Αριθμοί Στροφής στα Δυναμικά Συστήματα

1. Εισαγωγή

Ενα από τα κλασικά προβλήματα στην θεωρία των δυναμικών συστημάτων, που μέχρι σήμερα είναι πεδίο εντατικής έρευνας, αποτελεί το πρόβλημα της εύρεσης συνθηκών που εγγυώνται την ύπαρξη περιοδικών τροχιών για ομοιομορφισμούς ή ροές και διαφορικές εξισώσεις. Από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα ήταν ο H. Poincaré, που απέδειξε το ακόλουθο.

Θεώρημα. (Poincaré, 1885). *Ενας ομοιομορφισμός $h : S^1 \to S^1$, που διατηρεί τον προσανατολισμό, έχει περιοδική τροχιά τότε και μόνον τότε όταν έχει ρητό αριθμό στροφής.*

Αν $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια ανύψωση του h, ο Poincaré απέδειξε ότι το όριο

$$\rho(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\tilde{h}^n(t) - t}{n}$$

υπάρχει, είναι ανεξάρτητο του $t \in \mathbb{R}$ και δεν εξαρτάται (mod $\mathbb{Z}$) από την ανύψωση. Ετσι ο $e^{2\pi i \rho(h)}$ είναι καλά ορισμένος και λέγεται *αριθμός στροφής του Poincaré* για τον h. Τον ίδιο όρο χρησιμοποιούμε και για τον $\rho(h)$.

Ο αριθμός στροφής μπορεί να εκφραστεί και με άλλον τρόπο. Η συνεχής συνάρτηση $\psi : S^1 \to \mathbb{R}$ με $\psi(e^{2\pi i t}) = \tilde{h}(t) - t$ είναι καλά ορισμένη, γιατί $\tilde{h}(t+k) = \tilde{h}(t) + k$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και

$$\tilde{h}^n(t) - t = \sum_{k=0}^{n-1} \psi(e^{2\pi i \tilde{h}^k(t)}) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi(h^k(e^{2\pi i t})).$$

Αν τώρα ν είναι ένα h-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας Borel, τότε αποδεικνύεται οτι

$$\rho(h) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi(h^k(e^{2\pi i t})) = \int_{S^1} \psi d\nu.$$

Μάλιστα αυτό είναι άμεσο από το εργοδικό θεώρημα, αν το μέτρο είναι εργοδικό.

Στην συνέχεια θα γενικεύσουμε την έννοια του αριθμού στροφής του Poincaré. Σημαντικό ρόλο στην γενίκευση αυτή θα παίξει η ανάρτηση ενός ομοιομορφισμού. Εστω Y ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και $h : Y \to Y$ ένας ομοιομορφισμός. Στον $[0,1] \times Y$ θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $(1, y) \sim (0, h(y))$, $y \in Y$. Ο χώρος πηλίκο X λέγεται mapping torus του h και είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος. Στον X ορίζεται μια ροή με τύπο

$$\phi_t[s, y] = [t + s - n, h^n(y)],$$

όταν $n \leq t + s < n + 1$, $y \in Y$, που λέγεται *ανάρτηση* του h.

Στην περίπτωση που $Y = S^1$ και ο h διατηρεί τον προσανατολισμό, έχουμε $X = T^2$ και ο αριθμός στροφής περιγράφει τον ασυμπτωτικό μέσο όρο της μεταβολής της προβολής μιας τροχιάς της ανάρτησης πάνω στον μεσημβρινό. Ο αντίστοιχος ασυμπτωτικός μέσος όρος για τον ισημερινό είναι 1, λόγω της ειδικής φύσης της ανάρτησης. Γενικά, για μια οποιαδήποτε ροή πάνω στον T^2 μπορεί να μην υπάρχουν για κάθε τροχιά.

2. Ασυμπτωτικοί κύκλοι ροών

Εστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ μια ροή στον X. Ενας (πραγματικός, συνεχής) *σύγκυκλος* για την ροή είναι μια συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R}\times X \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$g(s+t,x) = g(s,\phi_t(x)) + g(t,x).$$

Το σύνολο $C(\phi)$ όλων των συγκύκλων της ροής είναι αβελιανή ομάδα. Κάθε συνεχής συνάρτηση $\psi : X \to \mathbb{R}$ ορίζει τον σύγκυκλο $g(t,x) = \psi(x) - \psi(\phi_t(x))$. Το σύνολο Γ των συγκύκλων της μορφής αυτής είναι υποομάδα της $C(\phi)$ και τα στοιχεία της λέγονται *ομολογικά τετριμένοι σύγκυκλοι*. Οι σύγκυκλοι g_1, g_2 λέγονται *συνομόλογοι* αν $g_1 - g_2 \in \Gamma$. Θέτουμε $H^1(\phi) = C(\phi)/\Gamma$.

Γενικότερα, αν G είναι μια τοπολογική ομάδα, ένας συνεχής σύγκυκλος με τιμές στην G είναι μια συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R}\times X \to G$, τέτοια ώστε $g(s+t,x) = g(s,\phi_t(x))g(t,x)$.

2.1. Πρόταση. *Εστω μ ένα αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας από την ροή. Για κάθε σύγκυκλο g, το όριο*

$$g^*(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{g(t,x)}{t}$$

υπάρχει μ-σχεδόν παντού, είναι αναλλοίωτο από την ροή, είναι μ-ολοκληρώσιμο και

$$\int_X g^* d\mu = \int_X g(1,.) d\mu.$$

Απόδειξη. Για κάθε $t > 1$ έχουμε $g(t,x) = g(t-[t], \phi_{[t]}(x)) + g([t],x)$ και επαγωγικά

$$g([t],x) = \sum_{k=0}^{[t]-1} g(1,(\phi_1)^k(x)).$$

Επειδή ο X είναι συμπαγής, από το εργοδικό θεώρημα για την ϕ_1 και την $g(1,.)$ έχουμε το συμπέρασμα.

2.2. Λήμμα. *Αν g_1, g_2 είναι δύο συνομόλογοι σύγκυκλοι, το όριο $\lim_{t\to+\infty} g_1(t,x)/t$ υπάρχει τότε και μόνον τότε όταν το $\lim_{t\to+\infty} g_2(t,x)/t$ υπάρχει και τα δύο όρια είναι ίσα.*

Απόδειξη. Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\psi : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g_1(t,x) - g_2(t,x) = \psi(x) - \psi(\phi_t(x))$. Συνεπώς,

$$\left|\frac{g_1(t,x)}{t} - \frac{g_2(t,x)}{t}\right| \leq \frac{2\|\psi\|}{t}$$

για $t > 0$ και το συμπέρασμα είναι άμεσο.

Ετσι ορίζεται ο ομομορφισμός $r_\mu : H^1(\phi) \to \mathbb{R}$ με

$$r_\mu[g] = \int_X g(1,.) d\mu.$$

Εστω $f : X \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση. Η συνεχής συνάρτηση $F : \mathbb{R} \times X \to S^1$ με τύπο

$$F(t,x) = \frac{f(\phi_t(x))}{f(x)}$$

είναι συνεχής σύγκυκλος με τιμές στην τοπολογική ομάδα S^1 και ανυψώνεται σε έναν μοναδικό σύγκυκλο $g : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$. Ετσι $f(\phi_t(x)) = f(x)e^{2\pi i g(t,x)}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

Αν f_1, $f_2 : X \to S^1$ είναι δύο ομοτοπικές συναρτήσεις, τότε οι αντίστοιχοι σύγκυκλοι g_1, g_2 είναι συνομόλογοι, γιατί υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\psi : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_1 = f_2 e^{2\pi i\psi}$, οπότε

$$g_1(t,x) = g_2(t,x) + \psi(\phi_t(x)) - \psi(x).$$

Το σύνολο $[X; S^1]$ των κλάσεων ομοτοπίας των συνεχών συναρτήσεων του X στον S^1 είναι αβελιανή ομάδα με πράξη επαγόμενη από τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών και ισόμορφη με την $\check{H}^1(X;\mathbb{Z})$. Από τα προηγούμενα προκύπτει οτι ορίζεται ένας ομομορφισμός $r : \check{H}^1(X;\mathbb{Z}) \to H^1(\phi)$ και κατά συνέπεια ο ομομορφισμός $A_\mu = r_\mu \circ r$, που λέγεται *μ-ασυμπτωτικός κύκλος* της ροής και περιγράφει πως μια μ-μέση τροχιά περιστρέφεται γύρω από τις τρύπες του X. Αν ο X είναι συμπαγής τοπολογική πολλαπλότητα, τότε ο A_μ μπορεί να θεωρηθεί στοιχείο της $H_1(X;\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(\check{H}^1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{R})$. Η $W_\mu = \mathrm{Im}A_\mu$ λέγεται ομάδα των *μ-αριθμών στροφής*. Οι ασυμπτωτικοί κύκλοι ορίστηκαν από τον S. Schwartzman [8].

2.3. Παραδείγματα. (α) Εστω $C = C(x)$ μια περιοδική τροχιά, περιόδου $T > 0$ και μ το ομοιόμορφα κατανεμημένο μέτρο πιθανότητας κατά μήκος της C, δηλαδή

$$\int_X \psi d\mu = \frac{1}{T}\int_0^T \psi(\phi_t(x))dt$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $\psi : X \to \mathbb{R}$. Το μ είναι αναλλοίωτο από την ροή και για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to S^1$ με αντίστοιχο σύγκυκλο g έχουμε

$$TA_\mu[f] = \int_0^T g(1,\phi_t(x))dt = g(T,x) = \deg(f|C).$$

Ειδικά, αν η C αναπαριστά το τετριμένο ή ένα περιοδικό στοιχείο της $H_1(X;\mathbb{Z})$, τότε $A_\mu = 0$. Αν $A_\mu \neq 0$, τότε $W_\mu \cong \mathbb{Z}$.

(β) Αν $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ και $\phi_t : T^n \to T^n$, $t \in \mathbb{R}$, είναι η ροή με τύπο

$$\phi_t(e^{2\pi i x_1}, ..., e^{2\pi i x_n}) = (e^{2\pi i(x_1 + a_1 t)}, ..., e^{2\pi i(x_n + a_n t)}),$$

τότε το μέτρο Haar μ είναι αναλλοίωτο και $W_\mu = a_1\mathbb{Z} + ... + a_n\mathbb{Z}$.

(γ) Εστω Y ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, $h : Y \to Y$ ένας ομοιομορφισμός και ν ένα h-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. Εστω X ο mapping torus του h. Αν λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$, τότε το μέτρο γινόμενο $\lambda \times \nu$ επάγει ένα μέτρο πιθανότητας μ στον X, ώστε

$$\int_X \psi d\mu = \int_Y (\int_0^1 \psi[s,y]ds)d\nu,$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $\psi : X \to \mathbb{R}$. Το μ είναι αναλλοίωτο από την ανάρτηση του h. Πράγματι, αν $t \in \mathbb{R}$, υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$, ώστε $t \leq n < n+1$. Για κάθε $0 \leq s \leq 1$ έχουμε $\phi_t[s,y] = [t+s-n+1, h^{n-1}(y)]$, αν $t \leq t+s < n$, και $\phi_t[s,y] = [t+s-n, h^n(y)]$, αν $n \leq t+s < t+1$. Από το θεώρημα του Fubini και το γεγονός οτι το ν είναι h-αναλλοίωτο έχουμε

$$\int_X (\psi \circ \phi_t) d\mu = \int_Y \int_0^{n-t} \psi[t+s-n+1, y] ds d\nu + \int_Y \int_{n-t}^1 \psi[t+s-n, y] ds d\nu$$

$$= \int_Y \int_{t-n+1}^1 \psi[s,y] ds d\nu + \int_Y \int_0^{t-n+1} \psi[s,y] ds d\nu = \int_X \psi d\mu.$$

Εστω $f : X \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση με αντίστοιχο σύγκυκλο g. Για κάθε $0 \leq s < 1$ και $y \in Y$ έχουμε

$$g(1,[s,y]) = g(s+1,[0,y]) - g(s,[0,y]) = g(s,[0,h(y)]) + g(1,[0,y]) - g(s,[0,y]).$$

Κατά συνέπεια

$$A_\mu[f] = \int_0^1 (\int_Y g(1,[s,y]) d\nu) ds = \int_Y g(1,[0,y]) d\nu.$$

(δ) Εστω ξ ένα C^r διανυσματικό πεδίο, $1 \leq r \leq \infty$, σε μία συνεκτική, συμπαγή, λεία n-πολλαπλότητα M με ροή $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ και έστω μ ένα ϕ-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας Borel. Από το θεώρημα του de Rham $H^1_{DR}(M) \cong H^1(M;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει μία βάση της $H^1_{DR}(M)$ κάθε στοιχείο της οποίας παρίσταται από την $f^*(d\theta/2\pi)$, όπου η $f : M \to S^1$ είναι μία λεία συνάρτηση και $d\theta/2\pi$ είναι ο αντιπρόσωπος του κανονικού γεννήτορα της $H^1_{DR}(S^1) \cong \mathbb{R}$. Μπορούμε να επεκτείνουμε τον A_μ στον $H^1_{DR}(M)$ γραμμικά με τον προφανή τρόπο.

Εύκολα βλέπουμε οτι ο 1-σύγκυκλος $g : \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}$ της λείας συνάρτησης $f : M \to S^1$ έχει τύπο

$$g(t,x) = \int_0^t f^*(\frac{d\theta}{2\pi})(\xi(sx)) ds.$$

Από το θεώρημα του Fubini

$$A_\mu[f] = \int_0^1 \Big(\int_M f^*(\frac{d\theta}{2\pi})(\xi(tx)) d\mu\Big) dt = \int_M f^*(\frac{d\theta}{2\pi})(\xi) d\mu.$$

Συνεπώς, $A_\mu[\alpha] = \int_M (i_\xi \alpha) d\mu$ για κάθε κλειστή, λεία 1-μορφή α.

Επειδή η $H^1(M;\mathbb{Z})$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα, το ίδιο είναι και η ομάδα των μ-αριθμών στροφής W_μ. Αν $W_\mu = 0$, το ξ λέγεται *μ-ομολογικά τετριμένο.* Αν $W_\mu \cong \mathbb{Z}$, τότε $W_\mu = \lambda\mathbb{Z}$, για κάποιο $\lambda > 0$ και το ξ λέγεται *μ-ομολογικά ρητό.* Σε οποιοαδήποτε άλλη περίπτωση $W_\mu = \lambda(\mathbb{Z} + \alpha_1\mathbb{Z} + ... + \alpha_k\mathbb{Z})$, για κάποια $\lambda > 0$ και $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1,2,...,k$, ώστε τα $1, \alpha_1, ..., \alpha_k$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω στο $\mathbb{Q}$ και $1 \leq k \leq \mathrm{rank} H^1(M;\mathbb{Z}) - 1$.

Εστω οτι η M είναι προσανατολισμένη από ένα στοιχείο όγκου ω οτι το ξ διατηρεί τον όγκο. Τότε, $\phi_t^*\omega = \omega$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και η $i_\xi\omega$ είναι μία C^r κλειστή $(n-1)$-μορφή, που λέγεται *flux form.* Η απεικόνιση που στέλνει το ξ στην αντίστοιχη flux form είναι γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ του χώρου των C^r διανυσματικών πεδίων που διατηρούν τον όγκο και του χώρου των C^r κλειστών $(n-1)$-μορφών. Αφού $\alpha \wedge \omega = 0$, για κάθε κλειστή 1-μορφή α, έχουμε

$$0 = i_\xi(\alpha \wedge \omega) = (i_\xi \alpha)\omega - \alpha \wedge (i_\xi \omega)$$

και συνεπώς

$$A_\omega[\alpha] = \int_M (i_\xi \alpha)\omega = \int_M \alpha \wedge (i_\xi \omega).$$

Αν λοιπόν όλα είναι C^∞, ο A_ω είναι δυϊκός κατά Poincaré της κλάσης συνομολογίας de Rham με αντιπρόσωπο $i_\xi \omega$.

Εστω τώρα ξ και ζ δύο C^∞ διανυσματικά πεδία στην M, που διατηρούν το στοιχείο όγκου ω. Τότε,

$$i_{[\xi,\zeta]}\omega = (L_\xi i_\zeta - i_\zeta L_\xi)\omega = L_\xi(i_\zeta \omega) = d(i_\xi i_\zeta \omega) + i_\xi d(i_\zeta \omega) = d(i_\xi i_\zeta \omega).$$

Ειδικά, το σύνολο των ομολογικά τετριμένων C^∞ διανυσματικών πεδίων είναι υποάλγεβρα Lie και ιδεώδες της άλγεβρας Lie των C^∞ διανυσματικών πεδίων που διατηρούν τον όγκο. Επιπλέον, η συνδιάστασή της είναι $\mathrm{rank} H^1(M;\mathbb{Z})$, δηλαδή πεπερασμένη, αφού η M είναι συμπαγής.

Αν (M,Ω) είναι μία συμπλεκτική $2n$-πολλαπλότητα και το u είναι ένα Hamiltonian λείο διανυσματικό πεδίο με Hamiltonian συνάρτηση $H : M \to \mathbb{R}$, το u διατηρεί το στοιχείο όγκου $\omega = \Omega^n$. Επειδή η Ω είναι κλειστή, έχουμε

$$i_u \omega = n(i_u \Omega) \wedge \Omega^{n-1} = n dH \wedge \Omega^{n-1} = d(nH\Omega^{n-1}).$$

Δηλαδή το u είναι ομολογικά τετριμένο και $A_\omega = 0$.

Εστω (M,η) μία συμπαγής $(2n+1)$-πολλαπλότητα επαφής, δηλαδή η η είναι μία 1-μορφή ώστε $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ παντού στην M. Αυτό σημαίνει ιδιαίτερα οτι η M είναι προσανατολίσιμη. Ο πυρήνας D της η είναι μία μη-ολοκληρώσιμη υποδέσμη της εφαπτομένης δέσμης με συνδιάσταση 1. Αν η D είναι προσανατολίσιμη, η TX/D είναι επίσης προσανατολίσιμη και δέχεται μία τομή. Με άλλα λόγια υπάρχει ένα λείο διανυσματικό πεδίο u στην M ώστε $i_u \eta = 1$ και $i_u(d\eta) = 0$. Ενα τέτοιο διανυσματικό πεδίο λέγεται πεδίο Reeb. Εχουμε τώρα

$$i_u(\eta \wedge (d\eta)^n) = (d\eta)^n = d(\eta \wedge (d\eta)^{n-1}).$$

Αρα το u διατηρεί την $\eta \wedge (d\eta)^n$ και είναι ομολογικά τετριμένο.

Εστω τώρα M μία συμπαγής πολλαπλότητα Riemann. Η γεωδαισιακή ροή στην T^1M είναι το πεδίο Reeb που αντιστοιχεί στην δομή επαφής που ορίζεται από το pullback η της 1-μορφής (σε τοπικές συντεταγμένες)

$$\theta = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v^j dq^i$$

από την ένθεση $T^1M \subset TM$. Το μέτρο Liouville στην T^1M είναι πολλαπλάσιο (ως προς σταθερά) του μέτρου που επάγεται από την $\eta \wedge (d\eta)^n$. Τα προηγούμενα δείχνουν οτι η γεωδαισιακή ροή είναι ομολογικά τετριμένη.

(ε) Εστω X ο ολικός χώρος μίας προσανατολίσιμης δέσμης κύκλων $q : X \to M$ πάνω από μία συνεκτική συμπαγή λεία πολλαπλότητα M και u ένα λείο διανυσματικό πεδίο στην X που διατηρεί ένα στοιχείο όγκου ω. Αν η δέσμη έχει μη-τετριμένη κλάση Euler $e \in H^2(M;\mathbb{Z})$, τότε η q επάγει έναν ισομορφισμό $q^* : H^1(M;\mathbb{Z}) \cong H^1(X;\mathbb{Z})$. Πράγματι, από την ακριβή ακολουθία του Gysin παίρνουμε την μικρή ακριβή ακολουθία

$$0 \to H^1(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{q^*} H^1(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} H^2(M;\mathbb{Z})$$

όπου ο β είναι ο ομομορφισμός με $\beta(1) = e$. Επειδή η e είναι μη-τετριμένη, ο β είναι μονομορφισμός και ο q^* ισομορφισμός.

Αν λοιπόν η κλάση Euler της δέσμης είναι μη-τετριμένη, κάθε στοιχείο της $H^1_{DR}(X)$ αναπαρίσταται από κάποιο $q^*\alpha$, όπου η α είναι μία κλειστή 1-μορφή στην M και

$$A_\omega[q^*\alpha] = \int_X q^*\alpha \wedge i_u\omega = \int_M \alpha \wedge \int_{S^1} i_u\omega$$

όπου $\int_{S^1}$ είναι η ολοκλήρωση κατά μήκος της ίνας. Ο τελευταίος τύπος λέει οτι ο A_ω καθορίζεται πλήρως από την $\int_{S^1} i_u\omega$ και λόγω του ισομορφισμού q^* μπορεί να θεωρηθεί δυϊκό του. Ειδικά, το u είναι ομολογικά τετριμένο τότε και μόνον τότε όταν η $\int_{S^1} i_u\omega$ είναι ακριβής στην M.

(στ) Υπάρχει μία ακόμα περιγραφή των αριθμών στροφής ενός C^1 διανυσματικού πεδίου ξ που διατηρεί τον όγκο μέσω υποπολλαπλοτήτων συνδιάστασης 1. Σύμφωνα με την κατασκευή του Pontryagin υπάρχει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων στην $H^1(M;\mathbb{Z})$ και των κλάσεων framed cobordism των framed συμπαγών λείων υποπολλαπλοτήτων της M με συνδιάσταση 1. Πιο συγκεκριμένα, έστω S μία συμπαγής λεία υποπολλαπλότητα της M με συνδιάσταση 1 και τετριμένη κανονική δέσμη, με έναν εκ των προτέρων επιλεγμένο κανονικό προσανατολισμό, το framing. Τότε και η S είναι προσανατολισμένη. Εστω N μία tubular neighbourhood της S στην M, $T : N \to \mathbb{R} \times S$ μία trivialization συμβατή με το framing και $B = T^{-1}([0,1] \times S)$. Εστω $f : M \to S^1$ η λεία συνάρτηση με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \notin B \\ \exp\Big(2\pi i \chi(p(T(x)))\Big), & \text{αν } x \in B, \end{cases}$$

όπου $p : \mathbb{R}\times S \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή και $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία λεία συνάρτηση, ώστε $\chi^{-1}(0) = (-\infty, 0]$, $\chi^{-1}(1) = [1, +\infty)$ και $\chi'(t) > 0$ για $0 < t < 1$. Η κλάση ομοτοπίας της f δεν εξαρτάται από την επιλογή της tubular neighbourhood και της trivialization και λέγεται κλάση Pontryagin της S με το δεδομένο framing. Αποδεικνύεται οτι κάθε στοιχείο της $H^1(M;\mathbb{Z})$ είναι η κλάση Pontryagin κάποιας συμπαγούς, λείας, framed υποπολλαπλότητας με συνδιάσταση 1 και δύο τέτοιες υποπολλαπλότητες ορίζουν την ίδια κλάση Pontryagin τότε και μόνον τότε όταν είναι framed cobordant.

Εστω τώρα $\sigma \in H_{n-1}(S;\mathbb{Z})$ η θεμελιώδης κλάση της S, δηλαδή η σ είναι η μοναδική κλάση ώστε

$$\int_\sigma \psi = \int_S \psi \text{ για κάθε } \psi \in H^{n-1}_{DR}(S).$$

Αν $f : M \to S^1$ είναι μία λεία συνάρτηση που αναπαριστά την κλάση Pontryagin της S και $j : S \hookrightarrow M$ είναι η ένθεση, τότε η $f^*(d\theta/2\pi)$ είναι δυϊκή της $j_*(\sigma)$, δηλαδή

$$\int_{j_*(\sigma)} \alpha = \int_M f^*(\frac{d\theta}{2\pi}) \wedge \alpha$$

για κάθε C^1 κλειστή $(n-1)$-μορφή α στην M. Συμπεραίνουμε λοιπόν οτι

$$A_\omega[f] = \int_S j^*(i_\xi \omega).$$

Η τιμή του ασυμπτωτικού κύκλου A_ω του ξ πάνω στην κλάση Pontryagin μίας συμπαγούς, λείας, framed υποπολλαπλότητας S με συνδιάσταση 1 λέγεται flux της ροής του ξ μέσα από την S. Αν αντιστρέψουμε το framing η flux αλλάζει μόνον πρόσημο.

(ζ) Εστω $h : S^1 \to S^1$ ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό και μ ένα αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας Borel από την ανάρτηση του h. Τότε $W_\mu = \mathbb{Z} + \rho(h)\mathbb{Z}$, και το θεώρημα του Poincaré διατυπώνεται τώρα ως εξής. Ο h έχει περιοδική τροχιά τότε και μόνον τότε όταν $W_\mu \cong \mathbb{Z}$, ή ισοδύναμα αν το $A_\mu \in H_1(T^2;\mathbb{R})$ έχει ρητή κλίση ως προς την κανονική βάση.

Από το θεώρημα του Poincaré και το παράδειγμα (ζ) γεννιέται το ερώτημα, μήπως κάθε συνεχής ροή με κυκλική ομάδα αριθμών στροφής ως προς κάποιο αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας Borel έχει περιοδική τροχιά. Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο.

2.4. Θεώρημα. ([1], [3]) *(α) Εστω M μία κλειστή, προσανατολίσιμη 2-πολλαπλότητα με μία ροή $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ και μ ένα αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας Borel, ώστε $W_\mu \cong \mathbb{Z}$. Αν το θετικό (ή το αρνητικό) οριακό σύνολο μίας τροχιάς στον φορέα του μ δεν περιέχει σταθερά σημεία, τότε η τροχιά είναι περιοδική.*

(β) Για κάθε $n \geq 4$ υπάρχει ένα C^∞ διανυσματικό πεδίο σε μία κλειστή, προσανατολισμένη n-πολλαπλότητα που διατηρεί τον όγκο, δεν έχει σταθερά σημεία ή περιοδικές τροχιές και έχει κυκλική ομάδα αριθμών στροφής.

(γ) Υπάρχει ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε μία κλειστή, προσανατολισμένη 3-πολλαπλότητα που διατηρεί τον όγκο, δεν έχει σταθερά σημεία ή περιοδικές τροχιές και έχει κυκλική ομάδα αριθμών στροφής.

3. Διανύσματα στροφής για ομοιομορφισμούς

Εστω Y ένας συνεκτικός, συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και $h : Y \to Y$ ένας ομοιομορφισμός ομοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση. Αν H είναι μια ομοτοπία από την ταυτοτική απεικόνιση στον h, τότε η H μπορεί να επεκταθεί στο $[0,+\infty) \times Y$ θέτοντας επαγωγικά $H_t = H_{t-[t]} \circ H_{[t]}$. Αν $f : Y \to S^1$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε η $F : [0,+\infty) \times Y \to S^1$ με

$$F(t,y) = \frac{f(H_t(y))}{f(y)}$$

ανυψώνεται σε μια μοναδική συνεχή συνάρτηση $g : [0,+\infty) \times Y \to \mathbb{R}$, ώστε $g(0,y) = 0$, για κάθε $y \in Y$. Τότε $g(t,y) = g(t-[t], h^{[t]}(y)) + g([t],y)$ και επαγωγικά

$$g(n,y) = \sum_{k=0}^{n-1} g(1, h^k(y))$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $y \in Y$. Από το εργοδικό θεώρημα, για κάθε h-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας ν το όριο

$$g^*(y) = \lim_{t\to+\infty} \frac{g(t,y)}{t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(1, h^k(y))$$

υπάρχει ν-σχεδόν παντού, είναι h-αναλλοίωτο, ν-ολοκληρώσιμο και

$$\int_Y g^* d\nu = \int_Y g(1,.)d\nu.$$

Ας σημειωθεί οτι $f \circ h = f e^{2\pi i g(1,.)}$.

3.1. Λήμμα. *Αν οι $f_1, f_2 : Y \to S^1$ είναι συνεχείς και ομοτοπικές μεταξύ τους και οι $g_1, g_2 : Y \to \mathbb{R}$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις ώστε $f_k \circ h = f_k e^{2\pi i g_k}$, $k = 1,2$, τότε για κάθε h-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας ν έχουμε*

$$\int_Y g_1 d\nu - \int_Y g_2 d\nu \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη. Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\psi : Y \to \mathbb{R}$ ώστε $f_1 = f_2 e^{2\pi i \psi}$. Ετσι έχουμε

$$f_1 \circ h = (f_2 \circ h) e^{2\pi i (\psi \circ h)} = f_2 e^{2\pi i (g_2 + \psi \circ h)} = f_1 e^{2\pi i (g_2 + \psi \circ h - \psi)}$$

και κατά συνέπεια, αφού ο Y είναι συνεκτικός, υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $g_1 = g_2 + \psi \circ h - \psi + k$. Το συμπέρασμα τώρα είναι προφανές.

Ετσι ορίζεται ο ομομορφισμός $R_\nu : \check{H}^1(Y;\mathbb{Z}) \to S^1$ με

$$R_\nu[f] = \exp(2\pi i \int_Y g(1,.)d\nu)$$

που λέγεται *ομομορφισμός των ν-αριθμών στροφής* του h.

Εστω $l : \mathrm{Hom}(\check{H}^1(Y;\mathbb{Z}), \mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(\check{H}^1(Y;\mathbb{Z}), S^1)$ ο ομομορφισμός με $l(a) = e^{2\pi i a}$. Προφανώς $\mathrm{Ker} l = \mathrm{Hom}(\check{H}^1(Y;\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

3.2. Πρόταση. *Εστω Y ένας συνεκτικός, συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, $h : Y \to Y$ ένας ομοιομορφισμός ομοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση και ν ένα h-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. Αν η $\check{H}^1(Y;\mathbb{Z})$ είναι ελεύθερη αβελιανή, τότε $R_\nu \in \mathrm{Im} l$.*

Απόδειξη. Εστω X ο mapping torus του h, $j : Y \to X$ η ένθεση με $j(y) = [0,y]$ και $\gamma : \mathbb{Z} \to \check{H}^1(X;\mathbb{Z})$ ο ομομορφισμός, που το $\gamma(k)$ αναπαρίσταται από την συνεχή συνάρτηση $f : X \to S^1$ με τύπο $f[s,y] = e^{2\pi i k s}$. Τότε η ακολουθία ομομορφισμών

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \check{H}^1(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{j^*} \check{H}^1(Y;\mathbb{Z}) \to 0$$

είναι ακριβής και διασπάται, επειδή η $\check{H}^1(Y;\mathbb{Z})$ υποτίθεται ελεύθερη αβελιανή. Δηλαδή, υπάρχει δεξιός αντίστροφος r της j^* και η $r + \gamma : \check{H}^1(Y;\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \to \check{H}^1(X;\mathbb{Z})$ είναι ισομορφισμός. Θα δείξουμε τώρα οτι $R_\nu = e^{2\pi i (A_\mu \circ r)}$. Εστω $f : Y \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση και $g : Y \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f \circ h = f e^{2\pi i g}$. Εστω $\tilde{f} : X \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση με $r[f] = [\tilde{f}]$. Τότε $j^*[\tilde{f}] = [f]$, δηλαδή $f \simeq \tilde{f}|Y$. Συνεπώς, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\psi : Y \to \mathbb{R}$, ώστε $\tilde{f}[0,y] = f(y) e^{2\pi i \psi(y)}$, για κάθε $y \in Y$. Εστω οτι $\tilde{g}$ είναι ο σύγκυκλος της $\tilde{f}$ ως προς την ανάρτηση. Τότε έχουμε

$$f(h(y)) e^{2\pi i (\psi(h(y)))} = \tilde{f}[0, h(y)] = \tilde{f}[0,y] e^{2\pi i \tilde{g}(1,[0,y])} = f(y) e^{2\pi i (\psi(y) + \tilde{g}(1,[0,y]))}.$$

Επειδή ο Y είναι συνεκτικός, υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$, ώστε

$$\tilde{g}(1,[0,y]) = \psi(h(y)) - \psi(y) + g(y) + k$$

για κάθε $y \in Y$. Ετσι έχουμε

$$A_\mu(r[f]) = \int_Y \tilde{g}(1,[0,y])d\nu = \int_Y g d\nu + k.$$

Αν ο Y είναι μια συνεκτική, συμπαγής τοπολογική πολλαπλότητα, τότε η $\check{H}^1(Y;\mathbb{Z})$ είναι ελεύθερη αβελιανή με πεπερασμένη διάσταση και σε αυτή την περίπτωση το

$$R_\nu \in \mathrm{Im}l \cong \frac{\mathrm{Hom}(\check{H}^1(Y;\mathbb{Z}),\mathbb{R})}{\mathrm{Hom}(\check{H}^1(Y;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})} \cong \frac{H_1(Y;\mathbb{R})}{H_1(Y;\mathbb{Z})}$$

αναπαρίσταται από ένα στοιχείο της $H_1(Y;\mathbb{R})$, που λέγεται *ν-διάνυσμα στροφής* του h. Δύο ν-διανύσματα στροφής διαφέρουν κατά ένα στοιχείο της $H_1(Y;\mathbb{Z})$. Το σύνολο

$$\rho(h) = \{R_\nu : \text{ το } \nu \text{ είναι } h\text{-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας Borel}\}$$

λέγεται *εργοδικό σύνολο στροφής* του h.

3.3. Παράδειγμα. Εστω $h : T^n \to T^n$ ένας ομοιομορφισμός, ομοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση, ν ένα h-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας και μ το αντίστοιχο αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας της ανάρτησης. Αν $p_k : T^n \to S^1$ είναι η προβολή στην k-συντεταγμένη, $1 \leq k \leq n$, τότε το σύνολο $\{[p_1],...,[p_k]\}$ αποτελεί βάση της $\check{H}^1(T^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ και ο R_ν αναπαρίσταται από το διάνυσμα $(A_\mu(r[p_1]),...,A_\mu(r[p_k]))$ ως προς την φυσική βάση της $H_1(T^n;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$. Εστω $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια ανύψωση του h και $\psi : T^n \to \mathbb{R}^n$ η συνεχής συνάρτηση $\psi(y) = \tilde{h}(x) - x$, όπου $x \in p^{-1}(y)$ και $p : \mathbb{R}^n \to T^n$ είναι η κανονική απεικόνιση καθολικής επικάλυψης. Τότε

$$(A_\mu(r[p_1]),...,A_\mu(r[p_k])) = \int_{T^n} \psi d\nu \pmod{\mathbb{Z}^n}.$$

Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής. Εστω $g_k : T^n \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε $p_k \circ h = p_k e^{2\pi i g_k}$, $1 \leq k \leq n$. Αν $e_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή στην k-συντεταγμένη, τότε

$$e^{2\pi i(e_k \circ \tilde{h})} = p_k \circ h \circ p = (p_k \circ p)e^{2\pi i(g_k \circ p)} = e^{2\pi i(e_k + g_k \circ p)}.$$

Συνεπώς, $e_k \circ \tilde{h} - e_k = g_k \circ p \pmod{\mathbb{Z}}$, $1 \leq k \leq n$. Εχουμε τώρα

$$A_\mu(r[p_k]) = \int_{[0,1)^n} (g_k \circ p) dp^{-1}\nu = \int_{[0,1)^n} (e_k \circ \tilde{h} - e_k) dp^{-1}\nu \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Αν το ν είναι εργοδικό, τότε

$$\int_{T^n} \psi d\nu = \lim_{k \to +\infty} \frac{\tilde{h}^k(x) - x}{k}$$

$p^{-1}\nu$-σχεδόν για κάθε $x \in [0,1)^n$, από το εργοδικό θεώρημα.

Σε αναλογία με τον κύκλο ισχύει το ακόλουθο.

3.4. Θεώρημα. ([5], [6]) *Εστω $h : T^2 \to T^2$ ένας ομοιομορφισμός ομοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση, που διατηρεί ένα μέτρο πιθανότητας Borel ν, το οποίο είναι θετικό στα μη-κενά ανοιχτά σύνολα. Αν $R_\nu = 0$, τότε ο h έχει τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία.*

Εστω τώρα M μία κλειστή, προσανατολίσιμη πολλαπλότητα Riemann και $I(M)$ η συνεκτική συνιστώσα της ταυτοτικής στην ομάδα των ισομετριών της M. Αποδεικνύεται [2] οτι το $\rho(h)$ είναι μονοσύνολο για κάθε $h \in I(M)$. Συνεπώς ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\rho : I(M) \to H_1(M;\mathbb{R})/H_1(M;\mathbb{Z})$$

που είναι συνεχής, αν στο $I(M)$ θεωρήσουμε την συμπαγή-ανοιχτή τοπολογία, οπότε αυτό γίνεται συνεκτική, συμπαγής ομάδα Lie και στο $H_1(M;\mathbb{R})/H_1(M;\mathbb{Z})$ την ασθενή τοπολογία πιλήκο. Ο ρ λέγεται *ομομορφισμός στροφής* και μπορεί να θεωρηθεί μέσον για την συσχέτιση της γεωμετρίας με την ομολογία της M. Ισχύει το ακόλουθο.

3.5. Θεώρημα. ([2]) *Αν M είναι μία κλειστή, προσανατολίσιμη, 3-πολλαπλότητα Riemann χωρίς συζυγή σημεία, τότε ο πυρήνας του ομομορφισμού στροφής είναι πεπερασμένη ομάδα και συνεπως $\dim I(M) \leq \mathrm{rank} H_1(M;\mathbb{Z})$.*

Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και σε ανώτερες διαστάσεις, με την επιπλέον τοπολογική υπόθεση οτι η θεμελιώδης κλάση στην συνομολογία είναι το cup product ακέραιων 1-διάστατων κλάσεων.

4. Ο αριθμός στροφής του Ruelle για αμφιδιαφορίσεις του 2-torus

Κάθε $A \in SL(2,\mathbb{R})$ έχει μια μοναδική πολική ανάλυση $A = US$, όπου ο $U \in SO(2,\mathbb{R})$ και ο S είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας. Η απεικόνιση $r : SL(2,\mathbb{R}) \to SO(2,\mathbb{R})$ με $r(A) = U$ είναι C^∞ submersion, strong deformation retraction, αλλά δεν είναι ομομορφισμός ομάδων. Η r ανυψώνεται σε μια C^∞ submersion $\Theta : \widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \to \mathbb{R}$, όπου $p : \widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \to SL(2,\mathbb{R})$ είναι η απεικόνιση καθολικής επικάλυψης. Η Θ είναι ημιμορφισμός, αφού $|\Theta(PQ) - \Theta(P) - \Theta(Q)| < 1$ για κάθε P, $Q \in \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$.

Εστω $h : T^2 \to T^2$ μια C^1 αμφιδιαφόριση ισοτοπική με την ταυτοτική. Δηλαδή υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $H : [0,1] \times T^2 \to T^2$ ώστε $H_0 = id$, $H_1 = h$ και $H_t : T^2 \to T^2$, $t \in [0,1]$, είναι ένα συνεχές τόξο C^1 αμφιδιαφορίσεων ως προς την C^1 τοπολογία. Η H επεκτείνεται στο $[0,+\infty) \times T^2$ θέτοντας επαγωγικά $H_t = H_{t-[t]} \circ H_{[t]}$. Εστω $\tau : TT^2 \to T^2 \times \mathbb{R}^2$ μια trivialization της εφαπτομένης δέσμης του T^2, συμβατή με τον συνήθη προσανατολισμό και $\tau_x : T_xT^2 \to \{x\} \times \mathbb{R}^2$ ο περιορισμός στην ίνα.

Η συνεχής συνάρτηση $F : [0,+\infty) \times T^2 \to SL(2,\mathbb{R})$ με τύπο

$$F(t,x) = \frac{\tau_{H(t,x)} \circ DH_t(x) \circ \tau_x^{-1}}{(\det(\tau_{H(t,x)} \circ DH_t(x) \circ \tau_x^{-1}))^{1/2}}$$

ανυψώνεται σε μια μοναδική συνεχή συνάρτηση $G : [0,+\infty) \times T^2 \to \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ ώστε $G(0,x) = \tilde{I}_2$ και $p(G(t,x)) = F(t,x)$, για κάθε $t \geq 0$ και $x \in T^2$.

Από το εργοδικό θεώρημα προκύπτει [7] οτι αν ν είναι ένα h-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας Borel, το όριο

$$G^*(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\Theta(G(t,x)) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Theta(G(n,x))$$

υπάρχει ν-σχεδόν παντού, είναι h-αναλλοίωτο, ν-ολοκληρώσιμο και

$$\int_{T^2} G^* d\nu = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_{T^2}\Theta(G(n,x))d\nu.$$

Εστω

$$\rho_\nu^\tau(H) = \int_{T^2} G^* d\nu.$$

Ο $P_\nu^\tau(h) = \exp(2\pi i \rho_\nu^\tau(H))$ δεν εξαρτάται από την ισοτοπία H, αλλά μόνον από την h και την trivialization τ. Η εξάρτηση του $P_\nu^\tau(h)$ από την τ εκφράζεται μέσω του ομομορφισμού των ν-αριθμών στροφής της h.

Εστω τώρα τ_1 και τ_2 δύο trivializations της TT^2 συμβατές με τον προσανατολισμό και $f : T^2 \to SL(2,\mathbb{R})$ η συνεχής συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{\tau_{1x}\circ\tau_{2x}^{-1}}{(\det(\tau_{1x}\circ\tau_{2x}^{-1}))^{1/2}}.$$

Τότε $R_\nu(h)([r\circ f]) = P_\nu^{\tau_1}(h)P_\nu^{\tau_2}(h)^{-1}$[4].

Συνεπώς το σύμπλοκο $\rho_\nu(h) = P_\nu^\tau(h)\mathrm{Im}R_\nu(h)$ στην $S^1/\mathrm{Im}R_\nu(h)$, δεν εξαρτάται από την trivialization τ.

Εστω ν ένα μέτρο πιθανότητας Borel στον T^2 και $Diff_0^1(T^2,\nu)$ η κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα ως προς την C^1 τοπολογία της ομάδας των C^1 αμφιδιαφορίσεων του T^2 που διατηρούν το ν. Στον χώρο των συνεχών τόξων της $Diff f_0^1(T^2,\nu)$ με αρχικό σημείο την id εφοδιασμένο με την συμπαγή-ανοικτή τοπολογία, η σχέση της ομοτοπίας με σταθερά άκρα είναι σχέση ισοδυναμίας. Εστω $\widetilde{Diff f_0^1}(T^2,\nu)$ ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο και $q : \widetilde{Diff f_0^1}(T^2,\nu) \to Diff f_0^1(T^2,\nu)$ η συνεχής απεικόνιση με $q([H]) = H_1$. Αν η $Diff f_0^1(T^2,\nu)$ είναι τοπικά συσταλτή, τότε η q είναι η απεικόνιση καθολικής επικάλυψης. Ο χώρος $\widetilde{Diff f_0^1}(T^2,\nu)$ γίνεται τοπολογική ομάδα, αν θέσουμε $(H\circ H')_t = H_t \circ H'_t$, $t\in[0,1]$, οπότε η q γίνεται ομομορφισμός ομάδων.

Αν H, H' είναι δύο ομοτοπικά τόξα με σταθερά άκρα και αρχικό σημείο την id στην $Diff f_0^1(T^2,\nu)$, τότε $\rho_\nu^\tau(H) = \rho_\nu^\tau(H')$ για κάθε trivialization τ. Συνεπώς, έχουμε μια καλά ορισμένη συνάρτηση $\rho_\nu^\tau : \widetilde{Diff f_0^1}(T^2,\nu) \to \mathbb{R}$, που είναι συνεχής, ομογενής και ημιμορφισμός, αφού

$$|\rho_\nu^\tau(H\circ H') - \rho_\nu^\tau(H) - \rho_\nu^\tau(H')| \le 4.$$

Από αυτό προκύπτει οτι η P_ν^τ είναι σταθερή στις κλάσεις συζυγίας της $Diff f_0^1(T^2,\nu)$.

Επιπλέον, η $d\rho_\nu^\tau : \widetilde{Diff f_0^1}(T^2,\nu) \times \widetilde{Diff f_0^1}(T^2,\nu) \to \mathbb{R}$ με

$$(d\rho_\nu^\tau)(H,H') = \rho_\nu^\tau(H\circ H') - \rho_\nu^\tau(H) - \rho_\nu^\tau(H')$$

είναι ένας φραγμένος 2-σύγκυκλος, με την έννοια της (φραγμένης) συνομολογίας των διακριτών ομάδων. Μάλιστα, $d\rho_\nu^{\tau_1} = d\rho_\nu^{\tau_2}$, για οποιεσδήποτε trivializations τ_1, τ_2. Ετσι ορίζεται το στοιχείο $[d\rho_\nu]_b$ της $H_b^2(\widetilde{Diff f_0^1}(T^2,\nu);\mathbb{R})$, που λέγεται *κλάση στροφής του Ruelle* και προφανώς βρίσκεται στον πυρήνα του φυσικού ομομορφισμού $H_b^2(\widetilde{Diff_0^1}(T^2,\nu);\mathbb{R}) \to H^2(\widetilde{Diff_0^1}(T^2,\nu);\mathbb{R})$, ενώ εξαρτάται μόνον από το μέτρο ν. Η κλάση στροφής του Ruelle είναι τετριμένη, τότε και μόνον τότε όταν η $\rho_\nu^\tau : \widetilde{Diff_0^1}(T^2,\nu) \to \mathbb{R}$ είναι ομομορφισμός ομάδων για κάθε trivialization τ.

Αποδεικνύεται [4] οτι η κλάση στροφής του Ruelle δεν είναι τετριμένη, όταν το ν είναι το μέτρο Haar, δηλαδή το ευκλείδειο εμβαδόν. Από αυτό προκύπτει, οτι σε αυτή την περίπτωση η $\widetilde{Diff_0^1}(T^2,\nu)$ δεν είναι ομοιόμορφα τέλεια ομάδα. Τα ίδια ισχύουν και στην περίπτωση που το ν είναι ένα σημειακό μέτρο Dirac.

Βιβλιογραφία

1. Athanassopoulos, K.: Flows with cyclic winding numbers groups, *J. reine angew. Math.* 481 (1996), 207-215.

2. Athanassopoulos, K.: Rotation numbers and isometries, *Geom. Dedicata* 72 (1998), 1-13.

3. Athanassopoulos, K.: Volume preserving flows with cyclic winding numbers groups and without periodic orbits on 3-manifolds, *Manuscripta Math.* 97 (1998), 37-44.

4. Athanassopoulos, K.: On the Ruelle rotation for torus diffeomorphisms. *Math. Z.* 234 (2000), 225-239.

5. Conley, C.C. and Zehnder, E.: The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of Arnold, *Invent. Math.* 73 (1983), 33-49.

6. Franks J.: Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms, *Ergodic Th. Dyn. Systems* 8 (1988), 99-107.

7. Ruelle, D.: Rotation numbers for diffeomorphisms and flows. *Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Theorique* 42 (1985), 109-115.

8. Schwartzman, S.: Asymptotic cycles, *Ann. of Math.* 66 (1957), 270-284.

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
71409 Ηράκλειο