ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΥΛΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

I. Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

1. Διαφορίσιμες πολλαπλότητες και απεικονίσεις
2. Ο εφαπτόμενος χώρος και η εφαπτομένη δέσμη
3. Υποπολλαπλότητες
4. Διανυσματικά πεδία και παράγωγος Lie
5. Ολοκλήρωση διανυσματικών πεδίων και ροές

II. Συνοχές σε πολλαπλότητες

1. Γραμμικές συνοχές
2. Γεωδαισιακές και η εκθετική απεικόνιση

III. Πολλαπλότητες Riemann

1. Μετρικές Riemann
2. Η συνοχή Levi-Civita
3. Γεωδαισιακές και κανονικοί χάρτες σε πολλαπλότητες Riemann
4. Οι γεωδαισιακές στους χώρους μοντέλα

IV. Γεωμετρία και απόσταση

1. Απόσταση και τοπολογία σε μια πολλαπλότητα Riemann
2. Πληρότητα και το θεώρημα Hopf-Rinow
3. Ισομετρίες και το θεώρημα Myers-Steenrod

V. Καμπυλότητα

1. Ο τανυστής καμπυλότητας
2. Καμπυλότητα τομής και καμπυλότητα Ricci
3. Riemannian submersions και οι τύποι του O'Neil

VI. Γεωμετρία και Τοπολογία

1. Η διαφορική εξίσωση του Jacobi
2. Συζυγή σημεία και το θεώρημα Cartan-Hadamard-Kobayashi
3. Χώροι σταθερής καμπυλότητας τομής και κατάταξη
4. Η μεταβολή του συναρτησοειδούς του μήκους και ο τύπος του Synge
5. Το θεώρημα Bonnet-Myers
6. Διανυσματικά πεδία Killing

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

1. M. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1993.
2. I. Chavel, Riemannian Geometry : A modern introduction, Camb. Univ. Press 1993.
3. J. Dupont, Differential Geometry, Aarhus University Lecture Notes 1993.
4. S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, Riemannian Geometry, 3rd Edition, Springer 2004.
5. S. Kobayashi and K. Nomizu, The foundations of differential geometry, Wiley 1963.
6. Δ. Κουτρουφιώτη, Διαφορική Γεωμετρία, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 1994.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

1. Διαφορίσιμες πολλαπλότητες

Οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες εμφανίστηκαν στα Μαθηματικά ως καμπύλες και επιφάνειες στον 3-διάστατο χώρο κατά τον 18ο αιώνα, οπότε για την μελέτη τους χρησιμοποιήθηκαν συστηματικά η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών. Ενα από τα περίεργα των πρώτων σταδίων ήταν οτι οι μαθηματικοί δεν αισθάνονταν την ανάγκη να δώσουν τον ορισμό της έννοιας «επιφάνεια». Οι επιφάνειες θεωρούνταν γεωμετρικά αντικείμενα, που απλώς υπήρχαν και έπρεπε να μελετηθούν αναλυτικά και να περιγραφούν. Ο Euler προσπάθησε να εξηγήσει, πως μία επιφάνεια καθορίζει την εξίσωσή της. Από τα γραφόμενά του αφήνει να εννοηθεί οτι θέλει οι επιφάνειες τοπικά να είναι γραφήματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών, αλλά δεν αφήνει ελεύθερη την δυνατότητα η εξαρτημένη μεταβλητή να μην καθορίζεται μονοσήμαντα από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Ενας πρώτος ορισμός της έννοιας επιφάνεια δόθηκε από τον Euler το 1748. Το 1771 έδωσε έναν δεύτερο χρησιμοποιώντας παραμετρήσεις. Με σημερινούς όρους ο ορισμός αυτός αντιστοιχεί σε ένα προς ένα λείες συναρτήσεις του 2-διάστατου στον 3-διάστατο χώρο.

Στα τέλη του 18ου αιώνα ο G. Monge χρησιμοποίησε εξισώσεις της μορφής $F(x, y, z) = 0$ για την παράσταση επιφανειών. Η μελέτη ήταν πάλι επικεντρωμένη σε τοπικές ιδιότητες. Η άποψη αυτή δεν άλλαξε μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα με την εμφάνιση του H. Poincaré. Μέχρι τότε όμως υπήρξαν δύο μεγάλοι σταθμοί. Ο πρώτος ήταν η εργασία του C.F. Gauss γύρω στα 1832, που έδειξε οτι υπάρχει ένα μέτρο της καμπύλωσης μίας επιφάνειας, που σήμερα λέγεται καμπυλότητα Gauss, το οποίο εξαρτάται μόνον από τον τρόπο με τον οποίο μετρώνται τα μήκη των λείων καμπύλων πάνω στην επιφάνεια και όχι από τον τρόπο με τον οποίο η επιφάνεια είναι τοποθετημένη μέσα στον περιβάλλοντα χώρο. Αυτή η παρατήρηση της ύπαρξης της «εσωτερικής γεωμετρίας» μίας επιφάνειας, που είναι ανεξάρτητη από την μορφή της στον περιβάλλοντα 3-διάστατο χώρο οδήγησε στην έννοια της αφηρημένης επιφάνειας. Αυτό έγινε πιο καθαρό από τον B. Riemann το 1854, που όρισε τις αφηρημένες n-διάστατες επιφάνειες και εξήγησε τι σημαίνει μήκος καμπύλης σε μια τέτοια επιφάνεια. Αυτό που εισήγαγε ο Riemann δεν ήταν ο γενικός ορισμός της πολλαπλότητας, αλλά αυτό που σήμερα αποκαλούμε χάρτη με μια μετρική Riemann. Πάντως με τον Riemann έγινε το μεγάλο βήμα, αφού τα αντικείμενα που όρισε δεν βρίσκονταν μέσα σε κανέναν χώρο.

Ο σύγχρονος ορισμός της έννοιας «διαφορίσιμη πολλαπλότητα» δόθηκε ουσιαστικά από τον H. Poincaré το 1895, οπότε για πρώτη φορά γίνεται ξεκάθαρη η ολική υφή της έννοιας. Ο ορισμός του Poincaré, αν και αναφέρεται σε υποσύνολα κάποιου χώρου $\mathbb{R}^n$, δίνεται μέσω χαρτών με την συνθήκη για την τάξη του ιακωβιανού πίνακα της αλλαγής τοπικών συντεταγμένων να αναφέρεται ρητά. Επίσης θεωρεί αντίστροφες εικόνες κανονικών τιμών λείων συναρτήσεων (ορισμός του Monge) και δείχνει οτι δεν είναι όλες οι πολλαπλότητες αυτής της μορφής. Ο Poincaré επιπλέον κατασκεύασε διαφορίσιμες 3-πολλαπλότητες ως χώρους πηλίκα στερεών πολυέδρων με κατάλληλη ταύτιση των εδρών τους. Ο Poincaré μελέτησε τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες από την άποψη της (αλγεβρικής) τοπολογίας, ως επιφάνειες Riemann, αλλά και ως χώρους φάσεων Δυναμικών Συστημάτων.

Στα 30 χρόνια που ακολούθησαν ο ορισμός του Poincaré δεν άλλαξε επί της ουσίας. Ο πρώτος αφηρημένος ορισμός χωρίς αναφορά σε περιβάλλοντα χώρο δόθηκε από τους O. Veblen και J.H.C. Whitehead μέσα από ένα μάλλον άβολο σύνολο αξιωμάτων. Στην σημερινή του μορφή ο ορισμός οφείλεται στους P. Alexandroff, H. Hopf και H. Whitney. Μάλιστα ο Whitney απέδειξε το 1936 οτι ο αφηρημένος ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό του Poincaré.

2. Πολλαπλότητες Riemann

Μια λεία καμπύλη σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M είναι μια λεία συνάρτηση $\gamma : [0,1] \to M$. Οπως φαίνεται, δεν υπάρχει τίποτα στον ορισμό που να μας δίνει την δυνατότητα να μετρήσουμε το μήκος της γ. Προχωρόντας πιο πέρα, αν έχουμε δύο καμπύλες γ_1, γ_2 στην M, που τέμνονται σ′ ένα σημείο $\gamma_1(t) = \gamma_2(s)$, πως είναι δυνατόν να μετρήσουμε την γωνία που σχηματίζουν στο σημείο αυτό; Αν $M = \mathbb{R}^n$, τότε όπως ξέρουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, το μήκος της γ είναι

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Επίσης η γωνία των γ_1, γ_2 σ′ αυτήν την περίπτωση βρίσκεται από την ισότητα

$$\cos\theta = \frac{\langle \dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(s) \rangle}{\|\dot{\gamma}_1(t)\| \cdot \|\dot{\gamma}_2(s)\|}.$$

Παρατηρούμε οτι και στις δύο περιπτώσεις αυτό που χρειαζόμαστε μόνον είναι η ύπαρξη του εσωτερικού γινομένου για διανύσματα με το ίδιο σημείο εφαρμογής. Μία μετρική Riemann σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M είναι μια οικογένεια $g = \{\langle , \rangle_p : p \in M\}$, όπου το $\langle , \rangle_p$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον εφαπτόμενο χώρο T_pM, που εξαρτάται κατά λείο τρόπο από το p. Πρέπει να σημειωθεί οτι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα δέχεται πολλές μετρικές Riemann. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2$ έχουμε την ευκλείδεια μετρική Riemann $\langle x, y \rangle_p = x_1y_1 + x_2y_2$ και την μετρική Riemann $\langle x, y \rangle_p = x_1y_1 + e^{2p_1}x_2y_2$, όπου $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ και $p = (p_1, p_2)$, που δίνει ένα μοντέλο για την υπερβολική γεωμετρία.

Αυτός ο διαχωρισμός των δομών, οτι δηλαδή ο τρόπος μέτρησης των μηκών είναι μια επιπλέον δομή, πέρα από την διαφορική/τοπολογική δομή, έγινε για πρώτη φορά από τον Riemann στο δεύτερο μέρος της ομιλίας του επί υφηγεσία το 1854, που δημοσιεύτηκε το 1868. Ο Riemann απέδωσε την σύγχηση σχετικά με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη στην λανθασμένη πεποίθεση, που υπήρχε μέχρι τότε, οτι το επίπεδο δέχεται μια μοναδική γεωμετρία, την ευκλείδεια. Ο Riemann έδειξε οτι πολλές γεωμετρίες υπάρχουν και σε χώρους με μεγαλύτερη διάσταση, συμπεραίνοντας οτι η Γεωμετρία, που έχει ως αντικείμενο μελέτης τον χώρο, πρέπει να έχει στενή σχέση με την φυσική εμπειρία. Η κατεύθυνση αυτή ακολουθήθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα από τους Einstein και Minkowski.

Επιστρέφοντας στις καμπύλες, στην ευκλείδεια γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$ οι ευθείες είναι οι καμπύλες με το ελάχιστο μήκος. Θέλοντας να γενικεύσουμε την έννοια της ευθείας σε πολλαπλότητες Riemann, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε εκείνες τις καμπύλες που τουλάχιστον τοπικά ελαχιστοποιούν το μήκος. Ενας τέτοιος ορισμός είναι δύσχρηστος. Ετσι χρησιμοποιούμε την άλλη χαρακτηριστική ιδιότητα, οτι οι ευθείες είναι οι καμπύλες με μηδενική επιτάχυνση. Βέβαια πρέπει πρώτα να δούμε πως ορίζεται η επιτάχυνση ανεξάρτητα από τοπικές συντεταγμένες. Η ταχύτητα μιας λείας καμπύλης γ είναι ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ. Δηλαδή $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Η επιτάχυνση λείων καμπύλων στον $\mathbb{R}^n$ είναι η παράγωγος της ταχύτητας. Ομως πως μπορούμε να ορίσουμε την επιτάχυνση ως παράγωγο της ταχύτητας, όταν τα $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ και $\dot{\gamma}(s) \in T_{\gamma(s)}M$ βρίσκονται σε διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους και δεν έχει έννοια η διαφορά τους; Χρειαζόμαστε λοιπόν έναν τρόπο συνοχής των εφαπτομένων χώρων σε κοντινά σημεία της πολλαπλότητας. Ετσι ερχόμαστε φυσιολογικά στην έννοια της συνοχής, που είναι ένας τρόπος παραγώγισης διανυσματικών πεδίων κατά την διεύθυνση εφαπτόμενων διανυσμάτων και στην συνακόλουθη έννοια της παράλληλης μεταφοράς διανυσμάτων κατά μήκος καμπύλων.

Μια γραμμική συνοχή σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M είναι μια διγραμμική απεικόνιση $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ με τις ιδιότητες (α) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$ και (β)

$\nabla_x(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, για κάθε λεία συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$. Η ∇ λέγεται συμμετρική, όταν $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, για κάθε X, $Y \in \mathcal{X}(M)$. Αν τώρα γ είναι μια λεία καμπύλη, τότε η επιτάχυνσή της είναι το καλά ορισμένο, όπως αποδεικνύεται, διανυσματικό πεδίο $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ κατά μήκος της γ. Η γ λέγεται γεωδαισιακή, αν $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Επίσης για κάθε λεία καμπύλη γ ορίζεται η παράλληλη μεταφορά εφαπτομένων διανυσμάτων κατά μήκος της, που είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός $T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(s)}M$. Σε μια πολλαπλότητα Riemann υπάρχουν πολλές γραμμικές συνοχές. Συμβιβάζονται όμως με την μετρική Riemann μόνον εκείνες, των οποίων οι παραλληλες μεταφορές είναι ισομετρίες.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας Riemann. *Σε κάθε πολλαπλότητα Riemann υπάρχει μια μοναδική συμμετρική, γραμμική συνοχή, οι παράλληλες μεταφορές της οποίας είναι ισομετρίες. Η συνοχή αυτή λέγεται συνοχή Levi-Civita.*

3. Καμπυλότητα

Στόχος της θεωρίας των πολλαπλοτήτων Riemann είναι η κατάταξή τους. Δυο πολλαπλότητες Riemann M, N λέγονται ισομετρικές, αν υπάρχει μια ισομετρία $h : M \to N$, δηλαδή η h είναι αμφιδιαφόριση και η παράγωγος $Dh(p) : T_pM \to T_{h(p)}N$ είναι γραμμική ισομετρία για κάθε $p \in M$, ως προς τα δεδομένα εσωτερικά γινόμενα που έχουμε από τις αντίστοιχες μετρικές Riemann. Πολύ εύκολα βλέπουμε οτι οι ισομετρίες διατηρούν τις συνοχές Levi-Civita. Δηλαδή η συνοχή Levi-Civita είναι εσωτερικό συστατικό της δομής Riemann.

Το πρώτο βήμα στην κατεύθυνση της κατάταξης είναι η κατασκευή αναλλοιώτων, που εξασφαλίζουν κατ' αρχήν έστω τοπική ισομετρία. Ενα τέτοιο τοπικό αναλλοίωτο είναι η καμπυλότητα. Πρέπει να σημειωθεί, οτι στα πλαίσια της Γεωμετρίας Riemann το ερώτημα της ύπαρξης και κατασκευής τοπικών αναλλοιώτων είναι μη τετριμένο, σε αντίθεση με άλλου είδους δομές που φέρονται από διαφορίσιμες πολλαπλότητες, όπως για παράδειγμα η συμπλεκτική δομή, που δεν έχει τοπικά αναλλοίωτα.

Η καμπυλότητα Riemann μιας πολλαπλότητας Riemann M με συνοχή Levi-Civita ∇ είναι η απεικόνιση $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ με τύπο

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Απ' αυτήν ορίζεται ο τανυστής καμπυλότητας Riemann $R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle$. Η καμπυλότητα διατηρείται από τις τοπικές ισομετρίες. Μάλιστα $R = 0$ τότε και μόνον τότε όταν η M είναι τοπικά ισομετρική με τον ευκλείδειο χώρο. Με άλλα λόγια, η καμπυλότητα είναι εκείνο που εμποδίζει μια πολλαπλότητα Riemann από το να είναι τοπικά ισομετρική με τον ευκλείδειο χώρο.

Η καμπυλότητα μπορεί να ερμηνευθεί μέσα από την καμπυλότητα τομής. Εστω $p \in M$ και E ένας 2-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του T_pM. Αν $\{X, Y\}$ είναι μια βάση του E, τότε η ποσότητα

$$K_p(E) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X\rangle}{\|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

δεν εξαρτάται από την βάση, αλλά μόνον από τον E και λέγεται καμπυλότητα τομής της M στο p ως προς E. Αποδεικνύεται οτι ο τανυστής καμπυλότητας καθορίζεται πλήρως από τις καμπυλότητες τομής. Αν θεωρήσουμε όλες τις γεωδαισιακές, που διέρχονται από το p των οποίων η ταχύτητα βρίσκεται στον E, τότε αυτές πολύ κοντά στο p διαγράφουν μία επιφάνεια. Από το Theorema Egregium του Gauss, η καμπυλότητα τομής $K_p(E)$ είναι ακριβώς η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας αυτής στο σημείο p.

4. Γεωμετρία και Τοπολογία

Η δυνατότητα να μετράμε τα μήκη των λείων καμπύλων σε μια πολλαπλότητα Riemann M μας επιτρέπει να ορίσουμε την απόσταση δύο σημείων ως προς την δεδομένη μετρική Riemann, όταν η M είναι συνεκτική. Συγκεκριμένα, αν p, $q \in M$, τότε

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \text{ η } \gamma \text{ είναι κατά τμήματα λεία καμπύλη από το } p \text{ στο } q\}.$$

Η d ορίζει την ίδια τοπολογία που υπάρχει ήδη στην M. Ενα πρωταρχικό ερώτημα είναι πότε η d είναι πλήρης.

Θεώρημα. (Hopf-Rinow) *Η απόσταση Riemann είναι πλήρης τότε και μόνον τότε όταν κάθε μέγιστη γεωδαισιακή ορίζεται σ΄ ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

Ειναι φανερή η διαπλοκή γεωμετρίας και τοπολογίας, αφού η καθαρά τοπολογική ιδιότητα της πληρότητας είναι ισοδύναμη με την καθαρά γεωμετρική ιδιότητα της επέκτασης των γεωδαισιακών σ΄ ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Μια ιδιαίτερα σημαντική πρόταση που αποδεικνύεται στην πορεία προς το Θεώρημα Hopf-Rinow είναι το γεγονός οτι μια λεία καμπύλη με ελάχιστο μήκος πρέπει αναγκαστικά να είναι γεωδαισιακή και αντίστροφα οι γεωδαισιακές τοπικά ελαχιστοποιούν το μήκος.

Το πρώτο ίσως σπουδαίο αποτέλεσμα εύρεσης ολικών τοπολογικών ιδιοτήτων μιας πολλαπλότητας Riemann από τοπικές γεωμετρικές ιδιότητες είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα. (Cartan-Hadamard) *Εστω M μια πλήρης, συνεκτική πολλαπλότητα Riemann με διάσταση n. Αν όλες οι καμπυλότητες τομής σε κάθε σημείο είναι μη θετικές, τότε ο καθολικός χώρος επικάλυψης της M είναι αμφιδιαφορίσιμος με τον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, οι ανώτερες ομάδες ομοτοπίας $\pi_k(M)$, $k \geq 2$, είναι τετριμένες.*

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να διαβαστεί και προς την αντίθετη κατεύθυνση, όπου οι τοπολογικές ιδιότητες μιας πολλαπλότητας θέτουν περιορισμούς στις γεωμετρίες Riemann που δέχεται. Ετσι αν κάποια από τις ανώτερες ομάδες ομοτοπίας $\pi_k(M)$, $k \geq 2$, είναι μη τετριμένη, τότε η διαφορίσιμη πολλαπλότητα M δεν δέχεται δομή Riemann με παντού μη θετική καμπυλότητα τομής. Μια ακόμα πρόταση της υφής του Θεωρήματος Cartan-Hadamard είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα. (Bonnet-Myers) *Εστω M μια πλήρης, συνεκτική n-πολλαπλότητα Riemann, της οποίας η καμπυλότητα Ricci είναι μεγαλύτερη ή ίση από $(n-1)/r^2$, για κάποιο $r > 0$. Τότε η M είναι συμπαγής, η πρώτη ομάδα ομοτοπίας $\pi_1(M)$ είναι πεπερασμένη και $\operatorname{diam}(M) \leq \pi r$.*