημα Έστω $A\subset\mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο, $f:A\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχει η $\partial_2 f: A\to\mathbb{R}$ και είναι συνεχής. Έστω $[a,b]\times[c,d]\subset A$ και $p,q:[c,d]\to[a,b]$ δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε η συνάρτηση $F:[c,d]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$F(y) = \int_{q(y)}^{p(y)} f(x,y)\,dx$$

είναι διαφορίσιμη και

$$F'(y) = \int_{q(y)}^{p(y)} \partial_2 f(x,y)\,dx + f(p(y),y)\cdot p'(y) - f(q(y),y)\, q'(y)$$

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε την συνάρτηση $G: [a,b]\times[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ με
$$G(x_1,x_2,x_3) = \int_{x_1}^{x_2} f(t,x_3)\,dt$$
Η G είναι διαφορίσιμη (μάλιστα C^1) από τα Θεωρήματα 1.4 και 2.6.
Αφού $F(y) = G(q(y),p(y),y)$, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:
$$F'(y) = \big(\partial_1 G(q(y),p(y),y),\ \partial_2 G(q(y),p(y),y),\ \partial_3 G(q(y),p(y),y)\big) \begin{pmatrix} q'(y)\\ p'(y) \\ 1\end{pmatrix}$$
δηλαδή $F'(y) = \partial_1 G(q(y),p(y),y)\cdot q'(y) + \partial_2 G(q(y),p(y),y)\cdot p'(y) + \partial_3 G(q(y),p(y),y)$
Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε
$\partial_1 G(x_1,x_2,x_3) = -f(x_1,x_3)$ και $\partial_2 G(x_1,x_2,x_3) = f(x_2,x_3)$, ενώ από
το Θεώρημα 1.4 έχουμε $\partial_3 G(x_1,x_2,x_3) = \int_{x_1}^{x_2} \partial_2 f(t,x_3)\,dt$
Το συμπέρασμα είναι τώρα προφανές.

<u>3.7 Θεώρημα</u> Η απεικόνιση $\gamma: GL(n,\mathbb{R})\longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ με $\gamma(T)=T^{-1}$
είναι C^1 και $D\gamma(T)h = -T^{-1}\circ h\circ T^{-1}$ για κάθε $h\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\cong\mathbb{R}^{n\times n}\cong\mathbb{R}^{n^2}$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $T\in GL(n,\mathbb{R})$. Τότε για κάθε $h\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ έχουμε
$\gamma(T+h)-\gamma(T) = (T+h)^{-1} - T^{-1} = (T+h)^{-1}\circ\{T-(T+h)\}\circ T^{-1} =$
$-(T+h)^{-1}\circ h\circ T^{-1}$. Συνεπώς
$$\frac{\|\gamma(T+h)-\gamma(T)+T^{-1}\circ h\circ T^{-1}\|}{\|h\|} = \frac{\|T^{-1}\circ h\circ T^{-1} - (T+h)^{-1}\circ h\circ T^{-1}\|}{\|h\|} =$$
$$\frac{\|(T^{-1}-(T+h)^{-1})\circ h\circ T^{-1}\|}{\|h\|} \leq \frac{\|T^{-1}-(T+h)^{-1}\|\,\|h\|\,\|T^{-1}\|}{\|h\|} =$$
$\|T^{-1}\|\cdot\|T^{-1}-(T+h)^{-1}\| \to 0$ όταν $h\to 0$, διότι η γ είναι
συνεχής, από το Θεώρημα 3.8 (β) του Κεφαλαίου Ι. Από το ίδιο
Θεώρημα προκύπτει ότι η $D\gamma: GL(n,\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))\cong\mathbb{R}^{n^4}$
είναι συνεχής ως εξής: Η απεικόνιση $\varphi: GL(n,\mathbb{R})\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$
με τύπο $\varphi(T)=(T^{-1},T^{-1})$ είναι συνεχής. Θεωρούμε την απεικόνιση
$$\psi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$$
με $\psi(u,w)(h) = -u\circ h\circ w$ για κάθε $u,w,h\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Η ψ είναι
προφανώς διαφορίσιμη και $D\gamma = \psi\circ\varphi$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε
ότι η ψ είναι συνεχής. Για κάθε $u,w,h\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ έχουμε:

$$\|\psi(u,w)(h)\| = \|u \cdot h \cdot w\| \leq \|u\|\,\|w\|\,\|h\|$$

Επομένως $\|\psi(u,w)\| \leq \|u\|\,\|w\|$ για κάθε $u,w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Έτσι

$$\|\psi(u,w) - \psi(u',w')\| = \|\psi(u,w) - \psi(u',w) + \psi(u',w') - \psi(u',w')\| \leq$$

$$\|\psi(u,w) - \psi(u',w)\| + \|\psi(u',w) - \psi(u',w')\| = \|\psi(u-u',w)\| + \|\psi(u',w-w')\| \leq$$

$$\|w\|\,\|u-u'\| + \|u'\|\,\|w-w'\| \to 0,$$ όταν $(u',w') \to (u,w)$. ο.ε.δ.

4. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.6 η ύπαρξη και συνέχεια των μερικών παραγώγων εξασφαλίζει την διαφορισιμότητα. Επαγωγικά μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έννοια της C^r συνάρτησης $r \geq 1$. Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο τότε η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται C^r αν οι $\partial_i f : A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ είναι C^{r-1} συναρτήσεις. Παραδείγματος χάριν η f είναι C^2 αν οι $\partial_i f$, $1 \leq i \leq n$ ορίζονται στο A και είναι C^1 συναρτήσεις. Ισοδύναμα η f είναι C^2, αν η συνάρτηση $Df: A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ορίζεται και είναι C^1. Η f λέγεται C^∞ συνάρτηση αν είναι C^r για κάθε $r \geq 1$. Τέλος μια συνάρτηση $f = (f_1,\dots,f_m): A \to \mathbb{R}^m$ λέγεται C^r, $1 \leq r \leq \infty$, αν οι $f_1,\dots,f_m : A \to \mathbb{R}$ είναι C^r.

Αν $f: A \to \mathbb{R}$ είναι μια C^2 συνάρτηση, όπου το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό τότε η $\partial^2_{ij} f = \partial_i(\partial_j f)$ λέγεται η <u>δεύτερης τάξεως (i,j)-μικτή μερική παράγωγος</u> της f. Επαγωγικά αν η f είναι C^r τότε ορίζεται η <u>r-τάξεως $(i_1,\dots,i_r)$-μικτή μερική παράγωγος</u> $\partial^r_{i_1,\dots,i_r} f$ της f για $1 \leq i_1,\dots,i_r \leq n$. Μια σημαντική ιδιότητα των μικτών παραγώγων των C^r συναρτήσεων είναι το γεγονός ότι δεν εξαρτώνται από την διάταξη των $i_1,\dots,i_r$. Λόγω του επαγωγικού ορισμού είναι προφανές ότι αρκεί ν' αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή για C^2 συναρτήσεις ορισμένες σε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

<u>4.1. Λήμμα</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Έστω $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \subset A$. Τότε

(α) Υπάρχουν $a_1 < \xi < b_1$, $a_2 < \eta < b_2$ ώστε

$$\Delta f = f(a_1,a_2) + f(b_1,b_2) - f(a_1,b_2) - f(b_1,a_2) = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\,\partial^2_{2,1} f(\xi,\eta)$$

(β) Υπάρχουν $a_1<\xi'<b_1$, $a_2<\eta'<b_2$ ώστε $\Delta f=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\partial^2_{1,2}f(\xi',\eta')$.

<u>Απόδειξη</u> (α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g:[a_1,b_1]\longrightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(x,b_2)-f(x,a_2)$. Τότε η g είναι C^2 και $\Delta f=g(b_1)-g(a_1)$. Απ' το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $a_1<\xi<b_1$ ώστε

$$\Delta f=g(b_1)-g(a_1)=g'(\xi)(b_1-a_1)=\left(\partial_1 f(\xi,b_2)-\partial_1 f(\xi,a_2)\right)(b_1-a_1).$$

Η συνάρτηση $\partial_1 f(\xi,\cdot):[a_2,b_2]\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι C^1, αφού η f είναι C^2 και συνεπώς απ' το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $a_2<\eta<b_2$ ώστε $\partial_1 f(\xi,b_2)-\partial_1 f(\xi,a_2)=\partial_{2,1}f(\xi,\eta)\,(b_2-a_2)$. Άρα

$\Delta f=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\,\partial_{2,1}f(\xi,\eta)$

(β) Η απόδειξη είναι όμοια με του (α) θεωρώντας την συνάρτηση $g:[a_2,b_2]\to\mathbb{R}$ με $g(y)=f(b_1,y)-f(a_1,y)$.

<u>4.2. Θεώρημα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση. Τότε $\partial_{1,2}f=\partial_{2,1}f$ στο A.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $(x,y)\in A$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.1 για κάθε ορθογώνιο της μορφής $[x,y+\frac{1}{k}]\times[x,y+\frac{1}{k}]$, $k\in\mathbb{N}$. Επειδή το A είναι ανοιχτό όλα τα ορθογώνια αυτά είναι <u>τελικά</u> μέσα στο A, δηλαδή εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος. Υπάρχουν λοιπόν δύο ακολουθίες $((\xi_k,\eta_k))_{k\in\mathbb{N}}$, $((\xi'_k,\eta'_k))_{k\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνουν στο (x,y) ώστε $\Delta f=\frac{1}{k^2}\partial_{2,1}f(\xi_k,\eta_k)=\frac{1}{k^2}\partial_{1,2}f(\xi'_k,\eta'_k)$

Επειδή τώρα οι $\partial_{2,1}f,\ \partial_{1,2}f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι συνεχείς παίρνοντας τα όρια έχουμε $\partial_{2,1}f(x,y)=\partial_{1,2}f(x,y)$ ο.ε.δ.

<u>4.3. Πόρισμα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση. Τότε $\partial_{i,j}f=\partial_{j,i}f$ στο A για κάθε $1\le i,j\le n$

<u>4.4 Πόρισμα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία C^r συνάρτηση. Τότε $\partial^r_{i_1,\dots,i_r}f=\partial^r_{\pi(i_1),\dots,\pi(i_r)}f$ για κάθε $1\le i_1,\dots,i_r\le n$ και για κάθε μετάθεση π των $i_1,\dots,i_r$.

<u>Απόδειξη</u> Άμεσο από το Θεώρημα 4.2 και το γεγονός ότι κάθε μετάθεση είναι το γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.3 αν $f:A\to\mathbb{R}$ είναι μία C^2 συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, τότε ο πίνακας $Hf(x)=(\partial_{ij}f(x))$ είναι ένας συμμετρικός $n\times n$ πίνακας. Ο $Hf(x)$ λέγεται εσσιανός πίνακας (Hessian matrix) της f στο $x\in A$.

4.5. Θεώρημα (Τύπος του Taylor) Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση. Έστω $x,y\in A$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[x,y]=\{x+t(y-x):\ 0\le t\le 1\}$ να περιέχεται στο A. Τότε υπάρχει $0<\theta<1$ ώστε

$$f(y)=f(x)+\langle\nabla f(x),y-x\rangle+\frac{1}{2}\langle y-x,\ Hf(x+\theta(y-x))(y-x)\rangle$$

Απόδειξη Επειδή το A είναι ανοικτό υπάρχει $\delta>0$ ώστε $x+t(y-x)\in A$ για $-\delta<t<1+\delta$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g:(-\delta,1+\delta)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(t)=f(x+t(y-x))$. Τότε $g(1)-g(0)=f(y)-f(x)$ και η g είναι C^1, αφού η f είναι C^2. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$g'(t)=Df(x+t(y-x))\cdot(y-x)=\langle\nabla f(x+t(y-x)),\ y-x\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\partial_i f(x+t(y-x))\cdot(y_i-x_i)$$

όπου $x=(x_1,\dots,x_n)$ και $y=(y_1,\dots,y_n)$. Παραγωγίζοντας ακόμα μία φορά

$$g''(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_{ij}f(x+t(y-x))\cdot(y_i-x_i)\cdot(y_j-x_j)$$

$$=\langle y-x,\ Hf(x+t(y-x))(y-x)\rangle.$$

Από το Θεώρημα του Taylor για την g έχουμε τώρα το συμπέρασμα.

4.6. Παράδειγμα Η απεικόνιση $\gamma: GL(n,\mathbb{R})\to GL(n,\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^{n^2}$ με $\gamma(T)=T^{-1}$ είναι C^∞. Αν $T=(a_{ij})$, τότε $\gamma(T)=\gamma(a_{ij})=\frac{1}{\det T}\cdot(\tilde{a}_{ij})$ όπου $\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\det T_{ji}$ και T_{ji} είναι ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει από τον T αν διαγράψουμε την j-γραμμή και την i-στήλη. Συνεπώς οι συντεταγμένες συναρτήσεις της γ, $\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det T}$, $1\le i,j\le n$ είναι ρητές συναρτήσεις των μεταβλητών a_{ij}, $1\le i,j\le n$ στο $GL(n,\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^{n^2}$ με μη-μηδενιζόμενους παρονομαστές στο $GL(n,\mathbb{R})$. Άρα η γ είναι C^∞ από το Πόρισμα 3.5. Εύκολα βλέπουμε επίσης ότι και η απεικόνιση του πολλαπλασιασμού $\mu: GL(n,\mathbb{R})\times GL(n,\mathbb{R})\to GL(n,\mathbb{R})$ με $\mu(T,S)=T\circ S$ είναι C^∞.

5. Το Θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης

Το Θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης είναι ένας από τους ακρογωνιαίους λίθους της Διαφορικής Τοπολογίας και Γεωμετρίας. Σύμφωνα μ' αυτό, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει τοπικά μονοσήμαντη λύση αν η γραμμικοποίησή της λύνεται μονοσήμαντα. Προκειμένου να διατυπώσουμε ακριβώς το Θεώρημα θα εισάγουμε κάποια ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε και αργότερα.

5.1. Ορισμός Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ δύο ανοικτά σύνολα. Μία συνάρτηση $f: U \to V$ λέγεται C^r αμφιδιαφόριση, $1 \le r \le \infty$, αν η f είναι "1-1", "επί", C^r και η αντίστροφή της $f^{-1}: V \to U$ είναι επίσης C^r. Παρατηρούμε ότι τότε η παράγωγος $Df(x)$ είναι αντιστρέψιμη για κάθε $x \in U$ και $(Df(x))^{-1} = Df^{-1}(f(x))$.

5.2. Παραδείγματα (α) Αν $\alpha \in \mathbb{R}^n$, τότε η μεταφορά κατά α, δηλαδή η συνάρτηση $f_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $f_\alpha(x) = x+\alpha$ είναι C^∞ αμφιδιαφόριση.

(β) Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μία γραμμική απεικόνιση. Η f τότε όπως είναι γνωστό είναι C^∞. Αν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε είναι C^∞ αμφιδιαφόριση, αφού η $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι επίσης γραμμική.

(γ) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3$. Η f είναι C^∞, "1-1" και "επί". Η $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ και δεν είναι διαφορίσιμη στο 0. Συνεπώς η f δεν είναι αμφιδιαφόριση.

5.3. Λήμμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $I \subset A$ ένα κλειστό ορθογώνιο και $f = (f_1, \dots, f_n): A \to \mathbb{R}^n$ μία C^1 συνάρτηση. Αν $M > 0$ είναι τέτοιο ώστε $|\partial_i f_j(x)| \le M$ για κάθε $x \in I$, $1 \le i,j \le n$, τότε

$$\|f(x) - f(y)\| \le n^2 M \|x-y\|$$

για κάθε $x, y \in I$.

Απόδειξη Έστω $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in I$. Επειδή το I είναι ορθογώνιο, $(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in I$ για κάθε $1 \le i \le n-1$, και

$$f_j(y) - f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_j(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_j(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \right], \quad 1 \le j \le n$$

Από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_{ij} \in I$, $1 \le i,j \le n$ ώστε

$f_j(y)-f_j(x) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\,\partial_i f_j(\xi_{ij})$, $1 \le j \le n$. Συνεπώς

$|f_j(y)-f_j(x)| \le \sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|\,|\partial_i f_j(\xi_{ij})| \le n M \|x-y\|$, $1 \le j \le n$

Άρα $\|f(x)-f(y)\| \le \sum_{j=1}^{n}|f_j(x)-f_j(y)| \le \sum_{j=1}^{n} n M \|x-y\| = n^2 M \|x-y\|$.

<u>5.4 Θεώρημα (της αντίστροφης συνάρτησης)</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f=(f_1,\dots,f_n): A \to \mathbb{R}^n$ μία C^r συνάρτηση, $r \ge 1$. Αν $x_0 \in A$ ώστε $\det Df(x_0) \ne 0$, δηλαδή η $Df(x_0)$ είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $U \subset A$ του x_0 και μία ανοικτή περιοχή V του $f(x_0)$ ώστε η $f|U : U \to V$ να είναι C^r αμφιδιαφόριση και $Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$ για κάθε $y \in V$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $T = Df(x_0)$. Η σύνθεση $T^{-1}\circ f : A \to \mathbb{R}^n$ είναι επίσης C^r και $D(T^{-1}\circ f)(x_0) = DT^{-1}(f(x_0))\circ Df(x_0) = T^{-1}\circ T = 1_n$. Αν αποδείξουμε το θεώρημα για την $T^{-1}\circ f$ τότε προφανώς ισχύει και για την f. Αρκεί λοιπόν ν' αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση που $Df(x_0) = I_n$.

Επειδή η f είναι C^r, $r \ge 1$, υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $B \subset A$ του x_0 ώστε

(1) $\det Df(x) \ne 0$ για κάθε $x \in B$ και

(2) $|\partial_i f_j(x) - \partial_i f_j(x_0)| < 1/2n^2$ για κάθε $x \in B$, $1 \le i,j \le n$, δηλαδή $|\partial_i f_j(x) - \delta_{ji}| < 1/2n^2$, αφού $Df(x_0) = I_n$. Επίσης

(3) Υπάρχει ένα (κλειστό) ορθογώνιο $I \subset B$ με κέντρο το x_0 ώστε $f(x) \ne f(x_0)$ για κάθε $x \in I$, $x \ne x_0$. Πραγματικά· αν δεν υπήρχε τέτοιο I, τότε θα υπήρχε μία ακολουθία $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ με όριο το x_0 ώστε $x^k \ne x_0$ και $f(x^k) = f(x_0)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε όμως $\lim_{k\to\infty} \frac{\|f(x^k)-f(x_0) - (x^k-x_0)\|}{\|x^k-x_0\|} = 1$ που είναι άτοπο!

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g: A \to \mathbb{R}^n$ με $g(x) = f(x) - x$. Η g είναι C^r και $Dg(x) = Df(x) - I_n$, δηλαδή $\partial_i g_j(x) = \partial_i f_j(x) - \delta_{ji}$ για κάθε $x \in A$, όπου $g = (g_1,\dots,g_n)$. Συνεπώς από το (2) και το Λήμμα 5.3 έχουμε $\|f(x_1)-x_1-(f(x_2)-x_2)\| \le \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$, δηλαδή

(4) $\|x_1-x_2\| \le 2\|f(x_1)-f(x_2)\|$ για κάθε $x_1,x_2\in I$.

Συνεπώς η $f|I$ είναι "1-1".

Το σύνορο ∂I του I είναι συμπαγές και συνεπώς και το $f(\partial I)$ είναι συμπαγές. Λόγω του (3), $f(x_0)\notin f(\partial I)$. Υπάρχει λοιπόν $d>0$ ώστε $\|f(x)-f(x_0)\|\ge d$ για κάθε $x\in\partial I$. Έστω $V=S(f(x_0),\frac{d}{2})$. Τότε

(5) $\|y-f(x_0)\|<\frac{d}{2}<\|y-f(x)\|$ για κάθε $y\in V$ και $x\in\partial I$.

<u>Ισχυρισμός.</u> Για κάθε $y\in V$ υπάρχει ακριβώς ένα $x\in I^\circ$ ώστε $f(x)=y$.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού.</u> Έστω $y=(y_1,\dots,y_n)\in V$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi: I\to\mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x)=\|y-f(x)\|^2=\sum_{j=1}^{n}(y_j-f_j(x))^2$, που είναι προφανώς συνεχής. Επειδή το I είναι συμπαγές, η φ παίρνει μία ελάχιστη τιμή στο I, υπάρχει δηλαδή $x\in I$ ώστε $\varphi(x)=\inf\varphi(I)$. Επειδή $\varphi(z)>\varphi(x_0)$ για κάθε $z\in\partial I$, από το (5), αναγκαστικά $x\in I^\circ$. Από το Θεώρημα λοιπόν 1.5 έχουμε για κάθε $1\le i\le n$,

$0=\partial_i\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n}2(y_j-f_j(x))\,\partial_i f_j(x)$ ή με τη μορφή πινάκων

$$(Df(x))^t(y-f(x))=0.$$

Επειδή όμως λόγω του (1) ο $(Df(x))^t$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, αυτό σημαίνει ότι $y=f(x)$. Η μοναδικότητα τώρα του x προκύπτει από το (4). Ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.

Θέτουμε τώρα $U=I^\circ\cap f^{-1}(V)$. Σύμφωνα με τον ισχυρισμό η $f|U:U\longrightarrow V$ είναι "1-1" και επί. Συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη $(f|U)^{-1}$ που για απλότητα συμβολίζουμε με $f^{-1}:V\to U$. Η (4) τώρα γράφεται

(6) $\|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\|\le 2\|y_1-y_2\|$ για κάθε $y_1,y_2\in V$, από όπου προκύπτει ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f^{-1} είναι διαφορίσιμη, με $Df^{-1}(y)=(Df(f^{-1}(y)))^{-1}$ για κάθε $y\in V$. Έστω $x\in U$ με $y=f(x)$. Για κάθε $\theta\in\mathbb{R}^n$ με $y+\theta\in V$ υπάρχει ακριβώς ένα $h=h(\theta)\in\mathbb{R}^n$ ώστε $y+\theta=f(x+h)$ και $\lim_{\theta\to 0}h(\theta)=0$, αφού $h(\theta)=f^{-1}(y+\theta)-f^{-1}(y)$ και η f^{-1} είναι συνεχής.

Έστω $E(h)=\frac{1}{\|h\|}[f(x+h)-f(x)-Df(x)h]$, $h\neq 0$. Τότε $\lim_{h\to 0}E(h)=0$ και $f(x+h)-f(x)=Df(x)h+\|h\|E(h)$, οπότε

$(Df(x))^{-1}(f(x+h)-f(x)) = h + \|h\| (Df(x))^{-1} E(h)$, δηλαδή

$(Df(f^{-1}(y)))^{-1}\theta = f^{-1}(y+\theta) - f^{-1}(y) + \|h(\theta)\| (Df(f^{-1}(y)))^{-1} E(h(\theta))$.

Άρα
$$\frac{1}{\|\theta\|}\|f^{-1}(y+\theta)-f^{-1}(\theta)-(Df(f^{-1}(y)))^{-1}\theta\| =$$

$$\frac{1}{\|\theta\|}\|h(\theta)\|\,\|(Df(f^{-1}(y)))^{-1}E(h(\theta))\| \leq$$

$$\frac{1}{\|\theta\|}\|h(\theta)\|\cdot\|(Df(f^{-1}(y)))^{-1}\|\,\|E(h(\theta))\| \leq$$

$$\frac{1}{\|\theta\|}2\|\theta\|\ \|(Df(f^{-1}(y)))^{-1}\|\,\|E(h(\theta))\| \quad (\text{λόγω της } (6))$$

που τείνει στο 0 όταν $\theta\to 0$, αφού $\lim_{\theta\to 0} E(h(\theta)) = 0$.

Απομένει να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι C^r. Θα δείξουμε πρώτα ότι η f^{-1} είναι C^1, δηλαδή ότι η $Df^{-1}: V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ είναι συνεχής. Η απεικόνιση $\gamma: GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ με $\gamma(S)=S^{-1}$ είναι C^∞ όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.6. και όπως δείξαμε παραπάνω $Df^{-1} = \gamma\circ Df\circ f^{-1}$ που είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επαγωγικά τώρα έστω ότι το Θεώρημα ισχύει για C^{r-1} συναρτήσεις, $r>1$, και η f είναι C^r. Τότε η Df είναι C^{r-1} και περισσότερο και η f. Η f^{-1} είναι λοιπόν C^{r-1} απ' την υπόθεση της επαγωγής. Αφού η $Df^{-1}=\gamma\circ Df\circ f^{-1}$ είναι σύνθεση C^{r-1} συναρτήσεων είναι C^{r-1}, δηλαδή η f^{-1} είναι C^r.

<u>5.5 Πόρισμα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f: A\to\mathbb{R}^n$ μία C^r συνάρτηση $r\geq 1$. Αν $\det Df(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$, τότε το $f(U)$ είναι ανοικτό σύνολο για κάθε ανοικτό σύνολο $U\subset A$.

<u>5.6. Πόρισμα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f: A\to\mathbb{R}^n$ μία C^r συνάρτηση. Αν η f είναι "1-1" και $\det Df(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$, τότε η f είναι C^r αμφιδιαφόριση, $1\leq r\leq\infty$.

Σαν εφαρμογή του Θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων.

<u>5.7. Θεώρημα (των πεπλεγμένων συναρτήσεων)</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ ένα ανοικτό σύνολο και $f=(f_1,\dots,f_m): A\to\mathbb{R}^m$ μία C^r συνάρτηση, $1\leq r\leq\infty$.

Έστω $(x_0,y_0)\in A$ με $f(x_0,y_0)=0$ ώστε $\det \partial_y f(x_0,y_0)\neq 0$, όπου $\partial_y f(x_0,y_0) = (\partial_{n+i} f_j(x_0,y_0))_{1\le i,j\le m}$. Τότε υπάρχουν μια ανοιχτή περιοχή U του x_0 και μια C^r συνάρτηση $g: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ με $g(x_0)=y_0$ ώστε $f(x,g(x))=0$ για κάθε $x\in U$.

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε την συνάρτηση $F: A \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ με $F(x,y)=(x,f(x,y))$. Η F είναι προφανώς C^r και

$$DF(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & \partial_y f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Άρα $\det DF(x_0,y_0) = \det \partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$. Από το Θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή της μορφής $U_1\times V_1 \subset A$ του (x_0,y_0), όπου τα $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $V_1\subset\mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτά, μια ανοιχτή περιοχή W του $F(x_0,y_0)=(x_0,0)$, ώστε η $F: U_1\times V_1 \to W$ να είναι C^r αμφιδιαφόριση. Έστω $G=(G_1,G_2)=F^{-1}: W\to U_1\times V_1$. Αν $(u,v)=F(x,y)\in W$, όπου $(x,y)\in U_1\times V_1$, τότε $u=x$ και $v=f(x,y)$. Άρα $(G_1(u,v), G_2(u,v)) = F^{-1}(u,v) = (x,y) = (u,y)$, δηλαδή $G_1(u,v)=u$ και $G_2(u,v)=y$, συνεπώς $f(u,G_2(u,v)) = f(x,y) = v$. Ειδικά $f(x,G_2(x,0))=0$ για κάθε $x\in U_1$ με $(x,0)\in W$. Το σύνολο $U=\{x\in U_1 : (x,0)\in W\}$ είναι ανοιχτό αφού τα U_1, W είναι ανοιχτά. Η συνάρτηση $g: U\to\mathbb{R}^m$ με τύπο $g(x)=G_2(x,0)$ είναι C^r και $f(x,g(x))=0$ για κάθε $x\in U$. Τέλος $g(x_0)=G_2(x_0,0)=y_0$ γιατί $F(x_0,y_0)=(x_0,0)$.

Το βασικό επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την απόδειξη της παρακάτω χρήσιμης πρότασης.

<u>5.8. Θεώρημα</u> Έστω $m\le n$, $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f=(f_1,\ldots,f_m): A\longrightarrow\mathbb{R}^m$ μια C^r συνάρτηση, $1\le r\le\infty$. Έστω $x_0\in A$ με $f(x_0)=0$. Αν η $Df(x_0)$ έχει τάξη m (δηλαδή τη μέγιστη δυνατή), τότε υπάρχουν μια ανοιχτή περιοχή $V\subset A$ του x_0, ένα ανοιχτό σύνολο $U\subset\mathbb{R}^n$ και μια C^r αμφιδιαφόριση $h: U\to V$ ώστε

$$f\circ h(x_1,\ldots,x_n) = (x_{n-m+1},\ldots,x_n) \text{ για κάθε } (x_1,\ldots,x_n)\in U.$$

Απόδειξη. Επειδή η $Df(x_0)$ έχει τάξη m, υπάρχει ένας $m\times m$ υποπίνακας $(\partial_i f_j(x_0))_{\substack{1\le j\le m\\ i=i_1,\dots,i_m}}$ του Ιακωβιανού πίνακα της f στο x_0 με μη-μηδενική ορίζουσα. Έστω $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ο γραμμικός ισομορφισμός $g(x_1,\dots,x_n)=(\dots,x_{i_1},\dots,x_{i_m})$. Η συνάρτηση $\tilde f=f\circ g: g^{-1}(A)\to\mathbb{R}^m$ είναι C^r και $\partial_{n-m+k}\tilde f_j(g^{-1}(x_0))=\partial_{i_k} f_j(x_0)$, $1\le k\le m$, $1\le j\le m$. Συνεπώς για την συνάρτηση $\tilde f: g^{-1}(A)\to\mathbb{R}^m$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.7, όπου $g^{-1}(A)\subset\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n-m}\times\mathbb{R}^m$. Θεωρούμε πάλι την $F: g^{-1}(A)\to\mathbb{R}^{n-m}\times\mathbb{R}^m$ με $F(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-m},\tilde f(x_1,\dots,x_n))$. Υπάρχουν μια ανοιχτή περιοχή $V_1\subset g^{-1}(A)$ του $g^{-1}(x_0)$ και μια ανοιχτή περιοχή U του $F(g^{-1}(x_0))$ στο $\mathbb{R}^n$ ώστε η $F:V_1\to U$ να είναι C^r αμφιδιαφόριση. Έστω $F^{-1}=G=(G_1,G_2)$. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.7 έχουμε:

$G_1(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{n-m})$ και $\tilde f(x_1,\dots,x_{n-m},G_2(x_1,\dots,x_n))=(x_{n-m+1},\dots,x_n)$ για κάθε $(x_1,\dots,x_n)\in U$. Η συνάρτηση $h=g\circ G: U\to g(V_1)=V$ είναι C^r αμφιδιαφόριση, το V ανοιχτή περιοχή του x_0 και

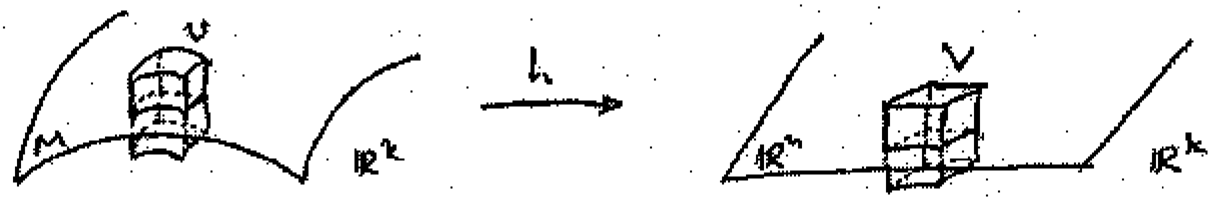
$f\circ h(x_1,\dots,x_n)=f\circ g\circ G(x_1,\dots,x_n)=\tilde f(G_1(x_1,\dots,x_n),G_2(x_1,\dots,x_n))=$
$\tilde f(x_1,\dots,x_{n-m},G_2(x_1,\dots,x_n))=(x_{n-m+1},\dots,x_n)$ για κάθε $(x_1,\dots,x_n)\in V$. οεδ.

6. Διαφορίσιμες πολλαπλότητες

Μια n-πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση ο οποίος τοπικά .... είναι όπως ο $\mathbb{R}^n$. Παραδείγματος χάριν, ο κύκλος είναι 1-πολλαπλότητα, ενώ ένα ελλειψοειδές ή ένας κύλινδρος στο $\mathbb{R}^3$ είναι 2-πολλαπλότητες. Ένας κώνος δεν είναι πολλαπλότητα γιατί δεν είναι τοπικά ευκλείδειος χώρος κοντά στην κορυφή του. Η θεωρία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων μπορεί να θεμελιωθεί και αναπτυχθεί αφηρημένα. Η δική μας προσέγγιση της έννοιας της πολλαπλότητας θα είναι συγκεκριμένη. Για μας μια πολλαπλότητα θα είναι υποσύνολο κάποιου ευκλείδειου χώρου. Αποδεικνύεται ότι αυτό δεν αποτελεί περιορισμό της γενικότητας (Θεώρημα του H. Whitney).

6.1. Ορισμός. Ένα σύνολο $M\subset\mathbb{R}^k$ λέγεται διαφορίσιμη n-πολλαπλότητα ή απλώς πολλαπλότητα, $0 \le n \le k$, αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή U του x στο $\mathbb{R}^k$, ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^k$ και μία C^∞ αμφιδιαφόριση $h: U \longrightarrow V$ ώστε

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{(y_1, \dots, y_n, \dots, y_k) \in V : y_{n+1} = \dots = y_k = 0\}$$



Οι δύο ακραίες περιπτώσεις του ορισμού είναι ασφαλώς ένα σημείο του $\mathbb{R}^k$ που είναι 0-πολλαπλότητα και ένα ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}^k$ που είναι k-πολλαπλότητα. Η παρακάτω πρόταση δίνει πληθώρα παραδειγμάτων διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων.

<u>6.2. Πρόταση</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^k$ ένα ανοιχτό σύνολο, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ μία C^∞ συνάρτηση, όπου $0 \le n \le k$, και $M = f^{-1}(0)$. Αν η $Df(x)$ έχει την μέγιστη δυνατή τάξη (δηλαδή $k-n$) για κάθε $x \in M$, τότε το M είναι n-πολλαπλότητα.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x_0 \in M$. Επειδή $\operatorname{rank} Df(x_0) = k-n$, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.8, υπάρχουν μία ανοιχτή περιοχή $U \subset A$ του x_0, ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^k$ και μία C^∞ αμφιδιαφόριση $\varphi: V \longrightarrow U$ ώστε

$(f \circ \varphi)(y_1, \dots, y_k) = (y_{n+1}, \dots, y_k)$ για κάθε $(y_1, \dots, y_k) \in V$.

Τότε έχουμε $\varphi^{-1}(U \cap M) = \{(y_1, \dots, y_k) \in V : f(\varphi(y_1, \dots, y_k)) = 0 \in \mathbb{R}^{k-n}\} =$
$\{(y_1, \dots, y_k) \in V : y_{n+1} = \dots = y_k = 0\}$ ο.ε.δ.

<u>6.3. Παραδείγματα</u> (α) Η n-σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι n-πολλαπλότητα.

(β) Κάθε γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^k$ είναι πολλαπλότητα.

(γ) Το σύνολο όλων των μοναδιαίων διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^2$ με σημεία εφαρμογής όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ είναι 3-πολλαπλότητα (στο $\mathbb{R}^4$).

(δ) Το σύνολο $SL(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A = 1\}$ είναι (n^2-1)-πολλαπλότητα.

<u>6.4. Θεώρημα</u> Ένα σύνολο $M \subset \mathbb{R}^k$ είναι n-πολλαπλότητα, $0 \le n \le k$, τότε και

μόνον τότε αν για κάθε $x \in M$ ισχύει η συνθήκη

(C) Υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^k$ που περιέχει το x, ένα ανοικτό σύνολο $W \subset \mathbb{R}^n$ και μία 1-1, C^∞ απεικόνιση $\varphi: W \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ώστε:

(i) $\varphi(W) = U \cap M$

(ii) η $D\varphi(y)$ έχει τάξη n για κάθε $y \in W$ και

(iii) η $\varphi^{-1}: U \cap M \longrightarrow W$ είναι συνεχής.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι το M είναι n-πολλαπλότητα, $x \in M$ και U, V, h όπως στον ορισμό 6.1. Θέτουμε $W = \{y \in \mathbb{R}^n : (y,0) \in h(U \cap M)\}$. Το W είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την $\varphi: W \longrightarrow \mathbb{R}^k$ με τύπο $\varphi(y) = h^{-1}(y,0)$. Τότε προφανώς η φ είναι C^∞ και $\varphi(W) = h^{-1}(W) = U \cap M$. Έστω τώρα ότι $h = (h_1, \dots, h_k)$. Αν $H = (h_1, \dots, h_n): U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, τότε $H(\varphi(y)) = H(h^{-1}(y,0)) = y$. Συνεπώς, από τον κανόνα της αλυσίδας $DH(\varphi(y)) \cdot D\varphi(y) = I_n$. Άρα η $D\varphi(y)$ είναι "1-1" γραμμική απεικόνιση, δηλαδή έχει τάξη n.

Αντιστροφα: έστω ότι υπάρχει η $\varphi: W \longrightarrow \mathbb{R}^k$ που ικανοποιεί την (C). Έστω ότι $x = \varphi(y)$. Αφού $\operatorname{rank} D\varphi(y) = n$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\det(\partial_i \varphi_j(y))_{1 \le i,j \le n} \neq 0$, όπου $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g: W \times \mathbb{R}^{k-n} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ με τύπο $g(t,s) = \varphi(t) + (0,s)$. Τότε

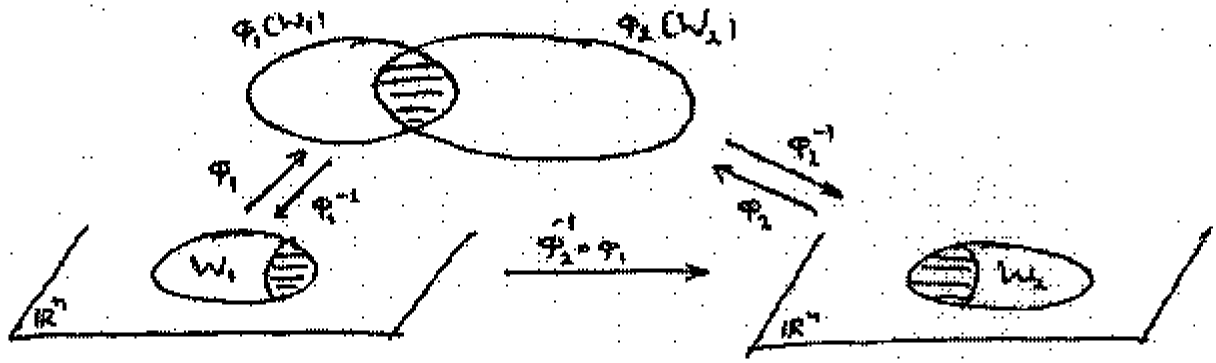
$$Dg(t,s) = \begin{pmatrix} D\varphi(t) & 0 \\ 0 & I_{k-n} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς $\det Dg(y,0) = \det(\partial_i \varphi_j(y))_{1 \le i,j \le n} \neq 0$. Από το Θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης υπάρχει μία ανοικτή περιοχή V_1' του $(y,0)$ και μία ανοικτή περιοχή V_2' του $g(y,0) = x$ ώστε η $g: V_1' \longrightarrow V_2'$ να είναι C^∞ αμφιδιαφόριση. Έστω $h = g^{-1}$. Επειδή η $\varphi^{-1}: \varphi(W) \longrightarrow W$ είναι συνεχής και το $\{t \in W : (t,0) \in V_1'\}$ ανοικτό υποσύνολο του W, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $\mathcal{U} \subset U$ ώστε $\{\varphi(t) : (t,0) \in V_1'\} = \mathcal{U} \cap \varphi(W) = \mathcal{U} \cap M$. Έστω $V_2 = V_2' \cap \mathcal{U}$ και $V_1 = g^{-1}(V_2) = h(V_2)$. Τότε
$V_2 \cap M = g(V_1') \cap \mathcal{U} \cap M = g(V_1') \cap \mathcal{U} \cap M = \{g(t,0) : (t,0) \in V_1\}$. Άρα
$h(V_2 \cap M) = g^{-1}(V_2 \cap M) = g^{-1}(\{g(t,0) : (t,0) \in V_1\}) = \{(t,0) : (t,0) \in V_1\} =$
$V_1 \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. ο.ε.δ.

Η συνάρτηση $\varphi: W \longrightarrow U \cap M$ λέγεται <u>σύστημα τοπικών συντεταγμένων</u> γύρω από το x. Αν $\varphi_i : W_i \longrightarrow V_i \cap M$, $i=1,2$, είναι δύο συστήματα τοπικών συντεταγμένων με $\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) = V_1 \cap V_2 \cap M \neq \emptyset$ τότε ο μετασχηματισμός συντεταγμένων

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_1(W_1) \cap \varphi_2(W_2)) \longrightarrow \varphi_2^{-1}(\varphi_1(W_1) \cap \varphi_2(W_2))$$

είναι C^∞ αμφιδιαφόριση όπως προκύπτει αμέσως από το εδώ της απόδειξης του Θεωρήματος 6.4.



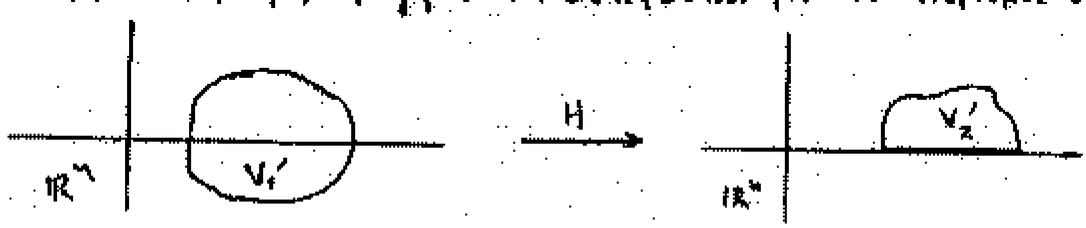
Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή, θα γενικεύσουμε την έννοια της διαφορίσιμης πολλαπλότητας. Έστω $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$

<u>6.5. Ορισμός</u> Ένα σύνολο $M \subset \mathbb{R}^k$ λέγεται n-πολλαπλότητα με σύνορο, ο.σ.κ., αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x στο $\mathbb{R}^k$, ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^k$ και μία C^∞ αμφιδιαφόριση $h: U \longrightarrow V$ ώστε

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \quad \text{ή}$$

$$h(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \text{ και } h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{H}^n \times \{0\}).$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο συνθήκες του ορισμού 6.5 δεν είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα. Έστω ότι οι $h_1 : U_1 \longrightarrow V_1$, $h_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ είναι τέτοιες ώστε $h_1(U_1 \cap M) = V_1 \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ και $h_2(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ με $h_2(U_2 \cap M) = V_2 \cap (\mathbb{H}^n \times \{0\})$. Έστω ακόμα $V_1' = V_1 \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ και $V_2' = V_2 \cap (\mathbb{H}^n \times \{0\})$. Το V_1' είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, ενώ το V_2' δεν είναι, αφού $h_2(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Η απεικόνιση όμως $H = h_2 \circ h_1^{-1} : V_1' \longrightarrow V_2'$ είναι C^∞ αμφιδιαφόριση, πράγμα που αντιφάσκει με το Πόρισμα 5.5.



Το σύνολο $\mathrm{Int}M$ των σημείων της M που ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη λέγεται <u>εσωτερικό</u> της M και το σύνολο ∂M των σημείων της M που ικανοποιούν την δεύτερη <u>σύνορο</u> της M (και δεν πρέπει να συγχέεται με το τοπολογικό σύνορο). Σύμφωνα με τα προηγούμενα $\mathrm{Int}M \cap \partial M = \emptyset$.

Αν M είναι μία n-πολλαπλότητα με σύνορο τότε σύμφωνα με τους ορισμούς το $\mathrm{Int}M$ είναι n-πολλαπλότητα (χωρίς σύνορο). Επίσης το ∂M είναι $(n-1)$-πολλαπλότητα (χωρίς σύνορο). Πράγματι· έστω $x \in \partial M$ και $h: U \to V$ με $h(x) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ και $h(U\cap M) = V \cap (\mathbb{H}^n \times \{0\})$. Τότε, προφανώς $V \cap (\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}) \subset h(U \cap \partial M)$. Αν τώρα $y \in U \cap \partial M$ και $h(y) \notin \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ τότε υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή $V' \subset V$ του $h(y)$ στο $\mathbb{R}^k$ ώστε η n-συντεταγμένη κάθε στοιχείου της V' να είναι θετική. Συνεπώς, $h(h^{-1}(V') \cap M) = V' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, που σημαίνει ότι $y \in \mathrm{Int}M$, αντίφαση. Άρα $h(U \cap \partial M) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$. Αυτό δείχνει ότι το ∂M είναι $(n-1)$-πολλαπλότητα.

Παραδείγματα πολλαπλοτήτων με σύνορο δίνει η παρακάτω γενίκευση της Πρότασης 6.2.

<u>6.6. Πρόταση.</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^k$ ένα ανοιχτό σύνολο $f=(f_1,\dots,f_{k-n}): A \to \mathbb{R}^{k-n}$, $0 \le n \le k$, μία C^∞ συνάρτηση και

$M = \{x \in A : f_1(x) = \dots = f_{k-n-1}(x) = 0$ και $f_{k-n}(x) \ge 0\}$, $M_0 = f^{-1}(0)$.

Αν η $Df(x)$ έχει μέγιστη τάξη για κάθε $x \in M_0$ και η $D(f_1,\dots,f_{k-n-1})(x)$ έχει μέγιστη τάξη για κάθε $x \in M$, τότε το M είναι $(n+1)$-πολλαπλότητα με σύνορο και $\partial M = M_0$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x_0 \in M - M_0$. Αφού η $D(f_1,\dots,f_{k-n-1})(x_0)$ έχει μέγιστη τάξη και $f_{k-n}(x_0) > 0$, από το θεώρημα 5.8 υπάρχουν μία ανοιχτή περιοχή U του x_0 ώστε $U \subset f_{k-n}^{-1}(0,+\infty)$, ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^k$ και μία C^∞ αμφιδιαφόριση $\varphi: V \to U$ ώστε

$$(f_1,\dots,f_{k-n-1})\circ\varphi(y_1,\dots,y_k) = (y_{n+2},\dots,y_k), \quad (y_1,\dots,y_k) \in V.$$

Τότε $\varphi^{-1}(U \cap M) = \{(y_1,\dots,y_k) \in V : y_{n+2} = \dots = y_k = 0\} = V \cap (\mathbb{R}^{n+1}\times\{0\})$.

Έστω τώρα ότι $x_0 \in M_0$. Επειδή η $Df(x_0)$ έχει μέγιστη τάξη, το ίδιο ισχύει και για την $D(f_{k-n},\dots,f_1)(x_0)$. Από την Πρόταση 5.8 πάλι, υπάρχουν μία ανοικτή περιοχή U του x_0 στο $\mathbb{R}^k$ και ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^k$ και μία C^∞ αμφιδιαφόριση $\psi : V \longrightarrow U$ ώστε

$$(f_{k-n}, \dots, f_1) \circ \psi (y_1, \dots, y_k) = (y_{n+1}, \dots, y_k), \quad (y_1, \dots, y_k) \in V.$$

Τότε $\psi^{-1}(U \cap M) = \{(y_1, \dots, y_k) \in V : y_k = \dots = y_{n+2} = 0 \text{ και } y_{n+1} \geq 0\} = V \cap (H^{n+1} \times \{0\})$, ενώ $\psi^{-1}(x_0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$. ο.ε.δ.

<u>6.7. Παραδείγματα</u> (α) Ο n-δίσκος $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ είναι n-πολλαπλότητα με σύνορο.

(β) Ο "δακτύλιος" $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$ είναι 2-πολλαπλότητα με σύνορο.

(γ) Το διάστημα $[0,1]$ είναι 1-πολλαπλότητα με σύνορο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \|x\|^4$

2. Έστω A ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας. Να υπολογιστούν οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \langle x, Ax \rangle$.

3. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.
(β) Ν' αποδειχθεί ότι οι $\partial_1 f(0,0)$, $\partial_2 f(0,0)$ υπάρχουν.

4. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x,y) = (xy)^{1/3}$.
(α) Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial_1 f(0,0)$, $\partial_2 f(0,0)$.
(β) Αν $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ είναι η συνάρτηση $g(x) = (x,x)$, ν' αποδειχθεί ότι η σύνθεση $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο 0.

5. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $x \in A$. Ν' αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει καμία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ώστε $f'(x;v) > 0$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

6. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(α) Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχει η $f'(x;v)$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$
(β) Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχουν $v, u \in \mathbb{R}^n$ ώστε $f'(x;v+u) \neq f'(x;v) + f'(x;u)$.

7. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \int_0^1 \left(e^{t^2} + t\sin(xy^2)\right) dt$$

8. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $x \in A$ και $v \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[x, x+v] = \{x+tv : 0 \leq t \leq 1\}$ να περιέχεται στο A. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση για την οποία υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x+tv; v)$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $0 < \theta < 1$ ώστε $f(x+v) - f(x) = f'(x+\theta v; v)$.

9. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση ώστε $f'(x;v)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $v\in\mathbb{R}^n$. Ν' αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

10. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $v\in\mathbb{R}^n$ ώστε $f'(x;v)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Τι συμπεραίνεται για την f;

11. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x,y)=(\sin x\cos y,\ \sin x\sin y,\ \cos x\cos y)$ σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

12. Είναι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

13. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x)|\le\|x\|^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Ν' αποδειχθεί ότι η f είναι διαφορίσιμη στο 0.

14. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση και $x\in A$, όπου το $A\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό. Δείξτε ότι $\mathbb{R}^n=\langle\nabla f(x)\rangle\oplus\ker Df(x)$.

15. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση διαφορίσιμη στο $x\in A$ ώστε $\nabla f(x)\neq 0$. Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα διάνυσμα $v\in\mathbb{R}^n$ ώστε

$$|f'(x;v)|=\|\nabla f(x)\|=\max\{|f'(x;u)| : u\in\mathbb{R}^n \text{ και } \|u\|=1\}.$$

16. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση διαφορίσιμη στο σημείο $x\in A$, όπου το $A\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό. Να δειχθεί ότι

$$f'(x;v+u)=f'(x;v)+f'(x;u)$$

για κάθε $v,u\in\mathbb{R}^n$.

17. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων.

(α) $f(x,y,z)=(x^y,z)$

(β) $f(x,y,z)=x^{y+z}$

(γ) $f(x,y)=(\sin(xy),\ \sin(x\sin y),\ x^y)$

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση και $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Αν $h=f\circ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, ν' αποδειχθεί ότι $\|\nabla h(x,y,z)\|^2=4g(x,y,z)\cdot(f'(g(x,y,z)))^2$ για κάθε $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

19. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία ομογενής συνάρτηση βαθμού p, δηλαδή $f(tx)=t^pf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $t\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x\in\mathbb{R}^n$, ν' αποδειχθεί ότι $\langle x,\nabla f(x)\rangle=pf(x)$. (Θεώρημα του Euler)

20. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $\alpha\in\mathbb{R}$, να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ όταν

(α) $f(x,y)=\int_\alpha^{x+y} g(t)\,dt$ (β) $f(x,y)=\int_\alpha^{xy} g(t)\,dt$

21. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή $f(x)=f(-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο 0, τότε $Df(0)=0$.

22. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f,g:A\to\mathbb{R}^m$ δύο συναρτήσεις. Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0\in A$ και $f(x_0)=0$, ενώ η g είναι συνεχής στο x_0. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x)=\langle f(x),g(x)\rangle$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και

$D\varphi(x_0)h=\langle g(x_0),Df(x_0)h\rangle$ για κάθε $h\in\mathbb{R}^n$.

23. Έστω $A,B\subset\mathbb{R}^n$ δύο ανοικτά σύνολα και $f:A\to B$ ένας ομοιομορφισμός. Έστω $x_0\in A$ ώστε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0. Να αποδειχθεί ότι η $f^{-1}:B\to A$ είναι διαφορίσιμη στο $f(x_0)$ τότε και μόνον τότε όταν η $Df(x_0)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

24. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(α) Να υπολογισθούν οι $\partial_1 f(x,y)$, $\partial_2 f(x,y)$, όταν $(x,y)\neq(0,0)$.

(β) Να δειχθεί ότι $\partial_1 f(0,0)=\partial_2 f(0,0)=0$

(γ) Να δειχθεί ότι $\partial^2_{1,2} f(0,0)=1$ και $\partial^2_{2,1} f(0,0)=-1$. Πως εξηγείται αυτό;

25. Έστω $f:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x)=-\dfrac{1}{\|x\|}$. Να δειχθεί ότι $\partial^2_{1,1}f+\partial^2_{2,2}f+\partial^2_{3,3}f=0$.

26. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο C^2 συναρτήσεις και $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $F(x,y)=f(x+g(y))$. Να δειχθεί ότι $\partial_1 F\cdot\partial^2_{1,2}F=\partial_2 F\cdot\partial^2_{1,1}F$.

27. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $x_0\in A$. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε $Df(x)(x-x_0)>0$ για κάθε $x\in A\setminus\{x_0\}$, ν' αποδειχθεί ότι η f έχει τοπικό γνήσιο ελάχιστο στο x_0.

24. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παντού διαφορίσιμη και $f'(0) = 1$

(β) Δείξτε ότι η f' είναι ασυνεχής στο 0, δηλαδή η f δεν είναι C^1.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η f δεν αντιστρέφεται διαφορίσιμα σε καμία περιοχή του 0. Συνεπώς το Θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης δεν ισχύει για διαφορίσιμες συναρτήσεις.

25. Δείξτε ότι δεν υπάρχει καμία 1-1 και C^1 συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

26. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή V της ταυτοτικής γραμμικής απεικόνισης $I_n \in GL(n,\mathbb{R})$ ώστε για κάθε $T \in V$ υπάρχει τετραγωνική ρίζα, δηλαδή υπάρχει $S \in GL(n,\mathbb{R})$ με $S^2 = T$.

27. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση για την οποία υπάρχει $0 < c < 1$ ώστε $|f'(t)| \leq c$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$F(t,s) = (t + f(s),\ s + f(t))$$

είναι C^1 αμφιδιαφόριση.

(Υπόδειξη: Για το "επί" της F θεωρείστε την συνάρτηση φ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης και αποδείξτε ότι παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο. Για το "1-1" θεωρείστε την συνάρτηση g όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης και επαναλάβετε την απόδειξη του Λήμματος 5.3 για την ειδική αυτή περίπτωση).

28. Έστω $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε ο $DF(x)$ είναι θετικά ορισμένος για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί ότι η F είναι "1-1". (Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \langle x - F(x_1), x_2 - x_1 \rangle$ για δεδομένα $x_1 \neq x_2$ ώστε και χρησιμοποιείστε την άσκηση 8.)

29. Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι το γράφημα $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = f(x)\}$ της f είναι n-πολλαπλότητα.

30. Να δειχθεί ότι το $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ είναι 1-πολλαπλότητα.

31. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ δεν είναι πολλαπλότητα

32. Να εξετασθεί για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ το σύνολο $M_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exp(xy) = c\}$

είναι 4-πολλαπλότητα.

33. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντιστρέψιμος, συμμετρικός πίνακας. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, Ax \rangle = 1\}$ είναι $(n-1)$-πολλαπλότητα.

34. Δείξτε ότι το σύνολο $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ είναι 2-πολλαπλότητα.

35. Έστω M μια κλειστή n-πολλαπλότητα με σύνορο στο $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το ∂M είναι ακριβώς το τοπολογικό σύνορο της M στο $\mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί επίσης ότι το συμπέρασμα αυτό δεν ισχύει όταν η M δεν είναι κλειστή.

III. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

1. Ολοκλήρωση σε παραλληλεπίπεδα

Ένα παραλληλεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο της μορφής

$$I=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$$

όπου $a_i<b_i$, $1\le i\le n$. Οι πλευρές του I είναι τα σύνολα $I\cap\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i=a_i\}$ και $I\cap\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i=b_i\}$, $1\le i\le n$. Ο αριθμός $\mu(I)=(b_n-a_n)\cdots(b_1-a_1)$ λέγεται όγκος ή μέτρο του I. Μια διαμέριση του I είναι το καρτεσιανό γινόμενο $P=P_1\times\cdots\times P_n$, όπου η $P_i=\{a_i=x_i^0<\cdots<x_i^{r_i}=b_i\}$ είναι διαμέριση του $[a_i,b_i]$, $1\le i\le n$. Δηλαδή η P είναι μια διαμέριση του I στα σύνολα (παραλληλεπίπεδα) $[x_1^{j_1-1},x_1^{j_1}]\times\cdots\times[x_n^{j_n-1},x_n^{j_n}]$, όπου $1\le j_1\le r_1,\dots,1\le j_n\le r_n$.

Η διαδικασία του ορισμού της ολοκληρωσιμότητας φραγμένων συναρτήσεων ορισμένων σε παραλληλεπίπεδα είναι ίδια όπως αυτή για συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστά διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $I\subset\mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f:I\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Για κάθε διαμέριση $P=P_1\times\cdots\times P_n$ του I σε παραλληλεπίπεδα $I_1,\dots,I_r$, όπου $r=r_1\cdots r_n$, ορίζουμε

$m_j=\inf\{f(x):x\in I_j\}$, $M_j=\sup\{f(x):x\in I_j\}$, $1\le j\le r$ και

$L(f,P)=\sum_{i=1}^{r} m_j\,\mu(I_j)$, $U(f,P)=\sum_{j=1}^{r} M_j\,\mu(I_j)$.

Ως συνήθως το $L(f,P)$ λέγεται κάτω άθροισμα και το $U(f,P)$ άνω άθροισμα. Προφανώς $L(f,P)\le U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P.

1.1. Λήμμα Έστω P' μια επέκταση της διαμέρισης P, δηλαδή $P\subset P'$. Τότε $L(f,P)\le L(f,P')$ και $U(f,P')\le U(f,P)$.

Απόδειξη Αφού $P\subset P'$, κάθε παραλληλεπίπεδο $I_j\in P$ υποδιαιρείται σε παραλληλεπίπεδα $S_{j_1},\dots,S_{jk_j}\in P'$ και $\mu(I_j)=\mu(S_{j_1})+\dots+\mu(S_{jk_j})$. Επίσης $m(I_j)\le m(S_{ji})$ και $M(I_j)\ge M(S_{ji})$, $1\le i\le k_j$. Άρα

$$m(I_j)\mu(I_j)=m(I_j)\mu(S_{j_1})+\dots+m(I_j)\mu(S_{jk_j})$$
$$\le m(S_{j_1})\mu(S_{j_1})+\dots+m(S_{jk_j})\mu(S_{jk_j})$$

που δείχνει ότι $L(f,P)\le L(f,P')$. Όμοια $U(f,P')\le U(f,P)$.

1.2. Λήμμα Αν P, P' είναι δυο διαμερίσεις του I, τότε $L(f,P') \leq U(f,P)$

Απόδειξη Υπάρχει μια διαμέριση $P'' = P \cup P'$ που είναι εκλέπτυνση της P και της P'. Τότε από το Λήμμα 1.1 έχουμε:

$$L(f,P') \leq L(f,P'') \leq U(f,P'') \leq U(f,P).$$

Θέτουμε τώρα

$$\underline{\int_I} f = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } I\} \quad \text{και}$$

$$\overline{\int_I} f = \inf\{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } I\}. \text{ Τότε } \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f.$$

1.3. Ορισμός Η φραγμένη συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>ολοκληρώσιμη</u> αν $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$. Το ολοκλήρωμα της f στο I είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\int_I f = \int_I f(x)\,dx = \int_I f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

1.4. Θεώρημα Η φραγμένη συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε και μόνον τότε αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

Απόδειξη Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P', P'' του I ώστε $U(f,P') - \int_I f < \varepsilon/2$ και $\int_I f - L(f,P'') < \varepsilon/2$.
Αν τώρα $P = P' \cup P''$, τότε έχουμε $U(f,P) - L(f,P) \leq U(f,P') - L(f,P'') < \varepsilon$.
Το αντίστροφο είναι προφανές αφού $\overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq U(f,P) - L(f,P)$.

Όπως ακριβώς και στην θεωρία ολοκλήρωσης συναρτήσεων μιας μεταβλητής αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

Αν οι $f, g : I \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τότε

(i) η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$

(ii) η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.

(iii) Αν $f \geq 0$, τότε $\int_I f \geq 0$. (iv) η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη

Αν $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι δυο παραλληλεπίπεδα με $I_1^\circ \cap I_2^\circ = \emptyset$ που έχουν κοινή μια πλευρά τότε το $I = I_1 \cup I_2$ είναι παραλληλεπίπεδο. Αν $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση ώστε οι $f|I_1$, $f|I_2$ να είναι ολοκληρώσιμες τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$.

1.5. Θεώρημα Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή το I είναι συμπαγές και η f συνεχής, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2\mu(I)$ όταν $x,y\in I$ και $\|x-y\|<\delta$.

Θεωρούμε μια διαμέριση $P=\{I_1,\dots,I_r\}$ του I ώστε

$\Delta(P)=\max\{d(I_j) : 1\le j\le r\}<\delta$,

όπου $d(I_j)$ είναι το μήκος της μεγάλης διαγωνίου του I_j. Τότε για κάθε $x,y\in I_j$ έχουμε $\|x-y\|<\delta$, οπότε $f(x)<f(y)+\varepsilon/2\mu(I)$.
Άρα $M_j \le m_j+(\varepsilon/2\mu(I))$ για κάθε $1\le j\le r$. Έτσι έχουμε:

$$U(f,P)-L(f,P) = \sum_{j=1}^{r}(M_j-m_j)\mu(I_j) \le \sum_{j=1}^{r}\frac{\varepsilon}{2\mu(I)}\mu(I_j)$$
$$= \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}\sum_{j=1}^{r}\mu(I_j) = \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}\mu(I) = \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon .$$ ο.ε.δ.

Το πρόβλημα του υπολογισμού ολοκληρωμάτων πάνω σε παραλληλεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$, $n>1$ λύνεται από το επόμενο θεώρημα που το ανάγει στον διαδοχικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων πάνω σε κλειστά διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

1.6. Θεώρημα (Fubini) Έστω $I\subset\mathbb{R}^n$, $J\subset\mathbb{R}^m$ δύο παραλληλεπίπεδα και $f: I\times J\longrightarrow\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις $\varphi,\psi: J\longrightarrow\mathbb{R}$ με τύπους

$$\varphi(y)=\underline{\int_I} f(x,y)\,dx \quad \text{και} \quad \psi(y)=\overline{\int_I} f(x,y)\,dx$$

είναι ολοκληρώσιμες στο J και

$$\int_J\left(\underline{\int_I} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{I\times J} f = \int_J\left(\overline{\int_I} f(x,y)\,dx\right)dy .$$

Απόδειξη Έστω P μια διαμέριση του $I\times J$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις P_I του I και P_J του J ώστε $P=P_I\times P_J$. Έστω ότι $P_I=\{I_1,\dots,I_r\}$ και $P_J=\{J_1,\dots,J_s\}$, οπότε $P=\{I_i\times J_j : 1\le i\le r,\ 1\le j\le s\}$. Θέτουμε

$M_{ij}=\sup\{f(x,y) : (x,y)\in I_i\times J_j\}$, $N_j=\sup\{\psi(y) : y\in J_j\}$

και για κάθε $y\in J$, $M_i(y)=\sup\{f(x,y) : x\in I_i\}$.

Αν $y\in J_j$, έχουμε: $\sum_{i=1}^{r} M_{ij}\mu(I_i) \ge \sum_{i=1}^{r} M_i(y)\mu(I_i) \ge \overline{\int_I} f(x,y)\,dx = \psi(y)$.

Συνεπώς $\sum_{i=1}^{r} M_{ij}\mu(I_i) \ge N_j$. Από την άλλη μεριά $\mu(I_i\times J_j)=\mu(I_i)\mu(J_j)$ και έχουμε: $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} M_{ij}\mu(I_i\times J_j) \ge \sum_{j=1}^{s} N_j\mu(J_j) \ge \overline{\int_J}\psi$. Δείξαμε λοιπόν ότι $U(f,P) \geq \overline{\int_J}\psi$ για κάθε διαμέριση P του $I\times J$. Προκύπτει έτσι ότι $\int_{I\times J} f \geq \overline{\int_J}\psi = \overline{\int_J}\left(\overline{\int_I} f(x,y)\,dx\right)dy$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και

$$\underline{\int_{I\times J}} f \leq \underline{\int_J}\varphi = \underline{\int_J}\left(\underline{\int_I} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Όμως $\varphi \leq \psi$ και κατά συνέπεια έχουμε

$$\underline{\int_J}\varphi \leq \underline{\int_J}\psi \leq \overline{\int_J}\psi$$ οπότε από τα προηγούμενα προκύπτει

$$\int_{I\times J} f \leq \underline{\int_J}\psi \leq \overline{\int_J}\psi \leq \int_{I\times J} f$$ που δείχνει ότι η ψ είναι ολοκληρώσιμη

και $\int_J \psi = \int_{I\times J} f$. Όμοια αποδεικνύεται ότι η φ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_J \varphi = \int_{I\times J} f$.

<u>1.7. Πόρισμα</u> Έστω $I\subset\mathbb{R}^n$, $J\subset\mathbb{R}^m$ δύο παραλληλεπίπεδα και $f: I\times J\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν τα ολοκληρώματα $\int_I f(x,y_0)\,dx$ και $\int_J f(x_0,y)\,dy$ υπάρχουν για κάθε $x_0\in I$ και $y_0\in J$, τότε υπάρχουν και τα $\int_J\left(\int_I f(x,y)\,dx\right)dy$, $\int_I\left(\int_J f(x,y)\,dy\right)dx$ και είναι ίσα με $\int_{I\times J} f$.

Οι υποθέσεις του πορίσματος 1.7 ισχύουν πάντα όταν η f είναι συνεχής, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 1.5.

<u>1.8. Πόρισμα</u> Έστω $I=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ και $f: I\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\int_I f = \int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\right)\cdots\right)dx_n$$

Επιπλέον το δεξιό μέλος της ισότητας μπορεί να αντικατασταθεί από το

$$\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}}\left(\int_{a_{i_{n-1}}}^{b_{i_{n-1}}}\cdots\left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{i_1}\right)\cdots\right)dx_{i_n}$$

όπου $(i_1,\dots,i_n)$ είναι οποιαδήποτε μετάθεση του $(1,2,\dots,n)$.

<u>2. Μέτρο μηδέν και περιεχόμενο μηδέν</u>

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε και αποδείξουμε το βασικό κριτήριο ολοκληρωσιμότητας συναρτήσεων σε παραλληλεπίπεδα. Η βασική έννοια γι' αυτό είναι η ακόλουθη

<u>2.1. Ορισμός</u> Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$ έχει (n-διάστατο) <u>μέτρο 0</u> αν για κάθε $\varepsilon>0$

υπάρχει ένα αριθμήσιμο κάλυμμα $\{I_j : j\in\mathbb{N}\}$ του A από παραλληλεπίπεδα ώστε $\sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_j) < \varepsilon$.

Στον ορισμό αυτό μπορούμε ισοδύναμα να θεωρούμε ότι το $\{I_j^o : j\in\mathbb{N}\}$ είναι κάλυμμα του A. Πραγματικά· έστω ότι I_j, $j\in\mathbb{N}$ καλύπτουν το A ώστε $\sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_j) < \varepsilon/2$. Κάθε I_j περιέχεται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου παραλληλεπιπέδου J_j ώστε $\mu(J_j) \leq \mu(I_j) + \varepsilon/2^{j+1}$. Τότε τα J_j^o, $j\in\mathbb{N}$ καλύπτουν το A και $\sum_{j=1}^{\infty}\mu(J_j) < \varepsilon$.

<u>2.2 Παραδείγματα</u> (α) Κάθε αριθμήσιμο σύνολο στο $\mathbb{R}^n$ έχει μέτρο 0.

(β) Αν το A έχει μέτρο 0 και $B\subset A$, τότε το B έχει μέτρο 0.

(γ) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα στο $\mathbb{R}^n$, $n>1$, έχει μέτρο 0.

(δ) Αν το I είναι ένα παραλληλεπίπεδο στο $\mathbb{R}^n$, τότε το ∂I έχει μέτρο 0.
Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το $S=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\times\{0\}$ έχει μέτρο 0 στο $\mathbb{R}^n$. Έστω P μια διαμέριση του $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]$. Τότε τα παραλληλεπίπεδα $J\times[-\frac{\varepsilon}{4\mu(Q)},\frac{\varepsilon}{4\mu(Q)}]$, $J\in P$, καλύπτουν το S για κάθε $\varepsilon>0$ και $\sum_{J\in P}\mu\left(J\times[-\frac{\varepsilon}{4\mu(Q)},\frac{\varepsilon}{4\mu(Q)}]\right)=\sum_{J\in P}\mu(J)\cdot\frac{\varepsilon}{2\mu(Q)}=\mu(Q)\cdot\frac{\varepsilon}{2\mu(Q)}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

<u>2.3 Θεώρημα</u> Έστω $\{A_i : i\in\mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συνόλων με μέτρο 0 στο $\mathbb{R}^n$. Τότε το $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ έχει μέτρο 0.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\varepsilon>0$. Για κάθε $i\in\mathbb{N}$ υπάρχει ένα αριθμήσιμο κάλυμμα $\{I_{ij} : j\in\mathbb{N}\}$ από παραλληλεπίπεδα του A_i ώστε $\sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_{ij}) < \varepsilon/2^i$. Τότε τα αριθμήσιμα το πλήθος παραλληλεπίπεδα I_{ij}, $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ καλύπτουν το A και $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_{ij}) < \varepsilon$.

<u>2.4. Ορισμός</u> Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}$ έχει (n-διάστατο) <u>περιεχόμενο 0</u> αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο κάλυμμα $\{I_1,\dots,I_k\}$ του A από παραλληλεπίπεδα ώστε $\sum_{j=1}^{k}\mu(I_j)<\varepsilon$.

Όπως και προηγουμένως μπορούμε να θεωρούμε ισοδύναμα ότι τα $I_1^o,\dots,I_k^o$ καλύπτουν το A. Είναι προφανές ότι κάθε σύνολο με περιεχόμενο 0 έχει μέτρο 0. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Παραδείγματος χάριν το $\mathbb{N}$ έχει μέτρο 0 στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν έχει περιεχόμενο 0.

<u>2.5. Θεώρημα</u> Ένα παραλληλεπίπεδο $I\subset\mathbb{R}^n$ δεν έχει περιεχόμενο 0.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω ότι τα παραλληλεπίπεδα $I_1,\dots,I_k$ καλύπτουν το I. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_i \subset I$, $1\le i\le k$. Υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε για κάθε $J\in P$ υπάρχει κάποιο $1\le i\le k$ με $J\subset I_i$ και κάθε I_i διαμερίζεται από κάποια $J\in P$. Συνεπώς $\sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) \geq \sum_{J\in P}\mu(J) = \mu(I)$. Αυτό δείχνει ότι το I δεν μπορεί να έχει μέτρο 0.

<u>2.6. Πρόταση</u> Ένα συμπαγές σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$ έχει μέτρο 0 τότε και μόνον τότε όταν έχει περιεχόμενο 0.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι το A έχει μέτρο 0 και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχουν παραλληλεπίπεδα I_j, $j\in\mathbb{N}$ ώστε $A\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j^\circ$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j)<\varepsilon$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχουν $j_1,\dots,j_k\in\mathbb{N}$ ώστε $A\subset I_{j_1}^\circ\cup\dots\cup I_{j_k}^\circ$. Αφού $\sum_{\lambda=1}^{k} \mu(I_{j_\lambda})\le\sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_j)<\varepsilon$, το A έχει περιεχόμενο 0.

Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ και $f:A\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Για κάθε $x\in A$ και $\delta>0$ θέτουμε:

$M(x,f,\delta)=\sup\{f(y) : y\in A \text{ και } \|x-y\|<\delta\}$

$m(x,f,\delta)=\inf\{f(y) : y\in A \text{ και } \|x-y\|<\delta\}$.

Ο μη-αρνητικός αριθμός $O(f,x)=\lim_{\delta\to 0}(M(x,f,\delta)-m(x,f,\delta))$ λέγεται <u>ταλάντωση</u> της f στο σημείο x. Το όριο υπάρχει πάντα αφού φθίνοντος του δ, η διαφορά $M(x,f,\delta)-m(x,f,\delta)$ φθίνει. Είναι προφανές ότι η f είναι συνεχής στο x, τότε και μόνον τότε όταν $O(f,x)=0$. Η ταλάντωση της f στο x αποτελεί "μέτρο" της ασυνέχειας της f στο x.

<u>2.7. Πρόταση</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ και $f:A\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν το A είναι κλειστό σύνολο, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ το $D_\varepsilon=\{x\in A : O(f,x)\ge\varepsilon\}$ είναι επίσης κλειστό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x\in\mathbb{R}^n\setminus D_\varepsilon$. Τότε είτε $x\in\mathbb{R}^n\setminus A$ είτε $x\in A$ και $O(f,x)<\varepsilon$. Στην πρώτη περίπτωση το x ανήκει στο εσωτερικό του $\mathbb{R}^n\setminus D_\varepsilon$, αφού το A είναι κλειστό. Στην δεύτερη περίπτωση, υπάρχει $\delta>0$ ώστε $M(x,f,\delta)-m(x,f,\delta)<\varepsilon$. Αν τώρα $y\in S(x,\delta)$, τότε υπάρχει $\delta'>0$ ώστε $S(y,\delta')\subset S(x,\delta)$. Συνεπώς $M(y,f,\delta')-m(y,f,\delta')\le M(x,f,\delta)-m(x,f,\delta)<\varepsilon$. Άρα $O(f,y)<\varepsilon$ για κάθε $y\in S(x,\delta)$ ο.ε.δ.

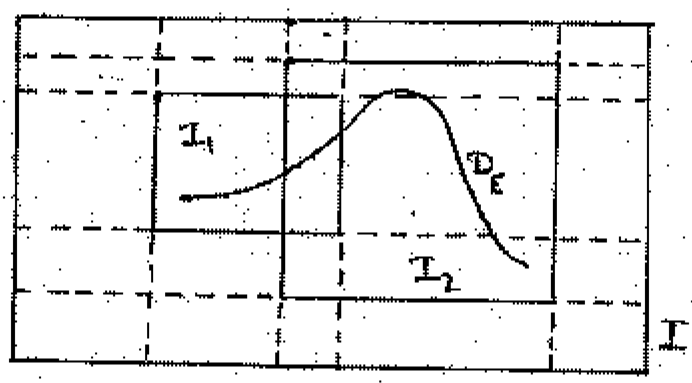
<u>2.8. Λήμμα</u> Έστω $I\subset\mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο, $\varepsilon>0$ και $f:I\to\mathbb{R}$ μια

φραγμένη συνάρτηση ώστε $O(f,x) < \varepsilon$ για κάθε $x \in I$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\,\mu(I)$.

<u>Απόδειξη</u> Από την υπόθεση προκύπτει ότι κάθε $x \in I$ περιέχεται στο εσωτερικό ενός παραλληλεπιπέδου I_x ώστε $M_{I_x} - m_{I_x} < \varepsilon$. Επειδή το I είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένα τέτοια παραλληλεπίπεδα $I_{x_1}, \dots, I_{x_k}$ που καλύπτουν το I. Υπάρχει μια διαμέριση P του I κάθε παραλληλεπίπεδο της οποίας περιέχεται σε κάποιο I_{x_i}. Συνεπώς έχουμε $M_J - m_J < \varepsilon$ για κάθε $J \in P$. Άρα $U(f,P) - L(f,P) = \sum_{J \in P} (M_J - m_J)\mu(J) < \varepsilon \sum_{J \in P} \mu(J) = \varepsilon\,\mu(I)$.

<u>2.9. Θεώρημα</u> Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο, $f : I \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και $D = \{x \in I : \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη τότε και μόνον τότε όταν το D έχει μέτρο 0.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι το D έχει μέτρο 0. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $D_\varepsilon = \{x \in I : O(f,x) \geq \varepsilon\}$. Τότε $D_\varepsilon \subset D$ και συνεπώς το D_ε έχει μέτρο 0. Από την Πρόταση 2.7 προκύπτει ότι το D_ε είναι συμπαγές και συνεπώς έχει περιεχόμενο 0, από την Πρόταση 2.6. Δηλαδή, υπάρχουν παραλληλεπίπεδα $I_1, \dots, I_k$ ώστε $D_\varepsilon \subset I_1^\circ \cup \dots \cup I_k^\circ$ και $\sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) < \varepsilon$.
Έστω P μια διαμέριση του I ώστε κάθε παραλληλεπίπεδο $J \in P$ να ανήκει σε μια από τις ακόλουθες δυο κλάσεις.
(α) $J \in P_1$ αν υπάρχει $1 \leq i \leq k$ ώστε $J \subset I_i$
(β) $J \in P_2$ αν $J \cap D_\varepsilon = \emptyset$.
Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε $x \in I$, οπότε $M_J - m_J < 2M$ για κάθε $J \in P$. Συνεπώς έχουμε:
$\sum_{J \in P_1} (M_J - m_J)\mu(J) < 2M \sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) < 2M\varepsilon$.



Αν τώρα $J \in P_2$, τότε $O(f;x) < c$ για κάθε $x \in J$. Από το Λήμμα 2.8 προκύπτει ότι υπάρχει μια εκλέπτυνση P' της P ώστε

$$\sum_{J' \subset J} (M_{J'} - m_{J'})\, \mu(J') < \varepsilon\, \mu(J) \quad \text{για κάθε } J \in P_2 .$$

Τότε έχουμε:

$$U(f,P') - L(f,P') \leq \sum_{J' \subset J \in P_1} (M_{J'} - m_{J'})\, \mu(J') + \sum_{J' \subset J \in P_2} (M_{J'} - m_{J'})\, \mu(J')$$

$$< 2M\varepsilon + \sum_{J \in P_2} \varepsilon\, \mu(J) \leq (2M + \mu(I))\varepsilon$$

Αφού τα M, $\mu(I)$ είναι σταθερά, αυτό δείχνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.
Αντίστροφα· έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Επειδή $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{1/k}$, αρκεί να δείξουμε ότι το $D_{1/k}$ έχει μέτρο 0 για κάθε $k \in \mathbb{N}$, λόγω του θεωρήματος 2.3. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει μια διαμέριση P του I με $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon/2k$.
Επίσης $D_{1/k} = B_1 \cup B_2$, όπου $B_1 = \{x \in D_{1/k} : x \in J^\circ$ για κάποιο $J \in P\}$ και $B_2 = D_{1/k} \setminus B_1$. Αφού $B_2 \subset \bigcup_{J \in P} \partial J$, το B_2 έχει μέτρο 0. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το B_1 έχει μέτρο 0. Θέτουμε $\mathcal{B} = \{J \in P : J^\circ \cap D_{1/k} \neq \emptyset\}$.
Τότε προφανώς $B_1 \subset \bigcup_{J \in \mathcal{B}} J^\circ$. Επίσης από τους ορισμούς έχουμε
$M_J - m_J \geq 1/2k$ για κάθε $J \in \mathcal{B}$. Άρα

$$\frac{1}{2k} \sum_{J \in \mathcal{B}} \mu(J) \leq \sum_{J \in \mathcal{B}} (M_J - m_J)\, \mu(J) \leq \sum_{J \in P} (M_J - m_J)\, \mu(J) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Αυτό δείχνει ότι το B_1 έχει μέτρο 0. ο.ε.δ.

3. Ολοκλήρωση σε φραγμένα σύνολα

Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο σύνολο και $f : B \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Επειδή το B είναι φραγμένο υπάρχει ένα παραλληλεπίπεδο $I \subset \mathbb{R}^n$ με $B \subset I$.

3.1. Ορισμός. Η f λέγεται ολοκληρώσιμη στο B αν η $f \cdot \chi_B$ είναι ολοκληρώσιμη στο I, όπου $\chi_B : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του B. Σ' αυτή την περίπτωση ορίζουμε

$$\int_B f = \int_I f \cdot \chi_B$$

Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του παραλληλεπιπέδου I.
Αν I' είναι άλλο ένα παραλληλεπίπεδο που περιέχει το B, τότε το $I \cap I'$

είναι παραλληλεπίπεδο και τα $I\setminus(I\cap I')$, $I'\setminus(I\cap I')$ αποτελούνται από παραλληλεπίπεδα με τουλάχιστον μια καινή πλευρά. Επειδή $f\chi_B|I\setminus(I\cap I')=0$ και $f\chi_B|I'\setminus(I\cap I')=0$, έχουμε $\int_I f\chi_B=\int_{I\cap I'} f\chi_B=\int_{I'} f\chi_B$.

<u>3.2. Θεώρημα</u> Ένα φραγμένο σύνολο B έχει περιεχόμενο 0 τότε και μόνον τότε όταν $\int_B 1=0$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω I ένα παραλληλεπίπεδο που περιέχει το B ώστε $\int_I \chi_B=0$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε $U(\chi_B,P)<\varepsilon$. Έστω $Q=\{J\in P: J\cap B\neq\emptyset\}$. Το Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο παραλληλεπιπέδων που καλύπτουν το B και
$$\sum_{J\in Q}\mu(J)=\sum_{J\in Q}M_J\,\mu(J)\le U(\chi_B,P)<\varepsilon$$

Αντίστροφα: Έστω ότι το B έχει περιεχόμενο 0 και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχουν παραλληλεπίπεδα $I_1,\dots,I_k$ με $B\subset I_1\cup\dots\cup I_k$ και $\sum_{i=1}^{k}\mu(I_i)<\varepsilon$. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_i\subset I$, $1\le i\le k$. Υπάρχει μια διαμέριση P του I που διαμερίζει καθένα I_i, $1\le i\le k$. Αν κάποιο $J\in P$ είναι τέτοιο ώστε $J\not\subset I_i$, $1\le i\le k$, τότε $\chi_B|J=0$. Συνεπώς, $0\le L(\chi_B,P)\le U(\chi_B,P)\le\sum_{i=1}^{k}\mu(I_i)<\varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $\int_B 1=0$.

<u>3.3. Θεώρημα.</u> Έστω $B\subset\mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο σύνολο. Το ολοκλήρωμα $\int_B 1$ υπάρχει τότε και μόνον τότε όταν το ∂B έχει μέτρο 0.

<u>Απόδειξη</u> Έστω I ένα παραλληλεπίπεδο με $B\subset I^\circ$. Η $\chi_B: I\to\mathbb{R}$ είναι ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του ∂B. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι άμεσο από το Θεώρημα 2.9.

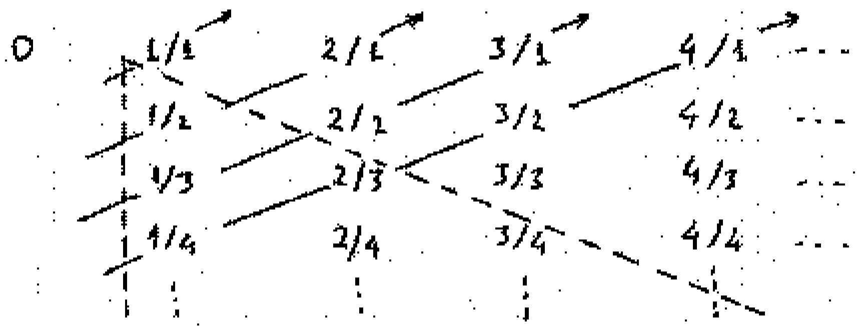
<u>3.4. Ορισμός</u> Ένα φραγμένο σύνολο $B\subset\mathbb{R}^n$ λέγεται μετρήσιμο κατά Jordan αν το ∂B έχει μέτρο 0. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα $\mu(B)=\int_B 1$ λέγεται (n-διάστατο) περιεχόμενο ή όγκος του B.

<u>3.5. Πόρισμα</u> Έστω $B\subset\mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο και $f:B\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν το σύνολο $D=\{x\in B:\ \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$ έχει μέτρο 0, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B.

<u>Απόδειξη</u> Έστω I ένα παραλληλεπίπεδο με $B\subset I^\circ$. Τότε η συνάρτηση $f\chi_B: I\to\mathbb{R}$ είναι ασυνεχής το πολύ στα σημεία του συνόλου $D\cup\partial B$, που έχει μέτρο 0. Από το Θεώρημα 2.9, είναι λοιπόν ολοκληρώσιμη στο I ο.ε.δ.

Είναι ενδεχόμενο ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο A να μην είναι Jordan μετρήσιμο, οπότε το $\int_A f$ μπορεί να μην ορίζεται ακόμα και όταν η f είναι συνεχής.

<u>3.6. Παράδειγμα</u> Έστω $\mathbb{Q}\cap(0,1)=\{q_1,q_2,\dots,q_n,\dots\}$ όπου η αρίθμηση γίνεται όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Έστω $I_n=\left(q_n-\frac{1}{2^{n+2}},\, q_n+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$, $n\in\mathbb{N}$ και $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $(0,1)$ και $\partial A=[0,1]\setminus A$, αφού οι ρητοί είναι παντού πυκνοί στο $[0,1]$. Θα δείξουμε ότι το ∂A δεν έχει μέτρο 0, δηλαδή το A δεν είναι Jordan μετρήσιμο, με απαγωγή σε άτοπο. Επειδή το ∂A είναι συμπαγές αρκεί να δείξουμε ότι δεν έχει περιεχόμενο 0. Αν το ∂A είχε περιεχόμενο 0, θα μπορούσε να καλυφθεί από πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_1,\dots,J_k$ με $\sum_{i=1}^{k}\mu(J_i)<1/4$. Επειδή $A\cup\partial A=[0,1]$ και

$$[0,1]=\left(\bigcup_{i=1}^{k} J_i\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$$

υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $[0,1]\subset J_1\cup\dots\cup J_k\cup I_1\cup\dots\cup I_{n_0}$, αφού το $[0,1]$ είναι συμπαγές. Τότε όμως έχουμε:

$$1=\mu([0,1])\le\sum_{i=1}^{k}\mu(J_i)+\sum_{n=1}^{n_0}\mu(I_n)\le\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4},$$

άτοπο!

Έτσι αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε η $f\chi_A$ είναι ενδεχόμενο να είναι ασυνεχής ακριβώς στο ∂A, που δεν έχει μέτρο 0. Συνεπώς η f δεν θα είναι ολοκληρώσιμη στο A, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε. Το δυσάρεστο αυτό γεγονός υπερπηδιέται με τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος για συναρτήσεις που ορίζονται σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, που δεν είναι κατ' ανάγκη φραγμένα ή Jordan μετρήσιμα. Απαραίτητο εργαλείο γι αυτό είναι η ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας για ανοικτά καλύμματα.

4. Διαμερίσεις της μονάδας

Στην παράγραφο αυτή θα κατασκευάσουμε C^∞ διαμερίσεις της μονάδας για υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Οι διαμερίσεις της μονάδας αποτελούν μεγάλης σημασίας εργαλείο στην Διαφορική Τοπολογία και ιδιαίτερα στην Θεωρία Ολοκλήρωσης. Κυρίως χρησιμοποιούνται για την σύνθεση ολικών αντικειμένων (π.χ. συναρτήσεων) που κατ' αρχήν ορίζονται μόνον τοπικά. Επίσης πολλές φορές χρησιμοποιούνται για την αναγωγή ολικών προβλημάτων σε τοπικά.

<u>4.1. Λήμμα</u> Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ώστε

$$\varphi_\varepsilon(x)=1 \quad , \text{ για κάθε } \|x\| \leq \varepsilon \quad , \text{ και}$$
$$\varphi_\varepsilon(x)=0 \quad , \text{ για κάθε } \|x\| \geq 2\varepsilon$$

<u>Απόδειξη</u> Όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\chi(t)=\begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & , t>0 \end{cases}$$

είναι C^∞. Συνεπώς και η συνάρτηση $\tilde{\chi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\tilde{\chi}(t)=\frac{\chi(4-t)}{\chi(4-t)+\chi(t-1)}$$

είναι C^∞. Επιπλέον $\tilde{\chi}(t)=1$, όταν $t \leq 1$ και $\tilde{\chi}(t)=0$, όταν $t \geq 4$. Ορίζουμε τώρα την $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με τύπο $\varphi_\varepsilon(x)=\tilde{\chi}(\|x\|^2/\varepsilon^2)$. Η φ_ε είναι C^∞ και από τις ιδιότητες της $\tilde{\chi}$ προκύπτει ότι $\varphi_\varepsilon(x)=1$, όταν $\|x\| \leq \varepsilon$ και $\varphi_\varepsilon(x)=0$, όταν $\|x\| \geq 2\varepsilon$.

<u>4.2. Πρόταση</u> Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο και $\mathcal{U}$ ένα κάλυμμα του X από ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν $V_1,\dots,V_k \in \mathcal{U}$ που καλύπτουν το X και C^∞ συναρτήσεις $\psi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $1 \leq i \leq k$ ώστε:

(i) $\operatorname{supp}\psi_i = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \psi_i(x) \neq 0\}} \subset V_i$, $1 \leq i \leq k$ και

(ii) Υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^n$ με $X \subset V$ ώστε

$$\psi_1(x)+\dots+\psi_k(x)=1 \quad \text{για κάθε } x \in V.$$

<u>Απόδειξη</u> Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα $V_x \in \mathcal{U}$ και $\varepsilon_x>0$ ώστε $\overline{S(x,2\varepsilon_x)} \subset V_x$. Επειδή το X είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1,\dots,x_k \in X$ ώστε $X \subset S(x_1,\varepsilon_{x_1}) \cup \dots \cup S(x_k,\varepsilon_{x_k})$. Το σύνολο $V=S(x_1,\varepsilon_{x_1}) \cup \dots \cup S(x_k,\varepsilon_{x_k})$ είναι ανοικτή περιοχή του X. Για κάθε $1 \leq i \leq k$ ορίζεται η C^∞ συνάρτηση $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με τύπο $\varphi_i(x)=\varphi_{\varepsilon_{x_i}}(x-x_i)$,

όπου $\varphi_{\varepsilon_{x_i}}: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ είναι η C^∞ συνάρτηση που κατασκευάστηκε στο Λήμμα 4.1 και αντιστοιχεί στο $\varepsilon_{x_i}>0$. Τότε $\varphi_i(x)=1$, όταν $x\in S(x_i,\varepsilon_{x_i})$, ενώ $\varphi_i(x)=0$, όταν $\|x-x_i\|\geq 2\varepsilon_{x_i}$. Η συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ με τύπο

$$\varphi(x) = (1-\varphi_1(x))\cdots(1-\varphi_k(x))$$

είναι C^∞ και $\varphi(x)=0$ για κάθε $x\in U$. Αν τώρα $V_i=V_{x_i}$, $1\le i\le k$, τότε $X\subset U\subset V_1\cup\dots\cup V_k$. Θεωρούμε τις C^∞ συναρτήσεις $\psi_i:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ με τύπους

$$\psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi+\varphi_1+\dots+\varphi_k}, \quad 1\le i\le k$$

Αν $x\in\mathbb{R}^n\setminus S(x_i,2\varepsilon_{x_i})\supset \mathbb{R}^n\setminus V_i$, τότε $\psi_i(x)=0$, αφού $\varphi_i(x)=0$. Άρα $\operatorname{supp}\psi_i\subset V_i$. Απ' την άλλη μεριά, αν $x\in U$, τότε $\varphi(x)=0$, οπότε

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)+\dots+\varphi_k(x)}, \quad 1\le i\le k$$

και κατά συνέπεια $\psi_1(x)+\dots+\psi_k(x)=1$.

<u>4.3. Θεώρημα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\mathcal{U}$ ένα κάλυμμα του A από ανοιχτά υποσύνολά του. Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια C^∞ συναρτήσεων $\Phi=\{\varphi:A\to[0,1]\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) κάθε $x\in A$ έχει μια ανοιχτή περιοχή V_x ώστε $\varphi|V_x=0$ για όλα τα $\varphi\in\Phi$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος.

(ii) $\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(x)=1$ για κάθε $x\in A$ (το άθροισμα είναι πεπερασμένο λόγω του (i)).

(iii) Για κάθε $\varphi\in\Phi$ υπάρχει κάποιο $V\in\mathcal{U}$ ώστε $\operatorname{supp}\varphi\subset V$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $A_i=\{x\in A : \|x\|\le i \text{ και } d(x,\partial A)\ge 1/i\}$, $i\in\mathbb{N}$, όπου $d(x,\partial A)=\inf\{\|x-y\| : y\in\partial A\}$. Τότε $A=\bigcup_{i=1}^\infty A_i$, κάθε A_i είναι συμπαγές και $A_i\subset \mathring{A}_{i+1}$ για κάθε $i\in\mathbb{N}$. Για κάθε $i\ge3$ το $\mathcal{U}_i=\{V\cap(\mathring{A}_{i+1}\setminus A_{i-2}) : V\in\mathcal{U}\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου $X_i=A_i\setminus\mathring{A}_{i-1}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο C^∞ συναρτήσεων $\Phi_i=\{\psi:\mathbb{R}^n\to[0,1]\}$ με

(α) για κάθε $\psi\in\Phi_i$ υπάρχει $W\in\mathcal{U}_i$ με $\operatorname{supp}\psi\subset W$ και

(β) υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή U_i του X_i ώστε $\sum_{\psi\in\Phi_i}\psi(x)=1$ για κάθε $x\in U_i$.

Για κάθε $x\in A$ θέτουμε

$$\sigma(x)=\sum_{\substack{\psi\in\Phi_i\\ i\ge3}}\psi(x)$$

Το άθροισμα είναι πεπερασμένο σε μια περιοχή του x, γιατί αν $x \in A_i$, τότε λόγω του (α) έχουμε $\psi(x) = 0$ για κάθε $\psi \in \Phi_j$ και $j \geq i+2$. Για κάθε $i \geq 1$ και $\psi \in \Phi_i$ ορίζουμε την συνάρτηση $\varphi : A \to [0,1]$ με τύπο

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\sigma(x)}$$

Η φ είναι C^∞ και η οικογένεια Φ όλων των φ στις ορίστηκαν είναι αριθμήσιμη, αφού κάθε Φ_i είναι πεπερασμένη. Είναι προφανές ότι $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ για κάθε $x \in A$, ενώ τα (ii) και (iii) προκύπτουν άμεσα από τις ιδιότητες των ψ.

__4.4 Θεώρημα__ Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{U}$ ένα κάλυμμα του A από ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια C^∞ συναρτήσεων $\Phi = \{\varphi : \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V \to [0,1]\}$ που ικανοποιεί τα (i), (ii) και (iii) του Θεωρήματος 4.3.

__Απόδειξη__ Το σύνολο $\bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ είναι ανοιχτή περιοχή του A. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3 για το $\bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ και το κάλυμμα $\mathcal{U}$ παίρνουμε το συμπέρασμα.

Η οικογένεια Φ των προηγούμενων Θεωρημάτων λέγεται C^∞ __διαμέριση της μονάδας που υπόκειται στο κάλυμμα $\mathcal{U}$ του A__. Μία αξιοπρόσεκτη συνέπεια της ιδιότητας (i) του Θεωρήματος 4.3 είναι η ακόλουθη. Έστω $C \subset A$ ένα συμπαγές σύνολο. Κάθε $x \in C$ έχει σύμφωνα με το (i) μια ανοιχτή περιοχή V_x ώστε $\varphi | V_x = 0$, για όλα τα $\varphi \in \Phi$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος. Επειδή το C είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in C$ ώστε $C \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_k}$. Συνεπώς $\varphi | C = 0$ για όλα τα $\varphi \in \Phi$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος.

5. Γενικευμένα ολοκληρώματα

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τις διαμερίσεις της μονάδας για να ορίσουμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα μιας συνάρτησης πάνω σ' ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, που ενδεχομένως δεν είναι Jordan μετρήσιμο ή ακόμα και φραγμένο.

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}$ μια τοπικά φραγμένη συνάρτηση ώστε το σύνολο $D = \{x \in A : \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$ έχει μέτρο 0. Ο όρος τοπικά φραγμένη σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $S(x, \delta_x) \subset A$ και η $f | S(x, \delta_x)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του A από Jordan μετρήσιμα υποσύνολά του ώστε η $f|V$ είναι φραγμένη για κάθε $V\in\mathcal{U}$. Έστω Φ μια αριθμήσιμη διαμέριση της μονάδος υποκείμενη στο κάλυμμα $\mathcal{U}$. Τότε για κάθε $\varphi\in\Phi$ το ολοκλήρωμα

$$\int_A \varphi|f| = \int_V \varphi|f|$$

υπάρχει, σύμφωνα με το παράδειγμα 3.5, όπου $\operatorname{supp}\varphi\subset V$. Η f λέγεται <u>γενικευμένα ολοκληρώσιμη</u> στο A αν η σειρά $\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi|f|$ συγκλίνει. Τότε βέβαια η $\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi f$ συγκλίνει απολύτως και το όριό της λέγεται <u>γενικευμένο ολοκλήρωμα</u> της f στο A.

<u>5.1. Λήμμα</u> Ο προηγούμενος ορισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από το κάλυμμα $\mathcal{U}$ ούτε από την υποκείμενη διαμέριση της μονάδας Φ.

<u>Απόδειξη</u> Έστω Ψ μια διαμέριση της μονάδας υποκείμενη σε κάποιο άλλο ανοιχτό κάλυμμα του A από Jordan μετρήσιμα υποσύνολά του. Για κάθε $\varphi\in\Phi$ υπάρχει $V\in\mathcal{U}$ ώστε $\operatorname{supp}\varphi\subset V$. Επειδή το V είναι φραγμένο και το $\operatorname{supp}\varphi$ κλειστό, το $\operatorname{supp}\varphi$ είναι συμπαγές. Συνεπώς $\psi|\operatorname{supp}(\varphi f)\neq 0$ μόνο για πεπερασμένα το πλήθος $\psi\in\Psi$. Έτσι έχουμε

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi f=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\Big(\sum_{\psi\in\Psi}\psi\Big)\varphi f=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\sum_{\psi\in\Psi}\psi\varphi f=\sum_{\varphi\in\Phi}\sum_{\psi\in\Psi}\int_A\psi\varphi f$$

Το ίδιο ισχύει αν στην θέση της f θεωρήσουμε την $|f|$. Συνεπώς η σειρά

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\sum_{\psi\in\Psi}\int_A\psi\varphi f$$

συγκλίνει απολύτως. Για τον λόγο αυτό μπορούμε να αλλάζουμε την σειρά της άθροισης, οπότε έχουμε

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi f=\sum_{\psi\in\Psi}\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi\psi f=\sum_{\psi\in\Psi}\int_A\psi f$$

και το ίδιο ισχύει και για την $|f|$ στην θέση της f. Κατά συνέπεια η $\sum_{\psi\in\Psi}\int_A\psi|f|$ συγκλίνει και $\sum_{\psi\in\Psi}\int_A\psi f=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi f$.

<u>5.2 Πρόταση</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν το $D=\{x\in A: \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$ έχει μέτρο 0,

τότε υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $M>0$ ένα φράγμα της f, δηλαδή $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in A$. Επειδή το A είναι φραγμένο, περιέχεται στο εσωτερικό ενός παραλληλεπιπέδου I. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $F\subset\Phi$ έχουμε

$$\sum_{\varphi\in F}\int_A \varphi\cdot|f| = \sum_{\varphi\in F}\int_I \varphi\cdot|f|\cdot\chi_A \le \sum_{\varphi\in F} M\int_I \varphi\chi_A = M\int_I\Big(\sum_{\varphi\in F}\varphi\Big)\chi_A \le M\int_I 1 = M\mu(I)$$

Άρα η σειρά $\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi|f|$ συγκλίνει και η f είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας φραγμένης συνάρτησης f σε ένα Jordan μετρήσιμο ανοιχτό σύνολο A ταυτίζεται με το $\int_A f$ όπως ορίζεται στην παράγραφο 3. Γι' αυτό θα χρησιμοποιούμε το επόμενο

<u>5.3. Λήμμα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο ανοιχτό σύνολο. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα Jordan μετρήσιμο συμπαγές σύνολο $K\subset A$ ώστε $\mu(A\setminus K)=\int_{A\setminus K}1<\varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω I ένα παραλληλεπίπεδο που περιέχει το A στο εσωτερικό του. Αφού το A είναι Jordan μετρήσιμο, υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε $U(\chi_A,P)-L(\chi_A,P)<\varepsilon$. Έστω $S=\{J\in P: J\subset A\}$. Επειδή το A είναι ανοιχτό, εκλεπτύνοντας αν χρειαστεί την P, έχουμε $S\neq\emptyset$. Προφανώς $m_J=1$, όταν $J\in S$ και $m_J=0$, όταν $J\in P\setminus S$. Θέτουμε $K=\bigcup_{J\in S}J$. Το K είναι Jordan μετρήσιμο συμπαγές υποσύνολο του A. Επιπλέον

$$L(\chi_A,P)=\sum_{J\in P}m_J\,\mu(J)=\sum_{J\in S}m_J\,\mu(J)=\sum_{J\in S}\mu(J)=\mu(K)$$

Άρα $U(\chi_A,P)-\mu(K)<\varepsilon$. Επειδή τώρα $\partial(A\setminus K)\subset\partial A\cup\partial K$ και $\mu(\partial A)=\mu(\partial K)=0$, το $A\setminus K$ είναι Jordan μετρήσιμο και

$$\mu(A\setminus K)=\int_{A\setminus K}1=\int_I\chi_{A\setminus K}\le U(\chi_{A\setminus K},P)=\sum_{J\in P\setminus S}M_J\,\mu(J)=$$

$$=\sum_{J\in P}M_J\,\mu(J)-\sum_{J\in S}M_J\,\mu(J)=U(\chi_A,P)-\mu(K)<\varepsilon$$

όπου το M_J αναφέρεται στην χ_A.

<u>5.4. Θεώρημα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο ανοιχτό σύνολο και

$f: A\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση ώστε το $D=\{x\in A:$ η f είναι ασυνεχής στο $x\}$ έχει μέτρο 0. Αν $\mathcal{U}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του A από Jordan μετρήσιμα υποσύνολά του, και Φ μια υποκείμενη διαμέριση της μονάδας, τότε

$$\int_A f = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi f$$

Απόδειξη. Έστω $M>0$ ένα φράγμα της f. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα Jordan μετρήσιμο συμπαγές σύνολο $K\subset A$ ώστε $\mu(A\setminus K)<\varepsilon/M$, από το Λήμμα 5.3. Υπάρχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος $\varphi\in\Phi$ με $\varphi|K\neq 0$. Έστω $F\subset\Phi$ ένα πεπερασμένο σύνολο που περιέχει κι αυτά τα φ. Τότε έχουμε:

$$\left|\int_A f - \sum_{\varphi\in F}\int_A\varphi f\right| \le \int_A \left|f-\sum_{\varphi\in F}\varphi f\right| = \int_A |f|\,\left(1-\sum_{\varphi\in F}\varphi\right) \le$$

$$M\int_A \sum_{\varphi\in\Phi\setminus F}\varphi = M\int_{A\setminus K}\sum_{\varphi\in\Phi\setminus F}\varphi \le M\int_{A\setminus K}1 = M\mu(A\setminus K) < M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Μπορούμε λοιπόν στην συνέχεια να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\int_A f$ και για το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f πάνω στο A.

6. Μέτρο 0 και διαφορίσιμες συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις εικόνες των συνόλων μέτρου 0 και Jordan μετρήσιμων συνόλων από C^1 συναρτήσεις. Η βασική πρόταση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το Θεώρημα της μέσης τιμής.

6.1. Πρόταση. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $C\subset A$ ένα κυρτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}^m$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει $M>0$ ώστε $\|Df(x)\|\le M$ για κάθε $x\in C$, τότε $\|f(x)-f(y)\|\le M\|x-y\|$ για κάθε $x,y\in C$.

Απόδειξη. Έστω $x,y\in C$ και $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ με τύπο $\gamma(t)=tx+(1-t)y$. Επειδή το C είναι κυρτό, $\gamma([0,1])\subset C$. Η συνάρτηση $f\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη και από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(f\circ\gamma)'(t) = Df((tx+(1-t)y))\cdot(x-y).$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $0<\xi<1$ ώστε $f(y)-f(x)=(f\circ\gamma)'(\xi)$. Άρα $\|f(x)-f(y)\|=\|Df(\xi x+(1-\xi)y)\cdot(x-y)\|\le\|Df(\xi x+(1-\xi)y)\|\|x-y\|\le M\|x-y\|$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Για κάθε ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια F αποτελούμενη από κύβους ώστε

(α) $A = \bigcup_{J \in F} J$

(β) $J \subset A$ για κάθε $J \in F$

(γ) $I^\circ \cap J^\circ \neq \emptyset \Rightarrow I = J$

Απόδειξη Θεωρούμε τα διαστήματα $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Οι αριθμήσιμες οικογένειες κύβων $F_m = \left\{\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \dots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right] : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\right\}$ ικανοποιούν τα (α), (β), (γ) για $A = \mathbb{R}^n$.

Οι κύβοι του F_{m+1} προκύπτουν απ' αυτούς του F_m αν διχοτομήσουμε τις ακμές τους. Αν λοιπόν $J \in F_m$ και $S \in F_{m+1}$ τότε είτε $S \subset J$ είτε $S^\circ \cap J^\circ = \emptyset$.

Θέτουμε $G_1 = \{J \in F_1 : J \subset A\}$ και επαγωγικά $G_m = \{J \in F_m : J \subset A$ και $J \not\subset I$ για κάθε $I \in G_1 \cup \dots \cup G_{m-1}\}$. Το σύνολο $T = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{J \in G_m} J$ είναι ανοικτό και $T \subset A$. Αρκεί να δείξουμε ότι $T = A$.

Αν $x \in A$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ τότε υπάρχει $\delta > 0$: $[x_1-\delta, x_1+\delta] \times \dots \times [x_n-\delta, x_n+\delta] \subset A$.

Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2^m} < \delta$, οπότε $x_i - \delta < \frac{k}{2^m} < x_i < x_i + \frac{1}{2^m} < x_i + \delta$.

Ώστε υπάρχουν $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ ώστε $\frac{k_i}{2^m} < x_i \leq \frac{k_i+1}{2^m}$. Αν θέσουμε

$J = \left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right] \times \dots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right]$, τότε $x \in J \subset A$ και $J \in F_m$.

Άρα το σύνολο $N = \{m \in \mathbb{N} : \exists J \in F_m$ με $x \in J \subset A\} \neq \emptyset$. Υπάρχει λοιπόν $m_0 = \min N$. Τότε $\exists J \in F_{m_0}$ με $x \in J \subset A$ και $x \notin I$ για κάθε $I \in F_m$, λόγω της... Συνεπώς $J \in G_{m_0}$. Άρα $x \in T$ ο.ε.δ.

~~Παρατ. Εάν $A \subset \mathbb{R}^n$ ... σύνολο περιεχομένου 0~~

Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο σύνολο. Το A έχει περιεχόμενο 0 αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ κύβοι $C_1, \dots, C_k$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} C_i^\circ$ και $\mu(C_1) + \dots + \mu(C_k) < \varepsilon$

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists I_1, \dots, I_k$: $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i^\circ$ και $\mu(I_1) + \dots + \mu(I_k) < \varepsilon$ και $\bar{A}$ είναι συμπαγές. Αφού $T = \bigcup I_i^\circ$ είναι ανοικτό είναι η αριθμήσιμη ένωση κύβων που περιέχονται μέσα στο T και $I^\circ \cap J^\circ \neq \emptyset \Rightarrow I = J$. Αφού $\bar{A}$ είναι συμπαγές, υπάρχουν κύβοι $C_1, \dots, C_k$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} C_i^\circ$ και $C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j$

$\mu(C_1) + \dots + \mu(C_k) \leq \sum \mu(I_i) < \varepsilon$

6.2. Πόρισμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση. Τότε για κάθε κυρτό συμπαγές σύνολο $K \subset A$ υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|f(x) - f(y)\| \le M \|x - y\| \quad \text{για κάθε } x, y \in K$$

Για διδακτικούς λόγους και όχι ουσίας παρατηρούμε στο σημείο αυτό ότι επειδή κάθε παραλληλεπίπεδο μπορεί να διαμερίζεται προσεγγιστικά σε κύβους, δηλαδή παραλληλεπίπεδα με ίσες ακμές, στον ορισμό του μέτρου 0 ή περιεχομένου 0 τα παραλληλεπίπεδα μπορούν ν' αντικατασταθούν ισοδύναμα από κύβους.

6.3. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f = (f_1, \dots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση. Αν το σύνολο E έχει περιεχόμενο 0 και $\bar{E} \subset A$, τότε το $f(E)$ έχει περιεχόμενο 0.

Απόδειξη Αφού το E έχει περιεχόμενο 0, το ίδιο ισχύει και για το $\bar{E}$. Επειδή $f(E) \subset f(\bar{E})$, αρκεί να δείξουμε ότι το $f(\bar{E})$ έχει περιεχόμενο 0. Επειδή το $\bar{E}$ είναι συμπαγές, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο H ώστε το $\bar{H}$ να είναι συμπαγές και $\bar{E} \subset H \subset \bar{H} \subset A$. Επειδή τώρα η f είναι C^1

$$M = \sup\{\|Df(x)\| : x \in \bar{H}\} < +\infty.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν κύβοι $I_1, \dots, I_k$ ώστε $\bar{E} \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ με $\mu(I_1) + \dots + \mu(I_k) < \varepsilon$. Επειδή το $\bar{E}$ είναι συμπαγές μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_i \subset H$, $1 \le i \le k$. Τότε

$$\|f(x) - f(y)\| \le M \|x - y\| \quad \text{για κάθε } x, y \in I_i, \ 1 \le i \le k$$

από το πόρισμα 6.2. Αν a_i είναι το μήκος της ακμής του κύβου I_i, τότε

$$|f_j(x) - f_j(y)| \le M\sqrt{n}\, a_i \quad \text{για κάθε } 1 \le j \le n, \ x, y \in I_i, \ 1 \le i \le k.$$

Άρα το $f(I_i)$ περιέχεται σε έναν κύβο J_i ακμής $M\sqrt{n}\, a_i$. Συνεπώς $f(\bar{E}) \subset f(I_1) \cup \dots \cup f(I_k) \subset J_1 \cup \dots \cup J_k$ και

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(J_i) = \sum_{i=1}^{k} (M\sqrt{n}\, a_i)^n = (M\sqrt{n})^n \sum_{i=1}^{k} a_i^n = (M\sqrt{n})^n \sum_{i=1}^{k} \mu(I_i) < (M\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon \quad \text{ο.ε.δ.}$$

6.4. Πόρισμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση. Αν το E είναι ένα κλειστό σύνολο μέτρου 0, τότε το $f(E)$ έχει μέτρο 0.

6.5. Πόρισμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : A \to f(A) \subset \mathbb{R}^n$ μια C^1 αμφιδιαφόριση. Αν το $K \subset A$ είναι ένα συμπαγές, Jordan μετρήσιμο σύνολο, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές και Jordan μετρήσιμο.

Απόδειξη Επειδή η f είναι συνεχής, το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του ανοικτού συνόλου $f(A)$. Επίσης, επειδή η $f^{-1}: f(A) \to A$ είναι συνεχής, $\partial f(K) = f(\partial K)$. Από το Θεώρημα 6.3 έχουμε τώρα ότι το $f(\partial K)$ έχει περιεχόμενο 0. ο.ε.δ.

<u>6.6. Πόρισμα.</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση. Αν $n<m$, τότε το $f(A)$ έχει μέτρο 0 στο $\mathbb{R}^m$.

<u>Απόδειξη</u> Υπάρχει μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων $\{C_k : k \in \mathbb{N}\}$ του A, ώστε $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Αφού $f(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(C_k)$, αρκεί να δείξουμε, ότι το $f(C_k)$ έχει περιεχόμενο 0 στο $\mathbb{R}^m$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $F: A \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $F(x,y) = f(x)$. Επειδή η f είναι C^1, το ίδιο είναι και η F. Το συμπαγές σύνολο $H_k = C_k \times \{0\}$ έχει περιεχόμενο 0 στο $\mathbb{R}^m$, αφού το $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ έχει μέτρο 0 στο $\mathbb{R}^m$, επειδή $n<m$. Από το Θεώρημα 6.3 το $F(H_k) = f(C_k)$ έχει περιεχόμενο 0. ο.ε.δ.

Στη συνέχεια θ' αποδείξουμε μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του Sard, που είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη Διαφορική Τοπολογία. Θα χρειαστούμε το επόμενο:

<u>6.7. Λήμμα</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση. Για κάθε συμπαγές, κυρτό σύνολο $K \subset A$ υπάρχει $\lambda = \lambda(K) \geq 0$ ώστε

$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)\| \leq \lambda \|x-y\| \quad \text{για κάθε } x,y \in K$$

και $\lim_{\operatorname{diam} K \to 0} \lambda(K) = 0$.

<u>Απόδειξη</u> Για κάθε $x,y \in K$ έχουμε, αφού το K είναι κυρτό,

$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)\| = \left\|\int_0^1 [f(y+t(x-y)) - Df(y)(x-y)]' \, dt\right\| =$$

$$\left\|\int_0^1 [Df(y+t(x-y))(x-y) - Df(y)(x-y)] \, dt\right\| \leq$$

$$\int_0^1 \|(Df(y+t(x-y)) - Df(y))(x-y)\| \, dt \leq$$

$$\int_0^1 \|Df(y+t(x-y)) - Df(y)\| \cdot \|x-y\| \, dt$$

Το σύνολο $[0,1] \times K \times K$ είναι συμπαγές και επειδή η f είναι C^1 προκύπτει ότι $\lambda = \lambda(K) = \sup\{\|Df(y+t(x-y)) - Df(y)\| : 0 \leq t \leq 1, (x,y) \in K \times K\} < +\infty$.

Από την συνέχεια της Df, έχουμε $\lim_{\operatorname{diam} K \to 0} \lambda(K) = 0$. Επίσης

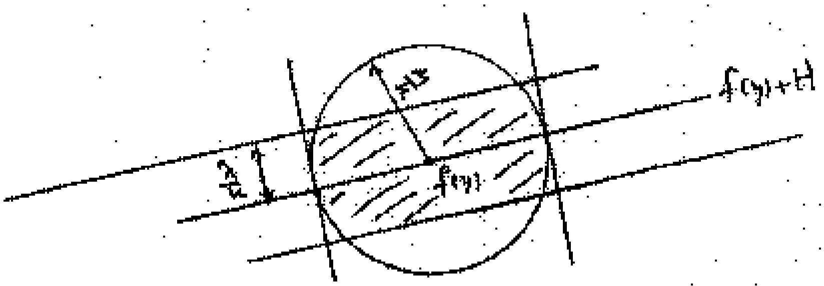
$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)\| \leq \int_0^1 \lambda \|x-y\| \, dt = \lambda \|x-y\|$.

<u>6.8. Θεώρημα (Sard)</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση. Αν $C = \{x \in A : \det Df(x) = 0\}$, τότε το $f(C)$ έχει μέτρο 0.

<u>Απόδειξη</u> Επειδή το A είναι η αριθμήσιμη ένωση παραλληλεπιπέδων που περιέχονται

στο A, αρκεί να δείξουμε ότι το $f(C\cap I)$ είναι σύνολο μέτρου 0 για κάθε παραλληλεπίπεδο $I\subset A$. Επειδή το I είναι συμπαγές και κυρτό, υπάρχει $M>0$ ώστε $\|f(x)-f(y)\|\le M\|x-y\|$ για κάθε $x,y\in I$. Άρα $f(x)\in\overline{S}(f(y), M\|x-y\|)$. Έστω $y\in C\cap I$. Αφού $\det Df(y)=0$, η γραμμική απεικόνιση $Df(y):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ δεν είναι επί. Υπάρχει λοιπόν ένας υπόχωρος $H\subseteq\mathbb{R}^n$ με $\dim H=n-1$ ώστε $\operatorname{Im}Df(y)\subseteq H\subseteq\mathbb{R}^n$.

Έστω τώρα $k\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε μια διαμέριση P του I με $|P|\geq k^n$ ώστε $\operatorname{diam} J<\frac{1}{k}$ όταν $J\in P$, οπότε $\mu(J)<\frac{1}{k^n}$. Έστω $y\in C\cap I\cap J$. Για κάθε $x\in J$ έχουμε τότε $\|x-y\|<\frac{1}{k}$ και συνεπώς από το Λήμμα 6.7 $d(f(x), f(y)+H)\leq\|f(x)-f(y)-Df(y)(x-y)\|\leq\lambda(J)\|x-y\|<\lambda(J)\frac{1}{k}$, ενώ $\|f(x)-f(y)\|<\frac{M}{k}$. Άρα $f(x)\in\overline{S}(f(y),\frac{M}{k})\cap S(f(y)+H,\frac{\lambda}{k})$, που περιέχεται σ' ένα κουτί με ύψος $2\frac{\lambda}{k}$ και με ακμή βάσης $2\frac{M}{k}$, δηλαδή όγκου $2^n\frac{\lambda M^{n-1}}{k^n}$. Δηλαδή το $f(J)$ περιέχεται σε ένα κουτί όγκου $2^n\frac{M^{n-1}}{k^n}\lambda(J)$.



Το λ μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση του $\frac{1}{k}$, αφού $\operatorname{diam} J<\frac{1}{k}$ για κάθε $J\in P$ και $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda(\frac{1}{k})=0$. Έχουμε τώρα $f(C\cap I)\subset\bigcup\{f(J): J\cap C\neq\emptyset\}$ και συνεπώς το $f(C\cap I)$ περιέχεται στην ένωση C_k το πολύ k^n κουτιών όγκου $2^n\frac{M^{n-1}}{k^n}\lambda(\frac{1}{k})$ το καθένα, δηλαδή συνολικού όγκου το πολύ $2^n M^{n-1}\lambda(\frac{1}{k})$. Έτσι έχουμε $f(C\cap I)\subset\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}C_k$ και $\lim\limits_{k\to+\infty}\mu(C_k)=0$, αφού $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda(\frac{1}{k})=0$. Από αυτό προκύπτει ότι $\mu(f(C\cap I))=0$.

7. Ο τύπος αλλαγής της μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση

Στην παράγραφο αυτή θ' αποδείξουμε τον τύπο αλλαγής της μεταβλητής κατά την πολλαπλή ολοκλήρωση που αποτελεί γενίκευση του τύπου αλλαγής μεταβλητής για μονοδιάστατα ολοκληρώματα. Αν $a<b$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μία C^1 συνάρτηση και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τότε

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f\circ g)\cdot g'$$

Πράγματι αν F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε $(F\circ g)' = (F'\circ g)\,g' = (f\circ g)\cdot g'$, από τον κανόνα της αλυσίδας. Άρα

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b (f\circ g)\cdot g'$$

Αν επιπλέον η g είναι 1-1, τότε είναι γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $g'>0$ και $g([a,b]) = [g(a), g(b)]$. Συνεπώς

$$\int_{g([a,b])} f = \int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f\circ g) g' = \int_a^b (f\circ g)\,|g'| = \int_{[a,b]} (f\circ g)\,|g'|$$

Στην δεύτερη περίπτωση, $g'<0$ και $g([a,b]) = [g(b), g(a)]$. Άρα

$$\int_{g([a,b])} f = \int_{g(b)}^{g(a)} f = -\int_{g(a)}^{g(b)} f = -\int_a^b (f\circ g)g' = \int_a^b (f\circ g)(-g') = \int_{[a,b]} (f\circ g)\,|g'|$$

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται για πολλαπλά ολοκληρώματα. Η γενίκευση αυτή όμως δεν είναι τόσο τετριμμένη, όπως στην μονοδιάστατη περίπτωση.

<u>7.1. Θεώρημα</u> Έστω $A\subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $g: A\to g(A)\subset\mathbb{R}^n$ μια C^1 αμφιδιαφόριση και $f: g(A)\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f\circ g)\,|\det Dg|$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 θα γίνει σε μια σειρά από βήματα. Στην αρχή θα μελετήσουμε την μεταβολή των όγκων από γραμμικούς μετασχηματισμούς. Θα χρειαστούμε την παρακάτω αλγεβρική πρόταση.

<u>7.2. Πρόταση.</u> Κάθε γραμμικός ισομορφισμός $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι σύνθεση γραμμικών ισομορφισμών των παρακάτω τύπων:

(1) $g_\lambda^i(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},\lambda x_i, x_{i+1},\dots,x_n)$, $\lambda\neq 0$

(2) $g_{ij}(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{j-1}, x_i+x_j, x_{j+1},\dots,x_n)$

(3) $\tau_i(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2},\dots,x_n)$

<u>Απόδειξη</u> Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο n. Για $n=1$, κάθε γραμμικός ισομορφισμός είναι του τύπου (1). Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει στην διάσταση $n-1$ και $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, δηλαδή

$$g(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j,\dots,\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\right).$$

Επειδή $\det A \neq 0$, συνθέτοντας αν ανάγκη με απεικονίσεις του τύπου (3), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\det(a_{ij})_{1\le i,j\le n-1} \neq 0$. Από την υπόθεση της επαγωγής το συμπέρασμα ισχύει για τον γραμμικό ισομορφισμό $h: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ με τύπο

$$h(x_1,\dots,x_{n-1}) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} x_j , \dots, \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j} x_j \right)$$

Συνεπώς το συμπέρασμα ισχύει και για τον ισομορφισμό $h': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$h'(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} x_j , \dots, \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j} x_j , x_n \right)$$

Προκύπτει ότι το συμπέρασμα ισχύει και για τον ισομορφισμό $h'': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$h''(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j , \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{n-1,j} x_j , x_n \right)$$

Αρκεί να δείξουμε τώρα ότι υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) + \lambda_n x_n \text{ για κάθε } (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Έχουμε όμως

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{ij} \right) x_j + \left(\lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{in} \right) x_n$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a_{nj} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{ij} \quad , 1 \le j \le n-1 \quad \text{και} \quad a_{nn} = \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{in}$$

Όμως αφού $\det(a_{ij})_{1\le i,j\le n-1} \neq 0$, το σύστημα των $n-1$ πρώτων εξισώσεων με αγνώστους τα $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ έχει ακριβώς μία λύση, οπότε αντικαθιστώντας στην τελευταία έχουμε το λ_n. Η πρόταση αποδείχθηκε.

<u>7.3. Πόρισμα</u> Κάθε γραμμικός ισομορφισμός $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι σύνθεση των ισομορφισμών με τύπους

$\pi(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\lambda \neq 0$

$\sigma(x_1,\dots,x_n) = (x_1+x_2, x_2, \dots, x_n)$

$\tau_i(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2},\dots,x_n)$ $\quad 1 \le i \le n$

<u>7.4. Λήμμα</u>. Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές, Jordan μετρήσιμο σύνολο και $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένας γραμμικός ισομορφισμός. Τότε $\mu(g(I)) = |\det g| \, \mu(I)$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω J, K δύο οποιαδήποτε παραλληλεπίπεδα στο $\mathbb{R}^n$ ώστε $I \subset J$ και $g(I) \subset K$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\int_K \chi_{g(I)} = |\det g| \int_J \chi_I$. Επειδή η g είναι 1-1 και επί, έχουμε $\chi_I = \chi_{g(I)} \circ g$. Από το πόρισμα 7.3 η g είναι σύνθεση απεικονίσεων π, σ, τ_i, $1 \le i \le n$. Επειδή η ορίζουσα της σύνθεσης γραμμικών απεικονίσεων είναι το γινόμενο των αντίστοιχων οριζουσών, αρκεί ν' αποδείξουμε

το Λήμμα όταν $g=\pi$, α ή τ_i. Παρατηρούμε ότι $\det \pi = \lambda$, $\det \alpha = 1$ και $\det \tau_i = -1$.

(i) Έστω ότι $g=\pi$. Παίρνουμε $J=[-b,b]\times\cdots\times[-b,b]$, $K=[-|\lambda|b,|\lambda|b]\times\cdots\times[-b,b]$, ώστε το $b>0$ είναι αρκετά μεγάλο για να έχουμε $I\subset J$ και $g(I)\subset K$. Από τον τύπο αλλαγής της μεταβλητής για μονοδιάστατα ολοκληρώματα και το Θεώρημα του Fubini έχουμε:

$$|\lambda|\int_J \chi_{\pi(I)}\circ\pi = |\lambda|\int_{-b}^{b}\Big(\cdots\Big(\int_{-b}^{b}\chi_{\pi(I)}(\lambda x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\Big)\cdots\Big)dx_n =$$

$$|\lambda|\int_{-b}^{b}\Big(\cdots\Big(\int_{-\lambda b}^{\lambda b}\chi_{\pi(I)}(x_1,\dots,x_n)\,\frac{1}{\lambda}\,dx_1\Big)\cdots\Big)dx_n = \int_K \chi_{\pi(I)}$$

(ii) Αν $g=\alpha$, θεωρούμε $b<c$ και παίρνουμε $J=[-c,c]\times[-b,b]\times\cdots\times[-b,b]$, $K=[-c+b,c-b]\times[-b,b]\times\cdots\times[-b,b]$, ώστε $I\subset J$, $g(I)\subset K$. Τότε

$$\int_J \chi_{\alpha(I)}\circ\alpha = \int_{-b}^{b}\Big(\cdots\Big(\int_{-c}^{c}\chi_{\alpha(I)}(x_1+x_2,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\Big)\cdots\Big)dx_n =$$

$$\int_{-b}^{b}\Big(\cdots\Big(\int_{-c+x_2}^{c+x_2}\chi_{\alpha(I)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\Big)\cdots\Big)dx_n =$$

$$\int_{-b}^{b}\Big(\cdots\Big(\int_{-c+b}^{c-b}\chi_{\alpha(I)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\Big)\cdots\Big)dx_n = \int_K \chi_{\alpha(I)}$$

γιατί αν $-b\le x_2\le b$, τότε $[-c+b,c-b]\subset[-c+x_2,c+x_2]$

(iii) Έστω τέλος ότι $g=\tau_i$. Παίρνουμε $J=K=[-b,b]\times\cdots\times[-b,b]$, $b>0$, ώστε $I, g(I)\subset J$. Τότε

$$\int_J \chi_{\tau_i(I)}\circ\tau_i = \int_{-b}^{b}\Big(\cdots\Big(\int_{-b}^{b}\chi_{\tau_i(I)}(x_1,\dots,x_{i+1},x_i,\dots,x_n)\,dx_i\Big)dx_{i+1}\cdots\Big)dx_n =$$

$$\int_{-b}^{b}\Big(\cdots\Big(\int_{-b}^{b}\chi_{\tau_i(I)}(x_1,\dots,x_{i+1},x_i,\dots,x_n)\,dx_{i+1}\Big)dx_i\cdots\Big)dx_n = \int_J \chi_{\tau_i(I)}$$

αφού από το Πόρισμα 1.8 η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να αλλάζει.

Στην συνέχεια συμβολίζουμε με C_r τον κύβο με κέντρο το $0\in\mathbb{R}^n$ και ακμή $r>0$, δηλαδή $C_r=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : |x_j|\le r/2,\ 1\le j\le n\}$. Ο κύβος με κέντρο το σημείο $x_0\in\mathbb{R}^n$ και ακμή $r>0$ είναι λοιπόν το σύνολο $C_r(x_0)=\{x_0+x : x\in C_r\}$.

<u>7.5. Λήμμα</u>. Έστω $U, V\subset\mathbb{R}^n$ δυο ανοικτά σύνολα που περιέχουν το $0\in\mathbb{R}^n$ και

$g=(g_1,\dots,g_n): U \longrightarrow V$ μια C^1 αμφιδιαφόριση με $g(0)=0$ και $Dg(0)=I_n$. Έστω $r>0$ ώστε $C_r \subset U$. Αν $0<\delta<1$ ώστε

$$\|Dg(x)-I_n\|<\delta/n^2 \quad \text{για κάθε } x\in C_r,$$

τότε $C_{r(1-\delta)} \subset g(C_r) \subset C_{r(1+\delta)}$.

Απόδειξη. Έστω $h=(h_1,\dots,h_n)=g-Id$. Τότε $\frac{1}{n}|\partial_i h_j(x)|\le \|Dh(x)\|<\delta/n^2$ για κάθε $x\in C_r$ και $1\le i,j\le n$. Από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχουν $0<\theta_j<1$, $1\le j\le n$ ώστε

$$h_j(x)=Dh_j(\theta_j x)\cdot x=\sum_{i=1}^n \partial_i h_j(\theta_j x)\cdot x_i$$

όπου $x=(x_1,\dots,x_n)$. Άρα

$$|h_j(x)|\le \sum_{i=1}^n|\partial_i h_j(\theta_j x)|\,|x_i| < \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{n}\cdot|x_i| < n\cdot\frac{\delta}{n}\left(r/2\right)=\delta r/2$$

για κάθε $x\in C_r$, $1\le j\le n$. Έτσι έχουμε

$$|g_j(x)|=|g_j(x)-x_j+x_j|\le|h_j(x)|+|x_j|<(\delta r+r)/2=\frac{r}{2}(1+\delta)$$

για κάθε $x\in C_r$ και $1\le j\le n$, που δείχνει ότι $g(C_r)\subset C_{r(1+\delta)}$.

Έστω τώρα ότι $x\in\partial C_r$, δηλαδή $|x_j|=r/2$ για κάποιο $1\le j\le n$. Τότε $|g_j(x)|=|g_j(x)-x_j+x_j|\ge|x_j|-|h_j(x)|>\frac{r-\delta r}{2}=\frac{r(1-\delta)}{2}$. Αυτό δείχνει ότι $g(\partial C_r)\cap C_{r(1-\delta)}=\phi$. Αφού $0\in g(C_r)\cap C_{r(1-\delta)}$ έχουμε λοιπόν $\phi\ne g(C_r)\cap C_{r(1-\delta)}=g(C_r^\circ)\cap C_{r(1-\delta)}$. Θα δείξουμε ότι $C_{r(1-\delta)}\subset g(C_r)$ με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $y\in C_{r(1-\delta)}\cap(\mathbb{R}^n\setminus g(C_r))$. Θεωρούμε το σύνολο $T=\{t\in[0,1]: ty\in g(C_r)\cap C_{r(1-\delta)}\}$ που είναι προφανώς κλειστό, ενώ $0\in T$ και $1\notin T$. Έστω $t_0=\sup T$. Τότε $t_0\in T$, αφού το T είναι κλειστό και συνεπώς $t_0<1$. Συνεπώς, $t_0y\in C^\circ_{r(1-\delta)}\cap g(C_r^\circ)$, που είναι ανοικτό σύνολο, αφού η g είναι C^1 αμφιδιαφόριση. Έτσι, υπάρχει $\rho>0$ ώστε $S(t_0y,\rho)\subset C^\circ_{r(1-\delta)}\cap g(C_r^\circ)$. Όμως τότε $(t_0,t_0+\rho/\|y\|)\subset T$, που είναι αντίφαση. ο.ε.δ.

7.6. Πρόταση. Έστω $U,V\subset\mathbb{R}^n$ δύο ανοικτά σύνολα που περιέχουν το 0 και $g:U\longrightarrow V$ μια C^1 αμφιδιαφόριση με $g(0)=0$. Έστω $M=\|Dg^{-1}(0)\|$ και $r>0$ ώστε $C_r\subset U$. Αν $0<\delta<1$ είναι τέτοιο ώστε για κάθε $x\in C_r$ να ισχύει $\|Dg(x)-Dg(0)\|<\delta/n^2M$, τότε

$$Dg(0)(C_{r(1-\delta)})\subset g(C_r)\subset Dg(0)(C_{r(1+\delta)})$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $\tilde{g}=Dg^{-1}(0)\circ g:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$. Η $\tilde{g}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 7.5 αφού $D\tilde{g}(0) = Dg^{-1}(0)\circ Dg(0) = I_n$ και $\|D\tilde{g}(x) - I_n\| = \|Dg^{-1}(0)(Dg(x) - Dg(0))\| \le \|Dg^{-1}(0)\|\,\|Dg(x) - Dg(0)\| < M\cdot\frac{\delta}{n^2 M} < \frac{\delta}{n^2}$ για κάθε $x\in C_r$. Συνεπώς

$$C_{r(1-\delta)} \subset \tilde{g}(C_r) \subset C_{r(1+\delta)}, \text{ δηλαδή}$$

$$Dg(0)(C_{r(1-\delta)}) \subset g(C_r) \subset Dg(0)(C_{r(1+\delta)}) \quad \text{ο.ε.δ.}$$

<u>7.7. Πόρισμα</u> Έστω $U, V\subset\mathbb{R}^n$ δυο ανοικτά σύνολα και $g: U\to V$ μια C^1 αμφιδιαφόριση. Έστω $x_0\in U$ και $M = \|Dg^{-1}(x_0)\|$. Αν $r>0$ έτσι ώστε $C_r(x_0)\subset U$ και το $0<\delta<1$ είναι τέτοιο ώστε για κάθε $x\in C_r(x_0)$ να ισχύει $\|Dg(x) - Dg(x_0)\| < \delta/n^2 M$, τότε

$$Dg(x_0)(C_{r(1-\delta)}) \subset g(C_r(x_0)) - g(x_0) \subset Dg(x_0)(C_{r(1+\delta)})$$

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε την C^1 αμφιδιαφόριση με τύπο $\tilde{g}(x) = g(x_0+x) - g(x_0)$ που ορίζεται σ' ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κύβο C_r. Η $\tilde{g}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 7.6 και εφαρμόζοντάς την έχουμε το συμπέρασμα.

<u>7.8. Θεώρημα</u> Έστω $U, V\subset\mathbb{R}^n$ δυο ανοικτά σύνολα και $g: U\to V$ μια C^1 αμφιδιαφόριση. Έστω $K\subset U$ ένα συμπαγές, Jordan μετρήσιμο σύνολο και $f: g(K)\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\int_{g(K)} f = \int_K (f\circ g)\cdot|\det Dg|$$

<u>Απόδειξη</u> Επειδή $f = f^+ - f^-$ όπου $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ και $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f\ge 0$. Υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο Λ με $K\subset\Lambda^\circ\subset\Lambda\subset U$. Θέτουμε

$$M_0 = \sup\{|f(x)| : x\in g(K)\}$$

$$M = \sup\{\|Dg^{-1}(x)\| : x\in g(\Lambda)\} \quad \text{και}$$

$$C = \sup\{|\det Dg(x)| : x\in\Lambda\}$$

Έστω $0<\delta<1$. Επειδή η g είναι C^1 και το K συμπαγές, η Dg είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K. Άρα υπάρχει $r>0$ ώστε

$$x,y\in K \text{ και } \|x-y\|\le r\sqrt{n} \implies \|Dg(x) - Dg(y)\| < \delta/n^2 M$$

Έστω $I\subset\mathbb{R}^n$ ένας κύβος που περιέχει το K στο εσωτερικό του και P μια διαμέριση του I σε κύβους με διαμ $J<r$ για κάθε $J\in P$, τόσο λεπτή

ώστε για κάποιο $S \subset P$ να έχουμε $K \subset \bigcup_{J \in S} J^\circ \subset \bigcup_{J \in S} J \subset A^\circ$. Θέτουμε

$m_J = \min\{(f \circ g)(x) : x \in J\} = \min\{f(z) : z \in g(J)\}$

$M_J = \max\{(f \circ g)(x) : x \in J\} = \max\{f(z) : z \in g(J)\}$, $J \in S$

Έστω x_J το κέντρο του κύβου J. Τότε από το Λήμμα 7.4 και το Πόρισμα 7.7 έχουμε

$$\sum_{J \in S} m_J (1-\delta)^n |\det Dg(x_J)| \lambda(J) \le \sum_{J \in S} m_J \lambda(g(J)) \le \int_{g(K)} f \le \sum_{J \in S} M_J \lambda(g(J)) \le \sum_{J \in S} M_J (1+\delta)^n |\det Dg(x_J)| \lambda(J)$$

αλλά προφανώς

$$\sum_{J \in S} m_J (1-\delta)^n |\det Dg(x_J)| \lambda(J) \le \sum_{J \in S} f(g(x_J)) |\det Dg(x_J)| \lambda(J) \le \sum_{J \in S} M_J (1+\delta)^n |\det Dg(x_J)| \lambda(J).$$

Έχουμε τώρα

$$\sum_{J \in S} M_J (1+\delta)^n |\det Dg(x_J)| \lambda(J) - \sum_{J \in S} m_J (1-\delta)^n |\det Dg(x_J)| \lambda(J) =$$

$$\sum_{J \in S} \left[M_J (1+\delta)^n - m_J (1-\delta)^n \right] |\det Dg(x_J)| \lambda(J) =$$

$$\sum_{J \in S} (M_J - m_J)(1+\delta)^n |\det Dg(x_J)| \lambda(J) + \sum_{J \in S} m_J [(1+\delta)^n - (1-\delta)^n] |\det Dg(x_J)| \lambda(J) =$$

$$(1+\delta)^n \sum_{J \in S} (M_J - m_J) |\det Dg(x_J)| \lambda(J) + [(1+\delta)^n - (1-\delta)^n] \sum_{J \in S} m_J |\det Dg(x_J)| \lambda(J) \le$$

$$2^n \cdot c \sum_{J \in S} (M_J - m_J) \lambda(J) + [(1+\delta)^n - (1-\delta)^n] c \cdot M_0 \lambda(I).$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε μια διαμέριση P του I και $0 < \delta < 1$ ώστε

(i) $2^n c \sum_{J \in S} (M_J - m_J) \lambda(J) < \frac{\varepsilon}{4}$, αφού η $f \circ g$ είναι ολοκληρώσιμη στο I,

(ii) $[(1+\delta)^n - (1-\delta)^n] c \cdot M_0 \lambda(I) < \frac{\varepsilon}{4}$ και

(iii) $\left| \int_K (f \circ g) \cdot |\det Dg| - \sum_{J \in S} (f \circ g)(x_J) |\det Dg(x_J)| \lambda(J) \right| < \varepsilon/2$

Τότε έχουμε από τις (i), (ii)

$$\left| \int_{g(K)} f - \sum_{J \in S} (f \circ g)(x_J) |\det Dg(x_J)| \lambda(J) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

και από την (iii) $\left| \int_{g(K)} f - \int_K (f \circ g) \cdot |\det Dg| \right| < \varepsilon$ ο.ε.δ.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1. Υπάρχει μια οικογένεια $\mathcal{U}$ από παραλληλεπίπεδα που περιέχονται στο A, ώστε το $\{I^\circ : I\in\mathcal{U}\}$ να είναι ανοιχτό κάλυμμα του A. Τότε το $\{g(I^\circ) : I\in\mathcal{U}\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $g(A)$, αφού η g είναι C^1 αμφιδιαφόριση. Έστω Φ μια αριθμήσιμη διαμέριση της μονάδας υποκείμενη σ' αυτό το κάλυμμα του $g(A)$. Αν $\varphi\in\Phi$ και $\operatorname{supp}\varphi\subset g(I^\circ)$, τότε επειδή η g είναι 1-1 έχουμε $(\varphi\cdot f)\circ g(x)=0$, όταν $x\notin I$. Άρα $\operatorname{supp}((\varphi\cdot f)\circ g)\subset I$. Από το Θεώρημα 7.8 έχουμε τώρα

$$\int_{g(I)}\varphi f = \int_I((\varphi\cdot f)\circ g)|\det Dg| \quad \text{για κάθε } I\in\mathcal{U},$$

το οποίο γράφεται
$$\int_{g(A)}\varphi\cdot f = \int_A((\varphi\cdot f)\circ g)|\det Dg|$$

λόγω των προηγουμένων. Άρα

$$\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_{g(A)}\varphi\cdot f = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_A[(\varphi\cdot f)\circ g]|\det Dg|$$

$$=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A(\varphi\circ g)\cdot(f\circ g)|\det Dg| = \int_A(f\circ g)|\det Dg| \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Συχνά στην πράξη η g είναι C^1 αμφιδιαφόριση, εκτός από ένα σύνολο με περιεχόμενο 0. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες. Για να καλύψουμε και αυτή την περίπτωση θα γενικεύσουμε το Θεώρημα 7.8.

7.9. Λήμμα Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $g: A\to\mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση. Αν το $K\subset A$ είναι συμπαγές σύνολο ώστε η $g|K^\circ$ να είναι C^1 αμφιδιαφόριση, τότε $\partial g(K^\circ), \partial g(K)\subset g(\partial K)$. Επιπλέον, αν το K είναι Jordan μετρήσιμο, τότε και τα $g(K^\circ)$, $g(K)$ είναι Jordan μετρήσιμα.

Απόδειξη Επειδή το K είναι συμπαγές, έχουμε $\partial g(K^\circ)\subset\overline{g(K^\circ)}\subset g(K)$. Έστω $y\in\partial g(K^\circ)$. Τότε υπάρχει $x\in K$ ώστε $g(x)=y$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x\in\partial K$. Αν $x\notin\partial K$, τότε $x\in K^\circ$ και επομένως έχει μια ανοιχτή περιοχή V ώστε $V\subset K^\circ$. Επειδή η $g|K^\circ$ είναι C^1 αμφιδιαφόριση, το $g(V)$ είναι ανοιχτή περιοχή του y και $g(V)\subset g(K^\circ)$. Συνεπώς $y\in g(K^\circ)$ που είναι άτοπο, γιατί το $g(K^\circ)$ είναι ανοιχτό αφού η $g|K^\circ$ είναι C^1 αμφιδιαφόριση. Αυτό δείχνει ότι $\partial g(K^\circ) \subset g(\partial K)$ και όμοια έχουμε $\partial g(K) \subset g(\partial K)$.

7.10. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $g: A \to \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση. Έστω $K \subset A$ ένα συμπαγές, Jordan μετρήσιμο σύνολο, ώστε η $g|K^\circ$ να είναι C^1 αμφιδιαφόριση, δηλαδή η $g|K^\circ$ είναι 1-1 και $\det Dg(x) \neq 0$ για κάθε $x \in K^\circ$. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: g(K) \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{g(K)} f = \int_K (f \circ g) |\det Dg|$$

Απόδειξη Από το Λήμμα 7.9 τα $g(K^\circ)$, $g(K)$ είναι Jordan μετρήσιμα και βέβαια $g(K) = g(K^\circ) \cup g(\partial K)$. Επειδή τα ∂K, $g(\partial K)$ έχουν περιεχόμενο 0, από το Θεώρημα 7.1 έχουμε

$$\int_{g(K)} f = \int_{g(K^\circ)} f = \int_{K^\circ} (f \circ g)|\det Dg| = \int_K (f \circ g)|\det Dg|.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & , \text{ όταν } 0\le x<\frac{1}{2}\\ 1 & , \text{ όταν } \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f=\frac{1}{2}$

2. Έστω $f:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & , \text{ όταν ο } x \text{ ή ο } y \text{ είναι άρρητος}\\ \frac{1}{q} & , \text{ όταν ο } x\in\mathbb{Q} \text{ και } y=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι $\int f=0$ και $\int_0^1 f(x,y)\,dy=0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

(β) Να δειχθεί ότι το $\int_0^1 f(x,y)\,dx$ δεν υπάρχει, όταν ο y είναι ρητός.

3. Έστω $a<b$ και $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση.

(α) Αν $a<x_1<\cdots<x_n<b$, δείξτε ότι $\sum_{i=1}^{n} O(f,x_i)<f(b)-f(a)$.

(β) Έστω $\varepsilon>0$, και $I=\{x\in[a,b]:\ O(f,x)>\varepsilon\}$. Να αποδειχθεί ότι το I είναι πεπερασμένο σύνολο.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

4. Έστω $I\subset\mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f,g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις ώστε το $D=\{x\in I:\ f(x)\neq g(x)\}$ έχει περιεχόμενο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη να δειχθεί ότι και η g είναι ολοκληρώσιμη.

5. Έστω $I\subset\mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη και μη-αρνητική συνάρτηση. Αν $\int_I f=0$, να δειχθεί ότι το σύνολο $D=\{x\in I:\ f(x)\neq 0\}$ έχει μέτρο 0.

6. Έστω $I\subset\mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο. Να αποδειχθεί ότι το γράφημα μιας συνεχούς συναρτήσεως $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ έχει περιεχόμενο 0 στο $\mathbb{R}^{n+1}$.

7. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα σύνολο με περιεχόμενο 0. Δείξτε τότε ότι το $\overline{A}$ έχει περιεχόμενο 0. Δείξτε επίσης μ' ένα παράδειγμα, ότι αυτό δεν ισχύει για φραγμένα σύνολα μέτρου 0.

8. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα σύνολο περιεχομένου 0. Δείξτε ότι κάθε φραγμένη συνάρτηση $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_A f=0$.

9. Έστω M μια n-πολλαπλότητα στο $\mathbb{R}^k$. Αν $k>n$, δείξτε ότι η M έχει μέτρο 0 στο $\mathbb{R}^k$.

10. Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\psi(x) \leq \varphi(x)$ για κάθε $x \in I$. Έστω

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in I \text{ και } \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$$

και $f : B \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.

(α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy$ είναι συνεχής.

(β) Να αποδειχθεί ότι $\int_B f = \int_I g = \int_I \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy \right) dx$.

11. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ δύο Jordan μετρήσιμα σύνολα.

(α) Δείξτε ότι τα $A \cup B$, $A \cap B$ και $A \setminus B$ είναι Jordan μετρήσιμα.

(β) Δείξτε ότι $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ και $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.

12. Να αποδειχθεί ότι κάθε συμπαγής n-πολλαπλότητα με σύνορο στο $\mathbb{R}^n$ είναι Jordan μετρήσιμο σύνολο.

12. Έστω $\{C_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συμπαγών, Jordan μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, ώστε $\lim_{k \to \infty} \mu(C_k) = 0$. Αν $C \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ είναι ένα συμπαγές σύνολο, δείξτε ότι $\mu(C) = 0$.

13. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο ώστε $A = B \cup \Gamma$, όπου τα $B, \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ είναι Jordan μετρήσιμα και $B^\circ \cap \Gamma^\circ = \phi$. Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα B, Γ και

$$\int_A f = \int_B f + \int_\Gamma f.$$

14. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο και $f, g : A \to \mathbb{R}$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ώστε $g \geq 0$. Αν $m = \inf f(A)$, $M = \sup f(A)$, τότε υπάρχει $m \leq \lambda \leq M$ ώστε

$$\int_A f \cdot g = \lambda \int_A g.$$

15. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο. Να αποδειχθεί ότι το A° είναι Jordan μετρήσιμο σύνολο και $\mu(A) = \mu(A^\circ)$.

16. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα συμπαγές, Jordan μετρήσιμο σύνολο $K \subset A$ ώστε $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$.

17. Έστω $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και $P=\{\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n : 0\le \lambda_i \le 1 \;, 1\le i\le n\}$ το πλάγιο παραλληλεπίπεδο που παράγουν. Να αποδειχθεί ότι $\mu(P)=\det(v_1,\dots,v_n)$, όπου $(v_1,\dots,v_n)$ είναι ο $n\times n$ πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των $v_1,\dots,v_n$.

18. Έστω $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ μια ευκλείδεια ισομετρία, δηλαδή $d(g(x),g(y))=d(x,y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$, όπου d είναι η ευκλείδεια απόσταση. Να αποδειχθεί ότι $\mu(g(K))=\mu(K)$ για κάθε συμπαγές, Jordan μετρήσιμο σύνολο K.

19. Να αποδειχθεί ότι ο όγκος του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^3$ που περικλείεται από το οριζόντιο επίπεδο, τον κύλινδρο με ελλειπτική βάση $(x/a)^2+(y/b)^2\le 1$ και το γράφημα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y)=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}$$

όπου $a,b,p,q>0$, είναι ίσος με $\frac{1}{4}\pi ab\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}\right)$.

20. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^+$ μια C^∞ συνάρτηση με $\operatorname{supp}\varphi\subseteq\operatorname{int}D^n$ και $\int_{D^n}\varphi=1$. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_k:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ με τύπο

$$f_k(x)=\int_{D^n} f\left(x+\frac{y}{k}\right)\cdot\varphi(y)\,dy$$

Να αποδειχθεί ότι η f_k είναι C^∞ συνάρτηση για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και $f_k\longrightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

21. Έστω $\Delta_n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n: \; x_1+\dots+x_n\le 1 \;,\; 0\le x_i\le 1 \;,\; 1\le i\le n\}$. Να αποδειχθεί ότι $\mu(\Delta_n)=\frac{1}{n!}$ (Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ με τύπο $g(x_1,\dots,x_n)=(1-x_1,\; x_1(1-x_2),\dots,\; x_1\cdots x_{n-1}(1-x_n))$).

22. Έστω $a<b$ και $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ μια θετική, συνεχής συνάρτηση. Το στερεό που παράγεται από την περιστροφή του γραφήματος της f γύρω από τον άξονα των x είναι το σύνολο

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \; \sqrt{y^2+z^2}\le f(x) \;\text{ και }\; a\le x\le b\}.$$

Να αποδειχθεί ότι $\mu(A)=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε κυλινδρικές συντεταγμένες ως προς τον άξονα των x και το συμπέρασμα της Άσκησης 10).

IV. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

1. Τανυστές

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n επί του $\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $\varphi: V^k \to \mathbb{R}$, όπου $V^k = V\times\cdots\times V$ k-φορές, $k\in\mathbb{N}$, λέγεται πλειογραμμική αν είναι γραμμική ως προς καθεμιά μεταβλητή ξεχωριστά. Μια πλειογραμμική απεικόνιση $\varphi: V^k \to \mathbb{R}$ λέγεται συνήθως (συναλλοίωτος) τανυστής k-τάξεως ή απλώς <u>k-τανυστής</u>. Το σύνολο όλων των k-τανυστών επί του V συμβολίζεται με $\mathcal{J}^k(V)$ και γίνεται διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ κατά τον προφανή τρόπο. Θέτουμε $\mathcal{J}^0(V) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{J}(V) = \bigoplus_{k\geq 0}^{\infty} \mathcal{J}^k(V)$. Παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{J}^1(V) = V^*$ είναι ο δυϊκός του V.

Στο $\mathcal{J}(V)$ ορίζεται ένα γινόμενο που το κάνει άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$. Αν $\varphi\in\mathcal{J}^k(V)$ και $\psi\in\mathcal{J}^\lambda(V)$, τότε το <u>τανυστικό γινόμενο</u> $\varphi\otimes\psi$ είναι ο $(k+\lambda)$-τανυστής που ορίζεται από τον τύπο

$$(\varphi\otimes\psi)(v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+\lambda}) = \varphi(v_1,\dots,v_k)\cdot\psi(v_{k+1},\dots,v_{k+\lambda})$$

Αν $\lambda\in\mathbb{R} = \mathcal{J}^0(V)$, τότε ορίζουμε $\lambda\otimes\varphi = \lambda\varphi$ και $\varphi\otimes\lambda = \lambda\varphi$. Όπως φαίνεται από τον ορισμό, εν γένει $\varphi\otimes\psi \neq \psi\otimes\varphi$.

<u>1.1. Λήμμα</u> Αν $\varphi,\varphi_i\in\mathcal{J}^k(V)$, $\psi,\psi_i\in\mathcal{J}^\lambda(V)$, $i=1,2$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, $\chi\in\mathcal{J}^\mu(V)$, τότε

(α) $(\varphi_1+\varphi_2)\otimes\psi = \varphi_1\otimes\psi + \varphi_2\otimes\psi$

(β) $\varphi\otimes(\psi_1+\psi_2) = \varphi\otimes\psi_1 + \varphi\otimes\psi_2$

(γ) $(\lambda\varphi)\otimes\psi = \varphi\otimes(\lambda\psi) = \lambda(\varphi\otimes\psi)$

(δ) $(\varphi\otimes\psi)\otimes\chi = \varphi\otimes(\psi\otimes\chi)$

Η απόδειξη είναι άμεση από τον ορισμό.

<u>1.2. Θεώρημα</u> Έστω $\{v_1,\dots,v_n\}$ μια βάση του V και $\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ η δυϊκή βάση του $V^* = \mathcal{J}^1(V)$. Τότε το $\{v_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes v_{i_k}^* : 1\leq i_1,\dots,i_k\leq n\}$ είναι βάση του $\mathcal{J}^k(V)$ και συνεπώς $\dim\mathcal{J}^k(V) = n^k$.

<u>Απόδειξη</u> Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι

$$v_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes v_{i_k}^*(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = \begin{cases} 0, & (i_1,\dots,i_k)\neq(j_1,\dots,j_k) \\ 1, & (i_1,\dots,i_k) = (j_1,\dots,j_k) \end{cases}$$

Αν τώρα $w_1,\dots,w_k\in V$, υπάρχουν $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $1\leq i\leq k$, $1\leq j\leq n$ ώστε

$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, $1 \le i \le k$, οπότε $v_j^*(w_i) = a_{ij}$ για κάθε $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$.
Για κάθε $\varphi \in \mathcal{J}^k(V)$ έχουμε τώρα

$$\varphi(w_1,\dots,w_k) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\, \varphi(v_{j_1},\dots,v_{j_k})$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (v_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{j_k}^*)(w_1,\dots,w_k) \cdot \varphi(v_{j_1},\dots,v_{j_k})$$

Άρα $\varphi = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} \varphi(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) \cdot v_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{j_k}^*$. Αυτό δείχνει ότι το $\{v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^* : 1 \le i_1,\dots,i_k \le n\}$ παράγει τον $\mathcal{J}^k(V)$. Αν τώρα $\lambda_{i_1\cdots i_k} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \lambda_{i_1\cdots i_k} v_{i_1}^* \otimes \cdots v_{i_k}^* = 0$$

τότε για κάθε $1 \le j_1,\dots,j_k \le n$ έχουμε

$$0 = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \lambda_{i_1\cdots i_k} v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^* (v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = \lambda_{j_1\cdots j_k}.$$

Αυτό δείχνει ότι τα $v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^*$, $1 \le i_1,\dots,i_k \le n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αν $f : V \longrightarrow W$ είναι μία γραμμική απεικόνιση, τότε επάγεται μία γραμμική απεικόνιση $f^* : \mathcal{J}^k(W) \longrightarrow \mathcal{J}^k(V)$ με τύπο

$$(f^*\varphi)(v_1,\dots,v_k) = \varphi(f(v_1),\dots,f(v_k))$$

για κάθε $\varphi \in \mathcal{J}^k(W)$ και $v_1,\dots,v_k \in V$. Ο τανυστής $f^*\varphi$ λέγεται pull back του φ μέσω της f. Είναι προφανές ότι η $f^* : \mathcal{J}(W) \longrightarrow \mathcal{J}(V)$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών, δηλαδή $f^*(\varphi \otimes \psi) = f^*\varphi \otimes f^*\psi$.

Ένας από τους σημαντικότερους τανυστές στο $\mathbb{R}^n$ είναι η ορίζουσα. Η συνάρτηση $\det : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου $\det(v_1,\dots,v_n)$ είναι η ορίζουσα του πίνακα με στήλες τις συντεταγμένες των $v_1,\dots,v_n$ είναι ένας n-τανυστής. Μία από τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την ορίζουσα είναι η αντισυμμετρικότητα, δηλαδή η εναλλαγή δύο στηλών επιφέρει μόνο αλλαγή του προσήμου. Γενικεύοντας την έννοια της ορίζουσας, ονομάζουμε έναν k-τανυστή ω στο V <u>αντισυμμετρικό</u> αν

$$\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k) = -\omega(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$$

για κάθε $v_1,\dots,v_k \in V$.

Το σύνολο $\Lambda^k(V)$ των αντισυμμετρικών k-τανυστών του V είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{J}^k(V)$.

Ορίζουμε τώρα την γραμμική απεικόνιση $\mathcal{A}: \mathcal{J}^k(V) \to \mathcal{J}^k(V)$ με τύπο

$$\mathcal{A}\varphi(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k} (\operatorname{sgn}\pi)\,\varphi(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})$$

όπου S_k είναι η ομάδα των μεταθέσεων σε k στοιχεία και $\operatorname{sgn}\pi$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης π.

<u>1.3 Πρόταση</u>. Η γραμμική απεικόνιση $\mathcal{A}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\mathcal{A}(\mathcal{J}^k(V)) = \Lambda^k(V)$

(β) Αν $\omega \in \Lambda^k(V)$, τότε $\mathcal{A}\omega = \omega$

(γ) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$

<u>Απόδειξη</u> (α) Έστω $\sigma = (i\ j)$, δηλαδή η σ είναι η μετάθεση του $\{1,\dots,k\}$ που αντιμεταθέτει τα i, j και αφήνει τα υπόλοιπα αναλλοίωτα. Τότε για κάθε $\varphi \in \mathcal{J}^k(V)$ έχουμε:

$$\mathcal{A}\varphi(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(\operatorname{sgn}\pi)\,\varphi(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(j)},\dots,v_{\pi(i)},\dots,v_{\pi(k)}) =$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(\operatorname{sgn}\pi)\cdot\varphi(v_{\pi\circ\sigma(1)},\dots,v_{\pi\circ\sigma(i)},\dots,v_{\pi\circ\sigma(j)},\dots,v_{\pi\circ\sigma(k)}) =$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{\pi\circ\sigma\in S_k} -(\operatorname{sgn}(\pi\circ\sigma))\cdot\varphi(v_{\pi\circ\sigma(1)},\dots,v_{\pi\circ\sigma(i)},\dots,v_{\pi\circ\sigma(j)},\dots,v_{\pi\circ\sigma(k)}) =$$

$-\mathcal{A}\varphi(v_1,\dots,v_k)$. Άρα $\mathcal{A}\varphi \in \Lambda^k(V)$.

(β) Αν $\omega \in \Lambda^k$, τότε εξ ορισμού $\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = -\omega(v_1,\dots,v_k) = (\operatorname{sgn}\sigma)\,\omega(v_1,\dots,v_k)$, όπου $\sigma = (i\ j)$. Κάθε μετάθεση $\pi \in S_k$ είναι το γινόμενο αντιμεταθέσεων όπως η σ. Συνεπώς $\omega(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}) = (\operatorname{sgn}\pi)\cdot\omega(v_1,\dots,v_k)$ για κάθε $\pi \in S_k$. Άρα

$$\mathcal{A}\omega(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(\operatorname{sgn}\pi)\cdot(\operatorname{sgn}\pi)\,\omega(v_1,\dots,v_k) = \omega(v_1,\dots,v_k),\ \text{αφού } |S_k| = k!.$$

Το (γ) προκύπτει αμέσως από τα (α), (β).

Ο υπόχωρος $\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty}\Lambda^k(V)$ του $\mathcal{J}(V)$, όπου $\Lambda^0(V) = \mathcal{J}^0(V) = \mathbb{R}$, δεν είναι κλειστός ως προς την πράξη του τανυστικού γινομένου. Αν $\omega \in \Lambda^k(V)$ και $\theta \in \Lambda^\lambda(V)$ τότε το <u>εξωτερικό γινόμενο</u> $\omega\wedge\theta$ είναι ο αντισυμμετρικός $(k+\lambda)$-τανυστής με τύπο

$$\omega\wedge\theta = \frac{(k+\lambda)!}{k!\,\lambda!}\mathcal{A}(\omega\otimes\theta)$$

<u>1.4. Λήμμα</u> Αν $\omega,\omega_i\in\Lambda^k(V)$, $\theta,\theta_i\in\Lambda^\lambda(V)$, $i=1,2$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε

(α) $(\omega_1+\omega_2)\wedge\theta = \omega_1\wedge\theta+\omega_2\wedge\theta$

(β) $\omega\wedge(\theta_1+\theta_2) = \omega\wedge\theta_1+\omega\wedge\theta_2$

(γ) $(\lambda\omega)\wedge\theta = \omega\wedge(\lambda\theta) = \lambda(\omega\wedge\theta)$

(δ) $\omega\wedge\theta = (-1)^{k\lambda}\,\theta\wedge\omega$

<u>Απόδειξη</u> Τα (α), (β) και (γ) είναι προφανή. Όσο αφορά το (δ) έχουμε:

$$\mathcal{A}(\omega\otimes\theta)(v_1,\dots,v_{k+\lambda}) = \frac{1}{(k+\lambda)!}\sum_{\pi\in S_{k+\lambda}}(\mathrm{sgn}\,\pi)\,\omega(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}).\theta(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+\lambda)})$$

Θεωρούμε την μετάθεση $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & \lambda & \lambda+1 & \dots & \lambda+k\\ k+1 & k+2 & \dots & k+\lambda & 1 & \dots & k\end{pmatrix} = (1\,2\,\dots\,\lambda+k)^k$,

δηλαδή $\sigma=\big((1\ \lambda+k)\dots(1\ 2)\big)^k$. Άρα $\mathrm{sgn}\,\sigma=\big((-1)^{\lambda+k-1}\big)^k=(-1)^{k\lambda}$. Έχουμε

$$\mathcal{A}(\omega\otimes\theta)(v_1,\dots,v_{k+\lambda}) = \frac{1}{(k+\lambda)!}\sum_{\pi\in S_{k+\lambda}}(\mathrm{sgn}\,\pi)\,\omega(v_{\pi\sigma(\lambda+1)},\dots,v_{\pi\sigma(\lambda+k)}).\theta(v_{\pi\sigma(1)},\dots,v_{\pi\sigma(\lambda)}) =$$

$$(-1)^{k\lambda}\frac{1}{(k+\lambda)!}\sum_{\pi\in S_{k+\lambda}}(\mathrm{sgn}\,\pi\sigma).\theta(v_{\pi\sigma(1)},\dots,v_{\pi\sigma(\lambda)}).\omega(v_{\pi\sigma(\lambda+1)},\dots,v_{\pi\sigma(\lambda+k)}) =$$

$(-1)^{k\lambda}\mathcal{A}(\theta\otimes\omega)$, που αποδεικνύει το (δ).

Από το (δ) του προηγούμενου λήμματος 1.4 προκύπτει ότι $\omega\wedge\omega=0$ για κάθε $\omega\in\Lambda^1(V)=V^*$. Αν $f:V\longrightarrow W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε προφανώς $f^*(\Lambda^k(W))\subset\Lambda^k(V)$. Είναι επίσης άμεσο από τους ορισμούς ότι $f^*\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ f^*$. Προκύπτει λοιπόν ότι $f^*(\omega\wedge\theta)=f^*\omega\wedge f^*\theta$ για κάθε $\omega,\theta\in\Lambda(W)$.

<u>1.5. Πρόταση</u> Αν $\varphi\in\mathcal{J}^k(V)$, $\psi\in\mathcal{J}^\lambda(V)$ και $\mathcal{A}\varphi=0$, τότε

$$\mathcal{A}(\varphi\otimes\psi)=\mathcal{A}(\psi\otimes\varphi)=0$$

<u>Απόδειξη</u> Από τον ορισμό του $\mathcal{A}$ έχουμε:

$$\mathcal{A}(\varphi\otimes\psi)(v_1,\dots,v_{k+\lambda}) = \frac{1}{(k+\lambda)!}\sum_{\pi\in S_{k+\lambda}}(\mathrm{sgn}\,\pi).\varphi(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}).\psi(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+\lambda)})$$

Το σύνολο $G=\{\pi\in S_{k+\lambda}:$ η π αφήνει αναλλοίωτα τα $k+1,\dots,k+\lambda\}$ είναι υποομάδα της

$S_{k+\lambda}$ ισόμορφη με την S_k. Έστω H το σύνολο των δεξιών συμπλόκων της G στην $S_{k+\lambda}$. Τότε η $S_{k+\lambda}$ είναι η ξένη ένωση των στοιχείων του H. Κάθε στοιχείο του H είναι της μορφής $G\cdot\sigma$ για κάποιο $\sigma\in S_{k+\lambda}$. Ειδικά για $\sigma=1$ παίρνουμε την G. Έχουμε τώρα

$$\sum_{\pi\in G}(\operatorname{sgn}\pi)\,\varphi(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\cdot\psi(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+\lambda)})=$$

$$\Big(\sum_{\pi\in S_k}(\operatorname{sgn}\pi)\cdot\varphi(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\Big)\cdot\psi(v_{k+1},\dots,v_{k+\lambda})=$$

$$k!\,\mathcal{A}\varphi(v_1,\dots,v_k)\cdot\psi(v_{k+1},\dots,v_{k+\lambda})=0$$

Έστω τώρα ότι $\sigma\notin G$. Θέτουμε $v_{\sigma(i)}=w_i$, $1\leq i\leq k+\lambda$, οπότε έχουμε:

$$\sum_{\pi\in G\cdot\sigma}(\operatorname{sgn}\pi)\,\varphi(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\,\psi(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+\lambda)})=$$

$$\sum_{\pi\sigma^{-1}\in G}(\operatorname{sgn}\pi)\cdot\varphi(v_{\pi\sigma^{-1}\sigma(1)},\dots,v_{\pi\sigma^{-1}\sigma(k)})\,\psi(v_{\pi\sigma^{-1}\sigma(k+1)},\dots,v_{\pi\sigma^{-1}\sigma(k+\lambda)})=$$

$$(\operatorname{sgn}\sigma)\sum_{\pi\sigma^{-1}\in G}(\operatorname{sgn}\pi\sigma^{-1})\cdot\varphi(w_{\pi\sigma^{-1}(1)},\dots,w_{\pi\sigma^{-1}(k)})\cdot\psi(w_{\pi\sigma^{-1}(k+1)},\dots,w_{\pi\sigma^{-1}(k+\lambda)})=0$$

όπως δείξαμε προηγουμένως. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{A}(\varphi\otimes\psi)=0$, και όμοια αποδεικνύεται ότι $\mathcal{A}(\psi\otimes\varphi)=0$.

<u>1.6. Πόρισμα</u>. Αν $\omega\in\Lambda^k(V)$, $\theta\in\Lambda^\lambda(V)$ και $\eta\in\Lambda^\mu(V)$, τότε

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}(\omega\otimes\theta)\otimes\eta)=\mathcal{A}(\omega\otimes\mathcal{A}(\theta\otimes\eta))=\mathcal{A}(\omega\otimes\theta\otimes\eta)$$

<u>Απόδειξη</u>. Αφού $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\theta\otimes\eta)-\theta\otimes\eta)=\mathcal{A}(\theta\otimes\eta)-\mathcal{A}(\theta\otimes\eta)=0$, από την πρόταση 1.5 έχουμε

$$0=\mathcal{A}(\omega\otimes(\mathcal{A}(\theta\otimes\eta)-\theta\otimes\eta))=\mathcal{A}(\omega\otimes\mathcal{A}(\theta\otimes\eta))-\mathcal{A}(\omega\otimes\theta\otimes\eta)\quad \text{ο.ε.δ.}$$

<u>1.7. Πόρισμα</u>. Αν $\omega\in\Lambda^k(V)$, $\theta\in\Lambda^\lambda(V)$ και $\eta\in\Lambda^\mu(V)$, τότε

$$(\omega\wedge\theta)\wedge\eta=\omega\wedge(\theta\wedge\eta)=\frac{(k+\lambda+\mu)!}{k!\,\lambda!\,\mu!}\mathcal{A}(\omega\otimes\theta\otimes\eta)$$

<u>Απόδειξη</u>. Έχουμε

$$(\omega\wedge\theta)\wedge\eta=\frac{(k+\lambda+\mu)!}{(k+\lambda)!\,\mu!}\mathcal{A}((\omega\wedge\theta)\otimes\eta)=\frac{(k+\lambda+\mu)!}{(k+\lambda)!\,\mu!}\cdot\frac{(k+\lambda)!}{k!\,\lambda!}\mathcal{A}(\mathcal{A}(\omega\otimes\theta)\otimes\eta)=$$

$$\frac{(k+\lambda+\mu)!}{k!\,\lambda!\,\mu!}\mathcal{A}(\omega\otimes\theta\otimes\eta)$$, από το πόρισμα 1.6. Όμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα.

Στη συνέχεια μπορούμε λοιπόν να γράφουμε ω∧θ αντί (ω∧θ)$^{\mathcal{A}}$. Το αντίστοιχο του Θεωρήματος 1.2 για το $\Lambda^k(V)$ είναι το ακόλουθο.

1.8. Θεώρημα (α) Αν $k>n=\dim V$, τότε $\Lambda^k(V)=0$

(β) Αν $0\leq k\leq n$, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι μια βάση του V με δυϊκή βάση $\{v_1^*,\ldots,v_n^*\}$ του $\Lambda^1(V)=V^*$, τότε το $\{v_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge v_{i_k}^*: 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n\}$ είναι βάση του $\Lambda^k(V)$ και συνεπώς $\dim\Lambda^k(V)=\binom{n}{k}$.

Απόδειξη (α) Αν $k>n$ και $\omega\in\Lambda^k(V)$, τότε για οποιαδήποτε βασικά διανύσματα $v_{i_1},\ldots,v_{i_k}$ τουλάχιστον δυο από αυτά ταυτίζονται και συνεπώς $\omega(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})=0$, αφού η ω είναι αντισυμμετρική. Άρα $\omega=0$.

(β) Έστω $0\leq k\leq n$. Αφού $\mathcal{A}(\mathcal{J}^k(V))=\Lambda^k(V)$, η εικόνα της βάσης του $\mathcal{J}^k(V)$ παράγει τον $\Lambda^k(V)$. Όμως από το πόρισμα 1.7 προκύπτει με επαγωγή ότι $k!\,\mathcal{A}(v_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes v_{i_k}^*)=v_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge v_{i_k}^*$. Αν μεταθέσουμε την σειρά των δεικτών, τότε, το δεξιό μέλος παραμένει το ίδιο με πιθανή μόνο την αλλαγή του προσήμου. Άρα το $\{v_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge v_{i_k}^*: 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n\}$ παράγει τον $\Lambda^k(V)$.
Απ' την άλλη μεριά αν $\lambda_{i_1\ldots i_k}\in\mathbb{R}$, $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$ ώστε

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\lambda_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge v_{i_k}^*=0$$

τότε για κάθε $1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n$ έχουμε:

$$0=\Big(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\lambda_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge v_{i_k}^*\Big)(v_{j_1},\ldots,v_{j_k})=$$

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\lambda_{i_1\ldots i_k}\,k!\,\mathcal{A}(v_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes v_{i_k}^*)(v_{j_1},\ldots,v_{j_k})=$$

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\lambda_{i_1\ldots i_k}\,k!\,\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(\operatorname{sgn}\pi)\cdot v_{i_1}^*(v_{j_{\pi(1)}})\cdots v_{i_k}^*(v_{j_{\pi(k)}})=\lambda_{j_1\ldots j_k}$$

Άρα τα $v_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge v_{i_k}^*$, $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ο.ε.δ.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο $\Lambda^n(V)$, όπου $n=\dim V$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.8, $\dim\Lambda^n(V)=\binom{n}{n}=1$. Ένα μη-μηδενικό στοιχείο του $\Lambda^n(V)$ είναι προφανώς η ορίζουσα det. Συνεπώς κάθε μη-μηδενικό στοιχείο του $\Lambda^n(V)$ είναι μη-μηδενικό πολλαπλάσιο της ορίζουσας.

<u>1.9. Θεώρημα</u> Έστω $\{v_1,\dots,v_n\}$ μια βάση του V και $\omega\in\Lambda^n(V)$. Αν $w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j$, $1\le i\le n$, τότε
$$\omega(w_1,\dots,w_n)=\omega(v_1,\dots,v_n)\cdot\det(a_{ij})$$
<u>Απόδειξη</u> Έχουμε $\omega(w_1,\dots,w_n)=\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\,\omega(v_{j_1},\dots,v_{j_n})=$

$\sum_{\pi\in S_n}a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\,\omega(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(n)})=\sum_{\pi\in S_n}(\operatorname{sgn}\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\,\omega(v_1,\dots,v_n)=$
$\omega(v_1,\dots,v_n)\cdot\det(a_{ij})$.

Αν $\Lambda(V)=\bigoplus_{k=0}^{n}\Lambda^k(V)$, τότε η αναμεταθετική άλγεβρα $\Lambda(V)$ λέγεται εξωτερική άλγεβρα του V.

<u>1.10. Παρατήρηση</u> Έστω $\{e_1,e_2,e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και $\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ η δυϊκή της βάσης του $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Για κάθε $\omega\in\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ ώστε $\omega=a_1e_1^*+a_2e_2^*+a_3e_3^*$ και η απεικόνιση $\varphi:\mathbb{R}^3\to\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ με $\varphi(a_1,a_2,a_3)=a_1e_1^*+a_2e_2^*+a_3e_3^*$ είναι ισομορφισμός. Επίσης για κάθε $\theta\in\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ υπάρχουν $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$ ώστε
$$\theta=\beta_1\,e_2^*\wedge e_3^*+\beta_2\,e_3^*\wedge e_1^*+\beta_3\,e_1^*\wedge e_2$$
και η απεικόνιση $\psi:\mathbb{R}^3\to\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ με $\psi(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\theta$ είναι ισομορφισμός. Τέλος, η απεικόνιση $\mu:\mathbb{R}\to\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ με $\mu(\gamma)=\gamma\cdot e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*$ είναι ισομορφισμός. Αν τώρα $a=(a_1,a_2,a_3)$ και $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ τότε
$$\varphi(\alpha)\wedge\varphi(\beta)=\psi(\alpha\times\beta)$$
όπου $\alpha\times\beta$ είναι το διανυσματικό (ή "εξωτερικό") γινόμενο των α,β. Επίσης, $\varphi(\alpha)\wedge\psi(\beta)=\mu(\langle\alpha,\beta\rangle)$. Έτσι έχουμε μια περιγραφή της εξωτερικής άλγεβρας του $\mathbb{R}^3$ μέσω διανυσμάτων, όπου το εξωτερικό γινόμενο 1-τανυστών παρίσταται από το διανυσματικό γινόμενο διανυσμάτων, και το εξωτερικό γινόμενο ενός 1-τανυστή μ' έναν αντισυμμετρικό 2-τανυστή παρίσταται από το (ευκλείδειο) εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

<u>2. Διανυσματικά πεδία και διαφορικές μορφές στον ευκλείδειο χώρο.</u>

Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο. Για κάθε $x\in A$, το σύνολο $T_xA=\{x\}\times\mathbb{R}^n$ γίνεται κατά φυσικό τρόπο διανυσματικός χώρος, ορίζοντας
$$(x,u)+(x,v)=(x,u+v)\quad\text{και}\quad\lambda(x,v)=(x,\lambda v)\quad,u,v\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Το T_xA εφοδιασμένο μ' αυτή την δομή διανυσματικού χώρου λέγεται *εφαπτόμενος χώρος* του A στο σημείο x και τα στοιχεία του συμβολίζονται συνήθως με $v(x) \equiv v_x = (x,v)$. Παρατηρούμε ότι $TA = \bigcup_{x\in A} \{x\}\times T_xA = A\times\mathbb{R}^n$.

Ενα *διανυσματικό πεδίο* στο A είναι μια συνάρτηση $\xi : A \longrightarrow TA$ ώστε $\xi(x) \in T_xA$ για κάθε $x\in A$. Το ξ λέγεται C^r, $0\le r\le\infty$, αν είναι C^r συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι για κάθε διανυσματικό πεδίο ξ στο A υπάρχει μια μονοσήμαντα ορισμένη συνάρτηση $f : A\longrightarrow\mathbb{R}^n$ ώστε $\xi(x)=(x,f(x))$ για κάθε $x\in A$. Το ξ είναι C^r τότε και μόνον τότε αν η f είναι C^r συνάρτηση. Η f λέγεται *κύριο μέρος* (principal part) του ξ.

Ολες οι δομές που μπορούν να οριστούν στο $\mathbb{R}^n$ (π.χ. εσωτερικό γινόμενο) μπορούν να μεταφερθούν στο T_xA για κάθε $x\in A$. Ετσι στο σύνολο των διανυσματικών πεδίων του A ορίζονται κατά σημείο όλες οι πράξεις που μπορούν να οριστούν μεταξύ διανυσμάτων.

Για κάθε $x\in A$ ορίζεται ο χώρος $\Lambda^k(T_xA)$, $0\le k\le n$. Εστω $\Lambda^k(A)=\bigcup_{x\in A}\Lambda^k(T_xA)$. Μια *κ-διαφορική μορφή* ή απλώς *κ-μορφή* στο A είναι μια συνάρτηση $\omega : A\longrightarrow\Lambda^k(A)$ ώστε $\omega(x)\in\Lambda^k(T_xA)$ για κάθε $x\in A$. Από το Θεώρημα 1.8 για κάθε $x\in A$ υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα $a_{i_1\dots i_k}(x)\in\mathbb{R}$, $1\le i_1<\dots<i_k\le n$ ώστε

$$\omega(x) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k}(x)\, e_{i_1}^*(x)\wedge\dots\wedge e_{i_k}^*(x)$$

όπου $\{e_1^*(x),\dots,e_n^*(x)\}$ είναι η δυϊκή της κανονικής βάσης $\{e_1(x),\dots,e_n(x)\}$ του T_xA και $e_i(x)=(x,e_i)$, $1\le i\le n$. Η κ-μορφή ω λέγεται C^r αν όλες οι συναρτήσεις $a_{i_1\dots i_k} : A\longrightarrow\mathbb{R}$, $1\le i_1<\dots<i_k\le n$ είναι C^r, $0\le r\le\infty$. Για λόγους απλότητας, στα επόμενα με τους όρους διανυσματικό πεδίο και διαφορική μορφή θα εννοούμε C^∞ διανυσματικό πεδίο και C^∞ διαφορική μορφή, εκτός αν κάτι άλλο ρητά αναφέρεται.

Ολες οι πράξεις που ορίζονται για αντισυμμετρικούς τανυστές, ορίζονται και για διαφορικές μορφές με ορισμό κατά σημείο. Ετσι ορίζονται το άθροισμα $\omega+\theta$ διαφορικών μορφών, το γινόμενο $f\omega$ μιας C^∞ συνάρτησης με μια διαφορική μορφή και το εξωτερικό γινόμενο $\omega\wedge\theta$. Παρατηρούμε ότι $f\omega = f\wedge\omega$. Το σύνολο των κ-μορφών του A συμβολίζεται με $\Omega^k(A)$, θέσευ. Παρατηρούμε ότι το $\Omega^0(A)$ είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των C^∞ συναρτήσεων του A στο $\mathbb{R}$. Το ευθύ άθροισμα $\Omega(A)=\bigoplus_{k=0}^{n}\Omega^k(A)$, εφοδιασμένο με το εξωτερικό γινόμενο γίνεται αντιμεταθετική άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$ και λέγεται άλγεβρα Grassmann του A.

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση. Τότε $Df(x)\in\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $x\in A$. Ορίζεται λοιπόν η 1-μορφή df στο A με τύπο

$$df(x)(v_x)=Df(x)(v)$$

που λέγεται διαφορικό της f.

Ειδικά αν $\pi_i:A\to\mathbb{R}$ είναι η προβολή στην i-συντεταγμένη, $1\leq i\leq n$ τότε $D\pi_i(x)=(0\dots 0\ 1\ 0\dots 0)$ για κάθε $x\in A$, όπου το 1 βρίσκεται στην θέση i και συνεπώς αν $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ τότε

$$d\pi_i(x)(v_x)=D\pi_i(x)(v)=v_i$$

Έτσι έχουμε $d\pi_i(x)(e_j(x))=\delta_{ij}$ για κάθε $1\leq i,j\leq n$. Αυτό δείχνει ότι $d\pi_i(x)=e_i^*(x)$. Οι βασικές διαφορικές μορφές $d\pi_i$, $1\leq i\leq n$ συμβολίζονται παραδοσιακά με dx_i, $1\leq i\leq n$, αφού η π_i είναι η προβολή στην συντεταγμένη x_i. Έτσι κάθε k-μορφή ω γράφεται μονοσήμαντα στο A

$$\omega=\sum_{1\leq i_1<\dots<i_k} a_{i_1\dots i_k}\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

Ειδικά για την df έχουμε:

$$df(x)(v_x)=Df(x)(v)=\sum_{i=1}^{n}\partial_i f(x)\cdot v_i=\sum_{i=1}^{n}\partial_i f(x)\cdot dx_i(x)(v_x)$$

Άρα $df=\partial_1 f\cdot dx_1+\dots+\partial_n f\cdot dx_n$. Τέλος για κάθε n-μορφή ω στο A υπάρχει μια μονοσήμαντα ορισμένη C^∞ συνάρτηση $g:A\to\mathbb{R}$ ώστε

$$\omega=g\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_n.$$

Έστω τώρα $A\subset\mathbb{R}^n$ και $B\subset\mathbb{R}^m$ δύο ανοιχτά σύνολα και $F:A\to B$ μια C^∞ συνάρτηση. Για κάθε $x\in A$ ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $T_xF:T_xA\to T_xB$ με τύπο $T_xF(v_x)=(DF(x)(v))_{F(x)}$, που λέγεται εφαπτόμενη γραμμική απεικόνιση της F στο σημείο x. Η T_xF επάγει μια γραμμική απεικόνιση $(T_xF)^*:\Lambda(T_{F(x)}B)\to\Lambda(T_xA)$. Για κάθε k-μορφή ω στο B ορίζεται λοιπόν η k-μορφή $F^*\omega$ στο A με τύπο

$$(F^*\omega)(x) = (T_xF)^*(\omega(F(x)))$$

η πιο αναλυτικά, για κάθε $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{R}^n$

$(F^*\omega)(x)(v_1,\dots,v_k) = \omega(F(x))\big((DF(x)(v_1))_{F(x)},\dots,(DF(x)(v_k))_{F(x)}\big)$

2.1. Πρόταση. Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^m$ δυο ανοιχτά σύνολα και $F=(F_1,\dots,F_m): A\to B$ μια C^∞ συνάρτηση. Τότε

(i) $F^*(dx_i) = \sum_{j=1}^{n}\partial_jF_i\,dx_j$, $1\le i\le m$

(ii) $F^*(\omega_1+\omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2$, για κάθε $\omega_1,\omega_2\in\Omega(B)$

(iii) $F^*(g\omega) = (g\circ F)\cdot F^*\omega$, για κάθε $g\in\Omega^0(B)$, $\omega\in\Omega(B)$

(iv) $F^*(\omega\wedge\theta) = F^*\omega\wedge F^*\theta$, για κάθε $\omega,\theta\in\Omega(B)$

Απόδειξη (i) Αν $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ τότε έχουμε

$F^*(dx_i)(x)(v_x) = dx_i(F(x)).\big((DF(x)(v))_{F(x)}\big) =$

$dx_i(F(x))\Big(\sum_{j=1}^{n}\partial_jF_1(x)v_j,\dots,\sum_{j=1}^{n}\partial_jF_m(x)v_j\Big)_{F(x)} =$

$\sum_{j=1}^{n}\partial_jF_i(x)v_j = \sum_{j=1}^{n}\partial_jF_i(x).\ dx_j(x)(v_x)$

Τα (ii), (iii) και (iv) είναι προφανή.

2.2. Θεώρημα. Αν $A,B\subset\mathbb{R}^n$ είναι δυο ανοιχτά σύνολα και $F:A\to B$ μια C^∞ συνάρτηση τότε για κάθε n-μορφή ω στο B,

$$(F^*\omega)(x) = (\det DF(x)).\ \omega(F(x)),\quad x\in A.$$

Απόδειξη Υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $g: B\to\mathbb{R}$ ώστε $\omega = g\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$. Έτσι έχουμε $F^*\omega = (g\circ F)\cdot F^*(dx_1\wedge\dots\wedge dx_n)$, ενώ

$F^*(dx_1\wedge\dots\wedge dx_n)(x)(v_1(x),\dots,v_n(x)) =$

$(dx_1\wedge\dots\wedge dx_n)(F(x))\big((DF(x)v_1)_{F(x)},\dots,(DF(x)v_n)_{F(x)}\big) =$

$(\det DF(x)).\ (dx_1\wedge\dots\wedge dx_n)(F(x)).(v_1(F(x)),\dots,v_n(F(x)))$

από το Θεώρημα 1.9, για κάθε βάση $\{v_1,\dots,v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Άρα

$F^*(dx_1\wedge\dots\wedge dx_n) = (\det DF)\cdot(dx_1\wedge\dots\wedge dx_n)$

Στην άλγεβρα $\Omega(A)$, όπου το $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό σύνολο, ορίζεται ένας τελεστής d που γενικεύει το διαφορικό μιας συνάρτησης.

2.3. Θεώρημα Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο. Υπάρχει μία μονοσήμαντα ορισμένη γραμμική απεικόνιση $d:\Omega(A)\to\Omega(A)$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Αν $\omega\in\Omega^k(A)$, τότε $d\omega\in\Omega^{k+1}(A)$

(ii) Αν $f\in\Omega^0(A)$, τότε df είναι το διαφορικό της f.

(iii) Αν $\omega\in\Omega^k(A)$, $\theta\in\Omega^\lambda(A)$, τότε $d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^k\omega\wedge d\theta$

(iv) $d\circ d=0$, δηλαδή $d(d\omega)=0$ για κάθε $\omega\in\Omega(A)$.

<u>Απόδειξη</u>. Πρώτα θ' αποδείξουμε την μοναδικότητα του d. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει τελεστής $d:\Omega(A)\to\Omega(A)$ με τις ιδιότητες (i)-(iv). Κάθε k-μορφή ω στο A γράφεται μονοσήμαντα

$$\omega=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k} a_{i_1\dots i_k}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

όπου $a_{i_1\dots i_k}\in\Omega^0(A)$. Τότε έχουμε

$$d\omega=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} da_{i_1\dots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}+\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k}\, d(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})$$

Όμως σύμφωνα με τα (iii), (iv) έχουμε

$$d(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) = d(dx_{i_1})\wedge dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} - dx_{i_1}\wedge d(dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) =$$

$$0 - dx_{i_1}\wedge d(dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) = \dots = (-1)^k dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_{k-1}}\wedge d(dx_{i_k}) = 0.$$

Και συνεπώς λοιπόν θα πρέπει

$$d\omega=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} da_{i_1\dots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} \qquad (*)$$

Αντίστροφα αν ο d ορίζεται από την $(*)$ τότε προφανώς ικανοποιούνται τα (i), (ii). Αν $\theta=\sum_{1\le j_1<\dots<j_\lambda\le n} b_{j_1\dots j_\lambda}\, dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_\lambda}\in\Omega^\lambda(A)$, τότε

$$d(\omega\wedge\theta) = d\Big(\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_\lambda\le n}} a_{i_1\dots i_k} b_{j_1\dots j_\lambda}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_\lambda}\Big) =$$

$$\sum d(a_{i_1\dots i_k})\cdot b_{j_1\dots j_\lambda}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_\lambda} + \sum a_{i_1\dots i_k}\, d(b_{j_1\dots j_\lambda})\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_\lambda} =$$

$$\sum d(a_{i_1\dots i_k})\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\wedge b_{j_1\dots j_\lambda}\, dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_\lambda} +$$

$$(-1)^k \sum a_{i_1\dots i_k}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\wedge d(b_{j_1\dots j_\lambda})\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_\lambda} =$$

$d\omega\wedge\theta + (-1)^k\omega\wedge d\theta$, που δείχνει το (iii).

Αν τώρα $f\in\Omega^0(A)$, τότε $df=\sum_{i=1}^n \partial_i f\cdot dx_i$, οπότε

$$d(df)=\sum_{i=1}^n d(\partial_i f)\wedge dx_i = \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n \partial^2_{j,i} f\cdot dx_j\Big)\wedge dx_i =$$

$$\sum_{(i,j)=1}^n \partial^2_{j,i} f\, dx_j\wedge dx_i = \sum_{i<j} \partial^2_{j,i} f\cdot(dx_j\wedge dx_i + dx_i\wedge dx_j) = 0$$

από το Θεώρημα του Schwartz.

Άρα λοιπόν $d(d\omega) = d\left(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} da_{i_1\dots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\right) =$

$\sum d(da_{i_1\dots i_k})\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} - \sum da_{i_1\dots i_k}\wedge d(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) = 0-0 = 0$

που αποδεικνύει το Θεώρημα.

<u>2.4. Πρόταση</u> Αν $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^m$ είναι δύο ανοιχτά σύνολα και $F: A\longrightarrow B$ μία C^∞ συνάρτηση, τότε $F^*\circ d = d\circ F^*$, δηλαδή $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ για κάθε $\omega\in\Omega(B)$.

<u>Απόδειξη</u> Αν $\omega\in\Omega^0(B)$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε $F^*(d\omega) = d(\omega\circ F) = d(F^*\omega)$. Αν $\omega = g\,dx_i\in\Omega^1(B)$, όπου $g: B\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι μία C^∞ συνάρτηση, τότε έχουμε:

$d(F^*(g\,dx_i)) = d(F^*g\cdot F^*(dx_i)) = d(F^*g)\wedge F^*(dx_i) - F^*g\cdot d(F^*dx_i) =$
$F^*(dg)\wedge F^*(dx_i) - F^*g\cdot d(d\,F^*x_i) = F^*(dg\wedge dx_i) - 0 = F^*(d(g\,dx_i))$

Λόγω της γραμμικότητας της F^*, αυτό αποδεικνύει τον τύπο για 1-μορφές. Η απόδειξη γίνεται τώρα επαγωγικά. Έστω ότι έχουμε αποδείξει τον τύπο για λ-μορφές, όπου $\lambda<k$ και $\omega = g\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\in\Omega^k(A)$. Τότε

$d(F^*\omega) = d\left(F^*(g\,dx_{i_1})\wedge F^*(dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})\right) =$
$d(F^*(g\,dx_{i_1}))\wedge F^*(dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) - F^*(g\,dx_{i_1})\wedge d(F^*(dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})) =$
$F^*(d(g\,dx_{i_1}))\wedge F^*(dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) - F^*(g\,dx_{i_1})\wedge F^*(d(dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})) =$
$F^*(d(g\,dx_{i_1})\wedge dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) - 0 = F^*(d\omega)$. Λόγω της γραμμικότητας της d, αυτό δείχνει τον τύπο για k-μορφές.

Μία μορφή ω στο ανοιχτό σύνολο A λέγεται <u>κλειστή</u> αν $d\omega=0$ και <u>ακριβής</u> αν υπάρχει $\theta\in\Omega(A)$ ώστε $d\theta=\omega$. Από το Θεώρημα 2.3 (iv) προκύπτει ότι κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

<u>2.5. Παράδειγμα</u> Έστω $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ και ω η 1-μορφή στο A με τύπο

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $d\omega=0$, δηλαδή η ω είναι κλειστή. Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι η ω δεν είναι ακριβής. Έστω ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ ώστε $\omega=df$. Τότε

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \partial_2 f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{για κάθε } (x,y)\in A$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to A$ με τύπο $F(t)=(\cos t,\sin t)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε για κάθε $t\in\mathbb{R}$

$$(f\circ F)'(t) = \partial_1 f(F(t))\cdot(-\sin t) + \partial_2 f(F(t))\cdot\cos t$$
$$= \frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cos t = 1$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$2\pi = \int_0^{2\pi} dt = \int_0^{2\pi}(f\circ F)'(t)\,dt = f(F(2\pi)) - f(F(0)) = f(1,0)-f(1,0) = 0,$$ άτοπο!

<u>2.6. Ορισμός</u> Ένα ανοιχτό σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$ λέγεται <u>αστρόμορφο</u> (star shaped) ως προς το σημείο $x_0\in A$, αν $[x_0,x]\subset A$ για κάθε $x\in A$.

Κάθε κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι αστρόμορφο και βέβαια το ίδιο το $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ δεν είναι αστρόμορφο. Αν $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό αστρόμορφο σύνολο ως προς το 0 και $\omega=\sum_{i=1}^n a_i\,dx_i$ μια ακριβής 1-μορφή στο A, υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $df=\omega$, δηλαδή $\partial_i f=a_i$, $1\le i\le n$. Για κάθε $x=(x_1,\dots,x_n)\in A$ θεωρούμε την συνάρτηση $\gamma_x:[0,1]\to A$ με τύπο $\gamma_x(t)=tx$. Τότε $\gamma_x([0,1])=[0,x]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$f(x) = \int_0^1 (f\circ\gamma_x)'(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_i f(\gamma_x(t))\cdot x_i\,dt = \sum_{i=1}^n\left(\int_0^1 a_i(tx)\,dt\right)x_i$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται και χρησιμοποιείται για την απόδειξη του παρακάτω Θεμελιώδους Θεωρήματος.

<u>2.7. Θεώρημα (Λήμμα του Poincaré)</u> Αν το $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο που είναι αστρόμορφο ως προς το 0, τότε κάθε κλειστή μορφή στο A είναι ακριβής.

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $K:\Omega^k(A)\to\Omega^{k-1}(A)$, $1\le k\le n$, με τύπο

$$(K\omega)(x) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\ \sum_{\lambda=1}^{k}(-1)^{\lambda-1}\left(\int_0^1 t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\right)x_{i_\lambda}\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx_{i_\lambda}}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

όπου $x=(x_1,\dots,x_n)$, $\omega=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k}\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$ και το σύμβολο $\widehat{dx_{i_\lambda}}$ σημαίνει ότι ο όρος dx_{i_λ} παραλείπεται από το γινόμενο. Αρκεί να δείξουμε τώρα ότι

$$\omega = K(d\omega)+d(K\omega)\quad \text{για κάθε } \omega\in\Omega^k(A)$$

γιατί τότε αν η ω είναι κλειστή θα έχουμε $\omega=d(K\omega)$. Υπολογίζουμε πρώτα καθε απο του αθροισματος χωριστά.

$$d(k\omega)(x)=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{\lambda=1}^{k}(-1)^{\lambda-1}d\Big[\Big(\int_0^1 t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_{i_\lambda}\Big]\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx_{i_\lambda}}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

και $d\Big[\Big(\int_0^1 t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_{i_\lambda}\Big]=\sum_{j=1}^{n}\partial_j\Big[\Big(\int_0^1 t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_{i_\lambda}\Big]dx_j =$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(\int_0^1\partial_j\big(t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\big)dt\Big)x_{i_\lambda}+\Big(\int_0^1 t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)\partial_j(x_{i_\lambda})\Big]dx_j =$$

$$\Big(\int_0^1 t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)dx_{i_\lambda}+\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(\int_0^1 t^{k}\partial_j a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_{i_\lambda}\Big]dx_j\ .$$

Αρα $d(k\omega)(x)=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{\lambda=1}^{k}(-1)^{\lambda-1}\Big(\int_0^1 t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)dx_{i_\lambda}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx_{i_\lambda}}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$

$$+\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{\lambda=1}^{k}(-1)^{\lambda-1}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^{k}\partial_j a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_{i_\lambda}\Big]dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx_{i_\lambda}}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}=$$

$$k\cdot\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\Big(\int_0^1 t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

$$+\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{\lambda=1}^{k}(-1)^{\lambda-1}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^{k}\partial_j a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_{i_\lambda}\Big]dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx_{i_\lambda}}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}.$$

Επειδη $d\omega=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\partial_j a_{i_1\dots i_k}\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$, εχουμε

$$k(d\omega)(x)=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{k}(-1)^{\lambda}\Big(\int_0^1 t^{k}\partial_j a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_{i_\lambda}\,dx_{i_0}\wedge\dots\wedge\widehat{dx_{i_\lambda}}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}=$$

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^{k}\partial_j a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_j\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

$$+\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{k}(-1)^{\lambda}\Big(\int_0^1 t^{k}\partial_j a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_{i_\lambda}\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx_{i_\lambda}}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}.$$

Προσθετοντας λοιπον, τα τριπλα αθροισματα αλληλοαναιρούνται και εχουμε:

$$d(k\omega)(x)+k(d\omega)(x)=$$

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\Big(\int_0^1 k\cdot t^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}+\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^{k}\partial_j a_{i_1\dots i_k}(tx)\,dt\Big)x_j\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}=$$

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\Big[\int_0^1\Big(kt^{k-1}a_{i_1\dots i_k}(tx)+\sum_{j=1}^{n}t^{k}\partial_j a_{i_1\dots i_k}(tx)x_j\Big)dt\Big]dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} =$$

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\left[\int_0^1 f'_{i_1\dots i_k}(t)\,dt\right]dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$, όπου $f_{i_1\dots i_k}:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι

η συνάρτηση με τύπο $f_{i_1\dots i_k}(t)=t^k a_{i_1\dots i_k}(tx)$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε λοιπόν

$$d(K\omega)(x)+K(d\omega)(x)=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\left[f_{i_1\dots i_k}(1)-f_{i_1\dots i_k}(0)\right]dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}=$$

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}a_{i_1\dots i_k}(x)\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}=\omega$$ ο.ε.δ.

<u>2.8. Παρατήρηση</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^3$ ένα ανοιχτό σύνολο. Από την παρατήρηση 1.10 προκύπτει ότι κάθε 1 ή 2-μορφή στο A παρίσταται από ένα διανυσματικό πεδίο στο A. Αν $\mathcal{X}(A)$ είναι το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων του A, τότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0(A) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{X}(A) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathcal{X}(A) & \xrightarrow{\text{div}} & \Omega^0(A)\\
{\scriptstyle id}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & {\scriptstyle \psi}\downarrow & & {\scriptstyle \mu}\downarrow\\
\Omega^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(A)
\end{array}$$

όπου φ,ψ,μ είναι οι ισομορφισμοί που ορίζονται όπως στην παρατήρηση 1.10. Απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Συνεπώς ο τελεστής $d:\Omega^1(A)\to\Omega^2(A)$ αναπαρίσταται από τον στροβιλισμό curl διανυσματικών πεδίων και ο $d:\Omega^2(A)\to\Omega^3(A)$ από την απόκλιση div.

Ο τελεστής d που ορίσαμε στην παράγραφο αυτή λέγεται <u>εξωτερική παράγωγος</u> και η $d\omega$ <u>εξωτερική παράγωγος</u> ή <u>διαφορικό</u> της διαφορικής μορφής ω. Η παρατήρηση 2.8 δείχνει ότι ο εξωτερικός διαφορικός λογισμός γενικεύει την διανυσματική ανάλυση στον $\mathbb{R}^3$ σε χώρους με μεγαλύτερη διάσταση.

<u>3. Το Θεώρημα του Stokes για αλυσίδες</u>

Ένας (λείος) k-κύβος στο σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, $k\ge0$, είναι μια C^∞ συνάρτηση $\gamma:[0,1]^k\to A$, όπου $[0,1]^k=[0,1]\times\dots\times[0,1]$ k-φορές. Όταν λέμε ότι η γ είναι C^∞ εννοούμε ότι επεκτείνεται σε μια C^∞ συνάρτηση σε κάποια ανοιχτή περιοχή του $[0,1]^k$. Για $k=0$, θέτουμε $[0,1]^0=\{0\}$, ώστε ένας 0-κύβος στο A είναι ένα σημείο του A. Ένας 1-κύβος είναι μια λεία καμπύλη.

Για $k>0$ ορίζουμε ως i-κάτω πλευρά $\lambda_i^0\gamma$ του k-κύβου γ και ως i-άνω πλευρά $\lambda_i^1\gamma$ του γ τους $(k-1)$-κύβους με τύπους

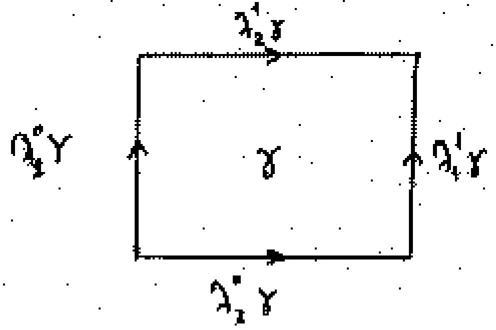
$$\lambda_i^\varepsilon\gamma(x_1,\dots,x_{k-1}) = \gamma(x_1,\dots,x_{i-1},\varepsilon,x_i,\dots,x_k)\ ,\quad \varepsilon=0,1,\quad 1\le i\le k$$

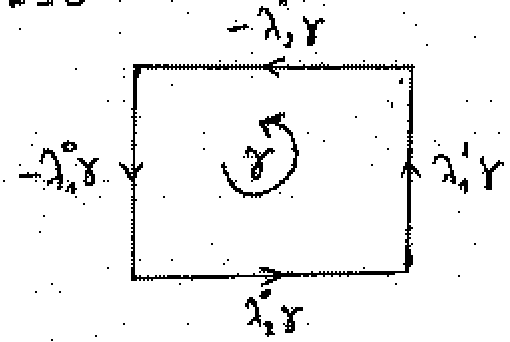
Τότε για $1\le i<j\le k$ ισχύει $\lambda_i^\varepsilon\lambda_j^\delta = \lambda_{j-1}^\delta\lambda_i^\varepsilon$, όπως εύκολα διαπιστώνουμε.

Έστω $Q_k(A)$, $k\ge 0$, η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από τους k-κύβους στο A. Για $k<0$ θέτουμε $Q_k(A)=0$. Τα στοιχεία της $Q_k(A)$ λέγονται (λείες) <u>k-αλυσίδες</u> στο A, και είναι γραμμικοί συνδυασμοί k-κύβων με ακέραιους συντελεστές. Αν γ είναι ένας k-κύβος στο A τότε η $(k-1)$-αλυσίδα

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\lambda_i^0\gamma-\lambda_i^1\gamma)$$

λέγεται <u>σύνορο</u> του γ. Επεκτείνοντας γραμμικά ορίζεται τώρα ένας ομομορφισμός ομάδων $\partial: Q_k(A)\longrightarrow Q_{k-1}(A)$, $k\ge 0$





<u>3.1. Λήμμα</u> $\partial\circ\partial=0$

<u>Απόδειξη</u> Για κάθε k-κύβο γ στο A έχουμε:

$$\partial(\partial\gamma) = \partial\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\lambda_i^0\gamma-\lambda_i^1\gamma)\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\left[\lambda_j^0\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\lambda_i^0\gamma-\lambda_i^1\gamma)\right)-\lambda_j^1\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\lambda_i^0\gamma-\lambda_i^1\gamma)\right)\right] =$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\left[\lambda_j^0\lambda_i^0\gamma-\lambda_j^0\lambda_i^1\gamma-\lambda_j^1\lambda_i^0\gamma+\lambda_j^1\lambda_i^1\gamma\right] =$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\lambda_j^0\lambda_i^0\gamma+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\lambda_j^1\lambda_i^1\gamma-\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}(\lambda_j^1\lambda_i^0\gamma+\lambda_j^0\lambda_i^1\gamma)$$

Έχουμε τώρα $\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}(\lambda_j^1\lambda_i^0+\lambda_j^0\lambda_i^1) =$

$$\sum_{1\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}(\lambda_j^1\lambda_i^0+\lambda_j^0\lambda_i^1)+\sum_{1\le j<i\le k}(-1)^{i+j}(\lambda_j^1\lambda_i^0+\lambda_j^0\lambda_i^1) =$$

$$\sum_{1\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}(\lambda_j^1\lambda_i^0+\lambda_j^0\lambda_i^1) - \sum_{1\le j<i\le k}(-1)^{j+(i-1)}(\lambda_{i-1}^0\lambda_j^1+\lambda_{i-1}^1\lambda_j^0) = 0 \quad \text{και}$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\lambda_j^\varepsilon\lambda_i^\varepsilon = \sum_{1\le i\le j\le k-1}(-1)^{i+j}\lambda_j^\varepsilon\lambda_i^\varepsilon + \sum_{1\le j<i\le k}(-1)^{i+j}\lambda_j^\varepsilon\lambda_i^\varepsilon =$$

$$\sum_{1\le i\le j\le k}(-1)^{i+j}\lambda_j^\varepsilon\lambda_i^\varepsilon - \sum_{1\le j<i\le k}(-1)^{j+(i-1)}\lambda_{i-1}^\varepsilon\lambda_j^\varepsilon = 0, \quad \text{για } \varepsilon=0,1.$$

Άρα $\partial(\partial\gamma)=0$

Μια k-αλυσίδα γ στο A λέγεται <u>k-κύκλος</u> αν $\partial\gamma=0$ και <u>k-σύνορο</u> αν υπάρχει $\delta\in Q_{k+1}(A)$ ώστε $\partial\delta=\gamma$. Από το Λήμμα 5.1 προκύπτει ότι κάθε σύνορο είναι κύκλος. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, όπως θα δούμε αργότερα. Ο αναγνώστης ασφαλώς θα παρατήρησε τις ομοιότητες που υπάρχουν μεταξύ του συνοριακού τελεστή ∂ και του τελεστή της εξωτερικής παραγώγισης d. Οι δύο τελεστές συνδέονται μεταξύ τους μέσω του ολοκληρώματος.

Έστω ω μια k-διαφορική μορφή που ορίζεται σε μια ανοιχτή περιοχή V του $[0,1]^k$ στο $\mathbb{R}^k$. Τότε υπάρχει μια μονοσήμαντα ορισμένη C^∞ συνάρτηση $f:V\to\mathbb{R}$ ώστε $\omega=f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$. Ορίζουμε

$$\int_{[0,1]^k}\omega = \int_{[0,1]^k} f$$

δηλαδή $\displaystyle\int_{[0,1]^k} f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k = \int_{[0,1]^k} f(x_1,\ldots,x_k)\,dx_1\cdots dx_k$

Έστω τώρα $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μια k-μορφή στο A, $k\ge 1$. Για κάθε k-κύβο $\gamma:[0,1]^k\to A$ στο A ορίζουμε

$$\int_\gamma \omega = \int_{[0,1]^k}\gamma^*\omega$$

Για $k=0$, ορίζουμε $\int_\gamma\omega=\omega(\gamma(0))$, αφού τότε η ω είναι μια C^∞ συνάρτηση του A στο $\mathbb{R}$ και $\gamma:\{0\}\to A$. Επεκτείνοντας τώρα γραμμικά ορίζουμε έναν ομομορφισμό ομάδων (!)

$$\int\omega : Q_k(A)\to\mathbb{R}$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα της ω πάνω στην k-αλυσίδα $\gamma=\sum_{i=1}^{m}k_i\gamma_i$, όπου $k_i\in\mathbb{Z}$ και ο γ_i είναι k-κύβος στο A, $1\le i\le m$, είναι $\int_\gamma\omega=\sum_{i=1}^{m}k_i\int_{\gamma_i}\omega$.

<u>3.2. Θεώρημα (Stokes)</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^k$ ένα ανοιχτό σύνολο. Τότε για κάθε $(k-1)$-μορφή ω στο A και κάθε k-αλυσίδα γ στο A ισχύει

$$\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι $n=k$, το A είναι μία ανοιχτή περιοχή του $[0,1]^k$ και $\gamma = I^k$ είναι ο ταυτοτικός k-κύβος, δηλαδή $I^k(x)=x$ για κάθε $x \in [0,1]^k$. Η ω τότε είναι γραμμικός συνδυασμός $(k-1)$-μορφών της μορφής $f\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$, $1 \le i \le k$, οπότε λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος αρκεί για την την περίπτωση αυτή ν' αποδείξουμε το θεώρημα γι' αυτές. Για $c=0,1$ και $1 \le j \le k$ έχουμε $(\lambda_j^c I^k)^*(dx_j) = d(\pi_j \cdot \lambda_j^c I^k) = 0$, όπου $\pi_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή στην j-συντεταγμένη, γιατί η $\pi_j \circ \lambda_j^c I^k$ είναι η σταθερή συνάρτηση c. Συνεπώς

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^c I^k)^* (f\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k) = \begin{cases} 0 & , j \ne i \\ \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k & , j = i \end{cases}$$

Άρα $\displaystyle\int_{\partial I^k} f\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k =$

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left[\int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^0 I^k - \lambda_j^1 I^k)^* (f\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k) \right] =$$

$$(-1)^i \int_{[0,1]^k} [f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_k)]\, dx_1 \dots dx_k$$

Απ' την άλλη μεριά, από το Θεώρημα του Fubini και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε:

$$\int_{I^k} d(f\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k) = \int_{[0,1]^k} \partial_i f\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k =$$

$$(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \partial_i f\, dx_1 \dots dx_k = (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \left(\int_0^1 \partial_i f(x_1, \dots, x_k)\, dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_k =$$

$$(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} [f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k)]\, dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_k =$$

$$(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k + (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k.$$

Άρα $\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega$.

Στην γενική περίπτωση που γ είναι ένας οποιοσδήποτε k-κύβος σ' ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\int_{\partial\gamma} \omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^0 \gamma - \lambda_j^1 \gamma)^* \omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^0 I^k - \lambda_j^1 I^k)^* (\gamma^* \omega) = \int_{\partial I^k} \gamma^* \omega$$

γιατί $\lambda_j^\varepsilon \gamma = \gamma \circ \lambda_j^\varepsilon I^k$, $\varepsilon = 0,1$, $1 \leq j \leq k$ και συνεπώς

$$\int_\gamma d\omega = \int_{[0,1]^k} \gamma^*(d\omega) = \int_{I^k} \gamma^*(d\omega) = \int_{I^k} d(\gamma^* \omega) = \int_{\partial I^k} \gamma^* \omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

Λόγω της γραμμικότητας το ίδιο ισχύει και για τις k-αλυσίδες.

<u>3.3. Εφαρμογή</u> Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $\gamma_{R,n} : [0,1] \longrightarrow A$ ο 1-κύβος με τύπο $\gamma_{R,n}(t) = (R\cos 2\pi n t, R\sin 2\pi n t)$, όπου $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ και $n \neq 0$. Τότε

$$\partial\gamma_{R,n} = \gamma_{R,n}(0) - \gamma_{R,n}(1) = 0 ,$$

δηλαδή ο $\gamma_{R,n}$ είναι 1-κύκλος. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Stokes θα δείξουμε ότι ο $\gamma_{R,n}$ δεν είναι σύνορο. Θεωρούμε στο A την κλειστή 1-μορφή

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

Τότε $(\gamma_{R,n}^* \omega)(t) = \omega(\gamma_{R,n}(t)) \begin{pmatrix} -2\pi n R \sin 2\pi n t \\ 2\pi n R \cos 2\pi n t \end{pmatrix} =$

$$\left(-\frac{R\sin 2\pi n t}{R^2}, \frac{R\cos 2\pi n t}{R^2}\right) \begin{pmatrix} -2\pi n R \sin 2\pi n t \\ 2\pi n R \cos 2\pi n t \end{pmatrix} = 2\pi n$$

Άρα $\gamma_{R,n}^* \omega = 2\pi n\, dt$. Αν υπάρχει 2-αλυσίδα δ στο A ώστε $\partial\delta = \gamma_{R,n}$ τότε από το Θεώρημα του Stokes έχουμε:

$$0 = \int_\delta d\omega = \int_{\partial\delta} \omega = \int_{\gamma_{R,n}} \omega = \int_{[0,1]} \gamma_{R,n}^* \omega = \int_0^1 2\pi n\, dt = 2\pi n \quad , \text{ άτοπο!}$$

Για κάθε $(k-1)$-κύβο σ, $k \geq 1$, στο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ ορίζεται ο k-κύβος $T\sigma$ με τύπο $T\sigma(x_1, \ldots, x_k) = \sigma(x_1, \ldots, x_{k-1})$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_i^\varepsilon T\sigma = T\lambda_i^\varepsilon \sigma \text{ για } 1 \leq i \leq k-1 \text{ και } \lambda_k^\varepsilon T\sigma = \sigma \quad , \varepsilon = 0,1.$$

Ένας k-κύβος γ στο A λέγεται <u>εκφυλισμένος</u> αν υπάρχει ένας $(k-1)$-κύβος στο A με $\gamma = T\sigma$, δηλαδή η συνάρτηση $\gamma : [0,1]^k \longrightarrow A$ δεν εξαρτάται από την τελευταία μεταβλητή. Έστω $D_k(A)$ η υποομάδα της $Q_k(A)$ που παράγεται από τους εκφυλισμένους κ-κύβους. Για κάθε (κ-1)-κύβο σ έχουμε

$$\partial(T\sigma) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\lambda_i^0 T\sigma - \lambda_i^1 T\sigma) = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i (T\lambda_i^0\sigma - T\lambda_i^1\sigma) \in D_{k-1}(A)$$

Συνεπώς $\partial(D_k(A)) \subset D_{k-1}(A)$.

Θεωρούμε τώρα την ομάδα πηλίκο $C_k(A) = Q_k(A)/D_k(A)$, $k\geq 0$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο συνοριακός τελεστής ∂ επάγει ένα ομομορφισμό $\partial: C_k(A)\to C_{k-1}(A)$, $k\geq 0$ με τύπο

$$\partial(\gamma + D_k(A)) = \partial\gamma + D_{k-1}(A)$$

Για κάθε $\gamma\in Q_k(A)$ έχουμε $\partial(\partial(\gamma+D_k(A))) = \partial(\partial\gamma + D_k(A)) = 0 + D_k(A)$. Δηλαδή, $\partial\circ\partial = 0$

<u>3.4 Λήμμα</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μία κ-μορφή στο Α. Αν γ είναι ένας εκφυλισμένος κ-κύβος στο Α, τότε $\gamma^*\omega = 0$.

<u>Απόδειξη</u> Αφού ο γ είναι εκφυλισμένος, δεν εξαρτάται από την τελευταία μεταβλητή. Συνεπώς, για κάθε $x\in[0,1]^k$, η παράγωγος $D\gamma(x)$ έχει τάξη το πολύ κ-1. Αν λοιπόν $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{R}^k$, τότε τα $D\gamma(x)v_1,\dots,D\gamma(x)v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αφού λοιπόν η $\omega(\gamma(x))$ είναι αντισυμμετρική έχουμε

$(\gamma^*\omega)(x)(v_1,\dots,v_k) = \omega(\gamma(x))((D\gamma(x)v_1)_{\gamma(x)},\dots,(D\gamma(x)v_k)_{\gamma(x)}) = 0$

Το προηγούμενο Λήμμα 3.4 μας επιτρέπει να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας κ-μορφής πάνω στα στοιχεία του $C_k(A)$. Έστω λοιπόν $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μία κ-μορφή στο Α. Αν $c=\gamma+D_k(A)\in C_k(A)$, $k\geq 0$, τότε ορίζουμε

$$\int_c\omega = \int_\gamma\omega$$

Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από τον αντιπρόσωπο γ του c. Αν $\gamma'\in Q_k(A)$ ώστε $c=\gamma+D_k(A)=\gamma'+D_k(A)$, τότε $\gamma-\gamma'\in D_k(A)$ και συνεπώς

$$\int_\gamma\omega - \int_{\gamma'}\omega = \int_{\gamma-\gamma'}\omega = \int_{[0,1]^k}(\gamma-\gamma')^*\omega = 0$$

από το Λήμμα 3.4. Ορίζεται λοιπόν ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\int\omega: C_k(A)\to\mathbb{R}$.

<u>3.5. Θεώρημα (Stokes)</u> Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\omega\in\Omega^{k-1}(A)$. Για κάθε $c\in C_k(A)$ ισχύει

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c}\omega$$

4. Διαφορικές μορφές σε πολλαπλότητες

Έστω M μια n-πολλαπλότητα (ενδεχομένως με σύνορο) στο $\mathbb{R}^k$ και $x \in M$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.4 του κεφαλαίου II υπάρχει μια ανοικτή περιοχή U του x στο $\mathbb{R}^k$, ένα ανοικτό σύνολο $W \subset \mathbb{R}^n$ και μια 1-1, C^∞ συνάρτηση $\varphi : W \to \mathbb{R}^k$ που ορίζει ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στο $U \cap M$, δηλαδή $\varphi(W) = U \cap M$ (ή $\varphi(W \cap H^n) = U \cap M$ αν $x \in \partial M$), η $\varphi^{-1} : U \cap M \to W$ είναι συνεχής και η $D\varphi(y)$ έχει τάξη n για κάθε $y \in W$. Συνεπώς η $D\varphi(y)$ είναι 1-1 και $\dim \mathrm{Im}\, D\varphi(y) = n$. Αν $x = \varphi(y)$ τότε ο διανυσματικός υπόχωρος $T_xM = \{x\} \times \mathrm{Im}\, D\varphi(y)$ του $T_x\mathbb{R}^k$ λέγεται *εφαπτόμενος χώρος* της M στο x και δεν εξαρτάται από το σύστημα τοπικών συντεταγμένων $\varphi : W \to U \cap M$. Πράγματι αν $\psi : V \to \mathcal{U} \cap M$ είναι ένα άλλο σύστημα τοπικών συντεταγμένων με $x \in U \cap \mathcal{U} \cap M$ τότε για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$D\varphi(y)u = D(\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi)(y)u = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(y)) \cdot D(\psi^{-1} \circ \varphi)(y)u$$

Αφού η $D(\psi^{-1} \circ \varphi)(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, προκύπτει ότι $\mathrm{Im}\, D\varphi(y) = \mathrm{Im}\, D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(y))$ και βέβαια $\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(y)) = x$.

4.1. Ορισμός Έστω M μια n-πολλαπλότητα και P μια m-πολλαπλότητα. Μια συνάρτηση $f : M \to P$ λέγεται *διαφορίσιμη* στο σημείο $x \in M$ αν υπάρχουν ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων $\varphi : W \to U \cap M$ στην M με $x \in U \cap M$ και ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων $\psi : V \to \mathcal{U} \cap P$ στην P με $f(x) \in \mathcal{U} \cap P$ ώστε $f(U \cap M) \subset \mathcal{U} \cap P$ και η $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : W \to V$ να είναι διαφορίσιμη στο $\varphi^{-1}(x)$.

$$\begin{tikzcd}
U \cap M \arrow[r, "f"] & \mathcal{U} \cap P \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\
\mathbb{R}^n \supset W \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi^{-1} \circ f \circ \varphi"] & V \subset \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Είναι προφανές ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από τα συστήματα τοπικών συντεταγμένων, αφού οι μετασχηματισμοί τοπικών συντεταγμένων είναι C^∞. Από τον ορισμό επίσης κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση στο x είναι συνεχής στο x. Η f λέγεται C^r συνάρτηση, $1 \le r \le \infty$, αν η $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ είναι C^r για οποιαδήποτε συστήματα τοπικών συντεταγμένων φ, ψ με $f(U \cap M) \subset \mathcal{U} \cap P$.

Παρατηρούμε ότι $\psi\circ(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi) = f\circ\varphi$ και επομένως, αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x=\varphi(y)$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$D\psi(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi(y))\circ D(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi)(y) = D(f\circ\varphi)(y) ,$$

Αυτό δείχνει ότι $\operatorname{Im} D(f\circ\varphi)(y) \subset \operatorname{Im} D\psi(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi(y))$. Ορίζεται λοιπόν η γραμμική απεικόνιση $T_xf : T_xM \longrightarrow T_xP$ με τύπο

$$T_xf(x,v) = (f(x), D(f\circ\varphi)(y)u)$$

όπου $u=(D\varphi(y))^{-1}v$ (που υπάρχει και είναι μοναδικό αφού η $D\varphi(y)$ είναι 1-1). Η T_xf δεν εξαρτάται από τα συστήματα τοπικών συντεταγμένων. Αν $\bar\varphi,\bar\psi$ είναι άλλες επιλογές συστημάτων τοπικών συντεταγμένων και $\bar\varphi(z)=x$, τότε $D(f\circ\bar\varphi) = D(f\circ\varphi)\circ D(\varphi^{-1}\circ\bar\varphi)$. Αν λοιπόν $u\in\mathbb{R}^n$ και $v=D\bar\varphi(z)u$, τότε $v=D\bar\varphi(z)u = D\varphi(\varphi^{-1}\circ\bar\varphi(z))\circ D(\varphi^{-1}\circ\bar\varphi)(z)u$. Άρα $D(f\circ\bar\varphi)(z)u = D(f\circ\varphi)(y)(D(\varphi^{-1}\circ\bar\varphi)(z)u)$. Η T_xf λέγεται <u>εφαπτόμενη γραμμική απεικόνιση</u> της f στο x ή <u>παράγωγος</u> της f στο x.

Αν M, N είναι δύο πολλαπλότητες, τότε μια συνάρτηση $f: M\longrightarrow N$ λέγεται C^r αμφιδιαφόριση, $1\le r\le\infty$, αν είναι 1-1, επί, C^r και η αντίστροφη της $f^{-1}: N\longrightarrow M$ είναι επίσης C^r.

Είναι προφανές ότι κάθε συνάρτηση $\varphi: W\longrightarrow U\cap M\subset M$ που ορίζει ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στην πολλαπλότητα M είναι C^∞ συνάρτηση μεταξύ των πολλαπλοτήτων W και $U\cap M$ (ή της M). Επίσης η $\varphi^{-1}: U\cap M\longrightarrow W$ είναι σύμφωνα με τον ορισμό 4.1 C^∞ συνάρτηση. Άρα η φ είναι C^∞ αμφιδιαφόριση του W επί του $U\cap M$ και επομένως η $T_y\varphi: T_yW\longrightarrow T_{\varphi(y)}M$ είναι ισομορφισμός για κάθε $y\in W$.

Αν $M\subset\mathbb{R}^k$ είναι μια n-πολλαπλότητα, $P\subset\mathbb{R}^\lambda$ είναι μια m-πολλαπλότητα και $f: A\longrightarrow\mathbb{R}^\lambda$ είναι μια C^r συνάρτηση $1\le r\le\infty$, όπου το A είναι μια ανοικτή περιοχή της M στο $\mathbb{R}^k$, ώστε $f(M)\subset P$, τότε η $f|M: M\longrightarrow P$ είναι C^r συνάρτηση. Από την παρατήρηση αυτή και το Θεώρημα 4.3 του κεφαλαίου III προκύπτει η ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας σε πολλαπλότητες αμέσως.

<u>4.2 Θεώρημα</u> Έστω M μια n-πολλαπλότητα στο $\mathbb{R}^k$ και $\mathcal{U}$ ένα ανοικτό κάλυμμα της M. Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια C^∞ συναρτήσεων $\Sigma=\{\sigma: M\longrightarrow[0,1]\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Κάθε $x\in M$ έχει μία ανοιχτή περιοχή V_x ώστε το $\bar{V}_x$ να είναι συμπαγές και $\sigma|V_x\cap M=0$ για όλα τα $\sigma\in\Sigma$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος.
(β) $\sum_{\sigma\in\Sigma}\sigma(x)=1$ για κάθε $x\in M$
(γ) Για κάθε $\sigma\in\Sigma$ υπάρχει $V\in\mathcal{U}$ ώστε $\operatorname{supp}\sigma\subset V\cap M$

Η οικογένεια Σ λέγεται διαμέριση της μονάδας που υπόκειται στο κάλυμμα $\mathcal{U}$ της M.

Έστω M μία n-πολλαπλότητα στο $\mathbb{R}^{\lambda}$ και $TM=\bigcup_{x\in M}T_xM\subset\mathbb{R}^{2\lambda}=\mathbb{R}^{\lambda}\times\mathbb{R}^{\lambda}$. Ένα <u>εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο</u> στην M είναι μία συνάρτηση $\xi:M\to TM$ τέτοια ώστε $\xi(x)\in T_xM$ για κάθε $x\in M$. Αν $\varphi:W\to U\cap M$ είναι ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στην M τότε η συνάρτηση

$$W\ni y\longmapsto (T_y\varphi)^{-1}\circ\xi\circ\varphi(y)\in W\times\mathbb{R}^n$$

είναι ένα διανυσματικό πεδίο στο W. Αν αυτό το διανυσματικό πεδίο στο W είναι C^r, $1\le r\le\infty$ για κάθε σύστημα τοπικών συντεταγμένων, τότε το ξ λέγεται C^r.

Ανάλογα ορίζεται η έννοια διαφορική μορφή στην M. Για κάθε $x\in M$ ορίζεται ο διανυσματικός χώρος $\Lambda^k(T_xM)$, $0\le k\le n$. Έστω $\Lambda^k(M)=\bigcup_{x\in M}\Lambda^k(T_xM)$. Μία <u>$k$-διαφορική μορφή</u> στην M είναι μία συνάρτηση $\omega:M\to\Lambda^k(M)$ τέτοια ώστε $\omega(x)\in\Lambda^k(T_xM)$ για κάθε $x\in M$.

Αν N είναι μία ακόμα πολλαπλότητα και $f:N\to M$ μία C^∞ απεικόνιση, τότε για κάθε k-μορφή ω στην M ορίζεται η k-μορφή $f^*\omega$ στην N με
$(f^*\omega)(y)(v_1,\dots,v_k)=\omega(f(y))(T_yf(v_1),\dots,T_yf(v_k))$, $y\in N$, $v_1,\dots,v_k\in T_yN$.
Η $f^*\omega$ λέγεται pull-back της ω μέσω της f.

Έστω τώρα ω μία k-διαφορική μορφή στην M και $\varphi:W\to U\cap M$ ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στην M. Τότε ορίζεται η k-διαφορική μορφή $\varphi^*\omega$ στο W. Αν η $\varphi^*\omega$ είναι C^r στο W, $1\le r\le\infty$, για κάθε σύστημα τοπικών συντεταγμένων φ, τότε η ω λέγεται C^r. Στα επόμενα με τους όρους διανυσματικό πεδίο και διαφορική μορφή θα εννοούμε πάντα C^∞ διανυσματικό πεδίο και C^∞ διαφορική μορφή. Ο διανυσματικός χώρος των διανυσματικών πεδίων της M συμβολίζεται με $\mathcal{X}(M)$ και ο διανυσματικός χώρος των k-διαφορικών μορφών της M με $\Omega^k(M)$. Ο διανυσματικός χώρος

$\Omega(M)=\bigoplus_{k=0}^{n}\Omega^k(M)$ γίνεται αντιμεταθετική (διαβαθμισμένη) άλγεβρα ορίζοντας το εξωτερικό γινόμενο κατά σημείο. Η άλγεβρα $\Omega(M)$ λέγεται άλγεβρα Grassmann της M. Παρατηρούμε ότι ο $\Omega^0(M)$ είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των C^∞ συναρτήσεων $f: M\to\mathbb{R}$.

Έστω $f: M\to\mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση. Τότε η παράγωγος της f στο x είναι μια γραμμική απεικόνιση $T_xf: T_xM\to T_{f(x)}\mathbb{R}=\{f(x)\}\times\mathbb{R}$. Υπάρχει συνεπώς μια μοναδική γραμμική μορφή $df(x): T_xM\to\mathbb{R}$ ώστε $T_xf(v_x)=(f(x), df(x)(v_x))$ για κάθε $v_x\in T_xM$. Ορίζεται λοιπόν μια 1-μορφή df στην M που λέγεται <u>διαφορικό</u> της f. Αν $\varphi: W\to U\cap M$ είναι ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων και $x=\varphi(y)\in U\cap M$, τότε από τον ορισμό της T_xf και της df έχουμε:

$$df(x)(v_x)=D(f\circ\varphi)(y)u$$

όπου $D\varphi(y)u=v$. Συνεπώς

$$\varphi^*(df)(y)(u_y)=df(x)(x, D\varphi(y)u)=D(f\circ\varphi)(y)u=d(f\circ\varphi)(y)(u_y)$$

Αυτό δείχνει ότι $\varphi^*(df)=d(f\circ\varphi)$

<u>43. Θεώρημα</u> Έστω M μια n-πολλαπλότητα. Υπάρχει μία μοναδική ορισμένη γραμμική απεικόνιση $d:\Omega(M)\to\Omega(M)$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Αν $\omega\in\Omega^k(M)$, τότε $d\omega\in\Omega^{k+1}(M)$

(ii) Αν $f\in\Omega^0(M)$, τότε df είναι το διαφορικό της f.

(iii) Αν $\omega\in\Omega^k(M)$, $\theta\in\Omega^\nu(M)$, τότε $d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^k\omega\wedge d\theta$

(iv) $d\circ d=0$, δηλαδή $d(d\omega)=0$ για κάθε $\omega\in\Omega(M)$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\omega\in\Omega^k(M)$. Για κάθε σύστημα τοπικών συντεταγμένων $\varphi: W\to U\cap M$ της M ορίζεται η $(k+1)$-διαφορική μορφή

$$d\omega|_{U\cap M}=(\varphi^{-1})^*(d(\varphi^*\omega)) \quad \text{στο } U\cap M$$

όπου το d στο δεύτερο μέλος είναι η εξωτερική παραγώγιση στο W. Για να ορίζεται μ' αυτόν τον τρόπο μια $(k+1)$-διαφορική μορφή $d\omega$ στο M, θα πρέπει ο ορισμός να είναι ανεξάρτητος από το σύστημα των τοπικών συντεταγμένων. Αν λοιπόν $\psi: V\to \mathcal{U}\cap M$ είναι ένα άλλο σύστημα τοπικών συντεταγμένων στην M με $U\cap\mathcal{U}\cap M\neq\emptyset$, θα πρέπει να δείξουμε ότι $(\varphi^{-1})^*(d(\varphi^*\omega))=(\psi^{-1})^*(d(\psi^*\omega))$ στο $U\cap\mathcal{U}\cap M$.

Η εφαρμογή $\varphi^*\omega$ στο W έχει μια μοναδική παράσταση

$$\varphi^*\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

όπου $a_{i_1\dots i_k}\in \underline{C}^\infty(W)$ και όμοια στο V

$$\psi^*\omega = \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} \beta_{j_1\dots j_k}\, dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}$$

όπου $\beta_{j_1\dots j_k}\in \underline{C}^\infty(V)$.

Η $\varphi^{-1}\circ\psi = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) : \psi^{-1}(U\cap\mathcal{U}\cap M)\longrightarrow \varphi^{-1}(U\cap\mathcal{U}\cap M)$ είναι C^∞ αμφιδιαφόριση και $D(\varphi^{-1}\circ\psi) = (\partial_i\gamma_j)_{1\le i,j\le n}$. Στο $\psi^{-1}(U\cap\mathcal{U}\cap M)$ έχουμε

$$\psi^*\omega = (\varphi\circ\varphi^{-1}\circ\psi)^*\omega = (\varphi^{-1}\circ\psi)^*(\varphi^*\omega)$$

και συνεπώς $\beta_{j_1\dots j_k} = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \partial_{j_1}\gamma_{i_1}\cdots\partial_{j_k}\gamma_{i_k}\cdot(\alpha_{i_1\dots i_k}\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))$, $1\le j_1<\dots<j_k\le n$.

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\partial_j\beta_{j_1\dots j_k} = \sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \partial_{j_1}\gamma_{i_1}\cdots\partial^2_{j_\lambda j}\gamma_{i_\lambda}\cdots\partial_{j_k}\gamma_{i_k}\,(\alpha_{i_1\dots i_k}\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))$$

$$+\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \partial_{j_1}\gamma_{i_1}\cdots\partial_{j_k}\gamma_{i_k}\,\partial_j(\alpha_{i_1\dots i_k}\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))$$

Επίσης, από το θεώρημα του Schwartz προκύπτει ότι $\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{j_\lambda=1}^{n}\partial^2_{j_\lambda j}\gamma_{i_\lambda}\, dx_j\wedge dx_{j_\lambda}=0$

Άρα $d(\psi^*\omega) = \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} d\beta_{j_1\dots j_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}$

$$= \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\partial_j\beta_{j_1\dots j_k}\, dx_j\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}$$

$$= \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\partial_{j_1}\gamma_{i_1}\cdots\partial_{j_k}\gamma_{i_k}\,\partial_j(a_{i_1\dots i_k}\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))\, dx_j\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}$$

$$= \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\partial_j(a_{i_1\dots i_k}\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))\,dx_j\wedge(\partial_{j_1}\gamma_{i_1}dx_{j_1})\wedge\dots\wedge(\partial_{j_k}\gamma_{i_k}dx_{j_k})$$

Όμως $\sum_{j=1}^{n}\partial_j(a_{i_1\dots i_k}\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))\,dx_j = d(a_{i_1\dots i_k}\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))$ και από την πρόταση 2.1 (i) $\sum_{j_\lambda=1}^{n}\partial_{j_\lambda}\gamma_{i_\lambda}\, dx_{j_\lambda} = (\varphi^{-1}\circ\psi)^*(dx_{i_\lambda})$. Άρα

$$d(\psi^*\omega) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} d(a_{i_1\dots i_k}\circ(\varphi^{-1}\circ\psi))\wedge(\varphi^{-1}\circ\psi)^*dx_{i_1}\wedge\dots\wedge(\varphi^{-1}\circ\psi)^*dx_{i_k}$$

$$= (\varphi^{-1}\circ\psi)^*\Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} da_{i_1\dots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\Big) = (\varphi^{-1}\circ\psi)^*(d(\varphi^*\omega))$$

και συνεπώς $(\psi^{-1})^*(d(\psi^*\omega)) = (\varphi^{-1})^*(d(\varphi^*\omega))$ στο $U\cap\mathcal{U}\cap M$.

Οι ιδιότητες τώρα (i), (ii), (iii), (iv) και η μοναδικότητα της d προκύπτουν αμέσως από το Θεώρημα 2.3.

Από την πρόταση 2.4 είναι επίσης άμεσο ότι:

<u>4.4. Πρόταση</u> Αν M, N είναι δυο πολλαπλότητες και $F: M \longrightarrow N$ μια C^∞ απεικόνιση, τότε $F^* d = d \circ F^*$.

Ο τελεστής d λέγεται <u>εξωτερική παραγώγιση</u> και η $d\omega$ <u>εξωτερική παράγωγος</u> ή <u>διαφορικό</u> της μορφής ω. Μια μορφή ω στην πολλαπλότητα M λέγεται <u>κλειστή</u> αν $d\omega = 0$ και <u>ακριβής</u> αν υπάρχει $\theta \in \Omega(M)$ ώστε $d\theta = \omega$. Το παράδειγμα 2.5 δείχνει ότι ενώ κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή το αντίστροφο δεν ισχύει.

<u>5. Ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες</u>

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας n-διαφορικής μορφής με συμπαγή φορέα σε μια n-πολλαπλότητα (ενδεχομένως με σύνορο) με ανάλογο τρόπο όπως ορίσαμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου. Ο φορέας μιας διαφορικής μορφής ω στην πολλαπλότητα M είναι το σύνολο

$$\operatorname{supp}\omega = \overline{\{x \in M : \omega(x) \neq 0\}}$$

Η ω έχει συμπαγή φορέα αν το $\operatorname{supp}\omega$ είναι συμπαγές υποσύνολο της M.

Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μία n-μορφή στο A με συμπαγή φορέα. Τότε υπάρχει μια μονοσήμαντα ορισμένη C^∞ συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\omega = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ και $\operatorname{supp}\omega = \operatorname{supp} f$. Ορίζουμε

$$\int_A \omega = \int_A f$$

Προκειμένου να επεκτείνουμε τον ορισμό σε πολλαπλότητες είναι απαραίτητο να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητος από C^∞ αμφιδιαφορίσεις, δηλαδή αλλαγές τοπικών συντεταγμένων στις πολλαπλότητες. Εστω λοιπόν $B \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $F: B \longrightarrow A$ μια C^∞ αμφιδιαφόριση. Τότε $F^*\omega = (\det DF)\cdot(f \circ F)\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, από το Θεώρημα 2.2. Έτσι σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό

$$\int_B F^*\omega = \int_B (f \circ F)\cdot(\det DF)$$

Όμως από τον τύπο αλλαγής της μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_A \omega = \int_A f = \int_{F(B)} f = \int_B (f\circ F)\cdot|\det DF|$$

Αν λοιπόν $\det DF>0$, τότε πράγματι $\int_B F^*\omega = \int_A \omega$, ενώ αν $\det DF<0$ τότε $\int_B F^*\omega = \int_A \omega$. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό

5.1. Ορισμός Μια n-πολλαπλότητα (ενδεχομένως με σύνορο) λέγεται *προσανατολίσιμη* αν υπάρχει μια οικογένεια συστημάτων τοπικών συντεταγμένων

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i : W_i \longrightarrow V_i\cap M \ ; \ i\in I\}$$

ώστε $M\subset\bigcup_{i\in I} V_i$ και $\det D(\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j)>0$ στο $\varphi_j^{-1}(V_i\cap V_j\cap M)$, όταν $V_i\cap V_j\cap M\neq\phi$. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ λέγεται *προσανατολισμένος άτλας* της M. Δύο προσανατολισμένοι άτλαντες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ της M λέγονται ισοδύναμοι ή ότι ορίζουν τον ίδιο προσανατολισμό, αν ο $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ είναι επίσης προσανατολισμένος άτλας. Αν η M είναι προσανατολίσιμη τότε η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας με τουλάχιστον δύο κλάσεις. Κάθε κλάση ισοδυναμίας λέγεται *προσανατολισμός* της M. Μια *προσανατολισμένη* πολλαπλότητα είναι ένα ζευγάρι $(M, [\mathcal{A}])$, όπου η M είναι μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα και το $[\mathcal{A}]$ η κλάση ισοδυναμίας του προσανατολισμένου άτλαντα $\mathcal{A}$.

Έστω M μια προσανατολισμένη πολλαπλότητα με προσανατολισμό $[\mathcal{A}]$, όπου $\mathcal{A} = \{\varphi_i : W_i \longrightarrow V_i\cap M \ ; \ i\in I\}$. Υπάρχει μια διαμέριση της μονάδας $\Sigma=\{\sigma_i : M\longrightarrow[0,1], i\in I\}$ ώστε $\operatorname{supp}\sigma_i \subset V_i\cap M$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2. Για κάθε n-μορφή ω με συμπαγή φορέα στην M, ορίζουμε το

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I}\int_{W_i}\varphi^*(\sigma_i\omega)$$

ως ολοκλήρωμα της ω πάνω στην M. Ο ορισμός αυτός εξαρτάται μόνον από τον προσανατολισμό $[\mathcal{A}]$. Πράγματι· έστω $\mathcal{B}=\{\psi_j : V_j\longrightarrow U_j\cap M \ ; \ j\in J\}$ ένας άλλος προσανατολισμένος άτλας της M με $[\mathcal{A}]=[\mathcal{B}]$ και $\tau_j : M\longrightarrow[0,1]$ $j\in J$ μια διαμέριση της μονάδας με $\operatorname{supp}\tau_j\subset U_j\cap M$. Τότε έχουμε:

$$\sum_{i\in I}\int_{W_i}\varphi_i^*(\sigma_i\omega) = \sum_{i\in I}\int_{W_i}\Big(\sum_{j\in J}\tau_j\circ\varphi_i\Big)\cdot\varphi_i^*(\sigma_i\omega) = \sum_{i\in I, j\in J}\int_{W_i}\varphi_i^*(\tau_j\sigma_i\omega) =$$

$$\sum_{i\in I, j\in J} \int_{W_i} (\psi_j^{-1}\circ\varphi_i)^* \cdot \psi_j^*(\tau_j \sigma_i \omega) = \sum_{i\in I, j\in J}\int_{V_j} \psi_j^*(\tau_j \sigma_i \omega) =$$

$$\sum_{j\in J}\int_{V_j}\Big(\sum_{i\in I}\sigma_i\cdot\psi_j\Big)\psi_j^*(\tau_j\omega) = \sum_{j\in J}\int_{V_j}\psi_j^*(\tau_j\omega) .$$

Αν $\partial M \neq \emptyset$, τότε όπως είναι γνωστό η ∂M είναι $(n-1)$-πολλαπλότητα χωρίς σύνορο. Αν $\varphi: W \to U\cap M$ είναι ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων με $U\cap\partial M\neq\emptyset$, τότε $W = W'\cap\mathbb{H}^n$, όπου το $W'\subset\mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο και η φ C^∞ απεικόνιση του W'. Όπως προκύπτει απ' όσα ακολουθούν τον ορισμό 6.5 του κεφαλαίου ΙΙ, $\varphi(W\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})) = U\cap\partial M$ και $\tilde{\varphi} = \varphi|W\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$ ορίζει ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων της ∂M.

5.2 Λήμμα Έστω $A, B\subset\mathbb{R}^n$ δύο ανοιχτά σύνολα και $F=(F_1,\dots,F_n): A\to B$ μια C^1 αμφιδιαφόριση τέτοια ώστε $F(A\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})) = B\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$. Αν $\tilde{F} = F|A\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$, τότε

$$DF(x) = \begin{pmatrix} D\tilde{F}(x) & * \\ 0 & a(x) \end{pmatrix}$$

όπου $a(x)\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in A\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$. Αν επιπλέον $F(A\cap\mathbb{H}^n) = V\cap\mathbb{H}^n$, τότε $a(x)>0$.

Απόδειξη Από την υπόθεση έχουμε $F_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)=0$ για κάθε $x=(x_1,\dots,x_{n-1},0)\in A\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$. Άρα $\partial_i F_n(x)=0$, $1\leq i\leq n-1$. Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $a(x)=\partial_n F_n(x)$. Έστω τώρα ότι $F(A\cap\mathbb{H}^n)=B\cap\mathbb{H}^n$. Τότε $F_n(x_1,\dots,x_n)>0$, όταν $x_n>0$. Για κάθε $x=(x_1,\dots,x_{n-1},0)\in A\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$ έχουμε τώρα

$$a(x)=\partial_n F_n(x) = \lim_{h\to0^+}\frac{F_n(x_1,\dots,x_{n-1},h)-F_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{F_n(x_1,\dots,x_{n-1},h)}{h} \geq 0$$

Αφού $\det DF(x)\neq0$, κατ' ανάγκη $a(x)>0$.

Έστω τώρα $\mathcal{A}=\{\varphi_i: W_i\to U_i\cap M \,;\, i\in I\}$ ένας προσανατολισμένος άτλας της προσανατολίσιμης n-πολλαπλότητας M, $n>1$. Τότε από το Λήμμα 5.2 προκύπτει ότι η οικογένεια

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\varphi}_i = \varphi_i|W_i\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}) : W_i\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})\to U_i\cap\partial M \text{ όπου } i\in I \text{ με } U_i\cap\partial M\neq\emptyset\}$$

είναι ένας προσανατολισμένος άτλας του ∂M. Συνεπώς το σύνορο μιας προσανατολίσιμης πολλαπλότητας είναι προσανατολίσιμη πολλαπλότητα. Επιπλέον κάθε προσανατολισμός $[\mathcal{A}]$ της M ορίζει κατά φυσικό τρόπο έναν προσανατολισμό $[\partial\mathcal{A}]$ της ∂M.

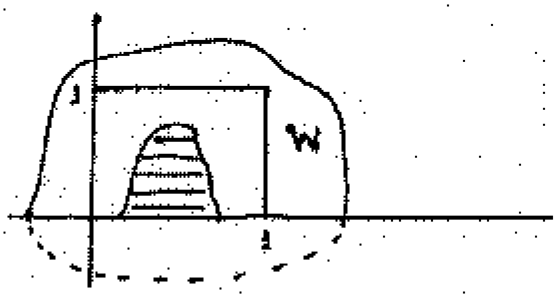
<u>5.3. Θεώρημα (Stokes)</u> Έστω M μια προσανατολισμένη n-πολλαπλότητα, $n>1$, και ω μια $(n-1)$-μορφή με συμπαγή φορέα στην M.

(α) Αν $\operatorname{supp}\omega \cap \partial M = \emptyset$, τότε $\int_M d\omega = 0$

(β) Αν $\operatorname{supp}\omega \cap \partial M \neq \emptyset$, τότε $\int_M d\omega = (-1)^n \int_{\partial M} i^*\omega$

όπου $i:\partial M \to M$ είναι η ένθεση και στο ∂M θεωρούμε τον φυσικό προσανατολισμό.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\varphi: W \to V \subset M$ ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων, όπου το W είναι ανοιχτή περιοχή του $[0,1]^n$ στο $\mathbb{H}^n$ της μορφής $W = W' \cap \mathbb{H}^n$ όπου το $W' \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό και η φ ορίζεται στο W'. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι $\operatorname{supp}\omega \subset \{\varphi(x_1,\dots,x_n) : 0<x_i<1,\ 1\le i\le n-1,\ 0\le x_n<1\} = Q$



Υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις $f_j : W' \to \mathbb{R}$, $1\le j\le n$ ώστε

$$\varphi^*\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_j \, dx_1\wedge\dots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\dots\wedge dx_n$$

Τότε $\varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega) = \operatorname{supp}\varphi^*\omega = \bigcup_{j=1}^{n}\operatorname{supp} f_j$. Έτσι έχουμε:

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega) = \Big(\sum_{j=1}^{n}\partial_j f_j\Big)\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$$

και συνεπώς

$$\int_M d\omega = \int_W \varphi^*\omega = \int_{[0,1]^n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\partial_j f_j\Big) = \sum_{j=1}^{n}\int_{[0,1]^n}\partial_j f_j(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int_{[0,1]^{n-1}}\Big[f_j(x_1,\dots,x_{j-1},1,x_{j+1},\dots,x_n) - f_j(x_1,\dots,x_{j-1},0,x_{j+1},\dots,x_n)\Big]\,dx_1\dots\widehat{dx_j}\dots dx_n$$

από το Θεώρημα του Fubini και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Όμως αφού $\operatorname{supp} f_j \subset \varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega)$ για κάθε $1\le j\le n$ έχουμε

$f_j(x_1,\dots,x_{j-1},1,x_{j+1},\dots,x_n)=0$ για $1\le j\le n$ και
$f_j(x_1,\dots,x_{j-1},0,x_{j+1},\dots,x_n)=0$ για $1\le j\le n-1$. Άρα

$$\int_M d\omega = -\int_{[0,1]^{n-1}} f_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$

Αν $\operatorname{supp}\omega\cap\partial M=\varphi$, τότε και $f_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)=0$, οπότε $\int_M d\omega=0$. Έστω λοιπόν ότι $\operatorname{supp}\omega\cap\partial M\neq\varphi$. Τότε

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_{[0,1]^{n-1}} \bar\varphi^*(i^*\omega) = \int_{[0,1]^{n-1}} (i\circ\bar\varphi)^*\omega$$

και $i\circ\bar\varphi=\varphi\circ g$, όπου $g:\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ είναι η ένθεση με τύπο $g(x_1,\dots,x_{n-1})=(x_1,\dots,x_{n-1},0)$. Αν $g=(g_1,\dots,g_n)$, τότε $g_k(x_1,\dots,x_{n-1})=x_k$ για $1\le k\le n-1$ και $g_n(x_1,\dots,x_{n-1})=0$. Από την Πρόταση 2.1 (ii) έχουμε λοιπόν

$$g^*(dx_k)=dx_k\ ,\quad 1\le k\le n-1 \quad \text{και}\ g^*(dx_n)=0$$

Συνεπώς $(i\circ\bar\varphi)^*\omega=(\varphi\circ g)^*\omega=g^*(\varphi^*\omega)=g^*\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}f_j\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_n\Big)$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(f_j\circ g)\,g^*(dx_1)\wedge\cdots\wedge\widehat{g^*(dx_j)}\wedge\cdots\wedge g^*(dx_n)=(-1)^{n-1}(f_n\circ g)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$$

Άρα $\displaystyle\int_{\partial M} i^*\omega=(-1)^{n-1}\int_{[0,1]^{n-1}} f_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)\,dx_1\cdots dx_{n-1}$

Απ' όπου προκύπτει ότι $\displaystyle\int_M d\omega=(-1)^n\int_{\partial M}\omega$

Στην γενική περίπτωση θεωρούμε έναν προσανατολισμένο άτλαντα $A=\{\varphi_i:W_i\to V_i\cap M\}$ της M ώστε κάθε W_i να είναι ανοιχτή περιοχή του $[0,1]^n$ στο $\mathbb{R}^n$ ή στο $\mathbb{H}^n$ και $M=\bigcup_{i\in I} Q_i$, όπου το Q_i ορίζεται όπως το Q παραπάνω. Έστω $\{\sigma_i : i\in I\}$ μια διαμέριση της μονάδας ώστε $\operatorname{supp}\sigma_i\subset Q_i$ για κάθε $i\in I$. Τότε $\omega=\sum_{i\in I}\sigma_i\omega$ και $\operatorname{supp}(\sigma_i\omega)\subset\operatorname{supp}\sigma_i\subset Q_i$. Από τα προηγούμενα λοιπόν έχουμε:

$$\int_M d\omega=\int_M d\Big(\sum_{i\in I}\sigma_i\omega\Big)=\sum_{i\in I}\int_M d(\sigma_i\omega)=(-1)^n\sum_{i\in I}\int_{\partial M} i^*(\sigma_i\omega)=(-1)^n\int_{\partial M} i^*\Big(\sum_{i\in I}\sigma_i\omega\Big)$$

$$=(-1)^n\int_{\partial M} i^*\omega$$

γιατί αφού η $\operatorname{supp}\omega$ έχει συμπαγή φορέα το άθροισμα $\sum_{i\in I}\sigma_i\omega$ είναι πεπερασμένο (βλ. την Παρατήρηση που ακολουθεί το Θεώρημα 4.4 του κεφαλαίου III).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$ και $\theta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i dx_i$, δείξτε ότι $\omega \wedge \theta = \sum_{i<j} (a_i\beta_j - a_j\beta_i) dx_i \wedge dx_j$.

2. Να υπολογισθούν τα διαφορικά των παρακάτω διαφορικών μορφών:
$x^2 y\, dy - xy\, dx$
$f(x,y)\, dx$, όπου η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι C^∞ συνάρτηση
$P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$, όπου οι $P, Q, R: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι C^∞ συναρτήσεις

3. Να βρεθεί μία $(n-1)$-μορφή θ τέτοια ώστε $d\theta = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.
(Υπόδειξη: $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \pi_i\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$)

4. Έστω ω, θ δυο κλειστές μορφές. Δείξτε ότι η $\omega \wedge \theta$ είναι κλειστή. Αν επιπλέον μία από τις ω, θ είναι ακριβής, δείξτε ότι η $\omega \wedge \theta$ είναι ακριβής.

5. Έστω ω μία 1-μορφή στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν η $f\omega$ είναι κλειστή, δείξτε ότι $\omega \wedge d\omega = 0$

6. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και ω μία 1-μορφή στο A ώστε $\omega \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = 0$, $k \leq n$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις $f_1, \dots, f_k : A \to \mathbb{R}$ ώστε $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_k dx_k$.

7. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και ω μία 2-μορφή στο A ώστε $\omega \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = 0$, $k \leq n$. Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχουν 1-μορφές $\omega_1, \dots, \omega_k$ στο A ώστε $\omega = \omega_1 \wedge dx_1 + \dots + \omega_k \wedge dx_k$.

8. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και ω μία 1-μορφή στο A ώστε $\omega(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν θ είναι μία k-μορφή στο A ώστε $\omega \wedge \theta = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $(k-1)$-μορφή η στο A ώστε $\theta = \omega \wedge \eta$.

9. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και γ ένας k-κύβος στο A. Έστω V, W δυο ανοικτές περιοχές του $[0,1]^k$ στο $\mathbb{R}^k$ και $f: V \to W$ μία C^∞ αμφιδιαφόριση με $\det DF(x) > 0$ για κάθε $x \in V$. Ν' αποδειχθεί ότι

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma \circ F} \omega$$

για κάθε k-μορφή ω στο A.

10. Ν' αποδειχθεί ότι για κάθε 1-μορφή ω στο $\mathbb{R}$ υπάρχει μία C^∞ συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\omega = dg$.

11. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο. Για κάθε $k \geq 0$, θεωρούμε την αβελιανή ομάδα $C^k(A) = \mathrm{Hom}(C_k(A), \mathbb{R})$, που αποτελείται από τους ομομορφισμούς της αβελιανής ομάδας $C_k(A)$ στην προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών. Για κάθε $f \in C^k(A)$ ορίζεται ο ομομορφισμός $\delta f \in C^{k+1}(A)$ με τύπο

$$(\delta f)(c) = f(\partial c) \quad , \quad c \in C_{k+1}(A).$$

(α) Να αποδειχθεί ότι $\delta \circ \delta = 0$

(β) Να αποδειχθεί ότι το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \underline{\Omega}^k(A) & \xrightarrow{d} & \underline{\Omega}^{k+1}(A) & \longrightarrow \cdots \\ & \int \downarrow & & \int \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & C^k(A) & \xrightarrow{\delta} & C^{k+1}(A) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

είναι μεταθετικό, όπου $\int : \underline{\Omega}^k(A) \ni \omega \longmapsto \int \omega \in \mathrm{Hom}(C_k(A), \mathbb{R})$.

12. Έστω $f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ ένα μιγαδικό πολυώνυμο και $\gamma_{R,n} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ο 1-κύβος με τύπο

$$\gamma_{R,n}(s) = (R\cos 2\pi n s , R \sin 2\pi n s) \quad , \quad R > 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \; n \neq 0.$$

Θέτουμε $\gamma_{R,f} = f \circ \gamma_{R,1}$. Έστω $\gamma : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ο 2-κύβος με τύπο

$$\gamma(s,t) = t\,\gamma_{R^n,n}(s) + (1-t)\,\gamma_{R,f}(s)$$

(α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε $\gamma([0,1]^2) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(β) Να δειχθεί ότι $\partial \gamma = \gamma_{R,f} - \gamma_{R^n,n}$

(γ) Έστω $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2} dx + \dfrac{y}{x^2+y^2} dy$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Να αποδειχθεί ότι αν $f(z) \neq 0$ για κάθε $|z| \leq R$ τότε $\int_{\gamma_{R,f}} \omega = 0$

(δ) Να αποδειχθεί ότι το f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{C}$.

13. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ δυο ανοικτά σύνολα και $F : A \to B$ μια C^∞ αμφιδιαφόριση. Δείξτε ότι η $F^* : \underline{\Omega}(B) \to \underline{\Omega}(A)$ είναι ισομορφισμός

14. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο. Μια μιγαδική k-μορφή στο A είναι της μορφής $\omega + i\theta$, όπου $i = \sqrt{-1}$ και οι ω, θ είναι πραγματικές k-μορφές στο A, $k = 0,1,2$. Ορίζουμε

$$(\omega + i\theta) \wedge (\eta + i\lambda) = (\omega \wedge \eta - \theta \wedge \lambda) + i(\theta \wedge \eta + \omega \wedge \lambda)$$

$$d(\omega + i\theta) = d\omega + i\,d\theta \quad \text{και}$$

$$\int_\gamma \omega + i\theta = \int_\gamma \omega + i \int_\gamma \theta \quad \text{για κάθε } k\text{-κύβο } \gamma \text{ στο } A.$$

Θέτουμε επίσης $dz = dx + i\,dy$, όπου dx, dy είναι οι βασικές 1-μορφές (τρημματικές) στο A.

(α) Να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη τότε και μόνον τότε όταν $d(f\,dz) = 0$

(β) Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση, και $\gamma : [0,1] \to A$ ένας 1-κύβος για τον οποίο υπάρχει 2-κύβος $c \in \mathcal{Q}_2(A)$ ώστε $\gamma = \partial c$. Να αποδειχθεί ότι $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

(γ) Έστω $z_0 \in A$ και $0 < r \le R$ ώστε $\overline{S(z_0,R)} \subset A$. Αν η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη να δειχθεί ότι

$$\int_{C(z_0,R)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

όπου $C(z_0,R) = \partial S(z_0,R)$ και $C(z_0,r) = \partial S(z_0,r)$. Συμπεράνετε απ' αυτό ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,R)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

(δ) Αποδείξτε με τρόπο ανάλογο της απόδειξης του (γ) ότι

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz$$

(ε) Να αποδειχθεί ότι κάθε φραγμένη, ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι σταθερή (Θεώρημα του Liouville)

(Υπόδειξη: Αν $M > 0$ είναι ένα άνω φράγμα της f, αποδείξτε χρησιμοποιώντας το (δ) ότι $|f'(z)| \le M/R$ για κάθε $R > 0$ και $z \in \mathbb{C}$, απ' όπου προκύπτει ότι $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$)

(στ) Να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

(Υπόδειξη: αν $p(z)$ είναι ένα πολυώνυμο χωρίς καμία ρίζα, θεωρείστε την συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ και αποδείξτε ότι είναι φραγμένη.).

15. Δίνεται στον $\mathbb{R}^3$ η 2-μορφή

$$\omega = 2xz\,dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\,dx \wedge dy$$

Υπάρχει 1-μορφή η στο $\mathbb{R}^3$ ώστε $d\eta = \omega$; Αν ναι να ευρεθεί μία τέτοια 1-μορφή.

16. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο που είναι αστερόμορφο ως προς το 0.

Για κάθε $x\in A$ υπάρχει ο 1-κύβος $\gamma_x \in Q_1(A)$ με τύπο $\gamma_x(t) = tx$, $t\in[0,1]$. Αν ω είναι μια κλειστή 1-μορφή στο A, θεωρούμε την συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$. Να αποδειχθεί ότι $df=\omega$.

17. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο, $z_0 \in A$ και $f: A\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = \frac{a}{z-z_0} + \varphi(z)$$

όπου $a\in\mathbb{C}$ και $\varphi: A\to\mathbb{C}$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $R>0$ ώστε $\overline{S(z_0,R)} \subset A$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,R)} f(z)\,dz = a$$

18. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ξ ένα διανυσματικό πεδίο στο A με κύριο μέρος $f=(f_1,\dots,f_n)$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $i_\xi : \Omega(A) \to \Omega(A)$ ώστε αν $\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$ τότε

$$i_\xi \omega = \begin{cases} 0, & \text{όταν } k=0 \\ \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1\dots i_k} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} f_{i_p}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx_{i_p}}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} \end{cases}$$

Τότε $i_\xi(\Omega^k(A)) \subset \Omega^{k-1}(A)$.

(α) Ν' αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες του τελεστή i_ξ:

$i_\xi(\omega\wedge\theta) = i_\xi\omega\wedge\theta + (-1)^k\omega\wedge i_\xi\theta$, όταν $\omega\in\Omega^k(A)$, $\theta\in\Omega^\lambda(A)$ και

$i_\xi\circ i_\xi = 0$

(β) Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $L_\xi = i_\xi\circ d + d\circ i_\xi : \Omega(A)\to\Omega(A)$. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες του τελεστή L_ξ:

$L_\xi\circ i_\xi = i_\xi\circ L_\xi$

$L_\xi\circ d = d\circ L_\xi$ και

$L_\xi(\omega\wedge\theta) = L_\xi\omega\wedge\theta + \omega\wedge L_\xi\theta$ για κάθε $\omega,\theta\in\Omega(A)$.

(γ) Έστω ξ το διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^n$ με κύριο μέρος $f(x)=x$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε C^∞ συνάρτηση $g: A\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$L_\xi(g\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) = \left(k\cdot g + \sum_{i=1}^{n} x_i\,\partial_i g\right) dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

(δ) Έστω $\varepsilon>0$ και $f:(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow\mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση. Αν $tf'(t)+k\cdot f(t)=0$ για κάθε $|t|<\varepsilon$, να αποδειχθεί ότι $f\equiv 0$.

(ε) Έστω ότι το A είναι αστρόμορφο ως προς το 0 στο $\mathbb{R}^n$. Αν $h:A\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι μία δεδομένη συνεχής συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι η μερική διαφορική εξίσωση

$$k\cdot u+\sum_{i=1}^{n} x_i\,\partial_i u=h$$

έχει μία μοναδική C^1 λύση στο A που μάλιστα δίνεται από τον τύπο

$$u(x)=\int_0^1 h(tx)\cdot t^{k-1}\,dt$$

Προκύπτει λοιπόν ότι για κάθε k-μορφή θ στο A, $k\geq 1$, υπάρχει μία μονοσήμαντα ορισμένη k-μορφή ω στο A ώστε $L_\xi\omega=\theta$, όπου ξ είναι το διανυσματικό πεδίο του (γ). Ορίζεται λοιπόν ο τελεστής $L_\xi^{-1}:\underline{\Omega}^k(A)\longrightarrow\underline{\Omega}^k(A)$ για κάθε $1\leq k\leq n$.

(στ) Να αποδειχθεί ότι $L_\xi^{-1}\circ i_\xi=i_\xi\circ L_\xi^{-1}$ και $d\circ L_\xi^{-1}=L_\xi^{-1}\circ d$, όπου ξ είναι πάντα το διανυσματικό πεδίο του (γ).

(ζ) Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $K:\underline{\Omega}^k(A)\longrightarrow\underline{\Omega}^{k-1}(A)$ με τύπο

$$K\omega=\begin{cases}(i_\xi\circ L_\xi^{-1})\omega, & k\geq 1\\[2ex] 0, & k=0\end{cases}$$

όπου το A θεωρείται αστρόμορφο και το διανυσματικό πεδίο ξ όπως στο (γ). Να αποδειχθεί ότι $\omega=d(K\omega)+K(d\omega)$ για κάθε k-μορφή ω, $k\geq 1$, του A. Να αποδειχθεί επίσης ότι ο τελεστής K είναι ο ίδιος όπως στην απόδειξη του Λήμματος του Poincaré. Αυτός είναι ένας άλλος τρόπος περιγραφής της απόδειξης του Λήμματος του Poincaré.