ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφαλαιο 4. Οι πληθικοι αριθμοι.



Κεφαλαιο 5. Οι διατακτικοι αριθμοι.



Κεφαλαιο 6. Το αξιωμα επιλογης.

# ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Κ.Σκανδαλης

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι εννοιες "συνολο" και "ανηκει" ειναι απο τις παλιοτερες και πιο βασικες στα Μαθηματικα. Καθε κλαδος των Μαθηματικων, εκτος απο καποια αντικειμενα, μελετα και συλλογες αντικειμενων. Εξεταζονται π.χ. συνολα αριθμων, γεωμετρικων σχηματων, συναρτησεων κ.α.

Μεχρι το 19ο αιωνα κανεις δεν ασχοληθηκε σοβαρα με τη μελετη των συνολων. Πρωτος μελετησε τα συνολα ο Georg Cantor (1845-1918) και αυτος θεωρειται δημιουργος της θεωριας συνολων. Εξετασε τα συνολα ανεξαρτητα απο τη φυση των αντικειμενων τους. Χαρη στο εργο του Cantor και αλλων μαθηματικων (R. Dedekind, P.G. Dirichlet, B. Riemann) η θεωρια συνολων εξελιχθηκε απο βοηθητικο σε βασικο κλαδο των συγχρονων Μαθηματικων.

Η διαισθητικη και απεριοριστη χρηση της εννοιας του συνολου οδηγησε στις αρχες του 20ου αιωνα τη θεωρια συνολων σε αντινομιες (παραδοξα). Το πιο γνωστο ειναι το παραδοξο του Russell, που ειναι συνεπεια της λεγομενης αρχης αφαιρεσης. Η αρχη αυτη λεει: "Καθε ιδιοτητα οριζει συνολο". Συγκεκριμενα, αν P ειναι μια ιδιοτητα, τοτε η συλλογη

$$\{x: P(x)\}$$

ολων των αντικειμενων που εχουν την ιδιοτητα P, ειναι συνολο. Η αρχη αφαιρεσης ηταν κοινως αποδεκτη και χρησιμοποιοταν ευρεως για κατασκευες συνολων. Ο B. Russell το 1905 παρατηρησε οτι παιρνοντας το

$$V = \{x: x\notin x\}$$

θα εχουμε: $V\in V$ εαν και μονον εαν $V\notin V$. Η βασικη αρχη της θεωριας συνολων του 19ου αιωνα αναδειχθηκε λοιπον εσφαλμενη.

Ενα αλλο παραδοξο (J. Richard 1905, G. Berry 1906) εδειξε οτι χρειαζεται προσοχη και στη χρηση της γλωσσας των Μαθηματικων. Εστω

n = ο μικροτερος φυσικος αριθμος που δεν οριζεται απο εκφραση της ελληνικης γλωσσας με λιγοτερες απο δεκαοκτω λεξεις.

Ο αριθμος n οριστηκε με μια εκφραση που εχει δεκαεπτα λεξεις!

Τοτε εγινε φανερη η αναγκη πιο προσεκτικης μελετης της γλωσσας που χρησιμοποιουμε στα Μαθηματικα.

Η κριση δεν αφορουσε λοιπον μονο στη θεωρια συνολων αλλα γενικοτερα στα Μαθηματικα. Οι αντινομιες γεννησαν την αναγκη αναθεωρησης και πιο προσεκτικης θεμελιωσης των Μαθηματικων. Πολλοι κλαδοι των Μαθηματικων επανεξεταστηκαν και αναπτυχθηκαν ξανα με τη λεγομενη αξιωματικη μεθοδο. Για την αποφυγη των ασαφειων καθοριστηκαν αυστηροι κανονες για την μαθηματικη γλωσσα. Πολλες μαθηματικες θεωριες ξαναδιατυπωθηκαν σε αυστηρα τυποποιημενη γλωσσα.

Το πρωτο αξιωματικο συστημα για τη θεωρια συνολων δοθηκε το 1908 απο τον E. Zermelo [1871-1953]. Η χρηση της εννοιας συνολο ειναι περιορισμενη και υπαρχουν μερικοι καθορισμενοι κανονες σχηματισμου συνολων. Οι ιδεες του Zermelo ξεκαθαριστηκαν αργοτερα και επεκταθηκαν απο τους T. Skolem και A. Fraenkel το 1922. Η θεωρια ZF (απο τα ονοματα των Zermelo και Fraenkel) ειναι σημερα το πιο γνωστο αξιωματικο συστημα για τη θεωρια συνολων. Αλλες θεωριες συνολων φτιαχτηκαν το 1925 απο τον J. von Neuman και το 1940 απο τους K. Gödel και P. Bernays.

Στις αξιωματικες θεωριες τα παλια "παραδοξα" δεν οδηγουν σε αντιφασεις. Αντιθετα αποδεικνυεται απο τα αξιωματα οτι δεν υπαρχουν τα "περιεργα συνολα" που δημιουργησαν τις αντινομιες.

Το μαθημα αυτο ειναι μια εισαγωγη στην αξιωματικη θεωρια συνολων ZF. Δεν γινεται ομως σε αυστηρα τυποποιημενη μορφη. Χρησιμοποιουνται εκφρασεις της ελληνικης γλωσσας αλλα μονον οταν αυτες ισοδυναμουν με επιτρεπτες εκφρασεις μιας τυπικης γλωσσας. Αυτο μπορει ευκολα να το διαπιστωσει καθενας που θα ασχοληθει σοβαρα με τη θεωρια συνολων.

Οι σημειωσεις χωριζονται σε 6 κεφαλαια. Στο τελος καθε κεφαλαιου υπαρχουν ασκησεις.

Τα αξιωματα της θεωριας ZF αναφερονται στις σημειωσεις σταδιακα, καθως εμφανιζεται η αναγκη χρησιμοποιησης τους. Η πληρης λιστα τους βρισκεται στο τελος.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΑΞΙΩΜΑΤΑ.ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ.

### 1.1 Αρχικες εννοιες.

Η θεωρια συνολων εχει ως αρχικες εννοιες την εννοια "συνολο" και το κατηγορημα "ανηκει". Αυτες δεν οριζονται.

Στα Μαθηματικα εξεταζονται συνολα διαφορων αντικειμενων π.χ. αριθμων, σημειων, συναρτησεων. Μελετουνται ομως και συνολα συνολων, συνολα συνολων συνολων κ.ο.κ. Στη θεωρια συνολων εχουμε ενα μονον ειδος αντικειμενων: τα συνολα. Δεν υπαρχουν αλλα αντικειμενα εκτος απο αυτα. Ετσι η γλωσσα της θεωριας συνολων γινεται απλουστερη. Αυτο δεν ειναι καθολου ενδειξη φτωχειας της θεωριας συνολων ,αφου οριζονται (ως συνολα!) ολα τα μαθηματικα αντικειμενα.

Θα χρησιμοποιουμε τη λεξη "κλαση", για να περιγραφουμε συλλογες αντικειμενων που μπορει να μην ειναι συνολα. Οι κλασεις που δεν ειναι συνολα δεν ειναι αντικειμενα της θεωριας. Λεγονται γνησιες κλασεις και θα εμφανιζονται μονο στις περιγραφες και τα σχολια. Ετσι π.χ. λεμε για ευκολια η κλαση ολων των συνολων ,χωρις αυτη, οπως θα δουμε αργοτερα, να ειναι συνολο. Θα μιλαμε για κλασεις αντικειμενων που εχουν μια ιδιοτητα Φ. δεν θα γραφουμε ομως $\{x: \Phi(x)\}$, αν δεν ξερουμε οτι υπαρχει συνολο που αποτελειται απο ολα τα αντικειμενα με την ιδιοτητα Φ. Στην τυποποιημενη θεωρια συνολων η λεξη κλαση μπορει να αποφευχθει εντελως.

### 1.2 Η γλωσσα της θεωριας συνολων.

Για να συμβολιζουμε συνολα, χρησιμοποιουμε ως μεταβλητες μικρα και κεφαλαια γραμματα του λατινικου και του ελληνικου αλφαβητου. Για το "ανηκει" παραδοσιακα χρησιμοποιειται το συμβολο ∈ (απο την αρχαια ελληνικη λεξη "εστι").

Για να συμβολισουμε το "x ανηκει στο y", γραφουμε:

$$x \in y$$

που διαβαζεται επισης "το x ειναι στοιχειο του y".

Η γλωσσα της θεωριας συνολων χρησιμοποιει και τα λογικα συμβολα:

- συμβολα λογικων συνδεσμων: $\neg$ , $\vee$ , $\wedge$ , $\rightarrow$ , $\leftrightarrow$
- ποσοδεικτες: $\exists$, $\forall$
- το συμβολο ισοτητας: $=$

καθως και παρενθεσεις ως βοηθητικα συμβολα.

Συμφωνα με τους κανονες της λογικης σχηματιζουμε τους λεγομενους τυπους της γλωσσας. Αρχικοι τυποι ειναι οι εκφρασεις μορφης

$$x\in y$$

και

$$x=y.$$

Πιο συνθετοι τυποι σχηματιζονται ως εξης:

α) Αν $\varphi$ ειναι τυπος, τοτε $\neg\varphi$ ειναι επισης τυπος.

β) Αν $\varphi$ και $\psi$ ειναι τυποι, τοτε και οι εκφρασεις

$$\varphi\vee\psi \ , \ \varphi\wedge\psi \ , \ \varphi\longrightarrow\psi \ , \ \varphi\leftrightarrow\psi$$

ειναι τυποι.

γ) Αν $\varphi$ ειναι τυπος και $x$ μεταβλητη, τοτε οι εκφρασεις

$$\exists x\ \varphi(x) \quad , \quad \forall x\ \varphi(x)$$

ειναι επισης τυποι.

Για παραδοσιακους λογους αντι του $\neg(x\in y)$ γραφουμε $x\notin y$ και αντι του $\neg(x=y)$ γραφουμε $x\neq y$ . Για την απλοποιηση δεχομαστε μερικες ακομα συντμησεις τυπων. Θα γραφουμε

$$(\exists x\in y)\ \varphi(x) \quad \text{αντι του} \quad \exists x(x\in y \wedge \varphi(x)),$$

$$(\forall x\in y)\ \varphi(x) \quad \text{αντι του} \quad \forall x(x\in y \longrightarrow \varphi(x)).$$

## 1.3 Το αξιωμα εκτασης. Εγκλεισμος.

Το πρωτο απο τα αξιωματα της θεωριας ZF εκφραζει μια βασικη ιδιοτητα της εννοιας του "ανηκει". Μας λεει πως αυτη συνδεεται με την ισοτητα.

### A1. Αξιωμα εκτασης (extensionality).

"Δυο συνολα που εχουν τα ιδια στοιχεια ειναι ισα"

Συμβολικα

$$(\forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)) \longrightarrow A=B.$$

Το αξιωμα αυτο σχολιαζεται ως εξης: "Ενα συνολο καθοριζεται πληρως απο τα στοιχεια του (τη λεγομενη εκταση του)".

Παρατηρηση. Το αξιωμα εκτασης εκφραζεται συχνα ως εξης:

$$(\forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)) \leftrightarrow A=B$$

και διαβαζεται: "Δυο συνολα ειναι ισα εαν και μονον εαν εχουν τα ιδια στοιχεια". Η αντιστροφη συνεπαγωγη του A1, δηλαδη η

$$A=B \longrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B),$$

ειναι ομως λογικα αληθινος τυπος. Δεν χρειαζεται λοιπον να την παρουμε ως αξιωμα της θεωριας ZF.

Το αξιωμα εκτασης, οπως θα δουμε στη συνεχεια, εφαρμοζεται πολυ συχνα. Θα σημειωσουμε τωρα μερικα απλα παραδειγματα. Θα εμφανιστουν σ' αυτα συνολα, των οποιων η υπαρξη θα δικαιολογηθει αργοτερα.

<u>Παραδειγμα 1</u>. Τα συνολα $\{1,2\}$ και $\{2,1\}$ ειναι ισα, αφου εχουν τα ιδια στοιχεια. Ας προσεξουμε ομως οτι $1\neq\{1\}\neq\{\{1\}\}$, διοτι $1\notin 1$.

<u>Παρατηρηση</u>. Το γεγονος οτι ενα συνολο δεν ειναι στοιχειο του εαυτου του ειναι διαισθητικα φανερο. Αυτο ειναι συνεπεια ενος απο τα αξιωματα της θεωριας συνολων (του αξιωματος κανονικοτητας). Το αξιωμα αυτο δεν θα χρησιμοποιηθει στη συνεχεια. Ειναι διατυπωμενο στο παραρτημα ως Α9.

<u>Παρατηρηση</u>. Για οποιοδηποτε συνολο Α, η ιδιοτητα "$x\in A$" οριζει συνολο. Υπαρχει συνολο που αποτελειται απο ολα τα αντικειμενα μ' αυτη την ιδιοτητα (το συνολο Α). Εχουμε δηλαδη $A=\{x: x\in A\}$.

Συχνα συμβαινει ολα τα στοιχεια ενος συνολου Α να ανηκουν σ' ενα συνολο Β, χωρις υποχρεωτικα τα Α,Β να ειναι ισα. Παρακατω οριζουμε τη σχεση του "περιεχεσθαι", που λεγεται και εγκλεισμος.

<u>Ορισμος</u>. Λεμε οτι το συνολο Α ειναι <u>υποσυνολο</u> του συνολου Β και γραφουμε

$$A \subseteq B$$

οταν καθε στοιχειο του Α ειναι στοιχειο του Β. Οριζουμε δηλαδη:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x\in A \rightarrow x\in B).$$

Αν $A \subseteq B$ λεμε επισης οτι το Α <u>περιεχεται</u> στο Β ή οτι το Β <u>περιεχει</u> το Α ή ακομα οτι το Β ειναι <u>υπερσυνολο</u> του Α.

Ας σημειωσουμε μερικες απλες ιδιοτητες του εγκλεισμου.

<u>Προταση 1</u>. Για οποιαδηποτε συνολα Α,Β,C:

i) $A \subseteq A$.

ii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.

iii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A=B$.

Η συνεπαγωγη $A=B \rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ ειναι φανερα αληθινη. Ετσι λοιπον μαζι με την τελευταια προταση εχουμε:

$$A=B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Ας προσεξουμε επισης οτι ο εγκλεισμος δεν ειναι συμμετρικος. Δεν ισχυει εν γενει το: $A \subseteq B \rightarrow B \subseteq A$.

<u>Ορισμος</u>. Λεμε οτι το Α ειναι <u>γνησιο</u> υποσυνολο του Β οταν Α περιεχεται στο Β αλλα το Β δεν ειναι υποσυνολο του Α, δηλαδη οταν $A \subseteq B$ και $A\neq B$. Γραφουμε τοτε $A\subsetneq B$ η $A\subset B$.

## 1.4 Το κενο συνολο.

Χρειαζομαστε ενα αξιωμα που θα εξασφαλιζει την υπαρξη ενος τουλαχιστον συνολου. Αυτη δεν προκυπτει απο το αξιωμα εκτασης. Δεχομαστε το παρακατω:

**Α2. Αξιωμα υπαρξης κενου συνολου.**

"Υπαρχει ενα συνολο που δεν εχει κανενα στοιχειο", δηλαδη

$$\exists a \forall x (x \notin a).$$

Απο το αξιωμα εκτασης επεται οτι το συνολο, για του οποιου την υπαρξη μας λεει το Α2, ειναι μοναδικο. Πραγματικα αν $a, b$ ειναι συνολα που δεν εχουν στοιχεια (δηλαδη $\forall x(x \notin a)$ και $\forall x(x \notin b)$), τοτε τα $a, b$ ειναι ισα διοτι για οποιοδηποτε $x$ εχουμε: $x \in a \leftrightarrow x \in b$.

Ορισμος. Το μοναδικο συνολο που δεν εχει κανενα στοιχειο λεγεται κενο συνολο και συμβολιζεται με $\emptyset$.

Εχουμε προφανως: $\forall x(x \notin \emptyset)$. Αλλες απλες ιδιοτητες του κενου συνολου εκφραζει η παρακατω προταση.

Προταση 2. Για καθε Α:

i) $\emptyset \subseteq A$,

ii) $A \subseteq \emptyset \rightarrow A = \emptyset$,

iii) $\emptyset = \{x:\ x \neq x\}$.

Στη συνεχεια θα γνωρισουμε μερικα αξιωματα που μας επιτρεπουν να κανουμε καποιες πραξεις με συνολα. Με τη βοηθεια τους μπορουμε να σχηματιζουμε νεα συνολα απο ηδη υπαρχοντα.

## 1.5 Ζευγη.

**Α3. Αξιωμα ζευγους.**

"Για οποιαδηποτε συνολα $a, b$ υπαρχει ενα συνολο του οποιου στοιχεια ειναι τα $a, b$ και μονον αυτα", δηλαδη

$$\exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = a \vee t = b).$$

Απο το αξιωμα εκτασης προκυπτει οτι για δοσμενα $a, b$ υπαρχει μοναδικο συνολο με στοιχεια τα $a$ και $b$.

Ορισμος. Το συνολο που εχει ως μοναδικα στοιχεια τα $a$ και $b$ το λεμε ζευγος με στοιχεια $a, b$ και το συμβολιζουμε

$$\{a, b\}.$$

Αν πάρουμε $a=b$, εύκολα βλέπουμε από τα παραπάνω ότι για κάθε $a$ υπάρχει ένα ακριβώς σύνολο με μοναδικό στοιχείο το $a$.

<u>Ορισμός</u>. Το σύνολο που έχει ως μοναδικό στοιχείο το $a$ λέγεται <u>μονοσύνολο</u> με στοιχείο $a$ και συμβολίζεται με $\{a\}$.

Είναι προφανές ότι:

$$x\in\{a\} \leftrightarrow x=a \quad \text{και} \quad \{a\}=\{x:\ x=a\}.$$

Έχουμε επίσης:

$$\{a\}=\{a,a\}.$$

Το ζεύγος $\{a,b\}$ το λέμε μη διατεταγμένο επειδή για οποιαδήποτε $a,b$ έχουμε $\{a,b\}=\{b,a\}$. Συχνά όμως χρειαζόμαστε, έχοντας δύο αντικείμενα, να πάρουμε το ένα ως πρώτο και το άλλο ως δεύτερο. Θα ορίσουμε παρακάτω το διατεταγμένο ζεύγος $\langle x,y\rangle$ για οποιαδήποτε $x,y$ έτσι ώστε να έχουμε την ιδιότητα:

$$x\neq y \rightarrow \langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle.$$

Ένας δυνατός ορισμός είναι ο εξής.

<u>Ορισμός</u> (Kuratowski, 1921). Για οποιαδήποτε $x,y$ θέτουμε:

$$\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}.$$

Το σύνολο $\langle x,y\rangle$ το λέμε <u>διατεταγμένο ζεύγος</u> με στοιχεία τα $x$ και $y$.

Το ότι ο ορισμός είναι κατάλληλος το δείχνει η ακόλουθη πρόταση.

<u>Πρόταση 3</u>. Για κάθε $a,b,c,d$:

$$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \leftrightarrow a=c \wedge b=d.$$

<u>Απόδειξη</u>: Το $(\leftarrow)$ είναι φανερό. Για το $(\rightarrow)$ ας υποθέσουμε ότι

$$(*) \qquad \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}.$$

Από το παραπάνω έχουμε $\{a\}\in\{\{c\},\{c,d\}\}$, άρα $\{a\}=\{c\}$ είτε $\{a,b\}=\{c,d\}$.

<u>Περίπτωση 1</u>: Αν $\{a\}=\{c\}$, τότε $a=c$ και η $(*)$ γίνεται $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\},\{a,d\}\}$. Έπεται ότι $\{a,b\}\in\{\{a\},\{a,d\}\}$ και συνεπώς $\{a,b\}=\{a\}$ είτε $\{a,b\}=\{a,d\}$. Αν είναι $\{a,b\}=\{a\}$ έχουμε $b=a$ και από την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι $\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\},\{a,d\}\}$. Άρα $\{a,d\}=\{a\}$ και έχουμε $d=a=b$. Αν είναι $\{a,b\}=\{a,d\}$, τότε επίσης $b=d$. Δείξαμε λοιπόν ότι στην περίπτωση 1 πάντα έχουμε $a=c$ και $b=d$.

<u>Περίπτωση 2</u>: Αν $\{a\}=\{c,d\}$ έχουμε αμέσως $a=c=d$. Η $(*)$ γίνεται τότε

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\}\}$$

και συνεπώς $\{a,b\}=\{a\}$. Έπεται ότι $a=b$. Άρα $a=d=c=d$. Τελικά και στην περίπτωση 2 έχουμε $a=c$ και $b=d$. ∎

*Πορισμα.* Αν $a\neq b$, τοτε $\langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$.

Μπορουμε γενικοτερα να ορισουμε διατεταγμενες τριαδες, τετραδες κ.ο.κ. θετοντας

$$\langle a,b,c\rangle=\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$$

ευκολα διαπιστωνουμε οτι

$$\langle a,b,c\rangle=\langle x,y,z\rangle \leftrightarrow a=x\wedge b=y\wedge c=z.$$

Ομοια οριζουμε

$$\langle a,b,c,d\rangle=\langle\langle a,b,c\rangle,d\rangle$$

και εχουμε τις αντιστοιχες ιδιοτητες.

### 1.Β *Ενωση.*

Η δυνατοτητα εκτελεσης της διαισθητικα γνωστης πραξης ενωσης συνολων εξασφαλιζεται απο αντιστοιχο αξιωμα. Θα διατυπωσουμε πρωτα μια ασθενεστερη του μορφη για την ενωση δυο συνολων. Παρακατω θα γνωρισουμε το γενικευμενο αξιωμα ενωσης.

*Α4'. Αξιωμα ενωσης.*

"Για οποιαδηποτε συνολα Α,Β υπαρχει ενα συνολο του οποιου στοιχεια ειναι εκεινα που ανηκουν σε τουλαχιστον ενα απο τα Α,Β". Συμβολικα

$$\exists C\forall t(t\in C \leftrightarrow t\in A \vee t\in B).$$

Ειναι προφανες οτι για δοσμενα συνολα Α και Β, υπαρχει μοναδικο συνολο με την παραπανω ιδιοτητα.

*Ορισμος.* *Ενωση* δυο συνολων Α,Β λεγεται το συνολο του οποιου στοιχεια ειναι εκεινα που ανηκουν στο Α ή στο Β (ή και στα δυο). Η ενωση των Α,Β συμβολιζεται με $A\cup B$.

Εχουμε λοιπον

$$x\in A\cup B \leftrightarrow x\in A\vee x\in B$$

δηλαδη

$$A\cup B=\{x: x\in A \vee x\in B\}.$$

Μπορουμε να ορισουμε γενικοτερα την ενωση τριων, τεσσαρων συνολων κ.ο.κ. Θετουμε

$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C,$$

$$A\cup B\cup C\cup D=(A\cup B\cup C)\cup D.$$

Χρησιμοποιωντας την ενωση συνολων μπορουμε να ορισουμε τις μη διατεταγμενες τριαδες, τετραδες κ.ο.κ. Για δοσμενα a,b,c θετουμε:

$$\{a,b,c\}=\{a,b\}\cup\{c\}$$

και ευκολα βλεπουμε οτι

$$x\in\{a,b,c\} \leftrightarrow x=a \vee x=b \vee x=c,$$

δηλαδη

$$\{a,b,c\}=\{x: x=a\vee x=b\vee x=c\}.$$

Ομοια, για οποιαδηποτε a,b,c,d θετουμε:

$$\{a,b,c,d\}=\{a,b,c\}\cup\{d\}$$

και εχουμε τις αντιστοιχες ιδιοτητες.

Συχνα ομως χρειαζεται να σχηματισουμε την ενωση μιας μεγαλυτερης συλλογης συνολων. Αυτο ειναι δυνατο με βαση το ακολουθο.

A4. Αξιωμα (γενικευμενης) ενωσης.

"Εστω A συνολο. Υπαρχει ενα συνολο στο οποιο ανηκουν τα στοιχεια των στοιχειων του A, και μονον αυτα".

Αν δουμε το A ως συνολο συνολων, το αξιωμα μας λεει οτι υπαρχει ενα συνολο με στοιχεια ακριβως εκεινα που ανηκουν στα στοιχεια του A. Για δοσμενο A, το συνολο αυτο ειναι μοναδικο.

Ορισμος. Το συνολο που αποτελειται απο τα στοιχεια των στοιχειων ενος συνολου A λεγεται ενωση του A και συμβολιζεται $\bigcup A$.

Εχουμε προφανως:

$$x\in\bigcup A \leftrightarrow \exists b(b\in A \wedge x\in b) \leftrightarrow (\exists b\in A)x\in b,$$

δηλαδη

$$\bigcup A=\{x: (\exists b\in A)x\in b\},$$

που διαβαζεται και ως εξης: "Στοιχεια της ενωσης του A ειναι εκεινα που ανηκουν σε τουλαχιστον ενα απο τα στοιχεια του A". Το αξιωμα ενωσης διατυπωνεται λοιπον συμβολικα:

$$\exists C\forall x(x\in C \leftrightarrow \exists b(b\in A \wedge x\in b)).$$

Παρατηρηση. Στην ειδικη περιπτωση $A=\{X,Y\}$ εχουμε

$$\bigcup\{X,Y\}=X\cup Y.$$

Ομοια

$$\bigcup\{X,Y,Z\}=X\cup Y\cup Z.$$

Στα Μαθηματικα χρησιμοποιουμε γενικευμενες ενωσεις της μορφης: $\bigcup_{t\in T} X_t$ για "οικογενειες" συνολων $\{X_t: t\in T\}$. Θα ορισουμε αργοτερα την εννοια της οικογενειας συνολων. Η παραπανω ενωση θα ειναι η $\bigcup A$, οπου $A=\{X_t: t\in T\}$.

Σημειωνουμε μερικες ιδιοτητες της ενωσης.

__Προταση 4.__ Για οποιοδηποτε $t, A$:

i) Αν $t \in A$, τοτε $t \subseteq \bigcup A$,

ii) $\bigcup \emptyset = \emptyset$,

iii) $\bigcup \{a\} = a$.

## 1.7 Το σχημα υποσυνολων του Zermelo.

Τα αξιωματα που δεχθηκαμε μεχρι τωρα δεν μας δινουν τη δυνατοτητα εκτελεσης ολων των γνωστων απο την αφελη θεωρια συνολων πραξεων με τα συνολα οπως π.χ. τομη, διαφορα. Στη συνεχεια θα γνωρισουμε ενα νεο αξιωμα που, μεταξυ αλλων, θα κανει δυνατες τις παραπανω πραξεις. Αυτο ειναι μια περιορισμενη μορφη της Αρχης Αφαιρεσης του Frege. Μας επιτρεπει να σχηματιζουμε νεα συνολα ως συλλογες ολων των αντικειμενων που εχουν μια ιδιοτητα, αλλα μονον μεταξυ των στοιχειων ενος συνολου. Ας σημειωσουμε επισης οτι επιτρεπονται μονον ιδιοτητες που μπορουν να εκφραστουν απο τυπους της γλωσσας της θεωριας συνολων.

__Α7. Σχημα διαχωρισμου υποσυνολων.__

Εστω $\Phi(x)$ τυπος.

"Για καθε συνολο Α υπαρχει ενα συνολο Β που αποτελειται απο εκεινα τα στοιχεια του Α που εχουν την ιδιοτητα Φ", δηλαδη

$$\exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \Phi(x)).$$

Υπαρχει λοιπον και, απο το αξιωμα εκτασης, ειναι μοναδικο το συνολο $\{x: x \in A \ \ \Phi(x)\}$. Αυτο γραφεται πιο συντομα και ως εξης:

$$\{x \in A: \Phi(x)\}$$

και ειναι προφανως υποσυνολο του Α. Εχουμε

$$t \in \{x \in A: \Phi(x)\} \leftrightarrow t \in A \wedge \Phi(x).$$

__Παρατηρηση.__ Η αρχη αφαιρεσης μπορει να εφαρμοστει για "περιορισμενες" ιδιοτητες. Για οποιονδηποτε τυπο Ψ της γλωσσας και οποιοδηποτε συνολο Α η ιδιοτητα

$$\Psi(x) \wedge x \in A$$

οριζει λοιπον (ακριβως ενα) συνολο.

__Παρατηρηση.__ Το αξιωμα υποσυνολων του Zermelo λεγεται σχημα διοτι δεν μπορει να εκφραστει με εναν τυπο της γλωσσας της θεωριας συνολων. Για καθε Φ εχουμε ενα ξεχωριστο αξιωμα διαχωρισμου υποσυνολων.

Το σχημα υποσυνολων εφαρμοζεται συχνα ως εξης. Θελουμε να αποδειξουμε οτι για μια ιδιοτητα Φ υπαρχει το συνολο $\{x: \Phi(x)\}$. Για να το πετυχουμε αρκει να δειξουμε οτι υπαρχει ενα συνολο Υ που περιεχει ολα τα αντικειμενα με τη δοσμενη ιδιοτητα Φ.

<u>Θεωρημα 1</u>. Εστω Φ τυπος. Εστω οτι υπαρχει ενα συνολο Y τετοιο ωστε:

$$\forall x(\Phi(x) \rightarrow x\in Y).$$

Τοτε υπαρχει το συνολο $\{x:\Phi(x)\}$.

<u>Αποδειξη</u>: Απο το σχημα διαχωρισμου υποσυνολων υπαρχει το συνολο

$$Z=\{x\in Y: \Phi(x)\}.$$

Ευκολα ελεγχουμε οτι

$$x\in Z \leftrightarrow (x\in Y \wedge \Phi(x)) \leftrightarrow \Phi(x)$$

και εχουμε $Z=\{x:\Phi(x)\}$.■

<u>Παραδειγμα 2</u>. Εστω R συνολο. Θελουμε να αποδειξουμε την υπαρξη του συνολου που αποτελειται απο τα πρωτα μελη των διατεταγμενων ζευγων που ειναι στοιχεια του R, δηλαδη το

$\{x: x$ ειναι πρωτο μελος διατεταγμενου ζευγους που ανηκει στο $R\}=$

$=\{x: \exists y \, \langle x,y\rangle\in R\}$.

Αρκει να δειξουμε οτι

(**) $$\exists y \, \langle x,y\rangle\in R \rightarrow x\in\bigcup\bigcup R.$$

Επειδη $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$, επεται οτι αν $\langle x,y\rangle\in R$, τοτε $\{x\}\in\bigcup R$. Αφου $x\in\{x\}$ και $\{x\}\in\bigcup R$, εχουμε οτι $x\in\bigcup\bigcup R$. Αποδειξαμε λοιπον το (**). Συμφωνα με το θεωρημα 1, υπαρχει το ζητουμενο συνολο

$\{x: \exists y \, \langle x,y\rangle\in R\} = \{x\in\bigcup\bigcup R: \exists y \, \langle x,y\rangle\in R\}$.

Αργοτερα θα δουμε και αλλες εφαρμογες του παραπανω θεωρηματος.

Με βαση το σχημα υποσυνολων μπορουμε να δειξουμε οτι το παραδοξο του Russell δεν δημιουργει αντιφαση στη θεωρια συνολων.

<u>Θεωρημα 2</u>. <u>Δεν</u> υπαρχει συνολο ολων των συνολων.

<u>Αποδειξη</u>: Ας υποθεσουμε οτι υπαρχει ενα συνολο V, ωστε για καθε συνολο x να εχουμε $x\in V$. Απο το σχημα υποσυνολων υπαρχει το συνολο $\Delta=\{x\in V: x\notin x\}$. Για καθε συνολο y εχουμε

$$y\in\Delta \leftrightarrow (y\in V \wedge y\notin y) \leftrightarrow y\notin y$$

και συνεπως $\Delta\in\Delta \leftrightarrow \Delta\notin\Delta$. Ατοπο. Μας οδηγησε σ' αυτο η υποθεση υπαρξης του συνολου V ολων των συνολων.■

## 1.8 <u>Αλγεβρα των συνολων</u>.

Θα δειξουμε παρακατω πως μπορουν να οριστουν οι διαισθητικα γνωστες συνολοθεωρητικες πραξεις τομης και διαφορας. Για τη δυνατοτητα εκτελεσης αυτων των πραξεων, δηλαδη για την δικαιολογηση υπαρξης των αντιστοιχων συνολων, δεν χρειαζομαστε ειδικα αξιωματα. Αυτη προκυπτει απο τα αξιωματα που ηδη γνωριζουμε.

<u>Προταση 5</u>. Εστω Α,Β συνολα. Υπαρχει μοναδικο συνολο στο οποιο ανηκουν τα κοινα στοιχεια των συνολων Α,Β, και μονον αυτα.

<u>Αποδειξη</u>: Θετουμε $C=\{x\in A: x\in B\}$ και εχουμε $x\in C \leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$. Η μοναδικοτητα, ως συνηθως, επεται απο το αξιωμα εκτασης.∎

<u>Ορισμος</u>. Το συνολο που αποτελειται απο τα κοινα στοιχεια των Α,Β το λεμε <u>τομη</u> των Α,Β και το συμβολιζουμε $A\cap B$.

Εχουμε

$$x\in A\cap B \leftrightarrow x\in A \wedge x\in B,$$

δηλαδη

$$A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}.$$

<u>Ορισμος</u>. Λεμε οτι δυο συνολα ειναι <u>ξενα</u> (μεταξυ τους) οταν $A\cap B=\emptyset$.

<u>Προταση 6</u>. Εστω Α,Β συνολα. Υπαρχει μοναδικο συνολο στο οποιο ανηκουν εκεινα τα στοιχεια του συνολου Α που δεν ανηκουν στο συνολο Β, και μονον αυτα.

<u>Αποδειξη</u>: Θετουμε $D=\{x\in A: x\notin B\}$.∎

<u>Ορισμος</u>. Το συνολο που αποτελειται απο εκεινα τα στοιχεια του συνολου Α που δεν ανηκουν στο συνολο Β λεγεται <u>διαφορα</u> των συνολων Α,Β και συμβολιζεται με $A-B$.

Εχουμε

$$x\in A-B \leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B,$$

δηλαδη

$$A-B=\{x: x\in A \wedge x\notin B\}.$$

<u>Παρατηρηση</u>. Προφανως $A\cap B=B\cap A$. Εν γενει ομως $A-B\neq B-A$, π.χ. $\emptyset-\{\emptyset\}\neq\{\emptyset\}-\emptyset$. Η διαφορα συνολων δεν ειναι λοιπον συμμετρικη πραξη.

<u>Συμμετρικη διαφορα συνολων.</u>

Θα ορισουμε τωρα μιαν αλλη συνολοθεωρητικη πραξη, τη λεγομενη συμμετρικη διαφορα συνολων.

<u>Ορισμος</u>. Εστω Α,Β συνολα. <u>Συμμετρικη διαφορα</u> τους λεγεται το συνολο

$$A\dot{-}B=A-B\cup B-A.$$

Η υπαρξη του συνολου $A\dot{-}B$, για οποιαδηποτε Α και Β ειναι φανερη. Ας σημειωσουμε μερικες βασικες ιδιοτητες της συμμετρικης διαφορας. Οι απλες αποδειξεις τους ειναι ασκησεις.

**Προταση 7.** Στοιχεια της συμμετρικης διαφορας των συνολων $A,B$ ειναι εκεινα που ανηκουν σε ακριβως ενα απο τα συνολα $A,B$.

**Προταση 8.** Για οποιαδηποτε συνολα $A,B,C$:

i) $A\cap B=\emptyset \rightarrow A\dot{-}B=A\cup B$,

ii) $A\dot{-}A=\emptyset$,

iii) $A\dot{-}\emptyset=A$,

iv) $A\dot{-}B=B\dot{-}A$,

v) $(A\dot{-}B)\dot{-}C=A\dot{-}(B\dot{-}C)$,

vi) $A\cap(B\dot{-}C)=(A\cap B)\dot{-}(A\cap C)$.

**Προταση 9.** Για οποιαδηποτε συνολα $A,B$ υπαρχει ακριβως ενα συνολο $X$ τετοιο ωστε $A\dot{-}X=B$.

**Αποδειξη:** Θετουμε $X=A\dot{-}B$. ∎

**Συμπληρωμα συνολου.**

Συχνα μας ενδιαφερουν οι συνολοθεωρητικες πραξεις περιορισμενες στα υποσυνολα ενος καθορισμενου συνολου $U$ που καλειται χωρος ή σύμπαν. Τοτε, εκτος απο τις πραξεις: $\cup,\cap,-,\dot{-}$ μπορουμε να ορισουμε και το λεγομενο συμπληρωμα συνολου (στον χωρο $U$).

**Ορισμος.** Για $A\subseteq U$ θετουμε $A^c=U-A$.

Ευκολα αποδεικνυονται οι παρακατω ιδιοτητες του συμπληρωματος:

**Προταση 10.** Εστω $U$ συνολο. Για οποιαδηποτε υποσυνολα $A,B$ του $U$:

i) $A\cap A^c=\emptyset$ , $A\cup A^c=U$,

ii) $(A^c)^c=A$,

iii) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$,

iv) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$,

v) $A-B=A\cap B^c$.

**Συνιστωσες.**

Εστω οτι σ' εναν χωρο $U$ εχουμε $k$ υποσυνολα $A_1,A_2,\ldots,A_k$. Ποσα διαφορετικα υποσυνολα του $U$ μπορουμε να φτιαξουμε απο τα $A_1,A_2,\ldots,A_k$ με τις συνολοθεωρητικες πραξεις που γνωρισαμε;

Για να απαντησουμε στο ερωτημα αυτο, θεωρουμε τα συνολα

$$(*)\qquad A_1^{i_1}\cap A_2^{i_2}\cap\ldots\cap A_k^{i_k},$$

οπου τα $i_1,i_2,\ldots,i_k$ ειναι 0 ή 1. Δεχομαστε συμβατικα οτι $A^0=A$ και $A^1=A^c$. Τα συνολα μορφης (*) λεγονται συνιστωσες. Υπαρχουν το πολυ $2^k$ διαφορετικες συνιστωσες. Ειναι φανερο οτι δυο διαφορετικες συνιστωσες ειναι ξενες μεταξυ τους. Ευκολα μπορει να αποδειχθει οτι τα συνολα $A_j$ και $A_j^c$ ειναι ενωσεις συνιστωσων. Καθε συνολο που μπορει να οριστει στο U απο τα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ με συνολοθεωρητικες πραξεις ειναι ενωση καποιων συνιστωσων. Ολες οι δυνατες ενωσεις ειναι $2^{2^k}$. Υπαρχουν λοιπον $2^{2^k}$ ζητουμενα συνολα.

__Παρατηρηση__. Στο επιπεδο μπορουμε να βρουμε k συνολα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ετσι ωστε ολες οι συνιστωσες να ειναι μη κενες. Ολες οι δυνατες ενωσεις τους οριζουν τοτε ακριβως $2^{2^k}$ διαφορετικα συνολα.

__Γενικευμενη τομη συνολων.__

Θα ορισουμε τωρα μια ακομα πραξη με συνολα. Για ενα δοσμενο συνολο A, θελουμε να σχηματισουμε το συνολο που αποτελειται απο ολα τα κοινα στοιχεια των στοιχειων του A, δηλαδη το

$$\{x:(\forall b\in A)x\in b\}.$$

Η υπαρξη του τελευταιου συνολου αποδεικνυεται πιο κατω, με εναν ομως περιορισμο. Υποθετουμε οτι το συνολο A δεν ειναι κενο. Το συνολο αυτο το λεμε __γενικευμενη τομη__ του A και το συμβολιζουμε $\bigcap A$.

__Προταση 11__. Εστω $A\neq\emptyset$. Υπαρχει ενα μοναδικο συνολο του οποιου στοιχεια ειναι ακριβως εκεινα που ανηκουν σε ολα τα στοιχεια του A.

__Αποδειξη__: Εστω $b_0$ οποιοδηποτε στοιχειο του A. Εχουμε προφανως

$$((\forall b\in A)x\in b)\rightarrow x\in b_0.$$

Αρα υπαρχει το συνολο $\{x:(\forall b\in A)x\in b\}$ (βλ. θεωρημα 1) και ειναι υποσυνολο του $b_0$. ∎

Ειναι φανερο οτι για $A\neq\emptyset$:

$$x\in\bigcap A \leftrightarrow (\forall b\in A)x\in b,$$

δηλαδη

$$\bigcap A=\{x:(\forall b\in A)x\in b\}.$$

Ευκολα επισης βλεπουμε οτι για καθενα $b\in A$ ισχυει $\bigcap A\subseteq b$.

__Παρατηρηση__. Δεν οριζεται η τομη του κενου συνολου. Δεν υπαρχει δηλαδη το συνολο $\bigcap\emptyset$. Πραγματικα, αν αυτο υπηρχε, τοτε για οποιοδηποτε συνολο x θα ειχαμε $x\in\bigcap\emptyset$, και τουτο διοτι για καθε $b\in\emptyset$ ισχυει $x\in b$. Το $\bigcap\emptyset$ θα ειχε λοιπον ως στοιχεια ολα τα συνολα, κατι που ειναι αδυνατο.

Τελειωνοντας αυτη τη παραγραφο αναφερουμε μερικες βασικες ιδιοτητες των συνολοθεωρητικων πραξεων. Οι αποδειξεις τους ειναι ευκολες ασκησεις.

Προταση 12. Για καθε A, B:

i) $A\subseteq A\cup B$ , $A\cap B\subseteq A$,

ii) $A\cup A=A$ , $A\cap A=A$,

iii) $A\cup B=B\cup A$ , $A\cap B=B\cap A$,

iv) $A\cup\varnothing=A$ , $A\cap\varnothing=\varnothing$,

v) $A\cup(B-A)=A\cup B$ , $A\cap(B-A)=\varnothing$.

Προταση 13. Για καθε A, B, C:

i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ , $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,

ii) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ , $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

iii) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ , $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

Προταση 14. Για καθε A, B, C:

i) $A\subseteq B \to C-B\subseteq C-A$,

ii) $A\subseteq B \to A\cup C\subseteq B\cup C$,

iii) $A\subseteq B \to A\cap C\subseteq B\cap C$.

Προταση 15. Για καθε A, B:

i) $A\subseteq B \to \bigcup A\subseteq\bigcup B$,

ii) $\varnothing\neq A \wedge A\subseteq B \to \bigcap B\subseteq\bigcap A$.

Αλλες ακομα ιδιοτητες περιεχουν οι ασκησεις (σελ. 17).

## 1.9 Δυναμοσυνολο.

A5. Το αξιωμα του δυναμοσυνολου.

"Για καθε συνολο A υπαρχει ενα συνολο που αποτελειται ακριβως απο ολα τα υποσυνολα του A". Συμβολικα

$$\exists B\forall x(x\in B \leftrightarrow x\subseteq A).$$

Η μοναδικοτητα του παραπανω συνολου, για δοσμενο A, ειναι φανερη.

Ορισμος. Το συνολο ολων των υποσυνολων του συνολου A λεγεται δυναμοσυνολο του A και συμβολιζεται με $\mathcal{P}A$.

Εχουμε

$$x\in\mathcal{P}A \leftrightarrow x\subseteq A,$$

δηλαδη

$$\mathcal{P}A=\{x: x\subseteq A\}.$$

Ευκολα αποδεικνυονται τα ακολουθα.

Προταση 16. Για καθε A, B:

i) $\varnothing\in\mathcal{P}A$,

ii) $A\in\mathcal{P}A$,

iii) $A\subseteq B \rightarrow \mathcal{P}A\subseteq\mathcal{P}B$.

__Παρατηρηση.__ Αν $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, τοτε το δυναμοσυνολο $\mathcal{P}A$ εχει $2^k$ στοιχεια.

Το αξιωμα του δυναμοσυνολου ειναι πολυ ισχυρο. Μας επιτρεπει να σχηματισουμε παρα πολλα συνολα.

__Παραδειγμα 3.__ Εστω A συνολο. Θελουμε να αποδειξουμε οτι υπαρχει το συνολο $\{\{a\}:a\in A\}$ ολων των μονοσυνολων στοιχειων του A, δηλαδη το $\{y:(\exists a\in A)y=\{a\}\}$.

Παρατηρουμε οτι:

$$y=\{a\}\wedge a\in A \rightarrow y\subseteq A \rightarrow y\in\mathcal{P}A,$$

δηλαδη

$$(\exists a\in A)y=\{a\} \rightarrow y\in\mathcal{P}A.$$

Εφαρμοζοντας τωρα το θεωρημα 1 συμπεραινουμε την υπαρξη του ζητουμενου συνολου.

__Παραδειγμα 4.__ Διδεται ενα συνολο B. Υπαρχει το συνολο $\{\mathcal{P}A:A\in B\}$ ολων των δυναμοσυνολων των στοιχειων του B. Ας παρατηρησουμε οτι αν $X\subseteq A$ για καποιο $A\in B$, τοτε $X\subseteq\bigcup B$. Συνεπως $X\in\mathcal{P}(\bigcup B)$. Αρα για καθενα $A\in B$ εχουμε οτι $\mathcal{P}A\subseteq\mathcal{P}(\bigcup B)$, επομενως $\mathcal{P}A\in\mathcal{P}\mathcal{P}(\bigcup B)$. Δειξαμε λοιπον οτι:

$$(\exists A\in B)x=\mathcal{P}A \rightarrow x\in\mathcal{P}\mathcal{P}(\bigcup B).$$

Απο το θεωρημα 1 εχουμε την υπαρξη του συνολου

$$\{x:(\exists A\in B)x=\mathcal{P}A\},$$

που ειναι το ζητουμενο συνολο $\{\mathcal{P}A:A\in B\}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε συνολα A, B, C, D:

| | |
|---|---|
| i) $A\cap B=A \leftrightarrow A\subseteq B \leftrightarrow A\cup B=B$, | v) $A-(A\cap B)=A-B$, |
| ii) $A\subseteq B\wedge C\subseteq D \rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$, | vi) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$, |
| iii) $A\subseteq B\wedge C\subseteq D \rightarrow A\cap C\subseteq B\cap D$, | vii) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$, |
| iv) $A\subseteq B\wedge C\subseteq D \rightarrow A-D\subseteq B-C$, | viii) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$. |

1.2 Αποδειξτε τις προτασεις 12 ως 15 απο την σελιδα 15.

1.3 Οριζουμε $(a,b)=\{\{\{a\}\},\{\{b\},\varnothing\}\}$. Αποδειξτε οτι:

$$(a,b)=(c,d) \leftrightarrow a=c\wedge b=d$$

και συνεπως οτι: $a\neq b \rightarrow (a,b)\neq(b,a)$.

1.4 Αποδειξτε οτι αν δεχθουμε τα αξιωματα της θεωριας ZF εκτος απο το A2 (αξιωμα υπαρξης κενου συνολου) και ακομα την προταση:

"Υπαρχει τουλαχιστον ενα συνολο",

τοτε μπορουμε να αποδειξουμε το A2.

1.5 Βρειτε τα δυναμοσυνολα των παρακατω συνολων:

$$\varnothing\ ,\ \{\varnothing\}\ ,\ \{\{\varnothing\}\}\ ,\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\ ,\ \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}.$$

1.6 Αποδειξτε οτι για καθε συνολο A:

i) $\bigcup\mathcal{P}A=A$,

ii) $A\subseteq\mathcal{P}\bigcup A$.

Ποτε στο ii εχουμε ισοτητα;

1.7 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε A, B:

i) $\mathcal{P}A\cap\mathcal{P}B=\mathcal{P}(A\cap B)$,

ii) $\mathcal{P}A\cup\mathcal{P}B\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$.

Ποτε στο ii) εχουμε ισοτητα;

1.8 Εξεταστε αν για οποιαδηποτε a, b ισχυει:

i) $a\in b \rightarrow \mathcal{P}a\in\mathcal{P}b$;

ii) $a\subseteq b \rightarrow \mathcal{P}a\subseteq\mathcal{P}b$;

Εξεταστε αν ισχυουν τα αντιστροφα. Δειξτε επισης οτι $\mathcal{P}a=\mathcal{P}b \rightarrow a=b$.

1.9 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε A, B υπαρχουν τα συνολα: $\{A\cap x: x\in B\}$ και $\{A\cup x: x\in B\}$. Δειξτε οτι

i) $A\cap\bigcup B=\bigcup\{A\cap x: x\in B\}$,

ii) για $B\neq\varnothing$: $A\cup\bigcap B=\bigcap\{A\cup x: x\in B\}$.

## 2.1 Συναρτησεις και σχεσεις στα Μαθηματικα.

Μια απο τις πιο σημαντικες εννοιες των Μαθηματικων ειναι η εννοια της συναρτησης. Συναρτησεις μελετα απο παλια καθε κλαδος των Μαθηματικων. Μεχρι τις αρχες του 20ου αιωνα δεν υπηρχε ομως ικανοποιητικος ορισμος αυτης της εννοιας. Οι μαθηματικοι εννοουσαν ως συναρτησεις καποιες αντιστοιχισεις αντικειμενων σε αντικειμενα που περιγραφοταν απο συγκεκριμενους κανονες-"συνταξεις": τυπους, πινακες, γραφικες παραστασεις. Καθως αναπτυσσοταν τα Μαθηματικα, εμφανιζοντουσαν συνεχως νεα παραδειγματα συναρτησεων και καποια απο αυτα δεν διδοταν απο κανονες σαν τους παραπανω.

Μια πραγματικη συναρτηση πραγματικης μεταβλητης μπορει πληρως να περιγραφει απο το λεγομενο γραφημα της. Αυτο ειναι ενα υποσυνολο του επιπεδου που αποτελειται απο ολα τα διατεταγμενα ζευγη $\langle x,y\rangle$ με $y=f(x)$. Ειναι χαρακτηριστικο οτι, για καθε $x$ του πεδιου ορισμου μιας συναρτησης $f$, στο γραφημα της $f$ υπαρχει ακριβως ενα ζευγαρι με πρωτη συντεταγμενη $x$.

Στηριζομενη στο παραπανω, η θεωρια συνολων διδει εναν αυστηρο και απλο ορισμο της εννοιας της συναρτησης (Peano, 1911). Πριν ομως τον γνωρισουμε θα ασχοληθουμε με μια γενικοτερη και εξισου σημαντικη μαθηματικη εννοια, την εννοια της σχεσης. Καποιες σχεσεις, οπως οι διαταξεις και οι σχεσεις ισοδυναμιας παιζουν σπουδαιο ρολο στα Μαθηματικα. Θα μελετησουμε μονο τις διμελεις σχεσεις που κυριως συνανταμε στα Μαθηματικα. Μια τετοια σχεση μπορει να ταυτιστει με ενα συνολο διατεταγμενων ζευγων: συγκεκριμενα, με το συνολο των $\langle x,y\rangle$, για τα οποια το $x$ βρισκεται σε σχεση με το $y$. Οι σχεσεις ταυτιζονται λοιπον με τα γραφηματα τους.

Για την καλυτερη κατανοηση των εξεταζομενων εννοιων, θα χρησιμοποιησουμε στα παραδειγματα αυτου του κεφαλαιου και συνολα των οποιων η υπαρξη θα δικαιολογηθει αργοτερα.

## 2.2 Καρτεσιανο γινομενο συνολων.

<u>Προταση 1.</u> Εστω $A,B$ συνολα. Υπαρχει (και ειναι μοναδικο) ενα συνολο που αποτελειται απο ολα τα ζευγη $\langle a,b\rangle$ με $a\in A$ και $b\in B$. Υπαρχει δηλαδη το συνολο $\{\langle a,b\rangle : a\in A\wedge b\in B\}$.

Αποδειξη: Παρατηρουμε οτι αν $a\in A$ και $b\in B$, τοτε $\{a\}\subseteq A$, $\{a,b\}\subseteq A\cup B$ και συνεπως $\{a\}\in\mathcal{P}(A\cup B)$, $\{a,b\}\in\mathcal{P}(A\cup B)$. Επεται οτι $\{\{a\},\{a,b\}\}\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$, αρα $\langle a,b\rangle\in\mathcal{P}\mathcal{P}(A\cup B)$. Βλεπουμε λοιπον οτι

$$(\exists a\in A)(\exists b\in B)x=\langle a,b\rangle \rightarrow x\in\mathcal{P}\mathcal{P}(A\cup B).$$

Θετοντας τωρα:

$$C=\{x\in\mathcal{P}\mathcal{P}(A\cup B):(\exists a\in A)(\exists b\in B)x=\langle a,b\rangle\},$$

εχουμε

$$x\in C \leftrightarrow (\exists a\in A)(\exists b\in B)x=\langle a,b\rangle,$$

δηλαδη

$$C=\{\langle a,b\rangle : a\in A\wedge b\in B\}.$$

Το συνολο C εχει λοιπον τη ζητουμενη ιδιοτητα. Η μοναδικοτητα του επεται απο το αξιωμα εκτασης.■

<u>Ορισμος</u>. Εστω A, B συνολα. <u>Καρτεσιανο γινομενο</u> του A, B λεμε το συνολο

$$A\times B=\{\langle a,b\rangle : a\in A\wedge b\in B\}.$$

<u>Παραδειγμα 1</u>.

i) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\times\{a,b,c\}=\{\langle\emptyset,a\rangle,\langle\emptyset,b\rangle,\langle\emptyset,c\rangle,\langle\{\emptyset\},a\rangle,\langle\{\emptyset\},b\rangle,\langle\{\emptyset\},c\rangle\}$,

ii) $\mathbb{Z}\times\{1,2\}=\{\langle x,1\rangle : x\in\mathbb{Z}\}\cup\{\langle x,2\rangle : x\in\mathbb{Z}\}$,

iii) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{\langle x,y\rangle : x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\}$,

iv) $\emptyset\times A=A\times\emptyset=\emptyset$.

Αν εχουμε $A=B$, τοτε αντι του $A\times A$ γραφουμε $A^2$. Το συνολο $A^2$ το λεμε <u>καρτεσιανο τετραγωνο</u> του A.

Μπορουμε να ορισουμε και καρτεσιανα γινομενα περισσοτερων απο δυο συνολων. Για οποιαδηποτε συνολα X, Y, Z θετουμε

$$X\times Y\times Z=(X\times Y)\times Z$$

και εχουμε:

$$t\in X\times Y\times Z \leftrightarrow t\in(X\times Y)\times Z \leftrightarrow (\exists a\in X\times Y)(\exists z\in Z)t=\langle a,z\rangle \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists x\in X)(\exists y\in Y)(\exists z\in Z)t=\langle\langle x,y\rangle,z\rangle \leftrightarrow (\exists x\in X)(\exists y\in Y)(\exists z\in Z)t=\langle x,y,z\rangle,$$

δηλαδη

$$X\times Y\times Z=\{\langle x,y,z\rangle : x\in X\wedge y\in Y\wedge z\in Z\}.$$

Ομοια οριζουμε:

$$X\times Y\times Z\times U=(X\times Y\times Z)\times U$$

και εχουμε

$$X\times Y\times Z\times U=\{\langle x,y,z,u\rangle : x\in X\wedge y\in Y\wedge z\in Z\wedge u\in U\}.$$

Οριζονται επισης τα συνολα $A^3, A^4$ κ.ο.κ. ως $A\times A\times A$, $A\times A\times A\times A$ αντιστοιχα.

## 2.3 Σχεσεις.

Ορισμος. Διμελης σχεση λεγεται καθε συνολο διατεταγμενων ζευγων.

Εξεταζονται επισης τριμελεις, τετραμελεις κ.ο.κ. σχεσεις που οριζονται αντιστοιχα ως συνολα διατεταγμενων τριαδων, τετραδων κ.ο.κ. Εδω θα ασχοληθουμε μονο με τις διμελεις σχεσεις και θα τις λεμε απλως σχεσεις.

Ενα συνολο ειναι λοιπον σχεση εαν και μονον εαν καθε στοιχειο του ειναι διατεταγμενο ζευγος. Λογω παραδοσης, για το $\langle x,y\rangle\in R$ θα γραφουμε και $xRy$.

Παραδειγμα 2.

i) Για οποιαδηποτε συνολα A, B, καθε υποσυνολο του καρτεσιανου γινομενου $A\times B$ ειναι σχεση. Ειδικα, τα συνολα $A\times B$ και $\varnothing$ ειναι σχεσεις.

ii) Για οποιοδηποτε συνολο A, το συνολο $I_A=\{\langle a,a\rangle: a\in A\}$ ειναι μια σχεση. Αποτελειται απο ολα τα διατεταγμενα ζευγη $\langle a,b\rangle$ στοιχειων του A με $a=b$ και ονομαζεται σχεση ισοτητας στο συνολο A. Εχουμε δηλαδη

$$I_A=\{\langle x,y\rangle\in A\times A: x=y\}.$$

iii) Η σχεση διαιρετοτητας στους ακεραιους αριθμους ειναι το συνολο

$$\Delta=\{\langle m,n\rangle: \text{"m, n ειναι ακεραιοι και m διαιρει το n"}\}.$$

iv) Η ανισοτητα και η γνησια ανισοτητα στους πραγματικους αριθμους ειναι αντιστοιχα τα συνολα

$$\leq_{\mathbb{R}}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2: \text{"x ειναι μικροτερο ή ισο y"}\},$$
$$<_{\mathbb{R}}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2: \text{"x ειναι μικροτερο απο y"}\}.$$

Ξερουμε οτι καθε υποσυνολο ενος καρτεσιανου γινομενου ειναι σχεση. Παρακατω θα δουμε οτι καθε σχεση ειναι υποσυνολο καποιου καρτεσιανου γινομενου.

Προταση 2. Εστω R σχεση. Υπαρχουν μοναδικα συνολα A και B τετοια ωστε:

$$x\in A \leftrightarrow \exists y\ xRy \quad\text{και}\quad y\in B \leftrightarrow \exists x\ xRy,$$

δηλαδη $A=\{x: \exists y\ xRy\}$ και $B=\{y: \exists x\ xRy\}$.

Αποδειξη: Στο παραδειγμα 2 του κεφαλαιου 1 ειδαμε οτι για καθε συνολο R υπαρχει το συνολο των πρωτων συντεταγμενων διατεταγμενων ζευγων που ανηκουν στο R. Ομοια αποδεικνυεται και η υπαρξη του συνολου των δευτερων συντεταγμενων διατεταγμενων ζευγων που ειναι στοιχεια του R. ■

Ορισμοι. Εστω R σχεση. *Πεδιο ορισμου* της σχεσης R λεμε το συνολο

$$\mathrm{dom}(R)=\{x: \exists y\ xRy\}.$$

*Πεδιο τιμων* της σχεσης R λεμε το συνολο

$$\mathrm{rng}(R)=\{y: \exists x\ xRy\}.$$

*Πεδιο* της σχεσης R λεμε το συνολο

$$\mathrm{fld}(R)=\mathrm{dom}(R)\cup \mathrm{rng}(R).$$

Παρατηρηση. Για οποιαδηποτε σχεση R τα συνολα dom(R), rng(R), fld(R) ειναι μοναδικα. Ισχυει προφανως:

$$R\subseteq \mathrm{dom}(R)\times \mathrm{rng}(R)\subseteq \mathrm{fld}(R)\times \mathrm{fld}(R).$$

Επισης, για οποιαδηποτε υπερσυνολα X,Y του dom(R) και rng(R) αντιστοιχα, εχουμε $R\subseteq X\times Y$. Ομοια, $R\subseteq Z^2$, για καθε υπερσυνολο Z του fld(R).

Ορισμοι. Εστω R σχεση. Αν $R\subseteq A\times B$, τοτε λεμε οτι η R ειναι σχεση *μεταξυ των στοιχειων* των A και B. Αν $R\subseteq A^2$, τοτε λεμε οτι η R ειναι *σχεση στο συνολο* A.

Καθε σχεση ειναι προφανως σχεση μεταξυ των στοιχειων του πεδιου ορισμου και πεδιου τιμων της. Ειναι επισης σχεση στο πεδιο της.

Θα ορισουμε τωρα μερικες εννοιες που αφορουν στις σχεσεις.

Ορισμος. Εστω R σχεση. Τη σχεση $R^{-1}=\{\langle y,x\rangle : xRy\}$ τη λεμε *αντιστροφη σχεση* της R.

Για να δικαιολογησουμε την υπαρξη του συνολου $R^{-1}$, αρκει να παρατηρησουμε οτι

$$\langle x,y\rangle\in R \rightarrow x\in \mathrm{dom}(R)\wedge y\in \mathrm{rng}(R) \rightarrow \langle y,x\rangle\in \mathrm{rng}(R)\times \mathrm{dom}(R).$$

Υπαρχει λοιπον το ζητουμενο συνολο $\{\langle y,x\rangle : \langle x,y\rangle\in R\}$.

Εχουμε προφανως

$$xRy \leftrightarrow yR^{-1}x.$$

Ευκολα αποδεικνυονται και οι παρακατω ιδιοτητες.

Προταση 3. Εστω R σχεση.

i) $\mathrm{dom}(R^{-1})=\mathrm{rng}(R)$,

ii) $\mathrm{rng}(R^{-1})=\mathrm{dom}(R)$,

iii) $\mathrm{fld}(R^{-1})=\mathrm{fld}(R)$,

iv) $(R^{-1})^{-1}=R$.

Παραδειγμα 3.

i) Για $S=\leq_{\mathbb{R}}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2$: "x ειναι μικροτερο ή ισο y"$\}$ εχουμε
$S^{-1}=\geq_{\mathbb{R}}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2$: "x ειναι μεγαλυτερο ή ισο y"$\}$.

Ομοια, για $\Delta=\{\langle m,n\rangle$: "m,n ειναι ακεραιοι και m διαιρει το n"$\}$ εχουμε $\Delta^{-1}=\{\langle m,n\rangle$: "m,n ειναι ακεραιοι και m ειναι πολλαπλασιο του n"$\}$.

ii) Για οποιοδηποτε συνολο A ισχυει $I_A^{-1}=I_A$, και τουτο διοτι

$$x(I_A^{-1})y \leftrightarrow yI_Ax \leftrightarrow y\in A\wedge x\in A\wedge x=y \leftrightarrow xI_Ay.$$

iii) Για οποιαδηποτε συνολα A, B εχουμε $(A\times B)^{-1}=B\times A$.

iv) Επειδη $\langle x,y\rangle\in\emptyset \leftrightarrow \langle y,x\rangle\in\emptyset$, επεται οτι $\emptyset^{-1}=\emptyset$.

**Ορισμος**. Εστω R, S σχεσεις. *Συνθεση των R, S* λεμε τη σχεση

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle : \exists z(xSz\wedge zRy)\}.$$

Ας παρατηρησουμε οτι αν το $\langle x,y\rangle$ ειναι τετοιο ωστε για καποιο z εχουμε xSz και zRy, τοτε $\langle x,y\rangle\in dom(S)\times rng(R)$. Επεται οτι υπαρχει το συνολο $R\circ S$, για οποιεσδηποτε σχεσεις R, S.

Ευκολα αποδεικνυονται οι πιο κατω ιδιοτητες.

**Προταση 4**. Για οποιεσδηποτε σχεσεις R, S:

i) $dom(R\circ S)\subseteq dom(S)$,

ii) $rng(R\circ S)\subseteq rng(R)$,

iii) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$,

iv) Αν $A=fld(R)$, τοτε $I_A\circ R=R$ και $R\circ I_A=R$.

**Παραδειγμα 4**. Εστω $a\neq b$ και $\{a,b\}\cap\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=\emptyset$.

i) Εστω $R=\{\langle\emptyset,a\rangle,\langle\emptyset,b\rangle,\langle\{\emptyset\},a\rangle\}$ , $S=\{\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,\{\emptyset\}\rangle\}$.

Τοτε $R^{-1}=\{\langle a,\emptyset\rangle,\langle b,\emptyset\rangle,\langle a,\{\emptyset\}\rangle\}$ , $S\circ R=\{\langle\emptyset,a\rangle,\langle\emptyset,\{\emptyset\}\rangle,\langle\{\emptyset\},a\rangle\}$ και $R\circ S=\{\langle b,a\rangle\}$.

Ας σημειωσουμε εδω οτι $R\circ S\neq S\circ R$.

ii) $<_R\circ<_R=<_R$. Πραγματικα, αν $\langle x,y\rangle\in(<_R\circ<_R)$, τοτε $x<_R z$ και $z<_R y$ για καποιο $z\in\mathbb{R}$. Επεται οτι $x<_R y$ , δηλαδη $\langle x,y\rangle\in<_R$. Αντιστροφα, εστω οτι $\langle x,y\rangle\in<_R$. Τοτε υπαρχει $z\in\mathbb{R}$ (π.χ. $\frac{1}{2}(x+y)$) τετοιο ωστε $x<_R z$ και $z<_R y$. Συνεπως $x(<_R\circ<_R)y$.

iii) $\emptyset\circ R=R\circ\emptyset=\emptyset$ , για οποιαδηποτε σχεση R.

**Ορισμος**. Εστω R σχεση. Εστω A συνολο. *Περιορισμο της R στο A* λεμε το συνολο

$$R\restriction A=\{\langle x,y\rangle : x\in A \wedge xRy\}.$$

Ειναι φανερο οτι το συνολο $R\restriction A$ υπαρχει και $R\restriction A\subseteq R$.

**Προταση 5**. Για οποιαδηποτε σχεση και οποιοδηποτε συνολο A ισχυει

$$dom(R\restriction A)=dom(R)\cap A.$$

Αν λοιπον $A\subseteq dom(R)$, τοτε $dom(R\lceil A)=A$.

<u>Ορισμος</u>. Εστω $R$ σχεση. Εστω $A,B$ συνολα. <u>Εικονα</u> του $A$ μεσω της $R$ λεμε το συνολο

$$R[A]=\{y:(\exists a\in A)\ aRy\}.$$

<u>Αντιστροφη εικονα</u> του $B$ μεσω της $R$ λεμε το συνολο

$$R^{-1}[B]=\{x:(\exists b\in B)\ xRb\}.$$

Η υπαρξη των συνολων $R[A]$ και $R^{-1}[B]$ ειναι προφανης. Ευκολα βλεπουμε οτι $R[A]\subseteq rng(R)$ και $R^{-1}[B]\subseteq dom(R)$. Ας παρατηρησουμε επισης οτι

$$R[A]=\{y:\exists a\ \langle a,y\rangle\in R\lceil A\}=rng(R\lceil A),$$

$$R^{-1}[B]=\{x:\exists b\ \langle b,x\rangle\in R^{-1}\lceil B\}=rng(R^{-1}\lceil B).$$

## 2.4 <u>Συναρτησεις</u>.

<u>Ορισμος</u>. Μια σχεση λεγεται <u>μονοσημαντη</u> αν για οποιαδηποτε $x,y,z$:

$$xRy\wedge xRz\rightarrow y=z,$$

δηλαδη αν για καθε $x$ υπαρχει το πολυ ενα $y$ με $xRy$. Οι μονοσημαντες σχεσεις λεγονται και <u>συναρτησεις</u>.

Απο τον ορισμο αμεσα επεται οτι, αν $R$ ειναι συναρτηση, τοτε για καθε $x$ του πεδιου ορισμου της $R$ υπαρχει ακριβως ενα $y$ τετοιο ωστε $\langle x,y\rangle\in R$. Αυτο το μοναδικο $y$ λεγεται <u>εικονα</u> του $x$ ή <u>τιμη</u> της $R$ στο $x$ και συμβολιζεται με $R(x)$. Γραφουμε λοιπον $y=R(x)$ αντι του $xRy$, οταν η σχεση $R$ ειναι συναρτηση. Ετσι εχουμε:

$$(\forall x\in dom(R))\langle x,R(x)\rangle\in R$$

και επισης:

$$\langle x,y\rangle\in R\rightarrow y=R(x).$$

<u>Παραδειγμα 5</u>. Εστω $F=\{\langle\emptyset,a\rangle,\langle\{\emptyset\},b\rangle,\langle x,c\rangle\}$. Ειναι η σχεση συναρτηση; Αν $x=\emptyset$ και $c\neq a$ ή $x=\{\emptyset\}$ και $c\neq b$, τοτε η $F$ δεν ειναι μονοσημαντη σχεση. Αν $x=\emptyset$ και $c=a$ ή $x=\{\emptyset\}$ και $c=b$ ή $x\neq\emptyset$ και $x\neq\{\emptyset\}$, τοτε η $F$ ειναι μονοσημαντη σχεση, δηλαδη ειναι συναρτηση.

Οι γνωστες απο τα Μαθηματικα εννοιες της αντιστροφης συναρτησης, της εικονας και αντιστροφης εικονας συνολου μεσω συναρτησης ειναι ειδικες περιπτωσεις των εννοιων που ορισαμε στην παραγραφο 2.3 για τις σχεσεις.

<u>Ορισμος</u>. Αν $f$ ειναι συναρτηση με $dom(f)=A$ και $rng(f)\subseteq B$, τοτε γραφουμε

$$f:A\longrightarrow B$$

και λεμε οτι η συναρτηση $f$ <u>απεικονιζει</u> (ή <u>μετασχηματιζει</u>) το συνολο $A$

στο συνολο B.

Ορισμος. Αν $f: A \longrightarrow B$ και $B=\mathrm{rng}(f)$, τοτε λεμε οτι η $f$ ειναι <u>επι του B</u> και γραφουμε

$$f: A \xrightarrow[\text{επι}]{} B.$$

Παρατηρηση. Εχουμε $f: A \xrightarrow[\text{επι}]{} B$ εαν και μονον εαν για καθε στοιχειο $y$ του B υπαρχει τουλαχιστον ενα στοιχειο $x$ στο A ωστε $y=f(x)$, δηλαδη

$$(\forall y\in B)(\exists x\in A)\, y=f(x).$$

Το τελευταιο σημαινει ακριβως οτι $B=f[A]$, δηλαδη $\mathrm{rng}(f)=B$.

Ορισμος. Λεμε οτι μια συναρτηση $f$ ειναι <u>1-1</u> αν για οποιαδηποτε $x_1, x_2$ του πεδιου ορισμου της $f$ ισχυει

$$x_1\neq x_2 \longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

Αν $f: A \longrightarrow B$ και η $f$ ειναι 1-1, τοτε γραφουμε

$$f: A \xrightarrow{1-1} B.$$

Αν $f: A \longrightarrow B$ και η $f$ ειναι 1-1 και επι του B, τοτε γραφουμε

$$f: A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B.$$

Παρατηρηση. Ευκολα βλεπουμε οτι μια συναρτηση ειναι 1-1 εαν και μονον εαν για καθε στοιχειο $y$ του πεδιου τιμων $\mathrm{rng}(f)$ υπαρχει ακριβως ενα στοιχειο $x$ στο πεδιο ορισμου ωστε $y=f(x)$.

Παρατηρηση. Για μια συναρτηση $f$, η αντιστροφη σχεση δεν ειναι υποχρεωτικα συναρτηση. Για τη συναρτηση π.χ. $f=\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle,\langle\{\emptyset\},\emptyset\rangle\}$, η αντιστροφη σχεση $f^{-1}=\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle,\langle\emptyset,\{\emptyset\}\rangle\}$ δεν ειναι μονοσημαντη σχεση.

Προταση 6. Εστω $f$ συναρτηση. Η $f^{-1}$ ειναι συναρτηση εαν και μονον εαν η $f$ ειναι 1-1.

Αποδειξη: Για το $(\longrightarrow)$ ας υποθεσουμε οτι $x,z\in\mathrm{dom}(f)$ και $x\neq z$. Εχουμε τοτε $\langle x,f(x)\rangle\in f$ και $\langle z,f(z)\rangle\in f$, αρα $\langle f(x),x\rangle\in f^{-1}$ και $\langle f(z),z\rangle\in f^{-1}$. Αν ηταν $f(x)=f(z)$, τοτε θα ειχαμε $x=z$, αφου λογω της υποθεσης η $f^{-1}$ ειναι συναρτηση. Πρεπει λοιπον να ειναι $f(x)\neq f(z)$.

Για να αποδειξουμε το $(\longleftarrow)$, ας υποθεσουμε οτι $\langle x,y\rangle\in f^{-1}$ και $\langle x,z\rangle\in f^{-1}$. Αρκει να δειξουμε οτι $y=z$. Πραγματικα, εχουμε τοτε $\langle y,x\rangle\in f$ και $\langle z,x\rangle\in f$. Επειδη η $f$ ειναι 1-1, επεται οτι $y=z$.■

Παρατηρηση. Ας παρατηρησουμε οτι για καθε συναρτηση $f$, αν η αντιστροφη σχεση $f^{-1}$ ειναι συναρτηση, τοτε ειναι 1-1, και τουτο διοτι $(f^{-1})^{-1}=f$. Πεδιο ορισμου της $f^{-1}$ ειναι προφανως το πεδιο τιμων της $f$. Ετσι λοιπον

$$\text{αν}\quad f: A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B, \quad\text{τοτε}\quad f^{-1}: B \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} A.$$

Πρόταση 7. Εστω οτι η συναρτηση $f$ ειναι 1-1. Τοτε

i) $(\forall x \in dom(f))\ f^{-1}(f(x))=x$,

ii) $(\forall y \in rng(f))\ f(f^{-1}(y))=y$.

Αυτο σημαινει οτι αν $f: A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$, τοτε $f^{-1} \circ f = I_A$ και $f \circ f^{-1} = I_B$.

Παραδειγμα 6. Εστω $F=\{<\emptyset,a>,<\{\emptyset\},b>\}$. Η $F$ ειναι συναρτηση με πεδιο ορισμου $dom(F)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ και πεδιο τιμων $rng(F)=\{a,b\}$. Η $F$ ειναι 1-1 εαν και μονον εαν $a \neq b$. Για οποιοδηποτε συνολο $C$ με $\{a,b\} \subseteq C$ εχουμε

$$F: \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \longrightarrow C.$$

Η $F$ ειναι επι του $C$ ακριβως οταν $C=\{a,b\}$.

Στα Μαθηματικα δυο συναρτησεις $f,g$ θεωρουνται ισες οταν εχουν το ιδιο πεδιο ορισμου και για καθε στοιχειο $x$ του κοινου πεδιου ορισμου ισχυει $f(x)=g(x)$. Πιο κατω θα δουμε οτι αυτο συμβαινει ακριβως οταν οι συναρτησεις $f,g$ ειναι ισες ως συνολα.

Ορισμος. Αν $f,g$ ειναι συναρτησεις και $f \subseteq g$, τοτε η $g$ λεγεται επεκταση της $f$ και η $f$ λεγεται περιορισμος της $g$.

Παρατηρηση. Αν $f$ ειναι συναρτηση και $A$ συνολο, τοτε ο περιορισμος $f \restriction A$ ειναι επισης συναρτηση (και λεγεται περιορισμος της $f$ στο $A$).

Παρατηρηση. Αν $f,g$ ειναι συναρτησεις και $f \subseteq g$, τοτε $dom(f) \subseteq dom(g)$. Επισης για καθε $x \in dom(f)$ εχουμε $f(x)=g(x)$. Πραγματικα, αν $x \in dom(f)$, τοτε $<x,f(x)> \in f$ και συνεπως $<x,f(x)> \in g$. Επειδη εχουμε και $<x,g(x)> \in g$, επεται οτι $f(x)=g(x)$.

Προταση 8. Εστω $f,g$ συναρτησεις. Τοτε

$$f=g \leftrightarrow dom(f)=dom(g) \wedge (\forall x \in dom(f))f(x)=g(x).$$

Αποδειξη: Αν $f=g$, τοτε $f \subseteq g$ και $g \subseteq f$. Απο την τελευταια παρατηρηση επεται οτι $dom(f)=dom(g)$ και $f(x)=g(x)$, για καθε $x \in dom(f)$. Για το αντιστροφο, θα δειξουμε οτι $f \subseteq g$ και $g \subseteq f$. Εστω $t \in f$. Τοτε $t=<x,f(x)>$, για κάποιο $x \in dom(f)$. Επειδη ομως $dom(f)=dom(g)$ και $f(x)=g(x)$, εχουμε οτι $<x,g(x)> \in g$. Αρα $t \in g$. Δειξαμε λοιπον οτι $\forall t(t \in f \longrightarrow t \in g)$. Ομοια αποδεικνυεται το $g \subseteq f$. ■

Παρομοια ειναι η αποδειξη και της ακολουθης προτασης.

Προταση 9. Αν $f,g$ συναρτησεις και $f \subseteq g$, τοτε $f=g \restriction dom(f)$, δηλαδη η $f$ ειναι περιορισμος της $g$ στο $dom(f)$.

Παραδειγμα 7. Εστω $f=\{<x,x^2>: x\in\mathbb{R}\}$ και $g=f\restriction\mathbb{R}^+=\{<x,x^2>: x\in\mathbb{R}^+\}$.
Η g ειναι περιορισμος της f στο $\mathbb{R}^+$. Εχουμε $g\subset f$, δηλαδη η g ειναι γνησιο υποσυνολο της f. Ειδικα $f\neq g$.

Προταση 10. Εστω Α,Β συνολα. Υπαρχει μοναδικο συνολο που αποτελειται απο ολες τις συναρτησεις που απεικονιζουν το συνολο Α στο συνολο Β.
Αποδειξη: Αν $f:A\longrightarrow B$, τοτε $f\subseteq A\times B$ και συνεπως $f\in\mathcal{P}(A\times B)$. Με βαση το θεωρημα 1 (σελ. 12) υπαρχει το ζητουμενο συνολο:

$$\{f:\ f \text{ ειναι συναρτηση με } dom(f)=A \text{ και } rng(f)\subseteq B\},$$

που ειναι μορφης $\{f:\ \Phi(f)\}$. Ως $\Phi(f)$ μπορουμε να παρουμε τον παρακατω τυπο:

$$(\forall z\in f)(\exists x\in A)(\exists y\in B)z=<x,y> \wedge (\forall x\in A)(\exists y\in B)<x,y>\in f \wedge$$
$$\wedge (\forall x\in A)(\forall y\in B)(\forall w\in B)(<x,y>\in f\wedge<x,w>\in f \longrightarrow y=w),$$

που εκφραζει την ιδιοτητα "η f ειναι συναρτηση με πεδιο ορισμου το Α και τιμες στο Β".■

Ορισμος. Εστω Α,Β συνολα. Το συνολο ολων των συναρτησεων που απεικονιζουν το Α στο Β το συμβολιζουμε $B^A$ (η $^AB$). Εχουμε δηλαδη

$$B^A=\{f:\ f:A\longrightarrow B\}.$$

Παρατηρηση. Αν $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$, τοτε υπαρχουν $m^k$ συναρτησεις f με $f:A\longrightarrow B$. Αυτο δικαιολογει τον συμβολισμο $B^A$.

Παρατηρηση. Το κενο συνολο ειναι συναρτηση, αφου ειναι μονοσημαντη σχεση. Εχουμε $dom(\emptyset)=rng(\emptyset)=\emptyset$. Ας προσεξουμε οτι για οποιοδηποτε συνολο Α ισχυει:

$$A^{\emptyset}=\{\emptyset\}$$

και για οποιοδηποτε $B\neq\emptyset$ ισχυει:

$$\emptyset^B=\emptyset.$$

Παρατηρουμε εδω μια αντιστοιχια με τα γνωστα απο την αριθμητικη:

$$k^0=1 \text{ και } 0^m=0 \ (\text{για } m\neq 0).$$

## 2.5 Οικογενειες συνολων.

Τη λεξη οικογενεια την χρησιμοποιουμε συχνα στα Μαθηματικα ως συνωνυμο της λεξης συνολο. Ετσι, λεγοντας οικογενεια συνολων εννοουμε συνηθως συνολο συνολων. Οικογενειες λεμε ομως και συστηματα αντικειμενων που ειναι "αριθμημενα" με τη βοηθεια καποιων δεικτων i οι οποιοι διατρεχουν ενα συνολο Τ. Σ' αυτη την περιπτωση ως οικογενεια εννοειται δηλαδη μια συναρτηση με πεδιο ορισμου ενα συνολο Τ, τις οποιας οι τιμες ειναι συνολα. Σε καθε δεικτη $t\in T$ αντιστοιχει ενα συνολο $X_t$. Η οικογενεια συμβολιζεται τοτε

$$(X_t)_{t\in T} \quad ή \quad (X_t : t\in T)$$

Απο την αποψη της θεωριας συνολων, οικογενεια συνολων ειναι λοιπον οποιαδηποτε συναρτηση (αφου οι τιμες καθε συναρτησης ειναι συνολα). Ετσι, αν $F:T \longrightarrow B$, λεμε το πεδιο ορισμου $T$ της $F$ <u>συνολο δεικτων</u>, τα στοιχεια του $T$: <u>δεικτες</u> και την ιδια την $F$: <u>οικογενεια συνολων</u>. Λογω παραδοσης, για καθε δεικτη $t\in T$ την τιμη $F(t)$ τη συμβολιζουμε $F_t$ και τη λεμε <u>t-στο</u> συνολο της οικογενειας $F$. Την οικογενεια $F$ τη συμβολιζουμε και ως

$$\langle F_t : t\in T\rangle \quad ή \quad (F(t))_{t\in T} \quad ή \quad (F_t)_{t\in T}$$

<u>Παρατηρηση</u>. Αποφευγουμε το συμβολισμο $\{F_t : t\in T\}$ και τουτο διοτι το τελευταιο συνολο ειναι το συνολο τιμων $rng(F)$ της οικογενειας $F$ και οχι η ιδια η $F$.

Παρακατω οριζονται οι πραξεις ενωσης και τομης για μια οικογενεια συνολων. Ας παρατηρησει οτι τα αποτελεσματα αυτων των πραξεων δεν εξαρτουνται ακριβως απο την οικογενεια αλλα απο το πεδιο τιμων της. Αυτο δεν θα συμβαινει ομως για την πραξη του καρτεσιανου γινομενου που θα γνωρισουμε αργοτερα.

<u>Ορισμοι</u>. Εστω $A=(A_t)_{t\in T}$ οικογενεια συνολων.

i) <u>Ενωση</u> της $A$ λεμε το συνολο $\bigcup rng(A)$, δηλαδη το $\bigcup\{A_t : t\in T\}$, που συμβολιζεται και $\bigcup_{t\in T} A_t$.

ii) <u>Τομη</u> της $A$ λεμε το συνολο $\bigcap rng(A)$, δηλαδη το $\bigcap\{A_t : t\in T\}$, που συμβολιζεται και $\bigcap_{t\in T} A_t$ (υποθετουμε $T\neq\emptyset$).

Απο τον ορισμο αμεσως επεται οτι $x$ ανηκει στην ενωση της οικογενειας $(A_t)_{t\in T}$ εαν και μονον εαν για τουλαχιστον εναν δεικτη $t\in T$ ισχυει $x\in A_t$. Ομοια βλεπουμε οτι $x$ ανηκει στην τομη της οικογενειας $(A_t)_{t\in T}$ εαν και μονον εαν για καθε δεικτη $t\in T$ ισχυει $x\in A_t$. Εχουμε λοιπον

$$x\in\bigcup_{t\in T}A_t \leftrightarrow (\exists t\in T)x\in A_t,$$

$$x\in\bigcap_{t\in T}A_t \leftrightarrow (\forall t\in T)x\in A_t.$$

Θα σημειωσουμε μερικες ιδιοτητες των παραπανω πραξεων. Οι αποδειξεις τους ειναι απλες ασκησεις.

<u>Προταση 11</u>. Για οποιαδηποτε οικογενεια συνολων $(A_t)_{t\in T}$ και συνολο $B$:

i) Για καθε $s\in T$: $A_s \subseteq \bigcup_{t\in T}A_t$, ii) Για καθε $s\in T$: $\bigcap_{t\in T}A_t \subseteq A_s$ $(T\neq\emptyset)$,

iii) $B\cup\bigcup_{t\in T}A_t = \bigcup_{t\in T}(B\cup A_t)$, iv) $B\cap\bigcap_{t\in T}A_t = \bigcap_{t\in T}(B\cap A_t)$ $(T\neq\emptyset)$.

v) $B \cap \bigcup_{\iota\in T} A_\iota = \bigcup_{\iota\in T}(B\cap A_\iota)$, vi) $B \cup \bigcap_{\iota\in T} A_\iota = \bigcap_{\iota\in T}(B\cup A_\iota)$ $(T\neq\emptyset)$,

vii) $B - \bigcup_{\iota\in T} A_\iota = \bigcap_{\iota\in T}(B-A_\iota)(T\neq\emptyset)$, viii) $B - \bigcap_{\iota\in T} A_\iota = \bigcup_{\iota\in T}(B-A_\iota)$ $(T\neq\emptyset)$.

<u>Παρατηρηση</u>. Αν το συνολο δεικτων T ειναι μορφης $\{1,2,\dots,k\}$, τοτε $\bigcup_{\iota\in T} A_\iota = A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k$ και $\bigcap_{\iota\in T} A_\iota = A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k$.

Συχνα γραφουμε απλουστερα $(A_i)_i$ αντι του $(A_i)_{i\in I}$, αν αυτο δεν οδηγει σε παρεξηγησεις. Την ενωση και την τομη της οικογενειας τη συμβολιζουμε τοτε $\bigcup_i A_i$ και $\bigcap_i A_i$, αντιστοιχα.

Αν το συνολο δεικτων μιας οικογενειας συνολων $(C_{\langle i,j\rangle})_{\langle i,j\rangle\in I\times J}$ ειναι το καρτεσιανο γινομενο $I\times J$, τοτε γραφουμε την οικογενεια ως $(C_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ ή απλουστερα $(C_{i,j})_{i,j}$. Την ενωση τη συμβολιζουμε $\bigcup_{i,j} C_{i,j}$ και την τομη $\bigcap_{i,j} C_{i,j}$ αντιστοιχα.

Αν $(A_i)_{i\in I}$ και $(B_j)_{j\in J}$ ειναι οικογενειες συνολων, τοτε υπαρχουν οι οικογενειες $(A_i\cup B_j)_{i,j}$ και $(A_i\cap B_j)_{i,j}$. Ευκολα αποδεικνυονται οι ακολουθες ιδιοτητες.

<u>Προταση 12</u>. Εστω $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ οικογενειες συνολων.

i) $(\bigcup_i A_i)\cap(\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i,j}(A_i\cap B_j)$,

ii) $(\bigcap_i A_i)\cup(\bigcap_j B_j) = \bigcap_{i,j}(A_i\cup B_j)$ $(I\neq\emptyset, J\neq\emptyset)$.

<u>Προταση 13</u>. Εστω $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ οικογενειες συνολων.

i) $\bigcup_i A_i \cup \bigcup_i B_i = \bigcup_i (A_i\cup B_i)$,

ii) $\bigcap_i A_i \cap \bigcap_i B_i = \bigcap_i (A_i\cap B_i)$ $(I\neq\emptyset)$,

iii) $\bigcup_i (A_i\cap B_i) \subseteq \bigcup_i A_i \cap \bigcup_i B_i$,

iv) $\bigcap_i A_i \cup \bigcap_i B_i \subseteq \bigcap_i (A_i\cup B_i)$ $(I\neq\emptyset)$.

<u>Καρτεσιανο γινομενο οικογενειας συνολων</u>.

<u>Ορισμος</u>. Εστω $A=(A_t)_{t\in T}$ οικογενεια συνολων. <u>Συναρτηση επιλογης</u> για την A λεμε καθε συναρτηση f με πεδιο ορισμου το T τετοια ωστε για καθε $t\in T$ η τιμη $f(t)$ ειναι στοιχειο του συνολου $A_t$.

<u>Παρατηρηση</u>. Αν f ειναι συναρτηση επιλογης για την $(A_t)_{t\in T}$, τοτε

$$f: T \longrightarrow \bigcup_{t\in T} A_t.$$

<u>Προταση 14</u>. Εστω $A=(A_t)_{t\in T}$ οικογενεια συνολων. Υπαρχει μοναδικο συνολο που αποτελειται απο ολες τις συναρτησεις επιλογης για την οικογε-

νεια $(A_t)_{t\in T}$.

Αποδειξη: Θα χρησιμοποιησουμε το θεωρημα 1 (σελ. 12). Αρκει να παρατηρησουμε οτι αν f ειναι συναρτηση επιλογης, τοτε $f\subseteq T\times(\bigcup_{t\in T}A_t)$, δηλαδη $f\in P(T\times\bigcup_{t\in T}A_t)$. ■

Ορισμος. Το συνολο ολων των συναρτησεων επιλογης για μια οικογενεια συνολων $(A_t)_{t\in T}$ το λεμε γενικευμενο καρτεσιανο γινομενο της $(A_t)_{t\in T}$ και το συμβολιζουμε $\prod_{t\in T}A_t$.

Ας δουμε μερικα παραδειγματα. Το πρωτο απ' αυτα δικαιολογει τον ορο "γενικευμενο καρτεσιανο γινομενο".

Παραδειγμα 8.

i) Εστω X, Y συνολα. Το $\{X,Y\}$ ειναι εικονα μιας οικογενειας συνολων $(A_t)_{t\in T}$, οπου $T=\{1,2\}$ και $A_1=X, A_2=Y$. Το γενικευμενο καρτεσιανο γινομενο αυτης της οικογενειας αποτελειται απο ολες τις συναρτησεις μορφης

$$\{\langle 1,x\rangle,\langle 2,y\rangle : x\in X\wedge y\in Y\}.$$

Υπαρχει μια αμφιμονοσημαντη αντιστοιχια μεταξυ τετοιων συναρτησεων και των ζευγων $\langle x,y\rangle$ με $x\in X$ και $y\in Y$.

ii) Για καθε $x\in R$ θετουμε $A_x=\{n\in Z: n\le x\}$. Εχουμε $\bigcup_{x\in R}A_x=Z$. Το συνολο $\prod_{x\in R}A_x$ αποτελειται απο ολες τις συναρτησεις $f:R\longrightarrow Z$ με $f(x)\le x$, για καθε $x\in R$. Ενα στοιχειο του ειναι η συναρτηση E, η οποια για καθε $x\in R$ παιρνει την τιμη $E(x)=[x]$ (το ακεραιο μερος του x).

iii) Για καθε $x\in R$ θετουμε $A_x=R$. Το συνολο $\prod_{x\in R}A_x$ ειναι ισο με το συνολο $R^R$ ολων των πραγματικων συναρτησεων πραγματικης μεταβλητης.

Παρατηρηση. Αν για καποιο δεικτη $t\in T$ εχουμε $A_t=\emptyset$, τοτε προφανως δεν υπαρχει καμια συναρτηση επιλογης για την οικογενεια $(A_t)_{t\in T}$. Επεται οτι τοτε $\prod_{t\in T}A_t=\emptyset$. Το ερωτημα αν

$$(\forall t\in T)A_t\neq\emptyset \rightarrow (\prod_{t\in T}A_t\neq\emptyset)$$

ειναι καθε αλλο παρα απλο. Ειναι το λεγομενο αξιωμα επιλογης που θα γνωρισουμε στο κεφαλαιο 8. Με βαση τα αξιωματα τις θεωριας συνολων ZF δεν μπορει να αποδειχθει ουτε αυτο ουτε η αρνηση του.

Αν παρουμε μια οικογενεια συνολων $(A_t)_{t\in T}$ με $A_t=A$, για καθε $t\in T$, τοτε το $\prod_{t\in T}A_t$ το λεμε καρτεσιανη δυναμη του συνολου A. Αυτη εχει ως στοιχεια ολες τις συναρτησεις f με $f:T\longrightarrow A$, δηλαδη ειναι ιση με το συνολο $A^T$.

## 2.6 Σχεσεις ισοδυναμιας.

Οι σχεσεις ισοδυναμιας ειναι πολυ σημαντικες σε διαφορους κλαδους των Μαθηματων. Χρησιμοποιουνται για κατασκευες νεων αφηρημενων αντικειμενων απο ηδη υπαρχοντα. Ετσι κατασκευαζονται οι ακεραιοι και οι ρητοι αριθμοι. Ο Cantor εδωσε μια περιγραφη των πραγματικων αριθμων ως κλασεων ισοδυναμιας μιας σχεσης στις ακολουθιες Cauchy ρητων αριθμων. Στην αλγεβρα και την τοπολογια εξεταζονται οι λεγομενες δομες πηλικα που διδονται απο καποια σχεση ισοδυναμιας σε μια αρχικη δομη.

Ορισμος. Εστω $R$ σχεση και $A$ μη κενο συνολο. Η $R$ λεγεται σχεση ισοδυναμιας στο $A$ οταν εχει τις παρακατω ιδιοτητες:

i) ειναι ανακλαστικη, δηλαδη $(\forall x\in A)xRx$,

ii) ειναι συμμετρικη, δηλαδη $(\forall x\in A)(\forall y\in A)(xRy \longrightarrow yRx)$,

iii) ειναι μεταβατικη, δηλαδη $(\forall x\in A)(\forall y\in A)(\forall z\in A)(xRy\wedge yRz \longrightarrow xRz)$.

Μια σχεση λεγεται απλως σχεση ισοδυναμιας αν ειναι σχεση ισοδυναμιας στο πεδιο της.

Παραδειγμα 9. Σχεσεις ισοδυναμιας ειναι:

i) Η σχεση ισοτητας $I_A$, σε οποιοδηποτε συνολο $A\neq\emptyset$.

ii) Για εναν σταθερο $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 2$ η σχεση ισοτιμιας modulo $k$

$$\equiv_k = \{\langle m,n\rangle\in\mathbb{Z}^2 : k \text{ διαιρει } m-n\}.$$

iii) Η ομοιοτητα τριγωνων στο επιπεδο.

iv) Στο συνολο ακολουθιων Cauchy ρητων αριθμων η σχεση $\sim$ με

$$(\alpha_n)\sim(\beta_n) \leftrightarrow \lim(\alpha_n-\beta_n)=0.$$

v) Στο επιπεδο $\mathbb{R}^2$ η σχεση $S=\{\langle\langle x,y\rangle,\langle z,t\rangle\rangle\in\mathbb{R}^2 : x=z\}$.

vi) Στο διαστημα $[0,1)$ των πραγματικων αριθμων η σχεση $\approx$ με

$$x\approx y \leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q},$$

δηλαδη η $\approx =\{\langle x,y\rangle : x-y$ ειναι ρητος αριθμος$\}$.

Παρατηρηση. Αμεσως απο τον ορισμο βλεπουμε οτι αν $\rho$ ειναι σχεση ισοδυναμιας τοτε:

i) $I_A\subseteq\rho$, ii) $\rho^{-1}=\rho$, iii) $\rho*\rho\subseteq\rho$.

Ορισμοι. Εστω $R$ σχεση ισοδυναμιας με $\mathrm{Fld}(R)=A$. Για καθε $a\in A$ θετουμε: $[a]_R=\{x : xRa\}$. Το συνολο $[a]_R$ το λεμε κλαση ισοδυναμιας του $a$. Καθε στοιχειο μιας κλασης ισοδυναμιας λεγεται αντιπροσωπος αυτης της κλασης. Το συνολο $\{[a]_R : a\in A\}$ ολων των κλασεων ισοδυναμιας των στοιχειων του $A$ το λεμε συνολο πηλικο του $A$ modulo $R$ και το συμβολιζουμε $A/R$.

Ειναι προφανες οτι για καθε $a\in\mathrm{Fld}(R)$, υπαρχει το συνολο $[a]_R$. Η υπαρξη του συνολου πηλικου δικαιολογειται ως εξης. Καθε κλαση $[a]_R$ ειναι υποσυνολο του A. Αρα

$$(\exists a\in A)x=[a]_R \rightarrow x\subseteq A \rightarrow x\in\mathcal{P}A.$$

Εχουμε λοιπον $A/R=\{x\in\mathcal{P}A: (\exists a\in A)(x=[a]_R)\}$.

Για την κλαση $[a]_R$ γραφουμε απλουστερα $[a]$, αν αυτο δεν οδηγει σε παρεξηγησεις.

Παραδειγμα 10.

i) $A/1_A=\{\{a\}:a\in A\}$. Πραγματικα, για καθε $a\in A$: $[a]=\{x\in A: x=a\}=\{a\}$.

ii) Για τη σχεση $\equiv_k$ ισοτιμιας modulo k στο $\mathbb{Z}$, εχουμε οτι οι κλασεις ισοδυναμιας $[0],[1],\ldots,[k-1]$ καλυπτουν ολο το $\mathbb{Z}$. Τουτο συμβαινει διοτι για καθε $n\in\mathbb{Z}$

$$n\equiv_k 0 \quad ή \quad n\equiv_k 1 \quad ή \ldots ή \quad n\equiv_k k-1.$$

iii) Η κλαση ισοδυναμιας ενος τριγωνου ΑΒΓ, στη σχεση ομοιοτητας τριγωνων του επιπεδου, αποτελειται απο ολα τα τριγωνα που ειναι ομοια με το τριγωνο ΑΒΓ.

Θα σημειωσουμε τωρα μερικες απλες αλλα σημαντικες ιδιοτητες των κλασεων ισοδυναμιας.

Προταση 15. Εστω R σχεση ισοδυναμιας και $A=\mathrm{Fld}(R)$. Για καθε $a,b\in A$:

i) $[a]_R=[b]_R \leftrightarrow aRb$,

ii) $[a]_R=[b]_R$ ή $[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$,

iii) $\bigcup\{[a]_R: a\in R\}=A$.

Η προταση μας λεει οτι το συνολο πηλικο αποτελειται απο ξενα μεταξυ τους συνολα που καλυπτουν το πεδιο της σχεσης. Τουτο το γεγονος ειναι γνωστο ως αρχη αφαιρεσεως για τις σχεσεις ισοδυναμιας.

Ορισμος. Εστω $A\neq\varnothing$. Εστω $D\subseteq\mathcal{P}A$. Το D λεγεται διαμεριση του A αν:

i) $(\forall X\in D)X\neq\varnothing$,

ii) $(\forall X\in D)(\forall Y\in D)(X\neq Y \rightarrow X\cap Y=\varnothing)$,

iii) $\bigcup D=A$.

Καθε σχεση ισοδυναμιας ορίζει λοιπον μια διαμεριση του πεδιου της. Πιο κατω θα δειξουμε οτι συμβαινει και το αντιστροφο. Ας δουμε ομως πρωτα τις διαμερισεις που οριζονται απο τα παραδειγματα που γνωρισαμε.

Παραδειγμα 11.

i) Η ισοτητα $1_A$ χωριζει το συνολο A σε μονοσυνολα, δηλαδη

$$A/1_A=\{\{a\}:a\in A\} \quad (\text{για } A\neq\emptyset).$$

ii) Η σχεση $\equiv_k$ χωριζει το $Z$ σε k κλασεις (που λεγονται κλασεις υπολοιπων modulo k). Εχουμε $Z/\equiv_k=\{[0],[1],\ldots,[k-1]\}$.

iii) Για τη σχεση S του παραδειγματος 9iv εχουμε

$$[\langle a,b\rangle]=\{\langle x,y\rangle\in R^2: x=a\}=\{\langle a,y\rangle\in R^2: y\in R\}.$$

Οι κλασεις ισοδυναμιας της S ειναι λοιπον οι καθετες προς τον αξονα OX ευθειες του επιπεδου $R^2$.

<u>Προταση 16</u>. Εστω D διαμεριση του συνολου A. Υπαρχει μια σχεση ισοδυναμιας R στο A ωστε $D=A/R$.

<u>Αποδειξη</u>: Θετουμε $xRy \leftrightarrow (\exists B\in D)(x\in B\wedge y\in B)$. Ευκολα ελεγχουμε οτι η R ειναι σχεση ισοδυναμιας και οτι το συνολο πηλικο A/R ειναι ισο με τη δοσμενη διαμεριση D.■

<u>Ορισμος</u>. Εστω R σχεση ισοδυναμιας με $Fld(R)=A$. Η συναρτηση $f:A\longrightarrow A/R$ με $f(a)=[a]_R$ (για καθε $a\in A$) λεγεται <u>κανονικη</u> συναρτηση της σχεσης R.

Ειναι φανερο οτι αν f ειναι κανονικη συναρτηση μιας σχεσης R στο συνολο A, τοτε για οποιαδηποτε a, b του A εχουμε:

$$aRb \leftrightarrow f(a)=f(b).$$

Ευκολα βλεπουμε επισης οτι $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{} A/R$, δηλαδη οτι η κανονικη συναρτηση μιας σχεσης ισοδυναμιας απεικονιζει το πεδιο της σχεσης επι του συνολου πηλικου.

Πιο κατω θα δειξουμε οτι οποιαδηποτε συναρτηση $f\neq\emptyset$ μπορει ουσιαστικα να θεωρηθει κανονικη συναρτηση μιας σχεσης ισοδυναμιας.

<u>Προταση 17</u>. Εστω $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{} Y$. Θετοντας $\tilde{f}(a)=f^{-1}[\{f(a)\}]$, για καθε $a\in A$, οριζουμε μια συναρτηση $\tilde{f}$ με $dom(\tilde{f})=A$. Υπαρχει μια σχεση ισοδυναμιας R που η κανονικη της συναρτηση ειναι ιση με την $\tilde{f}$.*

<u>Αποδειξη</u>: Θεωρουμε τη συλλογη $D=\{f^{-1}[\{y\}]:y\in Y\}$ υποσυνολων του A. Το D ειναι μια διαμεριση του συνολου A. Απο την προηγουμενη προταση επεται οτι $D=A/R$ για μια σχεση ισοδυναμιας R. Για οποιαδηποτε $a,b\in R$ εχουμε:

$$aRb \leftrightarrow (\exists y\in Y)(a\in f^{-1}[\{y\}]\wedge b\in f^{-1}[\{y\}]) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists y\in Y)(f(a)=y\wedge f(b)=y) \leftrightarrow f(a)=f(b).$$

Εχουμε δηλαδη $R=\{\langle a,b\rangle\in A: f(a)=f(b)\}$. Για καθε $a\in A$ ισχυει:

$$\tilde{f}(a)=f^{-1}[\{f(a)\}]=\{x\in A: f(x)\in\{f(a)\}\}=\{x\in A: f(x)=f(a)\}=[a]_R,$$

που αποδεικνυει το ζητουμενο.■

Αργοτερα θα δουμε καποιες σημαντικες εφαρμογες των σχεσεων ισοδυναμιας. Στο κεφαλαιο 3, αφου πρωτα γνωρισουμε τους φυσικους αριθμους, θα περιγραψουμε πως κατασκευαζονται απ' αυτους οι ακεραιοι αριθμοι. Στη συνεχεια θα δουμε πως απο τους ακεραιους κατασκευαζονται οι ρητοι αριθμοι.

## 2.7 Διαταξεις.

Ως διαταξη ενος συνολου εννοουμε μια σχεση που μας επιτρεπει να μιλαμε για καποια "σειρα" των στοιχειων αυτου του συνολου.

**Ορισμοι.** Μια σχεση R σ' ενα συνολο A λεγεται *μερικη διαταξη* (ή απλως *διαταξη*) του A, οταν ειναι:

i) ανακλαστικη, δηλαδη $(\forall x\in A)xRx$, (ισοδυναμα $I_A\subseteq R$)

ii) ασθενως αντισυμμετρικη, δηλαδη $(\forall x\in A)(\forall y\in A)(xRy\wedge yRx \rightarrow x=y)$,

iii) μεταβατικη, δηλαδη $(\forall x\in A)(\forall y\in A)(\forall z\in A)(xRy\wedge yRz \rightarrow xRz)$.

Για τις μερικες διαταξεις χρησιμοποιουμε συνηθως τα συμβολα $\leq$, $\preccurlyeq$. Αν $\preccurlyeq$ ειναι μερικη διαταξη, τοτε το $x\preccurlyeq y$ διαβαζεται ως: "x προηγειται του y" ή "x ειναι προηγουμενο του y" ή "y επεται του x" ή "y ειναι επομενο του x". Αν $\preccurlyeq$ ειναι μερικη διαταξη του A, τοτε το ζευγος $<A,\preccurlyeq>$ το λεμε *(μερικως) διατεταγμενο συνολο*.

**Παραδειγμα 12.**

i) Οι γνωστες απο τα Μαθηματικα διαταξεις στα συνολα αριθμων ειναι μερικες διαταξεις. Ετσι π.χ. η σχεση

$$\leq_{\mathbb{R}}=\{<x,y>\in\mathbb{R}^2: \text{"x ειναι μικροτερο ή ισο y"}\}$$

ειναι μια διαταξη του συνολου $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων.

ii) Η σχεση διαιρετοτητας στους φυσικους αριθμους

$$\Delta=\{<m,n>: \text{"m,n ειναι φυσικοι και m διαιρει το n"}\}$$

ειναι μια μερικη διαταξη.

iii) Ο εγκλεισμος, περιορισμενος στα υποσυνολα ενος συνολου A, ειναι μερικη διαταξη του δυναμοσυνολου $\mathcal{P}A$. Θετουμε

$$\subseteq_{\mathcal{P}A}=\{<X,Y>\in(\mathcal{P}A)^2: X\subseteq Y\}$$

και εχουμε $X\subseteq_{\mathcal{P}A}Y \leftrightarrow X\subseteq A\wedge Y\subseteq A\wedge X\subseteq Y$.

*Παρατηρηση.* Στο τελευταιο παραδειγμα περιορισαμε τον εγκλεισμο στα στοιχεια ενος συνολου (του $\mathcal{P}A$), διοτι η κλαση K ολων των ζευγων $<X,Y>$ με $X\subseteq Y$ δεν αποτελει συνολο. Αν η K ηταν συνολο, τοτε το rng(K) θα ηταν συνολο ολων των συνολων. Πραγματικα, για οποιοδηποτε συνολο X εχουμε $\emptyset\subseteq X$, δηλαδη θα ηταν $<\emptyset,X>\in K$, αρα $X\in rng(K)$.

*Παρατηρηση.* Η διαταξη $\leq_{\mathbb{R}}$ εχει την ιδιοτητα οτι για καθε x,y ισχυει $x\leq_{\mathbb{R}}y$ ειτε $y\leq_{\mathbb{R}}x$. Οποιαδηποτε στοιχεια του $\mathbb{R}$ ειναι λοιπον "συγκρισιμα".

Τουτο δεν συμβαινει για τη σχεση διαιρετοτητας, αφου υπαρχουν αριθμοι $m$ και $n$ που κανενας δεν διαιρει τον αλλο. Υπαρχουν δηλαδη μη "συγκρισιμα" στοιχεια. Το ιδιο ισχυει για τη σχεση $\leq_{PA}$, αν το $A$ εχει περισσοτερα στοιχεια απο ενα.

<u>Ορισμος.</u> Μια διαταξη $R$ ενος συνολου $A$ λεγεται <u>ολικη</u> (ή <u>γραμμικη</u>) διαταξη του $A$, οταν εχει την ιδιοτητα:

iv) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \vee yRx)$,

δηλαδη ολα τα στοιχεια του $A$ ειναι συγκρισιμα μεταξυ τους.

<u>Παραδειγμα 13.</u>

i) Η σχεση $\leq_{\mathbb{R}}$ ειναι γραμμικη διαταξη του $\mathbb{R}$.

ii) Οι διαταξεις $\Delta$ και $\leq_{PA}$ του παραδειγματος 12 δεν ειναι γραμμικες.

iii) Η ισοτητα $I_A$ ειναι μια διαταξη του συνολου $A$ που δεν ειναι ολικη, αν το συνολο $A$ εχει τουλαχιστον δυο στοιχεια.

iv) Εστω $A=\{a,b,c\}$, οπου $a,b,c$ ειναι διαφορετικα μεταξυ τους. Εστω $R=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$, $S=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$. Η σχεση $R$ ειναι ολικη διαταξη του $A$ ενω η σχεση $S$ δεν ειναι ολικη διαταξη του $A$ (τα $b,c$ δεν ειναι συγκρισιμα).

<u>Προταση 18.</u> Εστω οτι $\langle X,\leq\rangle$ ειναι διατεταγμενο (γραμμικα διατεταγμενο) συνολο και $Y\subseteq X$. Τοτε το $\langle Y,\leq\cap Y\times Y\rangle$ ειναι επισης διατεταγμενο (γραμμικα διατεταγμενο αντιστοιχα) συνολο.

Μεχρι τωρα ασχοληθηκαμε με σχεσεις που ειναι γνωστες ως ασθενεις διαταξεις, στις οποιες καθε στοιχειο βρισκεται σε σχεση με τον εαυτο του. Στα Μαθηματικα εχουμε και ενα αλλο ειδος διαταξεων, τις λεγομενες γνησιες διαταξεις.

<u>Ορισμοι.</u> Μια σχεση $R$ σ' ενα συνολο $A$ λεγεται <u>γνησια μερικη διαταξη</u> (ή απλως <u>γνησια διαταξη</u>) του $A$, οταν ειναι:

i') αντιανακλαστικη, δηλαδη $(\forall x \in A)(\neg xRx)$, (ισοδυναμα: $I_A \cap R=\emptyset$)

ii') αντισυμμετρικη, δηλαδη $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \longrightarrow \neg yRx)$,

iii) μεταβατικη, δηλαδη $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz)$.

Για τις γνησιες διαταξεις χρησιμοποιουμε συνηθως τα συμβολα $<$, $\prec$.
Για το $x \prec y$ διαβαζεται οπως και το $x \preceq y$ (θα δουμε πιο κατω πως αυτο δεν οδηγει σε παρεξηγησεις). Αν $\prec$ ειναι γνησια μερικη διαταξη του $A$, τοτε το ζευγος $\langle A,\prec\rangle$ το λεμε <u>γνησια διατεταγμενο συνολο</u>.
Μια γνησια διαταξη $R$ του συνολου $A$ λεγεται <u>γνησια γραμμικη</u> (ή <u>ολικη</u>) διαταξη του $A$, οταν εχει τη λεγομενη <u>τριχοτομικη</u> ιδιοτητα:

iv') $(\forall x\in A)(\forall y\in A)(x=y\vee xRy\vee yRx)$.

<u>Παραδειγμα 14.</u>

i) Οι γνωστες γνησιες ανισοτητες στα συνολα αριθμων ειναι γνησιες διαταξεις. Εχουμε π.χ. οτι η σχεση

$$<_{\mathbb{R}}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 : \text{"x ειναι μικροτερο ή ισο y"}\}$$

ειναι γνησια γραμμικη διαταξη του συνολου $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων.

ii) Ο γνησιος εγκλεισμος, περιορισμενος στα υποσυνολα ενος συνολου A, ειναι γνησια διαταξη του δυναμοσυνολου $\mathcal{P}A$. Θετουμε

$$\subset_{\mathcal{P}A}=\{\langle X,Y\rangle\in(\mathcal{P}A)^2 : X\subset Y\}$$

και εχουμε $X\subset_{\mathcal{P}A}Y \leftrightarrow X\subseteq A\wedge Y\subseteq A\wedge X\subset Y$. Η διαταξη $\subset_{\mathcal{P}A}$, οπως και η $\subseteq_{\mathcal{P}A}$, δεν ειναι εν γενει γραμμικη.

iii) Εστω $A=\{a,b,c\}$, οπου $a,b,c$ ειναι διαφορετικα μεταξυ τους. Εστω $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$, $S=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$. Η σχεση R ειναι μια γνησια ολικη διαταξη του A. Η γνησια διαταξη S δεν ειναι ολικη.

<u>Παρατηρηση.</u> Υπαρχει μια αντιστοιχια μεταξυ των (ασθενων) διαταξεων και των γνησιων διαταξεων. Συγκεκριμενα, καθε διαταξη οριζει μια γνησια διαταξη και αντιστροφα. Ευκολα αποδεικνυεται η παρακατω προταση.

<u>Προταση 19.</u>

i) Εστω R διαταξη του συνολου A. Θετουμε $S=R-I_A$, δηλαδη

$$xSy \leftrightarrow xRy\wedge x\neq y.$$

Τοτε η S ειναι γνησια διαταξη του A.

ii) Εστω S ειναι γνησια διαταξη του A. Θετουμε $R=S\cup I_A$, δηλαδη

$$xRy \leftrightarrow xSy\vee x=y.$$

Τοτε η R ειναι διαταξη του A.

Αν επιπλεον η διαταξη R ειναι γραμμικη, τοτε η αντιστοιχη διαταξη S ειναι επισης γραμμικη, και αντιστροφα.

Θα αναφερουμε τωρα μερικους χρησιμους ορισμους σχετικους με τις διαταξεις.

<u>Ορισμος.</u> Εστω $\langle A,\leq\rangle$ διατεταγμενο συνολο. Λεμε οτι ενα $a\in A$ ειναι:

i) <u>ελαχιστον (minimal)</u>, οταν δεν υπαρχει στο A στοιχειο προηγουμενο του a διαφορετικο απ' αυτο, δηλαδη οταν $(\forall x\in A)(x\leq a \rightarrow x=a)$,

ii) <u>μεγιστον (maximal)</u>, οταν δεν υπαρχει στο A στοιχειο επομενο του a διαφορετικο απ' αυτο, δηλαδη οταν $(\forall x\in A)(a\leq x \rightarrow x=a)$,

iii) <u>ελαχιστο</u> (ή <u>το μικροτερο</u>), οταν το a προηγειται ολων των στοιχειων του A, δηλαδη οταν $(\forall x\in A)a\leq x$,

iv) *μεγιστο* (ή *το μεγαλυτερο*), οταν το $a$ επεται ολων των στοιχειων του $A$, δηλαδη οταν $(\forall x\in A)x\le a$.

*Παρατηρηση.* Ειναι προφανες οτι, αν $a$ ειναι ελαχιστο [μεγιστο] στοιχειο τοτε ειναι ελασσον [μειζον αντιστοιχα]. Οπως θα δουμε πιο κατω, εν γενει δεν ισχυει το αντιστροφο. Αν ομως η διαταξη ειναι γραμμικη, τοτε καθε ελασσον στοιχειο ειναι ελαχιστο και καθε μειζον στοιχειο ειναι μεγιστο (ασκηση 2.23). Ευκολα βλεπουμε οτι σε καθε διαταξη υπαρχει το πολυ ενα μεγιστο και το πολυ ενα ελαχιστο στοιχειο (ασκηση 2.22).

*Παραδειγμα 15.*

i) Η σχεση διαιρετοτητας $\Delta$ (παραδειγμα 12ii), περιορισμενη στους θετικους αριθμους, εχει ελαχιστο στοιχειο το 1 (για καθε $m$: $1\Delta m$). Δεν υπαρχει μεγιστο στοιχειο, αφου για καθε θετικο $m$ εχουμε $m\Delta 2m$.

ii) Η διαταξη $\subseteq_{PA}$ εχει ελαχιστο στοιχειο το $\emptyset$ και μεγιστο στοιχειο το $A$.

iii) Στη διαταξη $I_A$, για $A\neq\emptyset$, καθε στοιχειο του $A$ ειναι ελασσον και μειζον. Αν το συνολο $A$ εχει τουλαχιστον δυο στοιχεια, τοτε δεν υπαρχει ουτε το μικροτερο ουτε το μεγαλυτερο στοιχειο στο $A$.

iv) Στο παραδειγμα 13iv, η διαταξη $R$ εχει ελαχιστο στοιχειο το $a$ και μεγιστο στοιχειο το $c$. Η διαταξη $S$ εχει επισης ελαχιστο στοιχειο το $a$. Τα $b$ και $c$ ειναι maximal στοιχεια. Δεν υπαρχει μεγιστο στοιχειο για αυτη τη διαταξη.

Οι εννοιες που οριστηκαν παραπανω, οριζονται επισης και για τις γνησιες διαταξεις:

*Ορισμος.* Εστω $\langle A,<\rangle$ γνησια διατεταγμενο συνολο. Λεμε οτι ενα $a\in A$ ειναι:

i) *ελασσον (minimal)*, οταν δεν υπαρχει στο $A$ στοιχειο προηγουμενο του $a$, δηλαδη οταν $(\forall x\in A)\neg(x<a)$,

ii) *μειζον (maximal)*, οταν δεν υπαρχει στο $A$ στοιχειο επομενο του $a$, δηλαδη οταν $(\forall x\in A)\neg(a<x)$,

iii) *ελαχιστο* (ή *το μικροτερο*), οταν το $a$ προηγειται ολων των στοιχειων του $A$ που ειναι διαφορετικα απ' αυτο, δηλαδη $(\forall x\in A)(a<x\vee a=x)$,

iv) *μεγιστο* (ή *το μεγαλυτερο*), οταν το $a$ επεται ολων των στοιχειων του $A$ που ειναι διαφορετικα απ' αυτο, δηλαδη οταν $(\forall x\in A)(x<a\vee x=a)$.

*Παρατηρηση.* Οι παραπανω εννοιες δεν αλλαζουν αν περασουμε απο μια διαταξη στην αντιστοιχη γνησια διαταξη, και αντιστροφα (ασκηση 2.25).

Ακολουθουν μερικοι ακομα ορισμοι σχετικοι με τις διαταξεις.

Ορισμοι. Εστω $<A,\leq>$ μερικως διατεταγμενο συνολο. Εστω $X\subseteq A$ και $b\in A$. Λεμε οτι το $b$ ειναι:

i) ανω φραγμα του $X$, αν $(\forall x\in X)x\leq b$,

ii) κατω φραγμα του $X$, αν $(\forall x\in X)b\leq x$,

iii) ανω περας (supremum) του $X$, αν ειναι το ελαχιστο ανω φραγμα του $X$, δηλαδη αν για καθε ανω φραγμα $c$ εχουμε $b\leq c$,

iv) κατω περας (infimum) του $X$, αν ειναι το μεγιστο κατω φραγμα του $X$, δηλαδη αν για καθε κατω φραγμα $c$ εχουμε $c\leq b$.

Ομοιες διαταξεις.

Ορισμος. Εστω $<X,\rho>$, $<Y,\sigma>$ μερικως διατεταγμενα συνολα. Λεμε οτι τα $<X,\rho>$, $<Y,\sigma>$ ειναι ομοια και γραφουμε $<X,\rho>\approx<Y,\sigma>$, οταν υπαρχει μια συναρτηση $f:X\xrightarrow[\text{επι}]{1-1}Y$ που διατηρει τις διαταξεις $\rho,\sigma$, δηλαδη τετοια ωστε

$$(\forall a\in X)(\forall b\in X)(a\rho b \leftrightarrow f(a)\sigma f(b)).$$

Μια τετοια συναρτηση $f$ λεγεται ισομορφισμος των διαταξεων $\rho$ και $\sigma$. Οι διαταξεις $\rho,\sigma$ λεγονται ομοιες.

Ο παρακατω ορισμος χρησιμοποιειται και για τις γνησιες διαταξεις. Ας παρατηρησουμε ομως οτι ενα διατεταγμενο συνολο $<A,\leq>$ $(A\neq\emptyset)$ δεν μπορει να ειναι ομοιο με ενα γνησια διατεταγμενο συνολο $<B,\prec>$, διοτι για καθε $a\in A$ εχουμε $a\leq a$ και $\neg(f(a)\prec f(a))$.

Παραδειγμα 16.

i) Εστω $a\neq b$. Η σχεση $\rho=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>\}$ ειναι διαταξη του συνολου $A=\{a,b\}$. Η $\rho$ ειναι ομοια με την διαταξη $\sigma=\{<0,0>,<1,1>,<0,1>\}$ του συνολου $\{0,1\}$. Πραγματικα, η συναρτηση $f:\{a,b\}\longrightarrow\{0,1\}$, με $f(a)=0$ και $f(b)=1$, ειναι ισομορφισμος των διατεταγμενων συνολων $<A,\rho>$, $<\{0,1\},\sigma>$. Εχουμε δηλαδη $<A,\rho>\approx<\{0,1\},\sigma>$. Γενικοτερα, η διαταξη $\rho$ ειναι ομοια με καθε γραμμικη διαταξη ενος συνολου $X$ με δυο διαφορετικα στοιχεια.

ii) Η διαταξη $\leq_R$ των πραγματικων αριθμων, περιορισμενη στο συνολο $A$ των αριθμων μορφης $-\frac{1}{n}$ (οπου $n$ θετικος φυσικος αριθμος), ειναι ομοια με την συνηθη διαταξη των θετικων φυσικων αριθμων.

iii) Καμια απο τις παραπανω διαταξεις δεν ειναι ομοια με την $\leq_R$ περιορισμενη στο συνολο $B$ των πραγματικων αριθμων μορφης $\frac{1}{n}$ (οπου $n$ θετικος φυσικος αριθμος). Τουτο διοτι π.χ. η τελευταια διαταξη εχει μεγιστο στοιχειο (το 1), κατι που δεν συμβαινει για τις αλλες δυο διαταξεις (βλ. ασκηση 2.27).

Ας σημειωσουμε μερικες βασικες ιδιοτητες των ισομορφισμων διαταξεων. Οι αποδειξεις τους ειναι απλες ασκησεις (ασκηση 2.20).

**Προταση 20.**

i) Καθε μερικως διατεταγμενο συνολο ειναι ομοιο με το εαυτο του.

ii) Αν $\langle A_1,\preccurlyeq_1\rangle\approx\langle A_2,\preccurlyeq_2\rangle$, τοτε $\langle A_2,\preccurlyeq_2\rangle\approx\langle A_1,\preccurlyeq_1\rangle$.

iii) Αν $\langle A_1,\preccurlyeq_1\rangle\approx\langle A_2,\preccurlyeq_2\rangle$ και $\langle A_2,\preccurlyeq_2\rangle\approx\langle A_3,\preccurlyeq_3\rangle$, τοτε $\langle A_1,\preccurlyeq_1\rangle\approx\langle A_3,\preccurlyeq_3\rangle$.

Δυο ομοιες διαταξεις δεν διαφερουν ουσιαστικα, αφου οι ισομορφισμοι διατηρουν ολες τις ιδιοτητες τους. Μελετοντας τις διαταξεις, ο Cantor χρησιμοποιουσε την εννοια του διατακτικου τυπου. Για καθε διατεταγμενο συνολο $\langle A,\leq\rangle$ εισηγαγε ενα νεο αφηρημενο αντικειμενο $\overline{\langle A,\leq\rangle}$ που το ελεγε διατακτικο τυπο του $\langle A,\leq\rangle$, ετσι ωστε δυο διατεταγμενα συνολα εχουν τον ιδιο διατακτικο τυπο εαν και μονον εαν ειναι ομοια. Απαιτησε δηλαδη

$$(*)\qquad \overline{\langle X,\rho\rangle}=\overline{\langle Y,\sigma\rangle}\leftrightarrow\langle X,\rho\rangle\approx\langle Y,\sigma\rangle.$$

Το ρολο του διατακτικου τυπου $\overline{\langle A,\leq\rangle}$ ενος διατεταγμενου συνολου $\langle A,\leq\rangle$ μπορει να παιξει η κλαση ολων των διατεταγμενων συνολων που ειναι ομοια με το $\langle A,\leq\rangle$. Τοτε ικανοποιειται η απαιτηση (*). Σοβαρο μειονεκτημα αυτου του ορισμου ειναι ομως το γεγονος οτι οι κλασεις σαν την παραπανω δεν ειναι συνολα. Η συλλογη ολων των διαταξεων που ειναι ομοιες με μια δοσμενη ειναι γνησια κλαση. Με την εννοια αυτη, οι διατακτικοι τυποι δεν ειναι αντικειμενα της θεωριας συνολων.

Οι αφηρημενοι διατακτικοι τυποι του Cantor ενοχλουσαν τους μαθηματικους εκεινης της εποχης. Ευλογο ηταν λοιπον να μπορουν να οριστουν ως συνολα. Ενας τετοιος ορισμος βρεθηκε μερικες δεκαετιες αργοτερα. Η κατανοηση του απαιτει ομως προχωρημενες γνωσεις της θεωριας συνολων και γιαυτο ειναι εκτος υλης ενος εισαγωγικου μαθηματος.

Παραδοσιακα διατηρηθηκαν μερικοι συμβολισμοι του Cantor. Οι διατακτικοι τυποι των φυσικων, ρητων και πραγματικων αριθμων (με τις συνηθεις διαταξεις) συμβολιζονται με ω, η και λ αντιστοιχα.

Κλεινουμε το κεφαλαιο με ενα θεωρημα που μας λεει για τη δυνατοτητα παραστασης καθε μιας διαταξης απο τον εγκλεισμο. Ο εγκλεισμος περιορισμενος στα στοιχεια ενος συνολου B, δηλαδη η σχεση

$$\subseteq_B=\{\langle X,Y\rangle\in B^2 : X\subseteq Y\}$$

ειναι μια διαταξη του B.

**Θεωρημα.** Εστω $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ μερικως διατεταγμενο συνολο. Υπαρχει ενα συνολο B τετοιο ωστε

$$\langle A,\leqslant\rangle\approx\langle B,\subseteq_B\rangle.$$

<u>Αποδειξη</u>: Για καθε $a\in A$ θετουμε $O_{\leqslant}(a)=\{x\in A: x\leqslant a\}$. Προφανως $O_{\leqslant}(a)\subseteq A$. Υπαρχει λοιπον το συνολο $\{O_{\leqslant}(a): a\in A\}$ και ειναι υποσυνολο του $\mathcal{P}A$. Θετουμε $B=\{O_{\leqslant}(a): a\in A\}$. Ευκολα ελεγχουμε οτι για οποιαδηποτε $x,y\in A$

$$O_{\leqslant}(x)\subseteq O_{\leqslant}(y) \leftrightarrow x\in O_{\leqslant}(y) \leftrightarrow x\leqslant y.$$

Οριζουμε τωρα $f: A \dashrightarrow B$ με $f(a)=O_{\leqslant}(a)$, για καθε $a\in A$. Απο το παραπανω επεται οτι για οποιαδηποτε $x,y$ του $A$:

$$f(x)\subseteq_B f(y) \leftrightarrow x\leqslant y.$$

Η $f$ ειναι προφανως επι του $B$. Ειναι και 1-1, διοτι αν $f(x)=f(y)$ (δηλαδη $O_{\leqslant}(x)=O_{\leqslant}(y)$), τοτε $x\leqslant y$ και $y\leqslant x$ που επεται οτι $x=y$. Η $f$ ειναι λοιπον ισομορφισμος των $\langle A,\leqslant\rangle$ και $\langle B,\subseteq_B\rangle$.∎

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε συνολα $X,Y,Z,V$:

i) $(X\cup Y)\times Z=X\times Y \cup X\times Z$,  ii) $(X-Y)\times Z=X\times Y - X\times Z$,

iii) $(X\cap Y)\times Z=X\times Y \cap X\times Z$,  iv) $X\times Y=X\times Z \rightarrow Y=Z$ (για $X\neq\varnothing$),

v) $X\times Y=Z\times V \rightarrow X=Z \wedge Y=V$ (για μη κενα $X,Y,Z,V$),

vi) $X\times Z=Y\times Y \rightarrow X=Y$,

vii) $(X\cup Y)\times(Z\cup V)=X\times Z \cup X\times V \cup Y\times Z \cup Y\times V$.

2.2 Βρειτε ολες τις σχεσεις $R$ με $dom(R)\subseteq\{a,b,c\}$ και $rng(R)\subseteq\{A,B\}$. Βρειτε ολες τις σχεσεις $R$ με $fld(R)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

2.3 Αποδειξτε οτι για οποιεσδηποτε σχεσεις $R,S,T$ ισχυει $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$.

2.4 Εστω $R$ σχεση. Εστω $A,B$ συνολα. Εξεταστε αν ισχυουν:

i) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$,  iv) $R^{-1}[A\cup B]=R^{-1}[A]\cup R^{-1}[B]$,

ii) $R[A\cap B]=R[A]\cap R[B]$,  v) $R^{-1}[A\cap B]=R^{-1}[A]\cap R^{-1}[B]$,

iii) $R[A-B]=R[A]-R[B]$,  vi) $R^{-1}[A-B]=R^{-1}[A]-R^{-1}[B]$.

2.5 Εστω $R,S$ σχεσεις. Εξεταστε αν ισχυουν:

i) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$,

ii) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$,

iii) $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$.

2.6 Αποδειξτε οτι για οποιεσδηποτε σχεσεις $R,S$ και οποιαδηποτε συνολα $A,B$ ισχυουν:

i) $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$,  ii) $(R\circ S)^{-1}[A]=S^{-1}[R^{-1}[A]]$,

iii) $R[\bigcup A]=\bigcup\{R[x]:x\in A\}$,  iv) $R[\bigcap A]\subseteq\bigcap\{R[x]:x\in A\}$ $(A\neq\varnothing)$,

v) $R^{-1}[\bigcup A]=\bigcup\{R^{-1}[x]:x\in A\}$,  vi) $R^{-1}[\bigcap A]=\bigcap\{R^{-1}[x]:x\in A\}$ $(A\neq\varnothing)$.

2.7 Εστω $R,S$ σχεσεις και $A$ συνολο. Αποδειξτε οτι:

i) $R\restriction A\cup B=R\restriction A \cup R\restriction B$,

ii) $R\restriction A\cap B=R\restriction A \cap R\restriction B$,

iii) $R\restriction A-B=R\restriction A - R\restriction B$.

2.8 Εστω $R=\{\langle\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\{\varnothing\}\rangle,\langle\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\varnothing\rangle\}$. Βρειτε τα:

$R(\varnothing), R(\{\varnothing\}), R[\varnothing], R[\{\varnothing\}], R\restriction\varnothing, R\restriction\{\varnothing\}$,

$R^{-1}, R^{-1}(\varnothing), R^{-1}[\{\varnothing\}], R^{-1}[\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\varnothing\}]$,

$R\circ R$, $\bigcup R$, $\bigcup\bigcup R$.

2.9 Εστω R σχεση. Δειξτε οτι:

i) $R[dom(R)]=rng(R)$, ii) $R^{-1}[rng(R)]=dom(R)$.

2.10 Αποδειξτε οτι η συνθεση $f\circ g$ δυο συναρτησεων $f,g$ ειναι συναρτηση. Βρειτε τα συνολα $dom(f\circ g)$ και $rng(f\circ g)$. Δειξτε οτι για καθε $x\in dom(f\circ g)$ ισχυει $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. Αποδειξτε επισης οτι αν $f,g$ ειναι 1-1, τοτε η $f\circ g$ επισης ειναι 1-1.

2.11 Εστω $f:X\longrightarrow Y$. Εστω $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$. Αποδειξτε οτι:

i) $A\subseteq f^{-1}[f[A]]$, ii) $f[f^{-1}[B]]\subseteq B$.

Βρειτε παραδειγματα στα οποια δεν ισχυουν ισοτητες. Βρειτε ικανες και αναγκαιες συνθηκες για την $f$ ωστε να ισχυουν οι ισοτητες.

2.12 Εστω $f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow X$, $h:Y\longrightarrow X$. Αποδειξτε οτι αν $f\circ g=I_Y$ και $h\circ f=I_X$, τοτε $g=h$.

2.13 Εστω $f:X\xrightarrow[\text{επι}]{}Y$, $g:Y\longrightarrow Z$. Αποδειξτε οτι αν $g\circ f$ ειναι 1-1, τοτε και η $g$ ειναι 1-1. Δωστε παραδειγμα μιας $f$ που δεν ειναι επι του $Y$ τετοια ωστε η $g\circ f$ ειναι 1-1 αλλα η $g$ δεν ειναι 1-1.

2.14 Εστω $A$ συνολο συναρτησεων τετοιο ωστε

$$(\forall f\in A)(\forall g\in A)(f\subseteq g\vee g\subseteq f).$$

Δειξτε οτι το συνολο $\bigcup A$ ειναι συναρτηση και $(\forall f\in A)f\subseteq\bigcup A$.

2.15 Εστω $f:X\longrightarrow Y$. Εστω $(A_\iota)_{\iota\in T}$ οικογενεια συνολων $(T\neq\emptyset)$. Δειξτε οτι:

i) $f[\bigcup_{\iota\in T}A_\iota]=\bigcup_{\iota\in T}f[A_\iota]$, ii) $f[\bigcap_{\iota\in T}A_\iota]\subseteq\bigcap_{\iota\in T}f[A_\iota]$,

iii) $f^{-1}[\bigcup_{\iota\in T}A_\iota]=\bigcup_{\iota\in T}f^{-1}[A_\iota]$, iv) $f^{-1}[\bigcap_{\iota\in T}A_\iota]=\bigcap_{\iota\in T}f^{-1}[A_\iota]$.

2.16 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε οικογενεια συνολων $(A_{\iota,s})_{\iota\in T,s\in S}$ $(S\neq\emptyset)$

$$\bigcup_{\iota\in T}\bigcap_{s\in S}A_{\iota,s}\subseteq\bigcap_{s\in S}\bigcup_{\iota\in T}A_{\iota,s}$$

και βρειτε παραδειγματα στα οποια δεν εχουμε ισοτητα.

2.17 Εστω $(A_\iota)_{\iota\in T}$, $(B_s)_{s\in S}$ οικογενειες συνολων. Αποδειξτε οτι:

i) $(\bigcup_\iota A_\iota)\times(\bigcup_s B_s)=\bigcup_{\iota,s}(A_\iota\times B_s)$.

ii) $(\bigcap_\iota A_\iota)\times(\bigcap_s B_s)=\bigcap_{\iota,s}(A_\iota\times B_s)$, **$(T\neq\emptyset, S\neq\emptyset)$.**

2.18 Εστω $f:A\longrightarrow B$. Θεωρουμε τη σχεση $R=\{\langle x,y\rangle\in A^2: f(x)=f(y)\}$.

i) Αποδειξτε οτι η $R$ ειναι σχεση ισοδυναμιας.

ii) Βρειτε τις κλασεις ισοδυναμιας της $R$.

iii) Αποδειξτε οτι υπαρχει μια συναρτηση $h:A\xrightarrow[\text{επι}]{1-1}B$ τετοια ωστε για καθε $a \in A$: $h([a]_R)=f(a)$.

2.19 Βρειτε, αν υπαρχουν, παραδειγματα σχεσεων R που εχουν:

i) ακριβως μια απο τις παρακατω ιδιοτητες,

ii) ακριβως δυο απο τις παρακατω ιδιοτητες.

(1) Η R ειναι ανακλαστικη.

(2) Η R ειναι συμμετρικη.

(3) Η R ειναι μεταβατικη.

2.20 Αποδειξτε οτι αν R ειναι μερικη (γραμμικη) διαταξη του συνολου A, τοτε η $R^{-1}$ ειναι επισης μερικη (αντιστοιχα γραμμικη) διαταξη του A.

2.21 Βρειτε ολες τις μη ομοιες διαταξεις του συνολου $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

2.22 Εστω $<X, \leq>$ διατεταγμενο συνολο. Αποδειξτε οτι στο X υπαρχει το πολυ ενα μεγιστο και το πολυ ενα ελαχιστο στοιχειο.

2.23 Αποδειξτε οτι αν $\leq$ ειναι γραμμικη διαταξη του συνολου X, τοτε καθε ελασσον (μειζον) στοιχειο ειναι ελαχιστο (αντιστοιχα μεγιστο) στοιχειο του X.

2.24 Δωστε παραδειγματα γραμμικων διαταξεων που εχουν τις ιδιοτητες:

i) Για καθε στοιχειο υπαρχει το αμεσως επομενο και τουλαχιστον ενα στοιχειο δεν εχει αμεσως προηγουμενο.

ii) Υπαρχει το μεγαλυτερο στοιχειο και για καθε στοιχειο εκτος απο αυτο υπαρχει το αμεσως επομενο.

iii) Υπαρχει το μικροτερο στοιχειο και για καθε στοιχειο εκτος απο αυτο υπαρχει το αμεσως προηγουμενο.

2.25 Εστω $\leq$ μερικη διαταξη του συνολου X. Εστω $<$ η αντιστοιχη γνησια διαταξη (δηλαδη $x<y \leftrightarrow x\leq y \wedge x\neq y$). Αποδειξτε οτι αν $a\in X$ ειναι ελασσον (μειζον, ελαχιστο, μεγιστο) για την $\leq$, τοτε ειναι επισης ελασσον (μειζον, ελαχιστο, μεγιστο αντιστοιχα) για την $<$.

2.26 Αποδειξτε οτι την προταση 20 (σελιδα 38).

2.27 Εστω οτι f ειναι ισομορφισμος των διατεταγμενων συνολων $<A, \preccurlyeq_A>$, $<B, \preccurlyeq_B>$. Εστω $a\in A$. Αποδειξτε οτι, αν a ειναι ελασσον (μειζον, ελαχιστο, μεγιστο) στο A, τοτε το f(a) ειναι ελασσον (αντιστοιχα μειζον, ελαχιστο, μεγιστο) στοιχειο στο B. Δειξτε επισης οτι αν η $\preccurlyeq_A$ ειναι γραμμικη, τοτε και η $\preccurlyeq_B$ ειναι γραμμικη.

2.28 Αποδειξτε οτι υπαρχει το συνολο M ολων των μερικων διαταξεων ενος συνολου X. Το M ειναι μερικως διατεταγμενο απο τη σχεση $\leq_K$. Δειξτε οτι

$T\in M$ ειναι μεγιστο στο $\langle M,\subseteq_M\rangle$ εαν και μονον εαν $T$ ειναι γραμμικη διαταξη του $X$.

2.29 Δωστε παραδειγμα μιας αντισυμμετρικης σχεσης που δεν μπορει να επεκταθει σε γραμμικη διαταξη.

2.30 Εστω $\langle A,\leqslant_1\rangle$, $\langle B,\leqslant_2\rangle$ μερικως διατεταγμενα συνολα. Εστω οτι $f:A\longrightarrow B$ εχει την ιδιοτητα:

$$(\forall x\in A)(\forall y\in A)(x\leqslant_1 y \leftrightarrow f(x)\leqslant_2 f(y)).$$

Αποδειξτε οτι οτι η $f$ ειναι 1-1.

2.31 Εστω $\langle X,\leqslant\rangle$ μερικως διατεταγμενο συνολο $(X\neq\emptyset)$. Για $a\in X$ θετουμε:

$$O_<(a)=\{x\in X: x<a\}\ ,\qquad O_\leqslant(a)=\{x\in X: x\leqslant a\}$$

Αποδειξτε οτι: i) $\bigcup_{a\in X} O_<(a)\subseteq X$ , ii) $\bigcup_{a\in X} O_\leqslant(a)=X$

και βρειτε το συνολο $\bigcap_{a\in X} O_\leqslant(a)$.

## 3.1 Οι φυσικοι αριθμοι ως συνολα.

Ενας τροπος να εισαγουμε τους φυσικους αριθμους στα Μαθηματικα ειναι η αξιωματικη μεθοδος. Ασχοληθηκαν μ' αυτην πρωτα ο Dedekind και αργοτερα ο Peano. Το αξιωματικο τους συστημα εχει δυο αρχικες εννοιες: το "μηδεν" και την εννοια του "επομενου αριθμου". Χρησιμοποιει και τις συνολοθεωρητικες εννοιες. Αποτελειται απο τα παρακατω πεντε αιτηματα.

i) Το μηδεν ειναι φυσικος αριθμος.

ii) Καθε φυσικος αριθμος εχει ακριβως εναν επομενο.

iii) Το μηδεν δεν ειναι επομενος κανενος φυσικου αριθμου.

iv) Δυο φυσικοι αριθμοι που εχουν τον ιδιο επομενο ειναι ισοι.

v) Αν σ' ενα συνολο φυσικων αριθμων ανηκει το μηδεν και μαζι με καθε φυσικο αριθμο ανηκει ο επομενος του, τοτε αυτο το συνολο περιεχει ολους τους φυσικους αριθμους.

Το τελευταιο αιτημα ειναι γνωστο ως Αρχη Επαγωγης. Θα την διατυπωσουμε χρησιμοποιωντας τον παραδοσιακο συμβολισμο. Το μηδεν συμβολιζεται με 0 και ο επομενος του αριθμου x με x'. Το συνολο των φυσικων αριθμων παραδοσιακα συμβολιζεται με N.

$$A\subseteq N \wedge 0\in A \wedge \forall x(x\in A \rightarrow x'\in A) \rightarrow A=N.$$

Το παραπανω αξιωματικο συστημα για τους φυσικους αριθμους ειναι αρκετα ισχυρο. Αποδεικνυονται σ' αυτο ολα τα κλασικα θεωρηματα της αριθμητικης.

Οι φυσικοι αριθμοι μπορουν να οριστουν στη θεωρια συνολων. Ετσι η αριθμητικη γινεται μερος της θεωριας συνολων. Οριζουμε το μηδεν (ως συνολο) και την εννοια του επομενου φυσικου αριθμου. Οι φυσικοι αριθμοι οριζονται συνεπως ως συνολα και γινονται αντικειμενα της θεωριας συνολων. Με την εισαγωγη των φυσικων αριθμων στη θεωρια συνολων ασχοληθηκε πρωτος ο Frege. Πιο κατανοητες ειναι ομως οι ιδεες του von Neumann και αυτες θα περιγραφουμε παρακατω.

Ορισμοι. Το μηδεν οριζεται ως

$$0=\varnothing.$$

Για καθε συνολο x οριζουμε το επομενο συνολο ως

$$x'=x\cup\{x\}.$$

Τωρα μπορουμε να ορισουμε εναν εναν ολους τους φυσικους αριθμους. Ειδικα εχουμε:

$1=0'=\emptyset'=\emptyset\cup\{\emptyset\}=\{\emptyset\}$,

$2=1'=\{\emptyset\}'=\{\emptyset\}\cup\{\{\emptyset\}\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$,

$3=2'=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}'=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\cup\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, κ.ο.κ.

Παρατηρηση. Καθε φυσικος αριθμος ισουται με το συνολο των προηγουμενων φυσικων αριθμων. Πραγματικα, απο τον ορισμο εχουμε $0=\emptyset$, $1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$, $3=\{0,1,2\}$ κ.ο.κ. Γενικα, αν $n=\{0,1,\dots,n-1\}$, τοτε επειδη $n'=n\cup\{n\}$, εχουμε $n'=\{0,1,\dots,n-1,n\}$.

## 3.2 Το συνολο των φυσικων αριθμων.

Ενω ορισαμε ολους τους φυσικους αριθμους ως συνολα, τα αξιωματα που δεχθηκαμε μεχρι τωρα δεν μας εξασφαλιζουν την υπαρξη του συνολου ολων των φυσικων αριθμων. Χωρις ενα νεο αξιωμα δεν ειναι δυνατο να δικαιολογησουμε την υπαρξη ενος συνολου με στοιχεια ολους τους φυσικους αριθμους που ορισαμε παραπανω. Με βαση τα αξιωματα που γνωρισαμε, μπορουμε να κατασκευασουμε μονο συνολα που διαισθητικα χαρακτηριζονται ως πεπερασμενα. Το νεο αξιωμα μας λεει για την υπαρξη ενος συνολου που δεν ειναι πεπερασμενο. Για να το καταλαβουμε καλυτερα θα ορισουμε πρωτα μια βοηθητικη εννοια.

Ορισμος. Ενα συνολο A λεγεται επαγωγικο αν εχει στοιχειο το $\emptyset$ και για καθε στοιχειο του A ανηκει στο A και το επομενο συνολο, δηλαδη

$$\emptyset\in A \wedge \forall x(x\in A \rightarrow x\cup\{x\}\in A).$$

A6. Αξιωμα απειρου.

"Υπαρχει επαγωγικο συνολο", δηλαδη $\exists A(\emptyset\in A\wedge\forall x(x\in A \rightarrow x\cup\{x\}\in A))$.

Θα αποδειξουμε παρακατω οτι υπαρχει το μικροτερο επαγωγικο συνολο, δηλαδη ενα επαγωγικο συνολο που περιεχεται σε ολα τα επαγωγικα συνολα, και αυτο θα ορισουμε ως συνολο των φυσικων αριθμων.

Ευκολα αποδεικνυεται η παρακατω προταση (ασκηση 3.1).

Προταση 1. Εστω B μη κενο συνολο επαγωγικων συνολων. Η τομη $\bigcap B$ ειναι επισης επαγωγικο συνολο.

Προταση 2. Υπαρχει μοναδικο επαγωγικο συνολο που περιεχεται σε ολα τα επαγωγικα συνολα.

Αποδειξη: Εστω A οποιοδηποτε επαγωγικο συνολο. Θετουμε

$$B=\{X\subseteq A: \text{"X ειναι επαγωγικο συνολο"}\}.$$

Το $B$ προφανως δεν ειναι κενο, αφου $A\in B$. Με βαση την προταση 1, το συνολο $\omega=\bigcap B$ ειναι επαγωγικο. Ως τομη, περιεχεται σε καθε στοιχειο του $B$, δηλαδη σε καθε επαγωγικο υποσυνολο του $A$.

Θα δειξουμε οτι το $\omega$ περιεχεται σε καθε επαγωγικο συνολο. Εστω οτι το $C$ ειναι επαγωγικο συνολο. Τοτε, απο την προταση 1, η τομη $A\cap C$ ειναι επισης επαγωγικο συνολο και περιεχεται στο $A$. Εχουμε λοιπον οτι $\omega\subseteq A\cap C$, αρα $\omega\subseteq C$.

Το συνολο $\omega$ ειναι το μοναδικο επαγωγικο συνολο που περιεχεται σε ολα τα επαγωγικα συνολα. Πραγματικα, αν δυο συνολα $\alpha,\beta$ ειχαν αυτη την ιδιοτητα, τοτε πρεπει να ισχυει $\alpha\subseteq\beta$ και $\beta\subseteq\alpha$, αρα $\alpha=\beta$.■

Ορισμος. Το $\omega$, που ειναι το μικροτερο επαγωγικο συνολο, το λεμε *συνολο φυσικων αριθμων*. Τα στοιχεια του $\omega$ τα λεμε *φυσικους αριθμους*.

Εχουμε προφανως οτι $0\in\omega$ και για καθε $n\in\omega$ ισχυει $n'\in\omega$. Αργοτερα θα δειξουμε οτι το συνολο $\omega$ ικανοποιει και τα υπολοιπα αιτηματα του Peano (σελιδα 44). Τα παρακατω θεωρηματα εκφραζουν τη θεμελιωδη ιδιοτητα των φυσικων αριθμων, τη λεγομενη Αρχη Επαγωγης.

Θεωρημα 1. Για καθε υποσυνολο $X$ του $\omega$

$$0\in X \wedge (\forall n)(n\in X \to n'\in X) \to X=\omega,$$

δηλαδη καθε επαγωγικο υποσυνολο του $\omega$ ειναι ισο με ολο το $\omega$.

Η Αρχη Επαγωγης ειναι ενα πανισχυρο μεσο. Χρησιμοποιειται σε αποδειξεις θεωρηματων και στους λεγομενους αναδρομικους ορισμους.

Ειναι γνωστη και μια διαφορετικη διατυπωση της Αρχης Επαγωγης.

Θεωρημα 2. Εστω $\Phi$ τυπος. Εστω οτι ισχυει $\Phi(0)$ και $(\forall n\in\omega)\Phi(n) \to \Phi(n')$. Τοτε $(\forall n\in\omega)\Phi(n)$.

Αποδειξη: Θετουμε $X=\{n\in\omega:\Phi(n)\}$. Ευκολα ελεγχουμε οτι το $X$ ειναι επαγωγικο υποσυνολο του $\omega$. Απο το θεωρημα 1 εχουμε $X=\omega$, δηλαδη $(\forall n\in\omega)\Phi(n)$.■

Θα αποδειξουμε τωρα μερικες ιδιοτητες του συνολου $\omega$.

Προταση 3. Τα στοιχεια των φυσικων αριθμων ειναι φυσικοι αριθμοι, δηλαδη

$$n\in\omega \wedge x\in n \to x\in\omega.$$

Αποδειξη: Θεωρουμε το συνολο $X=\{n\in\omega:(\forall y\in n)y\in\omega\}$. Θα αποδειξουμε οτι το $X$ ειναι ισο $\omega$. Για το τελευταιο, αρκει να δειξουμε οτι το $X$ ειναι επαγωγικο. Εχουμε οτι $0\in X$, αφου $(\forall y\in 0)y\in\omega$. Ας υποθεσουμε οτι $n\in X$. Θα αποδειξουμε οτι τοτε $n'\in X$. Εστω $y\in n'$, δηλαδη $y\in n\cup\{n\}$. Τοτε $y\in n$ ή $y=n$. Αν

$y\in n$; τοτε λογω της υποθεσης οτι $n\in X$, εχουμε $y\in\omega$. Αν $y=n$, τοτε προφανως $y\in\omega$.

Το συνολο $X$, ως επαγωγικο υποσυνολο του $\omega$, ισουται με $\omega$. Αποδειξαμε λοιπον οτι για καθε φυσικο αριθμο, ολα τα στοιχεια του ειναι φυσικοι αριθμοι. ∎

<u>Πορισμα</u>. Καθε στοιχειο του $\omega$ ειναι υποσυνολο του, δηλαδη

$$\forall n(n\in\omega \rightarrow n\subseteq\omega).$$

<u>Προταση 4</u>. Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους $n,m$ ισχυει:

$$n\in m \rightarrow n\subseteq m.$$

<u>Αποδειξη</u>: Αρκει να αποδειχθει οτι το συνολο $X=\{n\in\omega : \forall m(m\in n \rightarrow m\subseteq n)\}$ ειναι επαγωγικο (ασκηση 3.2). ∎

<u>Προταση 5</u>. Για καθε φυσικο αριθμο $n$ ισχυει: $n\notin n$.

<u>Αποδειξη</u>: Θα χρησιμοποιησουμε το θεωρημα 2. Εστω $\Phi(x)$ ο τυπος $x\notin x$. Εχουμε προφανως $\Phi(0)$. Ας υποθεσουμε οτι ισχυει $\Phi(x)$, δηλαδη οτι $x\notin x$. Θα δειξουμε οτι τοτε $x'\notin x'$. Αν ειχαμε $x'\in x'$, δηλαδη $x\cup\{x\}\in x\cup\{x\}$, τοτε $x\cup\{x\}\in x$ ή $x\cup\{x\}=x$. Αν ηταν $x\cup\{x\}\in x$, τοτε απο την παραπανω προταση, θα ειχαμε οτι $x\cup\{x\}\subseteq x$. Απο αυτο επεται οτι $x\in x$, που λογω της υποθεσης $x\notin x$ ειναι αδυνατο. Αν ηταν $x\cup\{x\}=x$, παλι επισης θα ειχαμε $x\in x$. Η υποθεση $x'\in x'$ μας οδηγησε σε ατοπο. Πρεπει λοιπον να ισχυει $x'\notin x'$.

Αποδειξαμε οτι $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x')$. Απο την Αρχη Επαγωγης επεται λοιπον οτι $(\forall x\in\omega)x\notin x$. ∎

<u>Προταση 6</u>. Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους $n,m$ ισχυει:

$$n'=m' \rightarrow n=m.$$

<u>Αποδειξη</u>: Εστω οτι $n\cup\{n\}=m\cup\{m\}$. Τοτε $n\in m\cup\{m\}$, αρα $n\in m$ ή $n=m$. Σε καθε περιπτωση εχουμε $n\subseteq m$. Ομοια, $m\in n\cup\{n\}$ και συνεπως $m\subseteq n$. Επεται οτι $n=m$. ∎

Η τελευταια προταση μας λεει οτι το συνολο $\omega$ ικανοποιει το αιτημα iv του Peano. Ειναι προφανες οτι ισχυει και το αιτημα iii, αφου το κενο συνολο δεν ειναι επομενο κανενος συνολου. Βλεπουμε λοιπον οτι το $\omega$ ικανοποιει ολα τα αιτηματα του Peano.

<u>Προταση 7</u>. Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους $n,m$ ισχυει:

$$n\subseteq m \leftrightarrow n\in m\vee n=m.$$

<u>Αποδειξη</u>: Το $(\leftarrow)$ ειναι φανερο. Για να αποδειξουμε το $(\rightarrow)$, θεωρουμε τον τυπο $\Phi(m)$: $\forall n(n\subseteq m \rightarrow n\in m\vee n=m)$.

Επειδη για καθε $n$ εχουμε $n\subseteq 0 \rightarrow n=0$, βλεπουμε οτι ισχυει το $\Phi(0)$. Υποθετουμε οτι ισχυει το $\Phi(m)$, δηλαδη οτι $\forall n(n\subseteq m \rightarrow n\in m\vee n=m)$. Θα αποδειξουμε οτι τοτε ισχυει και το $\Phi(m')$. Ας υποθεσουμε οτι $n\subseteq m\cup\{m\}$. Εξεταζουμε δυο περιπτωσεις.

Περιπτωση 1: $m\notin n$. Ευκολα ελεγχουμε οτι τοτε ισχυει $n\subseteq m$. Λογω της υποθεσης $\Phi(m)$, εχουμε $n\in m\vee n=m$. Επεται οτι $n\in m'$.

Περιπτωση 2: $m\in n$. Τοτε $m\subseteq n$, συνεπως $m\cup\{m\}\subseteq n$. Επειδη ειχαμε $n\subseteq m\cup\{m\}$, προκυπτει οτι $n=m'$.

Αποδειξαμε λοιπον οτι για καθε $n\in\omega$: $n\subseteq m' \longrightarrow n\in m'\vee n=m'$, δηλαδη οτι ισχυει το $\Phi(m')$.

Απο την Αρχη Επαγωγης συμπεραινουμε οτι για καθε $m\in\omega$ ισχυει $\Phi(m)$, που αποδεικνυει το ζητουμενο. ■

Πορισμα. Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους $m,n$ ισχυει:

$$n\in m \longleftrightarrow n\subsetneq m.$$

Θα ορισουμε τωρα μια χρησιμη συνολοθεωρητικη εννοια.

Ορισμος. Ενα συνολο $A$ λεγεται μεταβατικο, αν τα στοιχεια των στοιχειων του $A$ ειναι επισης στοιχεια του $A$. Το $A$ ειναι δηλαδη μεταβατικο, οταν για οποιαδηποτε $x,y$:

$$y\in x\wedge x\in A \longrightarrow y\in A.$$

Παραδειγμα 1. Το συνολο $\omega$ ειναι μεταβατικο, επειδη τα στοιχεια των φυσικων αριθμων ειναι φυσικοι αριθμοι (προταση 3). Απο την προταση 4 επεται οτι καθε φυσικος αριθμος ειναι μεταβατικο συνολο.

Η παρακατω προταση εκφραζει μερικους χαρακτηρισμους των μεταβατικων συνολων.

Προταση 8. Εστω $X$ συνολο. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:

i) Το $X$ ειναι μεταβατικο.

ii) Καθε στοιχειο του $X$ ειναι υποσυνολο του, δηλαδη $\forall z(z\in X \longrightarrow z\subseteq X)$.

iii) $X\subseteq \mathcal{P}X$.

iv) $\bigcup X\subseteq X$.

## 3.3 Διαταξη των φυσικων αριθμων.

Οι φυσικοι αριθμοι οριστηκαν ετσι ωστε καθενας ειναι ισος με το συνολο των προηγουμενων του. Η διαισθητικα γνωστη γνησια ανισοτητα των φυσικων αριθμων ταυτιζεται δηλαδη με τη σχεση του "ανηκειν". Θα δουμε στη συνεχεια οτι η σχεση

$$\in_\omega=\{\langle m,n\rangle : m\in n\}$$

ειναι γνησια γραμμικη διαταξη του συνολου $\omega$ των φυσικων αριθμων.

**Ορισμος.** Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m,n θετουμε:

$$m<n \leftrightarrow m\in n.$$

Το m<n διαβαζεται "m ειναι μικροτερο απο n".

Ορισαμε λοιπον οτι το m ειναι μικροτερο απο n εαν και μονον εαν m ειναι στοιχειο του n, δηλαδη εαν και μονον εαν το ζευγος <m,n> ανηκει στη σχεση $\in_\omega$.

**Θεωρημα 3.** Η σχεση $\in_\omega$ ειναι γνησια γραμμικη διαταξη του συνολου ω.

Αποδειξη: i) Η σχεση $\in_\omega$ ειναι αντιανακλαστικη, διοτι, λογω της προτασης 3, εχουμε $n\notin n$ για καθε $n\in\omega$.

ii) Η σχεση $\in_\omega$ ειναι αντισυμμετρικη, δηλαδη για οποιουσδηποτε m,n εχουμε $m\in n \to n\notin m$. Πραγματικα, αν ηταν $m\in n$ και $n\in m$, τοτε $m\subseteq n$ και $n\subseteq m$. Θα ειχαμε τοτε οτι m=n και συνεπως $m\in m$ που ειναι αδυνατο.

iii) Η σχεση $\in_\omega$ ειναι μεταβατικη. Εστω $k\in m$ και $m\in n$. Τοτε, επειδη το συνολο n ειναι μεταβατικο, εχουμε οτι $k\in n$.

iv) Η σχεση $\in_\omega$ ικανοποιει την τριχοτομικη ιδιοτητα, δηλαδη για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους ισχυει:

$$m\in n\vee m=n\vee n\in m.$$

Για να το αποδειξουμε, θεωρουμε τα συνολα $T_m=\{n\in\omega: m\in n\vee m=n\vee n\in m\}$, οπου $m\in\omega$. Για το ζητουμενο, αρκει να δουμε οτι για καθε $m\in\omega$ εχουμε $T_m=\omega$. Θα το αποδειξουμε με επαγωγη.

Για καθε n εχουμε $0\subseteq n$. Απο την προταση 7, επεται οτι $0\in n\vee 0=n$. Αυτο σημαινει οτι για καθε $n\in\omega$ εχουμε $n\in T_0$, δηλαδη $T_0=\omega$.

Ας υποθεσουμε οτι $T_m=\omega$. Για οποιοδηποτε $n\in\omega$, εχουμε $m\in n\vee m=n\vee n\in m$. Αν $n\in m$ η $m=n$, τοτε $n\in m'$. Αν $m\in n$, τοτε $m\cup\{m\}\subseteq n$, δηλαδη $m'\subseteq n$. Με βαση την προταση 7, εχουμε οτι $m'\in n\vee m'=n$. Σε καθε περιπτωση ισχυει λοιπον οτι $m'\in n\vee m'=n\vee n\in m'$. Δειξαμε οτι για καθε $n\in\omega$ ισχυει $n\in T_{m'}$, δηλαδη $T_{m'}=\omega$.

Απο την Αρχη Επαγωγης επεται οτι για καθε φυσικο αριθμο m εχουμε $T_m=\omega$. Συνεπως, για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m,n ισχυει:

$$m\in n\vee m=n\vee n\in m.\#$$

**Παρατηρηση.** Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m,n, η διαζευξη

$$m<n\vee m=n\vee n<m$$

ειναι αποκλειστικη, δηλαδη ικανοποιειται ακριβως ενας απο τους ορους m<n, m=n, n<m.

Οπως ειδαμε στο κεφαλαιο 2, για καθε γνησια διαταξη οριζεται μια αντιστοιχη ασθενης διαταξη. Την ασθενη διαταξη του συνολου ω των φυσικων αριθμων, που αντιστοιχει στη διαταξη <, τη συμβολιζουμε με ≤. Αυτη οριζεται ως εξης:

$$m \le n \leftrightarrow m \in n \vee m = n,$$

για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n. Το $m \le n$ διαβαζεται "m μικροτερος ή ισος n".

Η ακολουθη προταση, που ειναι αναδιατυπωση της προτασης 5, λεει οτι η ασθενης διαταξη των φυσικων αριθμων ταυτιζεται με τη σχεση του εγκλεισμου $\subseteq_\omega$.

<u>Προταση 9.</u> Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n ισχυει:

$$m \le n \leftrightarrow m \subseteq n.$$

Ομοια, η γνησια διαταξη < των φυσικων αριθμων ταυτιζεται με το γνησιο εγκλεισμο περιορισμενο στο συνολο ω, δηλαδη τη σχεση

$$\subset_\omega = \{\langle m, n \rangle \in \omega^2 : m \subset n\}.$$

Το πορισμα στη σελιδα 48 μπορει να διατυπωθει ως εξης:

<u>Προταση 10.</u> Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n ισχυει:

$$m < n \leftrightarrow m \subset n.$$

Απο τα παραπανω και απο την προταση 19 του κεφαλαιου 2 (σελ. 35), εχουμε αμεσως την ακολουθη προταση.

<u>Προταση 11.</u> Η σχεση $\subseteq_\omega$ ειναι γραμμικη διαταξη του συνολου ω.

<u>Παρατηρηση.</u> Στο διατεταγμενο συνολο των φυσικων αριθμων, το 0 ειναι το μικροτερο στοιχειο, αφου για καθε $n \in \omega$ ισχυει: $0 \le n$. Δεν υπαρχει μεγιστο στοιχειο, διοτι για καθε $n \in \omega$ εχουμε $n < n'$.

Θα σημειωσουμε μερικες ακομα ιδιοτητες της διαταξης των φυσικων αριθμων.

<u>Προταση 12.</u> Ο φυσικος αριθμος $n'$ ειναι ο αμεσως επομενος του n, δηλαδη δεν υπαρχει φυσικος αριθμος m τετοιος ωστε $n < m$ και $m < n'$.

<u>Αποδειξη:</u> Ας υποθεσουμε οτι για καποιο $n \in \omega$ υπαρχει x τετοιο ωστε $n < x$ και $x < n'$. Τοτε $n \subseteq x$ και $x \subseteq n \cup \{n\}$. Διακρινουμε δυο περιπτωσεις.

<u>Περιπτωση 1:</u> $n \in x$. Τοτε $n \cup \{n\} \subseteq x$ και συνεπως $x = n'$, που ειναι αδυνατο.

<u>Περιπτωση 2:</u> $n \notin x$. Τοτε, απο το $x \subseteq n \cup \{n\}$, εχουμε $x \subseteq n$. Αρα $x = n$. Ατοπο.

Βλεπουμε λοιπον οτι, για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n ειναι αδυνατο να ισχυει $n < m \wedge m < n'$. ∎

Ευκολα αποδεικνυονται οι επομενες προτασεις (ασκησεις 3.10, 3.11).

<u>Προταση 13.</u> Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n ισχυει:

i) $m < n \leftrightarrow m' \le n$, ii) $m < n \leftrightarrow m' < n'$.

iii) $m<n' \leftrightarrow m\leq n$, iv) $m\leq n' \leftrightarrow m\leq n \vee m=n'$.

<u>Προταση 14.</u> Καθε φυσικος αριθμος διαφορετικος απο το 0 ειναι επομενος καποιου φυσικου αριθμου.

## 3.4 <u>Η Αρχη Ελαχιστου</u>

Θα αποδειξουμε τωρα ενα σημαντικο θεωρημα για τους φυσικους αριθμους που ειναι γνωστο ως Αρχη Ελαχιστου.

<u>Θεωρημα 4.</u> Σε καθε μη κενο υποσυνολο του $\omega$ υπαρχει ελαχιστο στοιχειο. Δηλαδη αν $X\subseteq\omega$, $X\neq\emptyset$, τοτε υπαρχει $n\in\omega$ τετοιος ωστε

$$n\in X \wedge \forall m(m<n \longrightarrow m\notin X).$$

<u>Αποδειξη:</u> Ας παρατηρησουμε οτι το $n$ ειναι ελαχιστο στοιχειο του συνολου $X$ εαν και μονον εαν $n\in X \wedge n\cap X=\emptyset$. Θα αποδειξουμε οτι αν $X$ ειναι υποσυνολο του $\omega$ που δεν εχει ελαχιστο στοιχειο, τοτε το $X$ ειναι κενο. Αυτο ειναι ισοδυναμο με το ζητουμενο.

Θετουμε $Y=\{n\in\omega : n\cap X=\emptyset\}$. Αν το $X$ δεν εχει ελαχιστο στοιχειο, τοτε τα συνολα $X, Y$ ειναι ξενα. Πραγματικα, αν υπηρχε $n\in X\cap Y$, τοτε θα ειχαμε $n\in X$ και $n\cap X=\emptyset$, δηλαδη το $n$ θα ηταν ελαχιστο στοιχειο του συνολου $X$.

Επειδη $X\cap Y=\emptyset$, για να εχουμε $X=\emptyset$, αρκει να δειξουμε οτι $Y=\omega$. Θα το αποδειξουμε με επαγωγη. Ειναι φανερο οτι $0\in Y$, αφου $\emptyset\cap X=\emptyset$.

Ας υποθεσουμε οτι $n\in Y$. Τοτε $n\cap X=\emptyset$. Αν ειχαμε $n\in X$, τοτε το $n$ θα ηταν ελαχιστο στοιχειο του $X$. Πρεπει λοιπον να ισχυει $n\notin X$. Συνεπως, $(n\cup\{n\})\cap X=\emptyset$. Αυτο σημαινει οτι $n'\in Y$.

Απο την Αρχη Επαγωγης εχουμε $Y=\omega$ και επομενως $X=\emptyset$.∎

<u>Ορισμος.</u> Αν $X\subseteq\omega$, $X\neq\emptyset$, τοτε ο μικροτερος φυσικος αριθμος που ανηκει στο $X$ συμβολιζεται $\min X$.

Η Αρχη Ελαχιστου διατυπωνεται ισοδυναμα και ως εξης:

<u>Θεωρημα 5.</u> Εστω $\Phi$ τυπος. Ας υποθεσουμε οτι ισχυει $(\exists n\in\omega)\Phi(n)$. Τοτε

$$(\exists n\in\omega)(\Phi(n)\wedge\forall k(k<n \longrightarrow \neg\Phi(k))).$$

<u>Αποδειξη:</u> Θετοντας $X=\{m\in\omega:\Phi(m)\}$, λογω της υποθεσης $(\exists n\in\omega)\Phi(n)$, εχουμε $X\neq\emptyset$. Εστω $n=\min X$. Εχουμε οτι $n\in X$ και για καθε $k<n$ ισχυει: $k\notin X$. Αυτο σημαινει ακριβως οτι $\Phi(n)\wedge\forall k(k<n \longrightarrow \neg\Phi(k))$.∎

Τα επομενα δυο θεωρηματα εκφραζουν τη λεγομενη ισχυρη μορφη της Αρχης Επαγωγης.

<u>Θεωρημα 6.</u> Εστω $X\subseteq\omega$. Ας υποθεσουμε οτι για καθε $n\in\omega$, απο το γεγονος οτι ολοι οι φυσικοι αριθμοι μικροτεροι απο $n$ ανηκουν στο $X$, επεται οτι

$n\in X$. Τοτε $X=\omega$. Δηλαδη

$$\forall n(n\subseteq X \longrightarrow n\in X) \longrightarrow X=\omega.$$

Αποδειξη: Εστω οτι $X\subseteq\omega$ εχει την ιδιοτητα $\forall n(n\subseteq X \longrightarrow n\in X)$. Ας υποθεσουμε οτι $X\neq\omega$. Τοτε $\omega-X\neq\emptyset$. Εστω οτι $n$ ειναι το ελαχιστο στοιχειο του $\omega-X$. Εχουμε οτι $n\in\omega-X$ και $n\cap(\omega-X)=\emptyset$. Αυτο σημαινει οτι $n\notin X$ και $n\subseteq X$, που δεν ειναι δυνατο λογω της υποθεσης του θεωρηματος. ■

Ισοδυναμο με το παραπανω θεωρημα ειναι το ακολουθο.

Θεωρημα 7. Εστω $\Phi$ τυπος. Εστω οτι για καθε $n\in\omega$ ισχυει:

$$(\forall m\in n)\Phi(m) \longrightarrow \Phi(n).$$

Τοτε $(\forall n\in\omega)\Phi(n)$.

Αποδειξη: Θετουμε $X=\{m\in\omega: \Phi(m)\}$. Για οποιοδηποτε $n\in\omega$, αν $n\subseteq X$, εχουμε $(\forall m\in n)\Phi(m)$. Επεται οτι $\Phi(n)$, δηλαδη $n\in X$. Το συνολο $X$ ικανοποιει τις υποθεσεις του προηγουμενου θεωρηματος. Πρεπει λοιπον να ισχυει $X=\omega$. Επομενως $(\forall n\in\omega)\Phi(n)$. ■

## 3.5 Η Αρχη Αναδρομης.

Ορισμοι. Μια συναρτηση με πεδιο ορισμου το συνολο των φυσικων αριθμων λεγεται απειρη ακολουθια (ή απλως ακολουθια). Μια συναρτηση που εχει πεδιο ορισμου εναν φυσικο αριθμο λεγεται πεπερασμενη ακολουθια. Μηκος μιας ακολουθιας (πεπερασμενης ή απειρης) λεμε το πεδιο ορισμου της.

Τα παρακατω θεωρηματα εκφραζουν τη λεγομενη Αρχη Αναδρομης. Αυτη η Αρχη μας επιτρεπει να χρησιμοποιουμε επαγωγη στους ορισμους ακολουθιων. Τετοιου ειδους ορισμοι λεγονται αναδρομικοι. Οι ακολουθιες που οριζονται με βαση την Αρχη Αναδρομης λεγονται αναδρομικες και εμφανιζονται συχνα στα Μαθηματικα.

Θα διατυπωσουμε τρια θεωρηματα. Το πρωτο απο αυτα μας επιτρεπει να οριζουμε αναδρομικες ακολουθιες των οποιων καθε ορος, εκτος απο τον πρωτο, οριζεται συναρτησει του προηγουμενου. Το δευτερο θεωρημα ειναι γενικοτερο. Επιτρεπει ο $n'$ ορος να εξαρταται απο τον προηγουμενο και απο το $n$. Πιο ισχυρο ειναι το τελευταιο θεωρημα, το οποιο μας επιτρεπει να χρησιμοποιουμε στους αναδρομικους ορισμους παραμετρους απο ενα προκαθορισμενο συνολο.

Εφαρμογες της Αρχης Αναδρομης θα γνωρισουμε στην επομενη παραγραφο. Θα εφαρμοσουμε εκει τα θεωρηματα για να ορισουμε τις πραξεις προσθεσης και πολλαπλασιασμου των φυσικων αριθμων.

Θα αποδειξουμε μονο το θεωρημα 8. Οι αποδειξεις των αλλων δυο ειναι ομοιες, αν και τεχνικα λιγο δυσκολοτερες.

<u>Θεωρημα 8</u>. Εστω $A$ συνολο. Εστω $a\in A$ και $h: A \longrightarrow A$. Υπαρχει ακριβως μια συναρτηση $f: \omega \longrightarrow A$ τετοια ωστε:

i) $f(0)=a$,

ii) $(\forall n\in\omega)f(n')=h(f(n))$.

<u>Θεωρημα 9</u>. Εστω $A$ συνολο. Εστω $a\in A$ και $h: A\times\omega \longrightarrow A$. Υπαρχει ακριβως μια συναρτηση $f: \omega \longrightarrow A$ τετοια ωστε:

i) $f(0)=a$,

ii) $(\forall n\in\omega)f(n')=h(f(n),n)$.

<u>Θεωρημα 10</u>. Εστω $A,P$ συνολα. Εστω $a: P \longrightarrow A$ και $h: A\times\omega\times P \longrightarrow A$. Υπαρχει ακριβως μια συναρτηση $f: P\times\omega \longrightarrow A$ τετοια ωστε:

i) $(\forall x\in P)f(x,0)=a(x)$,

ii) $(\forall x\in P)(\forall n\in\omega)f(x,n')=h(f(x,n),n,x)$.

<u>Αποδειξη του θεωρηματος 8</u>: Θα αποδειξουμε πρωτα τη μοναδικοτητα. Εστω οτι $f_1, f_2$ ικανοποιουν το θεωρημα και ειναι διαφορετικες. Τοτε για καποιο $k\in\omega$ ισχυει $f_1(k)\neq f_2(k)$. Εστω οτι $m$ ειναι ο ελαχιστος φυσικος με αυτη την ιδιοτητα, δηλαδη $f_1(m)\neq f_2(m)$ και για $k<m$: $f_1(k)=f_2(k)$. Επειδη $f_1(0)=a=f_2(0)$, πρεπει να ειναι $m\neq 0$. Υπαρχει λοιπον $n$ ωστε $m=n'$. Εχουμε $f_1(n)=f_2(n)$, διοτι $n<m$. Επεται οτι $f_1(n')=h(f_1(n))=h(f_2(n))=f_2(n')$, δηλαδη $f_1(m)=f_2(m)$. Ατοπο. Βλεπουμε λοιπον οτι η συναρτηση $f$ που ικανοποιει το θεωρημα, αν υπαρχει, ειναι μοναδικη.

Για να αποδειξουμε την υπαρξη της ζητουμενης συναρτησης, θεωρουμε το συνολο $X=\{g:\Phi(g)\}$, οπου $\Phi(g)$ ειναι ο τυπος:

"$g$ ειναι πεπερασμενη ακολουθια" $\wedge\ g\neq\emptyset\ \wedge\ \mathrm{rng}(g)\subseteq A\ \wedge$

$\wedge\ g(0)=a\ \wedge\ \forall k(k'\in\mathrm{dom}(g) \longrightarrow g(k')=h(g(k)))$

Το συνολο $X$ δεν ειναι κενο, αφου π.χ. $g_0=\{\langle 0,a\rangle\}$, $g_1=\{\langle 0,a\rangle,\langle 1,h(a)\rangle\}$ ειναι στοιχεια του.

Παρατηρουμε οτι, αν $F\in X$, $G\in X$ και $n\in\mathrm{dom}(F)$, $n\in\mathrm{dom}(G)$, τοτε ισχυει: $F(n)=G(n)$. Αυτο αποδεικνυεται ακριβως οπως η μοναδικοτητα της $f$.

Απο το παραπανω επεται οτι αν $F\in X$ και $G\in X$, τοτε $F\subseteq G$ η $G\subseteq F$, δηλαδη η $G$ ειναι επεκταση της $F$ ή η $F$ ειναι επεκταση της $G$. Συνεπως, η ενωση $\bigcup X$ ειναι συναρτηση και μαλιστα ειναι επεκταση καθε ακολουθιας που ανηκει στο συνολο $X$ (ασκηση 2.14).

Θετουμε $f=\bigcup X$ και εχουμε $f=\{\langle n,s\rangle:(\exists g\in X)g(n)=s\}$. Το πεδιο τιμων της $f$ περιεχεται προφανως στο $A$. Πεδιο ορισμου της $f$ ειναι η ενωση των πεδιων ορισμου των στοιχειων του X. Θα δειξουμε οτι dom(f)=ω. Αρκει να αποδειξουμε οτι για καθε $n\in\omega$, αυτο ανηκει στο πεδιο ορισμου μιας $g\in X$. Θα το αποδειξουμε με επαγωγη. Εχουμε $0\in dom(g_0)$, οπου $g_0=\{<0,a>\}$. Ας υποθεσουμε οτι για μια ακολουθια $g\in X$, εχουμε $n\in dom(g)$ και $n'\notin dom(g)$. Θετουμε $g'=g\cup\{<n,h(g(n))>\}$. Προφανως $n'\in dom(g')$. Ευκολα βλεπουμε οτι $g'\in X$ (ειχαμε $\Phi(g)$ και ελεγχουμε οτι ισχυει $\Phi(g')$). Αποδειξαμε λοιπον οτι $f:\omega \longrightarrow a$.

Η αποδειξη του θεωρηματος θα ολοκληρωθει, αφου ελεγξουμε οτι η f ικανοποιει τις συνθηκες i και ii. Επειδη η ακολουθια $g_0=\{<0,a>\}$ ανηκει στο X και η f ειναι επεκταση της, εχουμε f(0)=a. Για καθε $n\in\omega$ υπαρχει $g\in X$ ωστε $n'\in dom(g)$. Επειδη $g(n')=h(g(n))$ και η f ειναι επεκταση της g, επεται οτι $f(n')=h(f(n))$.■

## 3.6 Αριθμητικη στο ω.

Θα ορισουμε παρακατω τις πραξεις προσθεσης + και πολλαπλασιασμου στους φυσικους αριθμους. Οι ορισμοι ειναι αναδρομικοι ως προς μια απο τις μεταβλητες. Η αλλη μεταβλητη ειναι παραμετρος.

Ορισμος. Για φυσικους αριθμους m,n οριζουμε:

i) $m+0=m$,

ii) $m+n'=(m+n)'$.

Αποδεικνυεται οτι η προσθεση + ειναι αντιμεταθετικη, προσεταιριστικη και εχει ουδετερο στοιχειο το 0 (ασκησεις 3.17,3.18).

Προταση 15. Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους k,m,n ισχυει:

i) $m+n=n+m$,

ii) $(k+m)+n=k+(m+n)$.

Η διαταξη των φυσικων αριθμων μπορει να οριστει μεσω της προσθεσης. Ευκολα αποδεικνυεται με επαγωγη η ακολουθη προταση (ασκηση 3.20).

Προταση 16. Για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m,n ισχυει:

i) $m\leq n \leftrightarrow (\exists k\in\omega)m+k=n$,

ii) $m\leq n \leftrightarrow (\exists k\in\omega)(k\neq 0\wedge m+k=n)$.

Παρατηρηση. Ξερουμε οτι αν $m\leq n$, τοτε υπαρχει $k\in\omega$ ωστε $m+k=n$. Απο το νομο διαγραφης για την προσθεση (ασκηση 3.18 ii), επεται οτι, για δοσμενα $m\leq n$, το k ειναι μοναδικο. Αυτο λεγεται διαφορα των n,m και συμβολιζεται $n\dot{-}m$. Εχουμε προφανως $m+(n\dot{-}m)=n$, για $m\leq n$.

Ορισμος. Για φυσικους αριθμους m,n οριζουμε:

i) $m\cdot 0=0$,

ii) $m\cdot n'=(m\cdot n)+m$.

Αντι για το $m\cdot n$, γραφουμε παραδοσιακα $mn$. Γραφουμε επισης $k\cdot m+n$ αντι του $(k\cdot m)+n$, δεχομαστε δηλαδη οτι το συμβολο $\cdot$ ειναι ισχυροτερο απο το $+$.

Αποδεικνυεται οτι ο πολλαπλασιασμος ειναι αντιμεταθετικος, προσεταιριστικος και εχει ουδετερο στοιχειο το 1. Αυτες και μερικες αλλες ιδιοτητες των πραξεων στους φυσικους αριθμους εκφραζουν οι ασκησεις 3.20, 3.21 και 3.22.

## 3.7 <u>Κωδικοποιηση ζευγων</u>.

Σ' αυτην την παραγραφο θα αποδειξουμε οτι υπαρχει μια συναρτηση που μετασχηματιζει αμφιμονοσημαντα (δηλαδη 1-1 και επι) το $\omega^2$ στο $\omega$. Μια τετοια συναρτηση μπορει να θεωρηθει αριθμηση (κωδικοποιηση) των ζευγων φυσικων αριθμων απο φυσικους αριθμους.

Ενα μερος της αποδειξης περιεχει το παρακατω λημμα (ασκηση 3.24).

<u>Λημμα</u>. Οριζουμε αναδρομικα τη συναρτηση $T:\omega \longrightarrow \omega$ ως εξης: $T(0)=0$, $T(n+1)=T(n)+n+1$. Η $T$ εχει τις παρακατω ιδιοτητες:

i) Ειναι γνησια αυξουσα, δηλαδη $(\forall m\in\omega)(\forall n\in\omega)(m<n \longrightarrow T(m)<T(n))$,

ii) Ειναι 1-1,

iii) $(\forall y\in\omega)(\exists x\in\omega)(T(x)\le y<T(x+1))$.

<u>Θεωρημα 11</u>. Υπαρχει μια συναρτηση $J:\omega\times\omega \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \omega$.

<u>Αποδειξη</u>: Για φυσικους αριθμους $m$ και $n$ θετουμε: $J(m,n)=T(m+n)+n$, οπου $T$ ειναι η συναρτηση του λημματος. Εχουμε $J:\omega^2 \longrightarrow \omega$.

Για να δειξουμε οτι η $J$ ειναι 1-1, ας υποθεσουμε οτι $\langle m,n\rangle\neq\langle k,l\rangle$.

<u>Περιπτωση 1</u>: $m+n=k+l$. Αν ηταν $J(m,n)=J(k,l)$, θα ειχαμε οτι $T(m+n)+n=T(k+l)+l$, αρα $n=l$. Επεται οτι $m=k$ και συνεπως $\langle m,n\rangle=\langle k,l\rangle$, που ειναι αδυνατο. Πρεπει λοιπον να ειναι $J(m,n)\neq J(k,l)$.

<u>Περιπτωση 2</u>: $m+n\neq k+l$. Μπορουμε να υποθεσουμε οτι $m+n<k+l$ (αν $k+l<m+n$ η αποδειξη ειναι ομοια). Τοτε $m+n+1\le k+l$, συνεπως $T(m+n+1)\le T(k+l)$. Επεται οτι $J(m,n)=T(m+n)+n<T(m+n)+(m+n+1)=T(m+n+1)\le T(k+l)\le T(k+l)+l=J(k,l)$. Εχουμε λοιπον $J(m,n)<J(k,l)$, αρα $J(m,n)\neq J(k,l)$.

Θα αποδειξουμε τωρα οτι η $J$ ειναι επι του $\omega$. Εστω $y\in\omega$. Ξερουμε απο το λημμα οτι υπαρχει $x\in\omega$ ωστε $T(x)\le y<T(x+1)$. Θετουμε $n=y\dot{-}T(x)$. Ας παρατηρησουμε οτι $n\le x$. Διαφορετικα θα ειχαμε $x+1\le n$ και συνεπως $T(x+1)=T(x)+x+1\le T(x)+n=y$. Αυτο ειναι αδυνατο, διοτι εχουμε $y<T(x+1)$. Επειδη

$n\leq x$, μπορουμε να θεσουμε $m=x\dot{-}n$. Ευκολα ελεγχουμε οτι

$$J(m,n)=T(m+n)+n=T(x)+n=y.$$

Για δοσμενο $y$, βρηκαμε λοιπον $m,n$ τετοια ωστε $J(m,n)=y$. ∎

## 3.8 Οι ακεραιοι, ρητοι και πραγματικοι αριθμοι.

Θα περιγραψουμε χονδρικα πως μπορουν να κατασκευαστουν τα συνολα των ακεραιων και των ρητων αριθμων. Θα δουμε επισης πως οριζονται οι αριθμητικες πραξεις και οι διαταξεις σ' αυτα τα συνολα.

Κατασκευη του συνολου των ακεραιων αριθμων.

Για $\langle m,n\rangle, \langle k,l\rangle \in \omega^2$, θετουμε:

$$\langle m,n\rangle R \langle k,l\rangle \leftrightarrow m+l=n+k.$$

Ευκολα ελεγχουμε οτι η σχεση $R\subseteq\omega^2\times\omega^2$ ειναι σχεση ισοδυναμιας (ασκηση 3.28). Το συνολο πηλικο $\omega^2/R$ το συμβολιζουμε $\mathbb{Z}$. Εχουμε δηλαδη

$$\mathbb{Z}=\{[\langle m,n\rangle]: m,n\in\omega\}.$$

Τα στοιχεια του $\mathbb{Z}$ τα λεμε ακεραιους αριθμους.

Συμβολιζουμε $+n=[\langle n,0\rangle]$ και $-n=[\langle 0,n\rangle]$, για $n\in\omega$. Βλεπουμε οτι

$$\mathbb{Z}=\{+n: n\in\omega\}\cup\{-n: n\in\omega\}.$$

Εχουμε $+0=-0$ και $+n\neq -n$ για $n\neq 0$. Ας παρατηρησουμε οτι

$$+n=\{\langle k,l\rangle: k=n+l\} \quad \text{και} \quad -n=\{\langle k,l\rangle: l=k+n\}.$$

Μπορουμε δηλαδη να θεωρησουμε το ζευγος $\langle k,l\rangle$ αντιπροσωπο της "διαφορας $k-l$".

Το συνολο των φυσικων αριθμων μπορει να θεωρηθει υποσυνολο του $\mathbb{Z}$. Πραγματικα, αν θεσουμε για $n\in\omega$: $F(n)=+n$, εχουμε $F:\omega \xrightarrow{1-1} \mathbb{Z}$. Ο φυσικος αριθμος $n$ ταυτιζεται (μεσω της $F$) με τον ακεραιο αριθμο $+n$. Θα γραφουμε λοιπον $n$ αντι για $+n$.

Για να εισαγουμε τις αριθμητικες πραξεις και τη διαταξη στο $\mathbb{Z}$, οριζουμε πρωτα στους αντιπροσωπους των κλασεων ισοδυναμιας δυο συναρτησεις: $+,\cdot$ και μια σχεση $<$. Για ζευγη $\langle m,n\rangle, \langle k,l\rangle\in\omega^2$ θετουμε:

i) $\langle m,n\rangle+\langle k,l\rangle=\langle m+k,n+l\rangle$,

ii) $\langle m,n\rangle\cdot\langle k,l\rangle=\langle mk+nl,ml+nk\rangle$,

iii) $\langle m,n\rangle<\langle k,l\rangle \leftrightarrow m+l<n+k$.

Ελεγχουμε οτι οι συναρτησεις $+,\cdot$ και η σχεση $<$ συμφωνουν με τη σχεση ισοδυναμιας $R$ (ασκηση 3.27). Μπορουμε επομενως να ορισουμε στις κλασεις ισοδυναμιας αντιστοιχες συναρτησεις προσθεσης $+$, πολλαπλασιασμου $\cdot$ και τη σχεση $<$. Η χρησιμοποιηση των ιδιων συμβολων δεν οδηγει σε παρεξηγησεις, αφου οι παρακατω ορισμοι ειναι ανεξαρτητοι απο την επιλογη των αντιπροσωπων. Θετουμε λοιπον:

i) $[<m,n>]+[<k,l>]=[<m+k,n+l>]$,

ii) $[<m,n>]\cdot[<k,l>]=[<mk+nl,ml+nk>]$,

iii) $[<m,n>]<[<k,l>] \leftrightarrow <m,n><<k,l> \leftrightarrow m+l<n+k$.

Τωρα μπορουν να αποδειχθουν ολοι οι γνωστοι απο την αριθμητικη νομοι για τις πραξεις στους ακεραιους αριθμους. Οι πραξεις αυτες ειναι επεκτασεις των αντιστοιχων πραξεων στους φυσικους αριθμους. Αποδεικνυεται επισης οτι η σχεση < ειναι η γνωστη απο τα Μαθηματικα γραμμικη διαταξη του $\mathbb{Z}$. Μερικες απο τις ιδιοτητες της διαταξης εκφραζει η ασκηση 3.28.

Στο $\mathbb{Z}$ οριζεται μια ακομα αριθμητικη πραξη, η διαφορα − (ασκηση 3.29), ετσι ωστε για οποιουσδηποτε ακεραιους x,y,z ισχυει:

$$x-y=z \leftrightarrow x=y+z.$$

<u>Κατασκευη του συνολου των ρητων αριθμων</u>.

Στο συνολο $U=\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ οριζουμε τη σχεση S με:

$$<i,j>S<k,l> \leftrightarrow il=jk.$$

Η S ειναι σχεση ισοδυναμιας στο U. Το συνολο πηλικο U/S το συμβολιζουμε $\mathbb{Q}$. Εχουμε δηλαδη

$$\mathbb{Q}=\{[<i,j>]: i\in\mathbb{Z}\wedge j\in\mathbb{Z}\wedge j\neq 0\}.$$

Τα στοιχεια του $\mathbb{Q}$ τα λεμε <u>ρητους αριθμους</u>.

Τον ρητο αριθμο $[<i,j>]$ τον συμβολιζουμε παραδοσιακα $\frac{i}{j}$. Εχουμε

$$\frac{i}{j}=\frac{k}{l} \leftrightarrow [<i,j>]=[<k,l>] \leftrightarrow <i,j>S<k,l> \leftrightarrow il=jk.$$

Οι ακεραιοι αριθμοι μπορουν να θεωρηθουν στοιχεια του $\mathbb{Q}$. Πραγματικα, αν θεσουμε $G(x)=[<x,1>]$, για καθε $x\in\mathbb{Z}$, οριζουμε μια συναρτηση G ωστε $G:\mathbb{Z}\xrightarrow{1-1}\mathbb{Q}$. Το συνολο $\mathbb{Z}$ ταυτιζεται λοιπον με ενα υποσυνολο του $\mathbb{Q}$. Αντι για $\frac{i}{1}$ θα γραφουμε απλως i.

Οι πραξεις στους ρητους αριθμους, που οριζουμε παρακατω, ειναι επεκτασεις των αντιστοιχων πραξεων στους ακεραιους αριθμους. Ομοια και η διαταξη < που θα ορισουμε στο $\mathbb{Q}$, περιορισμενη στους ακεραιους αριθμους, συμφωνει με τη διαταξη του $\mathbb{Z}$. Οπως και για τις πραξεις στους ακεραιους αριθμους, οριζουμε πρωτα αντιστοιχες συναρτησεις στους αντιπροσωπους των κλασεων ισοδυναμιας και ελεγχουμε οτι οι συναρτησεις αυτες συμφωνουν με τη σχεση ισοδυναμιας S (ασκηση 3.31).

Για $<i,j>,<k,l>\in U$ οριζουμε:

i) $\frac{i}{j}+\frac{k}{l}=\frac{il+jk}{jl}$, ii) $-\frac{i}{j}=\frac{-i}{j}$, iii) $\frac{i}{j}\cdot\frac{k}{l}=\frac{ik}{jl}$, Στο Q οριζεται μια ακομα πραξη, η διαιρεση :, ετσι ωστε:

$$x:y=z \leftrightarrow x=y\cdot z, \quad (\text{για } y\neq 0).$$

Αποδεικνυεται οτι ισχυουν οι γνωστοι νομοι της αριθμητικης των ρητων αριθμων.

Για να ορισουμε τη διαταξη στο Q, παρατηρουμε πρωτα οτι καθε ρητος αριθμος εχει αντιπροσωπο $<i,j>$ με $j>0$ (ασκηση 3.30). Για $\frac{i}{j}, \frac{k}{l} \in Q$, $j>0$, $l>0$, θετουμε:

$$\frac{i}{j} < \frac{k}{l} \leftrightarrow il<jk.$$

Ευκολα ελεγχεται οτι η σχεση < ειναι γνησια γραμμικη διαταξη του Q. Η διαταξη αυτη, περιορισμενη σε ακεραιους αριθμους συμφωνει με τη διαταξη του συνολου Z.

Η διαταξη των ρητων αριθμων εχει μια ιδιοτητα που δεν την εχουν οι διαταξεις των φυσικων και των ακεραιων αριθμων. Ειναι <u>πυκνη</u>, δηλαδη μεταξυ καθε δυο ρητων αριθμων υπαρχει τριτος (ασκηση 3.32).

Κλεινουμε το κεφαλαιο με λιγα λογια για τους πραγματικους αριθμους.

<u>Οι πραγματικοι αριθμοι.</u>

Υπαρχουν διαφοροι τροποι κατασκευης των πραγματικων αριθμων. Θα αναφερουμε εδω την κατασκευη του Cantor. Πιο γνωστος ειναι ενας αλλος τροπος, η λεγομενη μεθοδος τομων του Dedekind.

Θεωρουμε το συνολο X ολων των ακολουθιων $(a_n)_{n\in\omega}$ ρητων αριθμων που ικανοποιουν τη παρακατω συνθηκη (του Cauchy).

"Για καθε ρητο $\varepsilon>0$ υπαρχει $k\in\omega$ ωστε για καθε $m,n\in\omega$, $m>k$, $n>k$:

$$|a_n - a_m|<\varepsilon."$$

Στο συνολο X οριζεται μια σχεση ισοδυναμιας $\sim$ ως εξης:

$$(a_n)_{n\in\omega} \sim (b_n)_{n\in\omega} \leftrightarrow \lim(a_n - b_n)=0.$$

Το συνολο πηλικο $X/\sim$ συμβολιζεται R. Τα στοιχεια του R λεγονται <u>πραγματικοι αριθμοι</u>.

Η κλαση ισοδυναμιας $[(a_n)_{n\in\omega}]$ "παριστανει" τον πραγματικο αριθμο, στον οποιο συγκλινουν ολες οι ισοδυναμες με την $(a_n)_{n\in\omega}$ ακολουθιες ρητων αριθμων του συνολου X.

Το συνολο Q των ρητων αριθμων ταυτιζεται με ενα υποσυνολο του R. Στο R οριζονται καταλληλα οι τεσσερις αριθμητικες πραξεις, οι οποιες ειναι επεκτασεις των πραξεων στο Q. Αποδεικνυεται οτι ισχυουν οι νομοι της αριθμητικης για τους πραγματικους αριθμους. Η διαταξη του Q μπορει να επεκταθει στο $\mathbb{R}$. Η διαταξη του συνολου των πραγματικων αριθμων εχει μια ιδιοτητα που δεν την εχουν οι διαταξεις των συνολων $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$. Ειναι πληρης, δηλαδη:

"Για καθε μη κενο, ανω φραγμενο υποσυνολο του $\mathbb{R}$ υπαρχει ανω περας".

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

3.1 Αποδειξτε οτι η τομη δυο επαγωγικων συνολων ειναι επισης επαγωγικο συνολο. Αποδειξτε γενικοτερα οτι αν B ειναι μη κενο συνολο επαγωγικων συνολων, τοτε τομη $\bigcap B$ ειναι επισης επαγωγικο συνολο.

3.2 Αποδειξτε οτι το συνολο $X=\{n\in\omega : \forall m(m\in n \longrightarrow m\subseteq n)\}$ ειναι επαγωγικο.

3.3 Αποδειξτε οτι για καθε $n\in\omega$ ισχυει:

i) $\omega\notin n$, ii) $\omega\neq n$.

3.4 Αποδειξτε τους χαρακτηρισμους των μεταβατικων συνολων που εκφραζει η προταση 8 (σελιδα 48).

3.5 Αποδειξτε οτι η τομη δυο μεταβατικων συνολων ειναι μεταβατικο συνολο. Αποδειξτε γενικοτερα οτι αν X ειναι ενα μη κενο συνολο μεταβατικων συνολων, τοτε η τομη $\bigcap X$ ειναι επισης μεταβατικο συνολο.

3.6 Αποδειξτε οτι αν το συνολο A ειναι μεταβατικο, τοτε και τα συνολα $\bigcup A$, $\mathcal{P}A$ ειναι μεταβατικα.

3.7 Αποδειξτε οτι αν A ειναι μεταβατικο συνολο, τοτε το συνολο $A\cup\{A\}$ ειναι επισης μεταβατικο και ισχυει $\bigcup(A\cup\{A\})=A$.

3.8 Αποδειξτε οτι οτι αν X ειναι συνολο μεταβατικων συνολων, τοτε η ενωση $\bigcup X$ ειναι μεταβατικο συνολο.

3.9 Αποδειξτε αμεσα οτι η σχεση $\leq_\omega$ ειναι γραμμικη διαταξη του ω.

3.10 Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m,n ισχυει:

i) $m<n \leftrightarrow m'\leq n$, ii) $m<n \leftrightarrow m'<n'$,

iii) $m<n' \leftrightarrow m\leq n$, iv) $m\leq n' \leftrightarrow m\leq n \vee m=n'$.

3.11 Αποδειξτε οτι για καθε φυσικο αριθμο $n\neq 0$ υπαρχει φυσικος αριθμος m τετοιος ωστε $n=m'$.

3.12 Εστω $A\subseteq\omega$. Αποδειξτε οτι το $\bigcup A$ ειναι μεταβατικο υποσυνολο του ω. Αποδειξτε επισης οτι αν το συνολο $\bigcup A$ ειναι φραγμενο, τοτε ειναι φυσικος αριθμος και αν δεν ειναι φραγμενο, τοτε ειναι ισο με το ω.

3.13 Εστω A μη κενο υποσυνολο του ω. Εστω $n\in\omega$. Αποδειξτε οτι τα παρακατω ειναι ισοδυναμα:

i) $\forall k(k<n \longrightarrow k\notin A)$,

ii) $\forall k(k\in A \longrightarrow n\leq k)$,

iii) $n \cap A = \emptyset$,

iv) $n \subseteq \bigcap A$.

3.14 Αποδειξτε οτι οι δυο διατυπωσεις της Αρχης Ελαχιστου (θεωρημα 4 και θεωρημα 5) ειναι ισοδυναμες.

3.15 Εστω A μη κενο υποσυνολο του $\omega$. Αποδειξτε οτι αν το A ειναι ανω φραγμενο, τοτε εχει μεγιστο στοιχειο.

3.16 Εστω A μη κενο υποσυνολο του $\omega$. Αποδειξτε οτι τοτε $\bigcap A \in A$.

3.17 Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n ισχυει:

i) $m+1=m'$, ii) $0+n=n$,

iii) $m+n'=m'+n$, iv) $m+n=n+m$.

3.18 Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους k, m, n ισχυει:

i) $(k+m)+n=k+(m+n)$,

ii) $k+m=k+n \longrightarrow m=n$.

3.19 Αποδειξτε οτι η διαταξη των φυσικων αριθμων μπορει να οριστει με τη βοηθεια της προσθεσης (προταση 16).

3.20 Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n ισχυει:

i) $m\cdot 1=m$, ii) $m\cdot 2=m+m$,

iii) $0\cdot m=0$, iv) $n'\cdot m=n\cdot m+m$.

v) $m\cdot n=n\cdot m$.

3.21 Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους k, m, n ισχυει:

i) $k\cdot(m\cdot n)=(k\cdot m)\cdot n$, ii) $k\cdot(m+n)=k\cdot m+k\cdot n$,

iii) $m<n \longrightarrow m+k<n+k$, iv) $m<n \longrightarrow m\cdot k<n\cdot k$ (για $k\neq 0$),

v) $k\cdot m=k\cdot n \longrightarrow m=n$ (για $k\neq 0$).

3.22 Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους m, n ισχυει:

i) $m+n=0 \longrightarrow m=0 \wedge n=0$, iii) $m+n=1 \longrightarrow m=0\wedge n=1 \vee n=0\wedge n=1$,

ii) $m\cdot n=0 \longrightarrow m=0 \vee n=0$, iv) $m\cdot n=1 \longrightarrow m=1\wedge n=1$.

3.23 Δωστε εναν αναδρομικο ορισμο της εκθετικης συναρτησης. Αποδειξτε οτι το συνολο n εχει $2^n$ υποσυνολα.

3.24 Αποδειξτε το λημμα της σελιδας 55.

3.25 Βρειτε συναρτησεις $J_k$ ($k\in\omega$, $k\geq 2$), τετοιες ωστε $J_k:\omega^k \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \omega$.

3.26 Αποδειξτε οτι η σχεση $R\subseteq\omega^2\times\omega^2$, οπου $\langle m,n\rangle R\langle k,l\rangle \leftrightarrow m+l=n+k$, ειναι σχεση ισοδυναμιας. Αποδειξτε επισης οτι για καθε ζευγος φυσικων αριθμων $\langle k,l\rangle$ υπαρχει $n\in\omega$ τετοιο ωστε $\langle k,l\rangle R\langle n,0\rangle$ ή $\langle k,l\rangle R\langle 0,n\rangle$.

3.27 Εστω $R$ η σχεση της προηγουμενης ασκησης. Αποδειξτε οτι αν $\langle m,n\rangle R\langle m_1,n_1\rangle$ και $\langle k,l\rangle R\langle k_1,l_1\rangle$, τοτε:

i) $(\langle m,n\rangle+\langle k,l\rangle)R(\langle m_1,n_1\rangle+\langle k_1,l_1\rangle)$,

ii) $(\langle m,n\rangle\cdot\langle k,l\rangle)R(\langle m_1,n_1\rangle\cdot\langle k_1,l_1\rangle)$,

iii) $\langle m,n\rangle<\langle k,l\rangle \leftrightarrow \langle m_1,n_1\rangle<\langle k_1,l_1\rangle$.

3.28 Αποδειξτε οτι η διαταξη του $\mathbb{Z}$ ειναι γραμμικη και εχει τις παρακατω ιδιοτητες:

i) Για οποιαδηποτε $m,n\in\omega$: $+m<+n \leftrightarrow m<n$, $-m<-n \leftrightarrow n<m$, $-m\leq+n$,

ii) Δεν υπαρχει μεγιστο ουτε ελαχιστο στοιχειο,

iii) Για καθε στοιχειο υπαρχει το αμεσως επομενο και το αμεσως προηγουμενο.

3.29 Για καθε ζευγος φυσικων αριθμων $m,n$ θετουμε: $-[\langle m,n\rangle]=[\langle n,m\rangle]$. Αποδειξτε οτι για καθε $n\in\omega$ ισχυει: $-(+n)=-n$ και $-(-n)=+n$. Για $x,y\in\mathbb{Z}$ γραφουμε $x-y$ αντι του $x+(-y)$. Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε $x,y,z\in\mathbb{Z}$

$$x-y=z \leftrightarrow x=y+z.$$

Δειξτε επισης οτι η πραξη $-$ ειναι επεκταση της διαφορας $\dot{-}$ των φυσικων αριθμων. Αποδειξτε δηλαδη οτι για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους $m,n$: αν $m\leq n$, τοτε $n-m=n\dot{-}m$ και αν $n\leq m$, τοτε $n-m=-(m\dot{-}n)$.

3.30 Εστω $U=\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$. Δειξτε οτι οτι η σχεση $S\subseteq U^2$, που οριζεται απο

$$\langle i,j\rangle S\langle k,m\rangle \leftrightarrow im=jk,$$

ειναι σχεση ισοδυναμιας. Δειξτε οτι για καθε $i,j\in\mathbb{Z}$, $j\neq0$, υπαρχουν $k,m$ στο $\mathbb{Z}$, $0<m$ ωστε: $\langle i,j\rangle S\langle k,m\rangle$.

3.31 Για οποιαδηποτε $\langle m,n\rangle,\langle k,l\rangle\in U$ θετουμε:

i) $\langle m,n\rangle+\langle k,l\rangle=\langle ml+kn,nl\rangle$,

ii) $\langle m,n\rangle\cdot\langle k,l\rangle=\langle mk,nl\rangle$.

Αποδειξτε οτι αν $\langle m,n\rangle S\langle m_1,n_1\rangle$ και $\langle k,l\rangle S\langle k_1,l_1\rangle$, τοτε:

i) $(\langle m,n\rangle+\langle k,l\rangle)S(\langle m_1,n_1\rangle+\langle k_1,l_1\rangle)$,

ii) $(\langle m,n\rangle\cdot\langle k,l\rangle)S(\langle m_1,n_1\rangle\cdot\langle k_1,l_1\rangle)$.

3.32 Αποδειξτε οτι στο $\langle\mathbb{Q},<\rangle$ δεν υπαρχει ουτε μεγιστο ουτε ελαχιστο στοιχειο. Αποδειξτε επισης οτι αν $x,y\in\mathbb{Q}$, $x<y$, τοτε υπαρχει $z\in\mathbb{Q}$ ωστε

$$x<z \wedge z<y.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΟΙ ΠΛΗΘΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

## 4.1 Ισοπληθικα συνολα.

Ο προσδιορισμος του πληθους στοιχειων ενος συνολου ειναι ενα απο τα πιο σημαντικα προβληματα της θεωριας συνολων. Για τη μελετη αυτου του προβληματος θα μας ειναι χρησιμη μια βοηθητικη εννοια.

Ορισμος. Λεμε οτι δυο συνολα $X, Y$ ειναι ισοπληθικα (ή πληθικα ισοδυναμα) οταν υπαρχει συναρτηση $f: X \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} Y$. Αν τα συνολα $X, Y$ ειναι πληθικα ισοδυναμα, γραφουμε $X \sim Y$ και αν δεν ειναι, γραφουμε $X \not\sim Y$.

Ας σημειωσουμε μερικες σημαντικες ιδιοτητες της πληθικης ισοδυναμιας συνολων. Οι αποδειξεις τους ειναι απλες (ασκηση 4.1).

Προταση 1. Για οποιαδηποτε συνολα $A, B, C$ ισχυουν:

i) $A \sim A$,

ii) $A \sim B \longrightarrow B \sim A$,

iii) $A \sim B \wedge B \sim C \longrightarrow A \sim C$.

Παραδειγμα 1.

i) Για οποιαδηποτε $a \neq b$, εχουμε $\{0,1\} \sim \{a,b\}$. Ισοπληθικα με το $\{0,1\}$ ειναι τα συνολα που εχουν ακριβως δυο στοιχεια.

ii) Καθε δυο ανοιχτα διαστηματα στο $\mathbb{R}$ ειναι ισοπληθικα. Αρκει να αποδειξουμε οτι για καθε $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ ισχυει: $(0,1) \sim (a,b)$. Πραγματικα, η συναρτηση $f: (0,1) \longrightarrow (a,b)$, με $f(x)=(b-a)x+a$ για $x \in (0,1)$, ειναι 1-1 και επι του $(a,b)$. Εχουμε επισης οτι $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$, αφου η συναρτηση $f$ με $f(x)=\tan x$ (για $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) μετασχηματιζει το παραπανω διαστημα 1-1 και επι του $\mathbb{R}$. Επεται οτι καθε ανοιχτο διαστημα ειναι πληθικα ισοδυναμο με ολο το $\mathbb{R}$. Ομοια βλεπουμε οτι καθε ανοιχτη ημιευθεια στο $\mathbb{R}$ ειναι ισοπληθικη με ολο το $\mathbb{R}$, αφου η εκθετικη συναρτηση $g$ με $g(x)=e^x$ (για $x \in \mathbb{R}$), ειναι 1-1 και επι του $(0,+\infty)$.

iii) Θεωρουμε τη συναρτηση $f: \omega \longrightarrow \omega$, με $f(n)=2n$. Προφανως εχουμε οτι $f: \omega \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \{2n : n \in \omega\}$. Το συνολο των αρτιων φυσικων αριθμων ειναι λοιπον ισοπληθικο με το συνολο ολων των φυσικων αριθμων.

iv) Στην παραγραφο 3.7 γνωρισαμε μια συναρτηση $J: \omega \times \omega \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \omega$. Βλεπουμε λοιπον οτι $\omega \sim \omega^2$.

v) Για οποιοδηποτε συνολο $A$, το καρτεσιανο του τετραγωνο $A \times A$ και το συνολο $A^{\{0,1\}}$ των ακολουθιων μηκους 2 με τιμες στο $A$, ειναι ισοπληθικα

Πραγματικα, θετοντας $F(\langle a,b\rangle)=\{\langle 0,a\rangle,\langle 1,b\rangle\}$ για $a,b\in A$, οριζουμε μια συναρτηση $F: A\times A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} A^{\{0,1\}}$. Αυτο ειναι μια δικαιολογηση της διπλης σημασιας του συμβολισμου $A^2$.

vi) Το κενο συνολο δεν ειναι ισοπληθικο με κανενα αλλο. Αν $\emptyset\sim X$, τοτε $X=\emptyset$.

<u>Παρατηρηση</u>. Ας παρατηρησουμε οτι υπαρχουν συνολα που ειναι ισοπληθικα με καποια γνησια υποσυνολα τους.

## 4.2 <u>Η ιδεα του πληθικου αριθμου.</u>

Ο Cantor, για να εκφρασει τα πληθη στοιχειων των συνολων, εισηγαγε τους λεγομενους πληθικους αριθμους. Με καθε συνολο X συνδεεται ενα νεο αντικειμενο, που λεγεται <u>πληθικος του αριθμος</u> (ή <u>πληθαριθμος</u>) και συμβολιζεται με card(X) ή $\bar{\bar{X}}$. Απαιτειται οι πληθικοι αριθμοι να ικανοποιουν την ακολουθη συνθηκη:

(*) "Δυο συνολα εχουν τον ιδιο πληθικο αριθμο εαν και μονον εαν ειναι ισοπληθικα", δηλαδη για οποιαδηποτε συνολα X, Y:

$$\mathrm{card}(X)=\mathrm{card}(Y) \longleftrightarrow X\sim Y.$$

Για τα πεπερασμενα συνολα, που θα μελετησουμε στην επομενη παραγραφο, το πληθος στοιχειων εκφραζεται απο εναν φυσικο αριθμο. Θα ηταν ομως λαθος να δεχθουμε οτι ολα τα μη πεπερασμενα συνολα εχουν τον ιδιο πληθικο αριθμο. Και τουτο διοτι υπαρχουν απειρα συνολα που δεν ειναι πληθικα ισοδυναμα. Θα εχουμε λοιπον διαφορετικους πληθικους αριθμους για μη ισοπληθικα απειρα συνολα.

Εχουμε εδω μια κατασταση παρομοια μ' εκεινη των διατακτικων τυπων. Οι μαθηματικοι ειχαν επιφυλαξεις για την υπαρξη των αφηρημενων πληθικων αριθμων του Cantor (βλ. σελιδα 38). Σε καποια συστηματα για τη θεωρια συνολων οι πληθικοι αριθμοι εισαγονται αξιωματικα. Υπαρχουν δηλαδη ειδικα αξιωματα που εξασφαλιζουν την υπαρξη των πληθικων αριθμων. Ενας αλλος τροπος ειναι να θεωρησουμε ως πληθικο αριθμο ενος συνολου X την κλαση ολων των ισοπληθικων με το X συνολων. Τοτε, απο την προταση 1, βλεπουμε οτι ικανοποιειται το αιτημα (*) του Cantor. Αυτος ο ορισμος εχει ομως το εξης μειονεκτημα. Οι κλασεις που αναφεραμε δεν ειναι συνολα. Ετσι π.χ. η κλαση ολων των μονοσυνολων ειναι γνησια κλαση. Ευλογο θα ηταν λοιπον να μπορουν οι πληθικοι αριθμοι να οριστουν ως συνολα. Υπαρχουν τετοιοι ορισμοι. Εναν απ' αυτους θα δωσουμε στο κεφαλαιο 6, αφου πρωτα γνωρισουμε το αξιωμα επιλογης. Η θεωρια ZF δινει και εναν αλλον ορισμο που δεν κανει χρηση του αξιωματος επιλογης. Ειναι ομως εκτος υλης ενος εισαγωγικου μαθηματος, διοτι η κατανοηση του απαιτει προχωρημενες γνωσεις της θεωριας συνολων.

Θα προχωρησουμε τωρα στην μελετη των πληθικων αριθμων των συνολων υποθετοντας οτι αυτοι εχουν εισαχθει με καποιον απο τους παραπανω τροπους. Η χρηση των πληθικων αριθμων στη θεωρια συνολων δεν ειναι απολυτος απαραιτητη και μπορει να αποφευχθει τελειως. Τα σχετικα θεωρηματα μπορουν να διατυπωθουν με τη βοηθεια της εννοιας της πληθικης ισοδυναμιας συνολων. Χρησιμοποιωντας ομως τους πληθικους αριθμους, κανουμε τα θεωρηματα πιο ευαναγνωστα.

## 4.3 Πεπερασμενα συνολα.

Ορισμοι. Ενα συνολο λεγεται πεπερασμενο αν ειναι ισοπληθικο με καποιο φυσικο αριθμο. Τα μη πεπερασμενα συνολα λεγονται απειρα.

Παραδειγμα 2.

i) Το κενο συνολο ειναι πεπερασμενο, αφου $\emptyset=0$.

ii) Καθε μονοσυνολο $\{a\}$ ειναι πεπερασμενο, διοτι ειναι ισοπληθικο με τον φυσικο αριθμο 1.

iii) Καθε μη διατεταγμενο ζευγος $\{a,b\}$ με $a\neq b$ ειναι ισοπληθικο με τον φυσικο αριθμο 2 $(2=\{0,1\})$, αρα ειναι πεπερασμενο.

Παρατηρηση. Καθε φυσικος αριθμος ειναι ισος με το συνολο των μικροτερων απ' αυτων φυσικων αριθμων. Εχουμε δηλαδη $n=\{0,1,\ldots,n-1\}$. Το συνολο $n$, και καθε ισοπληθικο μ' αυτο συνολο, εχει "$n$ στοιχεια".

Οι φυσικοι αριθμοι εκφραζουν λοιπον τα πληθη στοιχειων για τα πεπερασμενα συνολα. Θα δικαιολογησουμε παρακατω οτι μπορουν να θεωρηθουν πληθικοι αριθμοι των πεπερασμενων συνολων. Πριν ομως ορισουμε τον πληθικο αριθμο $\mathrm{card}(X)$ ενος πεπερασμενου συνολου $X$ ως εκεινο το $n\in\omega$ για το οποιο $X\sim n$, πρεπει να ξερουμε οτι ενα τετοιο $n$ ειναι μοναδικο. Τοτε θα εχουμε οτι για τα πεπερασμενα συνολα ικανοποιειται το αιτημα (*) του Cantor.

Θα δικαιολογησουμε τα παραπανω, στηριζομενη στη λεγομενη Αρχη του Περιστερωνα του Dirichlet. Ενα μερος της αποδειξης της περιεχεται στο ακολουθο λημμα (ασκηση 4.3).

Λημμα. Εστω $n\in\omega$. Εστω $f:n \xrightarrow{1-1} n$. Τοτε $f:n \xrightarrow[\text{επι}]{} n$.

Θεωρημα 1. Κανενας φυσικος αριθμος δεν ειναι ισοπληθικος με γνησιο υποσυνολο του.

Αποδειξη: Εστω $n\in\omega$ και $X\subsetneq n$. Ας υποθεσουμε οτι $X\sim n$. Τοτε υπαρχει συναρτηση $f:n \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} X$. Εχουμε $f:n \xrightarrow{1-1} n$, και συμφωνα με το λημμα $f:n \xrightarrow[\text{επι}]{} n$. Αρα $X=n$.■

<u>Πορισμα 1</u>. Αν $n,m\in\omega$ και $n\sim m$, τοτε $n=m$.

<u>Πορισμα 2</u>. Αν $X\sim n$ και $X\sim m$ για $n,m\in\omega$, τοτε $n=m$.

<u>Πορισμα 3</u>. Αν το συνολο $X$ ειναι πεπερασμενο και $Y\subset X$, τοτε $X\not\sim Y$.

<u>Πορισμα 4</u>. Το συνολο $\omega$ των φυσικων αριθμων ειναι απειρο.

Τωρα μπορουμε να ορισουμε τους πληθικους αριθμους για τα πεπερασμενα συνολα.

<u>Ορισμος</u>. Αν το συνολο $X$ ειναι πεπερασμενο και $X\sim n$, τοτε θετουμε $\mathrm{card}(X)=n$.

Ευκολα ελεγχονται τα ακολουθα.

<u>Προταση 2</u>.

i) $\mathrm{card}(\emptyset)=0$,

ii) $(\forall n\in\omega)\ \mathrm{card}(n)=n$,

iii) Για οποιαδηποτε πεπερασμενα συνολα $X,Y$ ισχυει:

$$\mathrm{card}(X)=\mathrm{card}(Y) \leftrightarrow X\sim Y.$$

Σημειωνουμε μερικες ακομα ιδιοτητες των πεπερασμενων συνολων.

<u>Προταση 3</u>. Τα υποσυνολα των πεπερασμενων συνολων ειναι πεπερασμενα συνολα.

<u>Αποδειξη</u>: Ασκηση 4.4.■

<u>Προταση 4</u>. Η ενωση δυο πεπερασμενων συνολων ειναι πεπερασμενη.

<u>Αποδειξη</u>: Εστω οτι $f:X \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} n$, $g:Y \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} m$, οπου $n,m\in\omega$.
Θα αποδειξουμε οτι η ενωση $X\cup Y$ ειναι πεπερασμενη πρωτα στην ειδικη περιπτωση ξενων συνολων $X,Y$. Τοτε μπορουμε να ορισουμε μια συναρτηση $h:X\cup Y \longrightarrow n+m$ ως εξης:

$$h(z)=f(z) \quad \text{για } z\in X,$$

$$h(z)=n+g(z) \quad \text{για } z\in Y.$$

Για να αποδειξουμε οτι η $h$ ειναι 1-1, ας υποθεσουμε οτι $a,b\in X\cup Y$ και $h(a)=h(b)$. Αρκει να εξετασουμε τις παρακατω περιπτωσεις.
Αν $a,b\in X$, τοτε $h(a)=f(a)$ και $h(b)=f(b)$. Αρα $f(a)=f(b)$ και συνεπως $a=b$.
Αν $a,b\in Y$, τοτε $h(a)=n+g(a)$, $h(b)=n+g(b)$. Αρα $g(a)=g(b)$. Συνεπως $a=b$.
Αν $a\in X$, $b\in Y$, τοτε $h(a)<n$ και $h(b)=n+g(b)\geq n$. Σ' αυτη την περιπτωση το $h(a)=h(b)$ ειναι αδυνατο.

Το οτι η συναρτηση h απεικονιζει την ενωση $X\cup Y$ επι του $n+m$ μπορει να αποδειχθει αμεσα. Θα εχουμε τοτε $h:X\cup Y \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} n+m$ και επομενως το $X\cup Y$ ειναι πεπερασμενο. Μπορουμε ομως να δικαιολογησουμε το ζητουμενο και ως εξης. Το συνολο $X\cup Y$ ειναι πληθικα ισοδυναμο με την εικονα του μεσω της h, διοτι εχουμε $h:X\cup Y \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \mathrm{rng}(h)$. Επειδη το $\mathrm{rng}(h)$ ειναι υποσυνολο του πεπερασμενο συνολου $n+m$, ειναι πεπερασμενο. Αρα και το ισοπληθικο μ' αυτο συνολο $X\cup Y$ ειναι πεπερασμενο.

Αποδειξαμε το ζητουμενο στην περιπτωση που $X\cap Y=\varnothing$. Για την γενικη περιπτωση αρκει να παρατηρησουμε οτι $X\cup Y=(X-Y)\cup Y$. Τα συνολα $X-Y$ και $Y$ ειναι ξενα μεταξυ τους και πεπερασμενα, αφου $X-Y\subseteq X$. Απο τα παραπανω επεται οτι η ενωση τους, που ειναι ιση με $X\cup Y$, ειναι πεπερασμενη.■

<u>Πορισμα.</u> Αν A ειναι πεπερασμενο συνολο πεπερασμενων συνολων, τοτε η ενωση $\bigcup A$ ειναι πεπερασμενη (ασκηση 4.5).

<u>Προταση 5.</u> Το καρτεσιανο γινομενο δυο πεπερασμενων συνολων ειναι πεπερασμενο.

<u>Αποδειξη</u>: Εστω οτι $f:X \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} n$, $g:Y \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} m$, οπου $n,m\in\omega$. Οριζουμε μια συναρτηση $h:X\times Y \longrightarrow n\times m$ ως εξης. Για $x\in X$, $y\in Y$ θετουμε:

$$h(x,y)=\langle f(x),g(y)\rangle.$$

Ευκολα ελεγχεται οτι η h ειναι 1-1 και επι του $n\times m$. Επειδη ομως εχουμε $n\times m\sim n\cdot m$ (ασκηση 4.6), επεται οτι

$$\mathrm{card}(X\times Y)=\mathrm{card}(n\times m)=n\cdot m.$$

Το καρτεσιανο γινομενο $X\times Y$ ειναι λοιπον πεπερασμενο και ο πληθικος του αριθμος ειναι ισος με το γινομενο των πληθικων αριθμων των $X,Y$.■

Θα κλεισουμε τη μελετη των πεπερασμενων συνολων αναφεροντας εναν διαφορετικο ορισμο της εννοιας του πεπερασμενου συνολου.

<u>Ορισμος.</u> Ενα συνολο λεγεται <u>κατα Dedekind πεπερασμενο</u> οταν δεν ειναι ισοπληθικο με κανενα γνησιο υποσυνολο του. Τα συνολα που δεν ειναι κατα Dedekind πεπερασμενα λεγονται <u>κατα Dedekind απειρα</u>.

Απο το πορισμα 3 της Αρχης του Περιστερωνα (σελιδα 66) βλεπουμε αμεσως τα παρακατω.

<u>Προταση 6.</u> Καθε πεπερασμενο συνολο ειναι κατα Dedekind πεπερασμενο. Καθε κατα Dedekind απειρο συνολο ειναι απειρο.

Η αντιστροφη προταση, που λεει οτι τα κατα Dedekind πεπερασμενα συνολα ειναι πεπερασμενα, δεν μπορει να αποδειχθει με βαση τα αξιωματα της θεωριας συνολων που γνωρισαμε μεχρι τωρα. Θα επανελθουμε σ' αυτην αργοτερα.

### 4.4 <u>Αριθμησιμα συνολα.</u>

Μεταξυ των απειρων συνολων ξεχωριζουμε εκεινα, των οποιων τα στοιχεια μπορουν να "αριθμηθουν" με τη βοηθεια των φυσικων αριθμων. Τα στοιχεια τετοιων συνολων μπορουν να μπουν σε μια "σειρα" οπως οι φυσικοι αριθμοι.

<u>Ορισμοι</u>. Ενα συνολο λεγεται <u>απειρο αριθμησιμο</u> (ή απλως <u>αριθμησιμο</u>) αν ειναι ισοπληθικο με το συνολο $\omega$ των φυσικων αριθμων. Ενα συνολο λεγεται <u>το πολυ αριθμησιμο</u> οταν ειναι πεπερασμενο ή απειρο αριθμησιμο. Τα απειρα συνολα που δεν ειναι αριθμησιμα λεγονται <u>μη αριθμησιμα</u> ή <u>υπεραριθμησιμα</u>.

Αμεσως απο τον ορισμο βλεπουμε οτι ενα συνολο X ειναι αριθμησιμο εαν και μονον εαν ειναι πεδιο τιμων μιας αμφιμονοσημαντης ακολουθιας μηκους $\omega$. Πραγματικα, αν $f:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} X$, τοτε $X=\mathrm{rng}(f)=\{f(n):n\in\omega\}$.

<u>Παραδειγμα 3</u>. Το συνολο $\omega$ ειναι προφανως αριθμησιμο. Αριθμησιμα ειναι τα υποσυνολα του $\{2n:n\in\omega\}$, $\{3n:n\in\omega\}$. Επειδη $\omega^2\sim\omega$ (παραδειγμα 1 IV), εχουμε οτι το καρτεσιανο τετραγωνο του $\omega$ ειναι αριθμησιμο συνολο. Ομοια αποδεικνυεται οτι οι καρτεσιανες δυναμεις $\omega^3$, $\omega^4$ κ.ο.κ. ειναι αριθμησιμα συνολα.

Περισσοτερα παραδειγματα αριθμησιμων συνολων θα εχουμε, αφου αποδειξουμε οτι τα υποσυνολα των αριθμησιμων συνολων ειναι το πολυ αριθμησιμα.

<u>Προταση 7</u>. Καθε υποσυνολο του $\omega$ ειναι πεπερασμενο η αριθμησιμο.

<u>Αποδειξη</u>: Εστω $X\subseteq\omega$. Εξεταζουμε δυο περιπτωσεις.

<u>Περιπτωση 1</u>: Το X ειναι φραγμενο, δηλαδη $(\exists k\in\omega)(\forall y\in X)y\leq k$.

Τοτε $X\subseteq k+1$ και, ως υποσυνολο πεπερασμενου συνολου, ειναι πεπερασμενο.

<u>Περιπτωση 2</u>: Το X δεν ειναι φραγμενο, δηλαδη $(\forall k\in\omega)(\exists y\in X)k<y$.

Τοτε για καθε $k\in\omega$ οριζεται το $\min(X-(k+1))$, αφου η διαφορα $X-(k+1)$ δεν ειναι κενη. Οριζουμε επαγωγικα μια συναρτηση $f:\omega\longrightarrow X$.

$f(0)$=το μικροτερο στοιχειο του $X=\min X$.

$f(n+1)$=το μικροτερο στοιχειο του X που ειναι μεγαλυτερο απο το $f(n)=$
$=\min(X-(f(n)+1))$.

Για καθε $n\in\omega$ εχουμε προφανως $f(n)<f(n+1)$. Η f ειναι λοιπον γνησια αυ-

ξουσα, αρα ειναι 1-1.

Θα αποδειξουμε οτι η $f$ ειναι επι του $X$, δηλαδη οτι $rng(f)=X$. Ας υποθεσουμε οτι $rng(f)\neq X$. Τοτε $rng(f)\subset X$, αρα $X-rng(f)\neq\emptyset$. Εστω οτι $m$ ειναι το μικροτερο του στοιχειο. Εχουμε $m\in X$, $m\notin rng(f)$ και για καθε $j<m$:

$$j\in X \leftrightarrow j\in rng(f).$$

Επειδη $f(0)\in rng(f)$, πρεπει να ειναι $f(0)<m$. Θεωρουμε το συνολο $X'=X\cap m=X\cap rng(f)$. Το $X'$ ειναι πεπερασμενο και μη κενο ($f(0)\in X'$), αρα υπαρχει σ' αυτο το μεγαλυτερο στοιχειο (βκ. ασκηση 3.15). Αυτο ειναι μορφης $f(n)$ για καποιο $n\in\omega$. Λογω του $f(n)\in X\cap m$, εχουμε $f(n)<m$. Το $m$ ειναι λοιπον στοιχειο του $X$ μεγαλυτερο απο το $f(n)$. Ειναι το μικροτερο δυνατο τετοιο στοιχειο. Πραγματικα, αν $j<m$ και $j\in X$, τοτε $j\in rng(f)$. Αρα $j\in X'$ και συνεπως $j\leq f(n)$. Βλεπουμε λοιπον οτι:

$m$=το μικροτερο στοιχειο του $X$ που ειναι μεγαλυτερο απο το $f(n)$.

Επεται οτι $m=f(n+1)$. Αρα $m\in rng(f)$, που ειναι αδυνατο λογω της επιλογης του $m$. Σε ατοπο μας οδηγησε η υποθεση $rng(f)\neq X$. Πρεπει λοιπον να ισχυει $rng(f)=X$, που σημαινει οτι η $f$ ειναι επι του $X$.

Αποδειξαμε οτι, στην περιπτωση που το $X$ δεν ειναι φραγμενο, υπαρχει $f:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} X$. Το συνολο $X$ ειναι τοτε αριθμησιμο.■

<u>Πορισμα 1.</u> Ενα συνολο $X$ ειναι το πολυ αριθμησιμο εαν και μονον εαν υπαρχει συναρτηση $f:X\xrightarrow{1-1}\omega$.

<u>Αποδειξη</u>: Το $(\rightarrow)$ ειναι προφανες. Για το $(\leftarrow)$ ας παρατηρησουμε οτι αν $f:X\xrightarrow{1-1}\omega$, τοτε $f:X\xrightarrow[\text{επι}]{1-1} f[X]$. Απο την παραπανω προταση εχουμε οτι το συνολο $f[X]$ ειναι το πολυ αριθμησιμο. Το συνολο $X$, ως ισοπληθικο με το $f[X]$, ειναι επισης το πολυ αριθμησιμο.■

<u>Πορισμα 2.</u> Αν το συνολο $A$ ειναι το πολυ αριθμησιμο και $B\subseteq A$, τοτε το $B$ ειναι επισης το πολυ αριθμησιμο.

Η επομενη προταση μας δινει εναν χρησιμο χαρακτηρισμο των μη κενων το πολυ αριθμησιμων συνολων. Αυτα (και μονον αυτα) ειναι πεδια τιμων ακολουθιων μηκους $\omega$, δηλαδη δεχονται μια, οχι υποχρεωτικα αμφιμονοσημαντη, "αριθμηση" με τη βοηθεια των φυσικων αριθμων.

<u>Προταση 8.</u> Εστω $X\neq\emptyset$. Το $X$ ειναι το πολυ αριθμησιμο εαν και μονον εαν υπαρχει $f:\omega\xrightarrow[\text{επι}]{} X$.

<u>Αποδειξη</u>: Το $(\rightarrow)$ ειναι προφανες οταν το $X$ ειναι απειρο (τοτε $X\sim\omega$). Αν το $X$ ειναι πεπερασμενο, τοτε $X\sim n$, για καποιο $n\in\omega$, $n\neq 0$ (διοτι $X\neq\emptyset$). Εστω $g:n\xrightarrow[\text{επι}]{1-1} X$. Οριζουμε μια επεκταση της $g$ σε ολο το $\omega$. Θετουμε:

$$f(k)=g(k) \quad \text{για } k<n$$
$$f(k)=g(0) \quad \text{για } k\geq n$$
και εχουμε προφανως $f:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} X$.

Για να αποδειξουμε το $(\Leftarrow)$, ας υποθεσουμε οτι $f:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} X$.

Για καθε $a\in X$ θετουμε $S_a=\{k\in\omega: f(k)=a\}=f^{-1}[\{a\}]$. Επειδη η $f$ ειναι επι του $X$, επεται οτι για καθε $a\in X$ εχουμε $S_a\neq\emptyset$. Οριζουμε $h(a)=\min S_a$. Επειδη για $a\in X$, $b\in X$, $a\neq b$ εχουμε $S_a\neq S_b$, επεται οτι τοτε $h(a)\neq h(b)$. Αρα
$$h:X \xrightarrow{1-1} \omega$$
και συνεπως το συνολο $X$ ειναι το πολυ αριθμησιμο.■

<u>Πορισμα.</u> Εστω $X$ απειρο συνολο. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:

i) Το $X$ ειναι αριθμησιμο.

ii) $\exists f(f:X \xrightarrow{1-1} \omega)$.

iii) $\exists f(f:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} X)$.

<u>Παρατηρηση.</u> Για να αποδειξουμε οτι ενα απειρο συνολο $X$ ειναι αριθμησιμο, δεν ειναι απαραιτητο να δειξουμε αμεσα οτι ειναι ισοπληθικο με το $\omega$. Αρκει να βρουμε μια συναρτηση $f:X \xrightarrow{1-1} \omega$ (δηλαδη μια "εμφυτευση" του $X$ στο $\omega$) η μια συναρτηση $f:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} X$ (δηλαδη μια, οχι υποχρεωτικα αμφιμονοσημαντη, "αριθμηση" του $X$).

Στα παραπανω, το $\omega$ μπορει να αντικατασταθει απο ενα οποιοδηποτε αριθμησιμο συνολο (ασκηση 4.8). Ετσι π.χ. αν το συνολο $X$ ειναι εικονα ενος αριθμησιμου συνολου $A$, δηλαδη $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{} X$ για καποια συναρτηση $f$, τοτε το $X$ ειναι το πολυ αριθμησιμο. Αν επιπλεον ξερουμε οτι το $X$ ειναι απειρο, τοτε ειναι αριθμησιμο.

<u>Προταση 9.</u> Το συνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραιων αριθμων ειναι αριθμησιμο.

<u>Αποδειξη</u>: Το $\mathbb{Z}$ ειναι προφανως απειρο, αφου $\{+n:n\in\omega\}\subseteq\mathbb{Z}$. Για $n,m\in\omega$ θετουμε $f(n,m)=n-m$. Οριζουμε ετσι μια συναρτηση $f:\omega^2 \xrightarrow[\text{επι}]{} \mathbb{Z}$. Ως εικονα αριθμησιμου συνολου, το $\mathbb{Z}$ ειναι αριθμησιμο.■

<u>Προταση 10.</u> Το καρτεσιανο γινομενο $A\times B$ δυο το πολυ αριθμησιμων συνολων $A,B$ ειναι το πολυ αριθμησιμο.

<u>Αποδειξη</u>: Αν $A=\emptyset$ η $B=\emptyset$, τοτε $A\times B=\emptyset$, αρα ισχυει το ζητουμενο. Εστω οτι $A\neq\emptyset$ και $B\neq\emptyset$. Τοτε υπαρχουν $f:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} A$, $g:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} B$. Οριζουμε μια συναρτηση $h:\omega^2 \longrightarrow A\times B$ ως εξης:
$$h(n,m)=\langle f(n),g(m)\rangle$$
και ευκολα βλεπουμε οτι αυτη απεικονιζει το $\omega^2$ επι του $A\times B$. Αρα το $A\times B$ ειναι το πολυ αριθμησιμο.■

Προταση 11. Το συνολο $\mathbb{Q}$ των ρητων αριθμων ειναι αριθμησιμο.

Αποδειξη: Το συνολο $U=\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ ειναι αριθμησιμο. Θετοντας $F(k,m)=\frac{k}{m}$ για $k,m\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$, οριζουμε μια συναρτηση $F:U \xrightarrow[\text{επι}]{} \mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q}$ ειναι προφανως απειρο, αρα ειναι αριθμησιμο.■

Υπαρχουν απειρα συνολα που δεν ειναι αριθμησιμα. Τα στοιχεια τους ειναι τοσο πολλα που οι φυσικοι αριθμοι δεν ειναι αρκετοι για να τα "αριθμησουν". Στη συνεχεια, στηριζομενοι στο λεγομενο Διαγωνιο Λημμα του Cantor, θα δειξουμε οτι δεν ειναι αριθμησιμο το συνολο $\mathcal{P}\omega$ ουτε το συνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων.

Θεωρημα 2 (Διαγωνιο Λημμα του Cantor).

Κανενα συνολο δεν ειναι ισοπληθικο με το δυναμοσυνολο του.

Αποδειξη: Αρκει να αποδειξουμε οτι οποιαδηποτε συναρτηση $f:A\longrightarrow\mathcal{P}A$ δεν μπορει να ειναι επι του $\mathcal{P}A$. Θεωρουμε το συνολο $D=\{x\in A: x\notin f(x)\}$. Αν για καποιο $a\in A$ ηταν $D=f(a)$, τοτε θα ειχαμε

$$a\notin D \leftrightarrow a\notin f(a) \leftrightarrow a\in D.$$

Δεν μπορει λοιπον το $D$ να ανηκει στο πεδιο τιμων της $f$. Αρα η $f$ δεν ειναι επι του $\mathcal{P}A$.■

Πορισμα. Το συνολο $\{0,1\}^{\omega}$ των απειρων ακολουθιων με τιμες στο $\{0,1\}$ ειναι μη αριθμησιμο.

Αποδειξη: Το συνολο $\{0,1\}^{\omega}$ ειναι ισοπληθικο με το $\mathcal{P}\omega$ (ασκηση 4.2), το οποιο ειναι απειρο και, με συμφωνα με το παραπανω θεωρημα, δεν ειναι αριθμησιμο.■

Προταση 12. Το συνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων ειναι μη αριθμησιμο.

Αποδειξη: Οριζουμε μια συναρτηση $F:\{0,1\}^{\omega}\xrightarrow{1-1}\mathbb{R}$ ως εξης. Για καθε ακολουθια $a=(a_n)_{n\in\omega}$ θετουμε

$$F(a)=\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n/3^{n+1}.$$

Αφου ελεγξουμε οτι η $F$ ειναι 1-1 (ασκηση 4.10), βλεπουμε οτι το $\mathrm{rng}(F)$ ειναι ενα μη αριθμησιμο υποσυνολο του $\mathbb{R}$. Αρα και το $\mathbb{R}$ δεν ειναι αριθμησιμο.■

Παρατηρηση. Τα ανοιχτα διαστηματα στο $\mathbb{R}$ δεν ειναι αριθμησιμα, αφου ειναι ισοπληθικα με το $\mathbb{R}$. Επειδη τα διαστηματα $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ ειναι υπερσυνολα του ανοιχτου διαστηματος $(a,b)$, βλεπουμε οτι και αυτα ειναι μη αριθμησιμα. Αργοτερα θα δουμε οτι ολα ειναι ισοπληθικα με το $\mathbb{R}$.

Θα αποδειξουμε μερικες ακομα ιδιοτητες των αριθμησιμων συνολων.

Προταση 13. Η ενωση δυο το πολυ αριθμησιμων συνολων ειναι το πολυ αριθμησιμο συνολο.

Αποδειξη: Αν ενα απο τα συνολα ειναι κενο το ζητουμενο ειναι φανερο. Εστω οτι A, B ειναι μη κενα, το πολυ αριθμησιμα συνολα. Τοτε υπαρχουν $f:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} A$ και $g:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} B$. Θετοντας για καθε $n\in\omega$:

$$h(n,0)=f(n) \text{ και } h(n,1)=g(n),$$

οριζουμε μια συναρτηση

$$h:\omega\times\{0,1\} \xrightarrow[\text{επι}]{} A\cup B.$$

Η ενωση $A\cup B$, ως εικονα του αριθμησιμου συνολου $\omega\times\{0,1\}$, ειναι το πολυ αριθμησιμο συνολο.■

Πορισμα 1. Η ενωση δυο αριθμησιμων συνολων ειναι αριθμησιμη.

Πορισμα 2. Το συνολο $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ των αρρητων πραγματικων αριθμων ειναι μη αριθμησιμο.

Ισχυει μια γενικευση της προηγουμενης προτασης.

Προταση 14. Αν $(A_n)_{n\in\omega}$ ειναι μια ακολουθια συνολων και $(f_n)_{n\in\omega}$ μια ακολουθια συναρτησεων τετοιες ωστε για καθε $n\in\omega$:

$$f_n:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} A_n,$$

τοτε υπαρχει συναρτηση

$$F:\omega \xrightarrow[\text{επι}]{} \bigcup_{n\in\omega} A_n.$$

Αποδειξη: Για το ζητουμενο, αρκει να αποδειξουμε οτι η ενωση $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ ειναι εικονα ενος αριθμησιμου συνολου. Για $n,m\in\omega$ θετουμε:

$$g(n,m)=f_n(m).$$

Ετσι ορισαμε μια συναρτηση $g:\omega^2 \xrightarrow[\text{επι}]{} \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Δειξαμε λοιπον οτι η ενωση $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ ειναι το πολυ αριθμησιμο συνολο. Μια συναρτηση F που απεικονιζει το $\omega$ επι της ενωσης $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ ειναι π.χ. η συνθεση $g\circ J^{-1}$, οπου J ειναι οποιαδηποτε συναρτηση τετοια ωστε: $J:\omega^2 \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \omega$.■

Πορισμα. Το συνολο των αλγεβρικων πραγματικων αριθμων ειναι αριθμησιμο. Το συνολο των υπερβατικων πραγματικων αριθμων ειναι μη αριθμησιμο.

Αποδειξη: Ασκηση 4.13.■

Κλεινουμε την παραγραφο, αναφεροντας τους συμβολισμους που χρησιμοποιουσε ο Cantor για τους πληθικους αριθμους του συνολου των φυσικων αριθμων και του συνολου των πραγματικων αριθμων. Αυτοι οι συμβολισμοι παραδοσιακα διατηρουνται και στη συγχρονη θεωρια συνολων.

Ο πληθικος αριθμος του συνολου ω των φυσικων αριθμων συμβολιζεται παραδοσιακα με $\aleph_0$ (αλεφ μηδεν). Το $\aleph_0$ ειναι λοιπον πληθικος αριθμος καθε απειρου αριθμησιμου συνολου. Θα γραφουμε

$$\mathrm{card}(X)=\aleph_0$$

εαν και μονον εαν το X ειναι αριθμησιμο συνολο.

Επειδη το συνολο ω ειναι απειρο, εχουμε οτι για καθε n∈ω:

$$\aleph_0 \neq n.$$

Ο πληθικος αριθμος του συνολου **R** των πραγματικων αριθμων συμβολιζεται c (continuum, συνεχες). Θα γραφουμε λοιπον

$$\mathrm{card}(X)=c,$$

και θα λεμε οτι το συνολο X εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους, εαν και μονον εαν το X ειναι ισοπληθικο με το **R**.

Η προταση 12, που εκφραζει την μη αριθμησιμοτητα του συνολου των πραγματικων αριθμων μπορει να διατυπωθει ως εξης:

$$\aleph_0 \neq c.$$

## 4.5 Πραξεις με πληθικους αριθμους.

Διατηρωντας τους συμβολισμους του Cantor, θα χρησιμοποιουμε για τους πληθικους αριθμους γραμματα m, n, p του γοτθικου αλφαβητου. Παρακατω θα ορισουμε τις πραξεις προσθεσης, πολλαπλασιασμου και δυναμης των πληθικων αριθμων. Οι πραξεις αυτες ειναι γενικευσεις των αντιστοιχων πραξεων στους φυσικους αριθμους, οι οποιοι ειναι πληθικοι αριθμοι των πεπερασμενων συνολων.

Προσθεση πληθικων αριθμων.

Το αθροισμα δυο πληθικων αριθμων m, n θα το ορισουμε ως τον πληθικο αριθμο της ενωσης A∪B δυο ξενων συνολων A, B με πληθικους αριθμους m και n, αντιστοιχα. Για να ειναι σωστος ενας τετοιος ορισμος πρεπει να δικαιολογησουμε οτι ειναι ανεξαρτητος απο την επιλογη των συνολων A, B.

Προταση 15. Εστω οτι $A_1\cap B_1=\emptyset$ και $A_2\cap B_2=\emptyset$. Τοτε

$$A_1\sim A_2 \wedge B_1\sim B_2 \rightarrow A_1\cup B_1\sim A_2\cup B_2.$$

Αποδειξη: Ασκηση 4.17.■

Ορισμος. Εστω m, n πληθικοι αριθμοι. Εστω οτι A, B ειναι ξενα συνολα με card(A)=m και card(B)=n, αντιστοιχα. Το αθροισμα m+n οριζεται ως ο πληθικος αριθμος card(A∪B) της ενωσης A∪B. Εχουμε δηλαδη

$$\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A\cup B), \qquad \text{αν } A\cap B=\varnothing.$$

<u>Παρατηρηση</u>. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m,n μπορουμε παντα να βρουμε δυο ξενα μεταξυ τους συνολα A και B με card(A)=m και card(B)=n, αντιστοιχα. Πραγματικα, αν εχουμε card(A)=m και card(B)=n, τοτε θετοντας $A_1=A\times\{0\}$ και $B_1=B\times\{1\}$, βλεπουμε οτι $A_1\cap B_1=\varnothing$. Ειναι επισης προφανες οτι $\mathrm{card}(A_1)=\mathrm{card}(A)=m$ και $\mathrm{card}(B_1)=\mathrm{card}(B)=n$.

<u>Παρατηρηση</u>. Για να βρουμε το αθροισμα m+n δυο πληθικων αριθμων m και n μπορουμε να χρησιμοποιησουμε οποιαδηποτε ξενα συνολα A,B με card(A)=m και card(B)=n αντιστοιχα. Επιλεγουμε λοιπον τα συνολα A και B ετσι ωστε ο πληθικος αριθμος της ενωσης $A\cup B$ να βρισκεται ευκολα. Με βαση την προταση 15, θα ξερουμε οτι για <u>καθε</u> X και Y με card(X)=m και card(Y)=n ξενα μεταξυ τους, η ενωση $X\cup Y$ εχει τον πληθικο αριθμο που βρηκαμε.

Ευκολα αποδεικνυονται οι παρακατω νομοι για την προσθεση πληθικων αριθμων.

<u>Προταση 16</u>. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m,n,p:

i) $m+0=m$,

ii) $m+n=n+m$,

iii) $(m+n)+p=m+(n+p)$.

<u>Παρατηρηση</u>. Η προσθεση πληθικων αριθμων γενικευει την προσθεση φυσικων αριθμων. Ισχυει δηλαδη card(m)+card(n)=m+n, για $m,n\in\omega$. Πραγματικα, αν παρουμε το συνολο $A=\{m+k:k<n\}$, εχουμε card(A)=n, $m\cap A=\varnothing$ και $m\cup A=m+n$. Βλεπουμε λοιπον οτι η χρησιμοποιηση του συμβολου + για την προσθεση φυσικων αριθμων ως πληθικων αριθμων, δεν οδηγει σε παρεξηγησεις.

Απο την προταση 13 εχουμε αμεσως τα ακολουθα.

<u>Προταση 17</u>.

i) Για καθε $n\in\omega$: $\aleph_0+n=\aleph_0$.

ii) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

Η παρακατω προταση μπορει ευκολα να δικαιολογηθει με βαση την ασκηση 4.16. Αργοτερα θα γνωρισουμε και αλλες, απλουστερες αποδειξεις.

<u>Προταση 18</u>.

i) Για καθε $n\in\omega$: $c+n=c$.

ii) $c+\aleph_0=c$.

iii) $c+c=c$.

Πολλαπλασιασμος πληθικων αριθμων.

Το γινομενο δυο πληθικων αριθμων m και n θα οριστει ως ο πληθικος αριθμος του καρτεσιανου γινομενου A×B δυο συνολων A, B με πληθικους αριθμους m και n αντιστοιχα. Οπως και στην περιπτωση της προσθεσης, για να ειναι σωστος αυτος ο ορισμος, πρεπει πρωτα να δειξουμε οτι ειναι ανεξαρτητος απο την επιλογη των συνολων A και B. Το γεγονος αυτο εκφραζεται απο την ασκηση 4.18.

Ορισμος. Εστω m, n πληθικοι αριθμοι. Εστω A, B συνολα με card(A)=m και card(B)=n, αντιστοιχα. Το γινομενο m·n οριζεται ως ο πληθικος αριθμος card(A×B) του καρτεσιανου γινομενου A×B. Εχουμε δηλαδη

$$\mathrm{card}(A)\cdot\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A\times B).$$

Παρατηρηση. Οπως και στην περιπτωση της προσθεσης, για την ευρεση του γινομενου m·n δυο πληθικων αριθμων, μπορουμε να επιλεξουμε τα συνολα A, B με card(A)=m και card(B)=n ετσι ωστε να υπολογιζεται ευκολα ο πληθικος αριθμος του καρτεσιανου γινομενου A×B. Τοτε θα ξερουμε οτι για καθε X και Y με card(X)=m και card(Y)=n το καρτεσιανο γινομενο X×Y εχει τον πληθικο αριθμο που βρηκαμε.

Οι παρακατω προτασεις εκφραζουν τους βασικους νομους για τον πολλαπλασιασμο πληθικων αριθμων:

Προταση 19. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m, n, p:

i) $m\cdot 0=m$,

ii) $m\cdot 1=m$,

iii) $m\cdot n=n\cdot m$,

iv) $(m\cdot n)\cdot p=m\cdot(n\cdot p)$.

Αποδειξη: Ασκηση 4.20.■

Προταση 20. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m, n, p:

$$m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p.$$

Αποδειξη: Εστω A, B, C οποιαδηποτε συνολα με πληθικους αριθμους m, n, p, αντιστοιχα και τετοια ωστε $B\cap C=\varnothing$. Τοτε $\mathrm{card}(A\times(B\cup C))=m\cdot(n+p)$. Εχουμε

$$A\times(B\cup C)=A\times B\ \cup\ A\times C.$$

Προφανως $\mathrm{card}(A\times(B\cup C))=\mathrm{card}(A\times B\cup A\times C)$. Παρατηρουμε οτι τα συνολα A×B και A×C ειναι ξενα μεταξυ τους. Συνεπως εχουμε

$$\mathrm{card}(A\times B\cup A\times C)=\mathrm{card}(A\times B)+\mathrm{card}(A\times C))=m\cdot n+m\cdot p.$$

Επεται λοιπον οτι $m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p$.■

Πορισμα. Εφαρμοζοντας την τελευταια προταση με $n=1$ και $p=1$, εχουμε οτι

$$m\cdot 2=m+m,$$

για καθε πληθικο αριθμο $m$. Με επαγωγη μπορουμε να αποδειξουμε οτι γενικα, για καθε πληθικο αριθμο $m$ και καθε $n\in\omega$ ισχυει (ασκηση 4.21):

$$m\cdot n=m+m+\ldots+m \quad (n \text{ φορες}).$$

Παρατηρηση. Ο πολλαπλασιασμος των πληθικων αριθμων γενικευει την αντιστοιχη πραξη στους φυσικους αριθμους. Ο πολλαπλασιασμος φυσικων αριθμων ως πληθικων αριθμων συμφωνει δηλαδη με τη γνωστη πραξη πολλαπλασιασμου στους φυσικους αριθμους. Πραγματι, για $m,n\in\omega$ ισχυει (ασκηση 4.6)

$$card(m)\cdot card(n)=card(m\times n)=m\cdot n.$$

Οι παρακατω προτασεις εκφραζουν μερικες ιδιοτητες του πολλαπλασιασμου με τους απειρους πληθικους αριθμους $\aleph_0$ και $c$. Απο την προταση 10 της προηγουμενης παραγραφου εχουμε αμεσως τα ακολουθα.

Προταση 21.

i) Για καθε $n\in\omega$, $n\neq 0$ ισχυει: $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

ii) $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

Οι επομενες ιδιοτητες μπορουν να δικαιολογηθουν π.χ. με βαση την ασκηση 4.25. Αργοτερα θα γνωρισουμε και αλλες αποδειξεις τους.

Προταση 22.

i) Για καθε $n\in\omega$, $n\neq 0$ ισχυει: $n\cdot c=c$.

ii) $\aleph_0\cdot c=c$.

Δυναμη πληθικων αριθμων.

Η δυναμη $m^n$ δυο πληθικων αριθμων θα οριστει ως ο πληθικος αριθμος του συνολου $A^B$ των συναρτησεων με πεδιο ορισμου το $B$ και τιμες στο $A$, οπου τα συνολα $A,B$ εχουν πληθικους αριθμους $m$ και $n$, αντιστοιχα. Οπως και για τις προηγουμενες πραξεις με πληθικους αριθμους, ελεγχουμε πρωτα οτι το αποτελεσμα ειναι ανεξαρτητο απο την επιλογη των συνολων $A$ και $B$ (ασκηση 4.19).

Ορισμος. Εστω $m,n$ πληθικοι αριθμοι. Εστω $A,B$ συνολα με $card(A)=m$ και $card(B)=n$, αντιστοιχα. Η δυναμη $m^n$ με βαση $m$ και εκθετη $n$ οριζεται ως ο πληθικος αριθμος $card(A^B)$ του συνολου $A^B$ ολων των συναρτησεων που μετασχηματιζουν το συνολο $B$ στο συνολο $A$. Εχουμε δηλαδη:

$$card(A)^{card(B)} = card(A^B).$$

Ισχυουν οι παρακατω νομοι για τις δυναμεις των πληθικων αριθμων. Οι αποδειξεις τους περιεχονται στις ασκησεις 4.23 και 4.24.

<u>Προταση 23</u>. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m, n, p:

i) $m^{n+p} = m^n \cdot m^p$,

ii) $(m \cdot n)^p = m^p \cdot n^p$,

iii) $p^{m \cdot n} = (p^m)^n$.

Ευκολα αποδεικνυονται και οι παρακατω ιδιοτητες (ασκηση 4.22).

<u>Προταση 24</u>. Για καθε πληθικο αριθμο m ισχυει:

i) $m^0=1$, ii) $m^1=m$,

iii) $m^2=m\cdot m$, iv) $1^m=1$.

v) $0^m=0$ για $m\neq 0$.

Μια γενικευση των ιδιοτητων ii και iii, εκφραζει η ασκηση 4.25.

<u>Παρατηρησεις</u>. i) Οπως και για τις προηγουμενες πραξεις, για να βρουμε τη δυναμη $m^n$, μπορουμε να επιλεξουμε τα συνολα A, B με card(A)=m και card(B)=n, ωστε να υπολογιζεται ευκολα ο πληθικος αριθμος του συνολου $A^B$. Τοτε θα ξερουμε οτι για <u>καθε</u> X και Y με card(X)=m και card(Y)=n, το συνολο $X^Y$ εχει τον πληθικο αριθμο που βρηκαμε.

ii) Για φυσικους αριθμους m, n εχουμε $card(m^n)=m^n$. Επεται οτι η πραξη της δυναμης των πληθικων αριθμων ειναι γενικευση της δυναμης στους φυσικους αριθμους.

Ειδικο νοημα μπορει να αποδοθει στις δυναμεις με βαση 2. Επειδη για καθε συνολο A ισχυει: $\mathcal{P}A \sim \{0,1\}^A$ (ασκηση 4.2), εχουμε

$$card(\mathcal{P}A)=2^{card(A)}.$$

Το Διαγωνιο Λημμα του Cantor μπορει να διατυπωθει και ως νομος για τους πληθικους αριθμους.

<u>Προταση 25</u>. Για καθε πληθικο αριθμο m ισχυει: $m\neq 2^m$.

Ειδικα εχουμε $\aleph_0\neq 2^{\aleph_0}$, $2^{\aleph_0}\neq 2^{2^{\aleph_0}}$, $2^{2^{\aleph_0}}\neq 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, κ.ο.κ.

## 4.6 <u>Συγκριση πληθικων αριθμων</u>.

<u>Ορισμος</u>. Εστω A, B συνολα. Λεμε οτι το A <u>εχει το πολυ τοσα στοιχεια οσα</u> το B, και γραφουμε card(A)≤card(B), οταν υπαρχει συναρτηση $f: A \xrightarrow{1-1} B$.

<u>Παρατηρηση</u>. Εχουμε card(A)≤card(B) εαν και μονον εαν το συνολο A ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του B. Πραγματικα, αν $f: A \xrightarrow{1-1} B$, τοτε

$f:A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} f[A]$. Συνεπως $A \sim f[A]$ και $f[A] \subseteq B$.

<u>Ορισμος</u>. Εστω $m, n$ πληθικοι αριθμοι. Εστω $A, B$ συνολα με $card(A)=m$ και $card(B)=n$, αντιστοιχα. Λεμε οτι ο $m$ <u>ειναι το πολυ</u> $n$ (ή οτι ο $m$ <u>ειναι μικροτερος ή ισος</u> $n$), και γραφουμε $m \leq n$, οταν το $A$ ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του $B$ (δηλαδη οταν $card(A) \leq card(B)$).

<u>Παρατηρησεις</u>. i) Ο παραπανω ορισμος ειναι σωστος, διοτι αν εχουμε $card(A) \leq card(B)$ και $A \sim A_1$, $B \sim B_1$, τοτε $card(A_1) \leq card(B_1)$ (ασκηση 4.27)

ii) Η συγκριση των φυσικων αριθμων ως πληθικων αριθμων συμφωνει με τη διαταξη τους. Πραγματικα, για οποιαδηποτε $m, n \in \omega$ εχουμε:

$$card(m) \leq card(n) \leftrightarrow m \subseteq n \leftrightarrow m \leq n.$$

iii) Αποδεικνυοντας οτι $m \leq n$, επιλεγουμε συνολα $A, B$ ετσι ωστε να ειναι ευκολο να δικαιολογησουμε οτι το $A$ ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του $B$. Αν ειναι δυνατο, παιρνουμε τα $A, B$ ωστε $A \subseteq B$. Τοτε θα ξερουμε οτι για <u>καθε</u> $X$ και $Y$ με $card(X)=m$ και $card(Y)=n$, το $X$ ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του $Y$.

Ευκολα αποδεικνυονται οι παρακατω ιδιοτητες.

<u>Προταση 26</u>. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους $m, n, p$:

i) $m \leq m$,

ii) $m \leq n \wedge n \leq p \longrightarrow m \leq p$.

<u>Παρατηρησεις</u>. Ξερουμε οτι ενα συνολο $X$ ειναι το πολυ αριθμησιμο εαν και μονον εαν ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του $\omega$ (πορισμα 1, σελίδα 68). Έχουμε λοιπον οτι:

$$card(X) \leq \aleph_0 \leftrightarrow X \text{ ειναι το πολυ αριθμησιμο.}$$

Συμφωνα με την ασκηση 4.14, εχουμε οτι ενα συνολο $X$ περιεχει αριθμησιμο υποσυνολο εαν και μονον εαν ειναι ισοπληθικο με καποιο γνησιο υποσυνολο του. Αυτο σημαινει οτι:

$$\aleph_0 \leq card(X) \leftrightarrow X \text{ ειναι κατα Dedekind απειρο.}$$

<u>Παραδειγμα 4</u>.

i) Για καθε $n \in \omega$, $n \leq \aleph_0$.

ii) $\aleph_0 \leq c$ (διοτι π.χ. $\omega \subseteq \mathbb{R}$).

iii) Για καθε πληθικο αριθμο $m$ ισχυει: $m \leq 2^m$. Και τουτο διοτι για καθε συνολο $A$, η συναρτηση $f: A \longrightarrow \mathcal{P}A$ με $f(x)=\{x\}$ (για $x \in A$) ειναι 1-1. Ειδικα εχουμε

$$\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0} \leq 2^{2^{\aleph_0}} \leq 2^{2^{2^{\aleph_0}}} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

θα δειξουμε πιο κατω οτι ολοι αυτοι οι πληθικοι αριθμοι ειναι διαφορετικοι μεταξυ τους.

Για τις πραξεις με πληθικους αριθμους ισχυουν και οι παρακατω νομοι.

<u>Προταση 27</u>. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους $m, n, p$:

i) $m \le n \rightarrow p+m \le p+n$,

ii) $m \le n \rightarrow p \cdot m \le p \cdot n$,

iii) $m \le n \rightarrow m^p \le n^p$,

iv) $m \le n \dashrightarrow p^m \le p^n$ (για $p \ne 0$).

<u>Αποδειξη</u>: Ασκηση 4.28. ∎

<u>Ορισμος</u>. Εστω $m, n$ πληθικοι αριθμοι. Λεμε οτι ο $m$ ειναι <u>(γνησια) μικροτερος</u> απο τον $n$, και γραφουμε $m<n$, οταν $m \le n$ και $m \ne n$.

<u>Παραδειγμα 5</u>.

i) Για καθε $n \in \omega$: $n<\aleph_0$.

ii) $\aleph_0 < c$ (διοτι $\omega \not\sim R$).

iii) Για καθε πληθικο αριθμο $m$ ισχυει: $m<2^m$. Πραγματικα, για καθε $m$ εχουμε $m \le 2^m$ και $m \ne 2^m$ (απο το Διαγωνιο Λημμα του Cantor).

Ειδικα εχουμε $\aleph_0<2^{\aleph_0}$, $2^{\aleph_0}<2^{2^{\aleph_0}}$, $2^{2^{\aleph_0}}<2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, κ.ο.κ.

<u>Παρατηρηση</u>. Ας προσεξουμε οτι <u>δεν</u> αληθευουν νομοι αντιστοιχοι αυτων που εκφραζει η προταση 27 (ασκηση 4.29). Εχουμε π.χ. $0<1$, αλλα $0+\aleph_0 = 1+\aleph_0$.

Θα αποδειξουμε τωρα το σημαντικοτερο θεωρημα για τη συγκριση των πληθικων αριθμων. Αυτο το θεωρημα εχει παρα πολλες εφαρμογες. Μας επιτρεπει να αποδεικνυουμε την πληθικη ισοδυναμια συνολων, χωρις να βρισκουμε αμεσα συναρτηση που ειναι 1-1 και επι.

<u>Θεωρημα 3</u> (Cantor, Shröder, Bernstein).
Εστω $A, B$ συνολα. Αν το $A$ ειναι πληθικα ισοδυναμο με καποιο υποσυνολο του $B$ και το $B$ ειναι πληθικα ισοδυναμο με καποιο υποσυνολο του $A$, τοτε τα συνολα $A$ και $B$ ειναι πληθικα ισοδυναμα. Δηλαδη

$$\operatorname{card}(A) \le \operatorname{card}(B) \wedge \operatorname{card}(B) \le \operatorname{card}(A) \rightarrow \operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B).$$

<u>Αποδειξη</u>: Εστω οτι $f: A \xrightarrow{1-1} B$ και $g: B \xrightarrow{1-1} A$. Το ζητουμενο θα αποδειχθει αν ορισουμε μια συναρτηση $h: A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$.

Οριζουμε αναδρομικα μια ακολουθια $(S_n)_{n \in \omega}$ υποσυνολων του $A$.

$$S_0 = A - g[B],$$
$$S_{n+1} = g[f[S_n]].$$

Εστω $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$. Θετοντας

$$h(x)=f(x) \quad \text{για } x\in S,$$
$$h(x)=g^{-1}(x) \quad \text{για } x\in A-S,$$

οριζουμε μια συναρτηση $h: A \longrightarrow B$. Θα αποδειξουμε οτι η $h$ ειναι 1-1 και επι του $B$.

Για να αποδειξουμε οτι η $h$ ειναι 1-1, ας υποθεσουμε οτι για $x,y\in A$ εχουμε $h(x)=h(y)$. Επειδη οι συναρτησεις $f$ και $g^{-1}$ ειναι 1-1, ευκολα βλεπουμε οτι αν $x\in S$ και $y\in S$ ή $x\in A-S$ και $y\in A-S$, τοτε πρεπει να εχουμε $x=y$. Θα δουμε οτι αποκλειεται η περιπτωση: $x\in S$, $y\in A-S$ (και ομοια η περιπτωση $x\in A-S$, $y\in S$). Ας υποθεσουμε οτι $x\in S$ και $y\in A-S$. Εστω οτι $x\in S_n$. Επειδη $h(x)=f(x)$ και $h(y)=g^{-1}(y)$, επεται οτι $f(x)=g^{-1}(y)$. Αρα εχουμε $y=g(g^{-1}(y))=g(f(x))$, και συνεπως $y\in S_{n+1}$. Ατοπο, αφου $y\notin S$.

Δειξαμε λοιπον οτι για οποιαδηποτε $x,y\in A$: αν $h(x)=h(y)$, τοτε $x=y$.

Θα αποδειξουμε οτι η $h$ ειναι επι του $B$. Εστω $b\in B$. Θετουμε $a=g(b)$. Εξεταζουμε δυο περιπτωσεις.

<u>Περιπτωση 1</u>. $a\notin S$. Τοτε $h(a)=g^{-1}(a)=g^{-1}(g(b))=b$.

<u>Περιπτωση 2</u>. $a\in S$. Τοτε, για καποιο $n\in\omega$, $a\in S_n$. Επειδη $a\in g[B]$, εχουμε $a\notin S_0$ και επομενως $n\neq 0$. Επειδη για $n\neq 0$ εχουμε $S_n=g[f[S_{n-1}]]$, επεται οτι $a=g(f(c))$, για καποιο $c\in S_{n-1}$. Τοτε $b=g^{-1}(a)=g^{-1}(g(f(c)))=f(c)$. Επειδη $c\in S$, $h(c)=f(c)=b$.

Σε καθε περιπτωση υπαρχει λοιπον $x\in A$, τετοιο ωστε $b=h(x)$. ■

<u>Πορισμα</u>. Αν $A\subseteq B\subseteq C$ και $A\sim C$, τοτε $A\sim B$ και $B\sim C$.

Το θεωρημα των Cantor, Shröder και Bernstein μπορει να διατυπωθει και ως νομος για τους πληθικους αριθμους.

<u>Προταση 28</u>. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους $m,n$,:

$$m\le n \wedge n\le m \longrightarrow m=n.$$

Με βαση το θεωρημα των Cantor, Shröder και Bernstein, ευκολα αποδεικνυονται οι ακολουθες ιδιοτητες των πληθικων αριθμων (ασκηση 4.30).

<u>Προταση 29</u>. Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους $m,n,p$:

i) $\neg(m<m)$,

ii) $m<n \longrightarrow \neg(n<m)$,

iii) $m<n \wedge n<p \longrightarrow m<p$.

Παρατηρηση. Οι πληθικοι αριθμοι $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, κ.ο.κ. ειναι ολοι διαφορετικοι μεταξυ τους. Πραγματικα, εχουμε

$\aleph_0<2^{\aleph_0}<2^{2^{\aleph_0}}<2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ κ.ο.κ. Για οποιουσδηποτε m, n απ' αυτους, εχουμε m<n αρα αποκλειεται το m=n. Βλεπουμε οτι υπαρχουν πολλοι απειροι πληθικοι αριθμοι. Υπαρχουν δηλαδη πολλα απειρα συνολα που δεν ειναι ισοπληθικα μεταξυ τους.

Θα δουμε τωρα μερικες εφαρμογες του θεωρηματος των Cantor, Shröder και Bernstein.

Θα δοσουμε πρωτα απλες λυσεις των ασκησεων 4.16 i, iii, iv, στις οποιες βασιζεται η προταση 18.

Προταση 30. Καθε υποσυνολο του R που περιεχει ενα ανοιχτο διαστημα εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους.

Αποδειξη: Εστω $(a,b)\subseteq X\subseteq R$, οπου $a,b\in R$ και $a<b$. Επειδη $(a,b)\sim R$, απο το παραπανω πορισμα, επεται οτι $X\sim R$. Αρα $card(X)=c$. ∎

Πορισμα. Τα διαστηματα και οι ημιευθειες στο R εχουν τον πληθικο αριθμο του συνεχους.

Πολλες απο τις ιδιοτητες των πληθικων αριθμων $\aleph_0$ και c, που γνωρισαμε στην προηγουμενη παραγραφο, αποδεικνυονται χωρις την εξεταση ειδικων συνολων. Με βαση την προταση 28, για να δικαιολογησουμε μια ισοτητα m=n, αρκει να δειξουμε τα: m≤n και n≤m. Ετσι π.χ. χρησιμοποιωντας το γεγονος οτι $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ (ισχυει λογω του $\omega^2\sim\omega$), μπορουμε να δοσουμε νεες αποδειξεις των προτασεων 17 και 21.

Για καθε $n\in\omega$ εχουμε:

$$\aleph_0\le n+\aleph_0\le\aleph_0+\aleph_0=2\cdot\aleph_0\le\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$$

και συνεπως: $n+\aleph_0=\aleph_0$ και $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

Επισης, για $n\in\omega$, $n\neq0$ εχουμε:

$$\aleph_0\le n\cdot\aleph_0\le\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0,$$

αρα: $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

Ομοια, στηριζομενοι στην ισοτητα $\aleph_0\cdot c=c$, μπορουμε να αποδειξουμε τις υπολοιπες ισοτητες των προτασεων 18 και 22.

Για καθε $n\in\omega$ εχουμε:

$$c\le n+c\le\aleph_0+c\le c+c=2\cdot c\le\aleph_0\cdot c=c,$$

επομενως: $n+c=c$, $\aleph_0+c=c$ και $c+c=c$.

Επισης, για $n\in\omega$, $n\neq0$ εχουμε:

$$c\le n\cdot c\le \aleph_0\cdot c=c,$$

αρα: $n\cdot c=c$ και $\aleph_0\cdot c=c$.

Θα εφαρμοσουμε ακομα το θεωρημα των Cantor, Shröder και Bernstain για να βρουμε τον πληθικο αριθμο του συνολου $\omega^\omega$ των απειρων ακολουθιων με τιμες φυσικους αριθμους.

Εχουμε $\mathrm{card}(\omega^\omega)=\mathrm{card}(\omega)^{\mathrm{card}(\omega)}=\aleph_0^{\aleph_0}$. Ομως

$$2^{\aleph_0}\le\aleph_0^{\aleph_0}\le(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0},$$

αρα $\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

Ως εφαρμογη του θεωρηματος των Cantor, Shröder και Bernstain θα αποδειξουμε μια σημαντικη ισοτητα μεταξυ πληθικων αριθμων.

<u>Θεωρημα 4</u>. $2^{\aleph_0}=c$.

<u>Αποδειξη</u>: Αρκει να αποδειξουμε οτι $c\le 2^{\aleph_0}$ και $2^{\aleph_0}\le c$.

Για καθε πραγματικο αριθμο $x$, θετουμε $T(x)=\{r\in\mathbb{Q}: r<x\}$. Ευκολα βλεπουμε οτι, λογω πυκνοτητας του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$,

$$x\ne y \longrightarrow T(x)\ne T(y).$$

Επεται οτι η συναρτηση $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{P}\mathbb{Q}$, ειναι 1-1. Εχουμε λοιπον

$$c=\mathrm{card}(\mathbb{R})\le\mathrm{card}(\mathcal{P}\mathbb{Q})=2^{\mathrm{card}(\mathbb{Q})}=2^{\aleph_0}.$$

Το $c\le 2^{\aleph_0}$ μπορουμε να αποδειξουμε και διαφορετικα, χρησιμοποιωντας τα δυαδικα αναπτυγματα των πραγματικων αριθμων. Για καθε $x\in(0,1)$, το κλασματικο μερος ενος δυαδικου αναπτυγματος του $x$ ειναι μια απειρη ακολουθια με τιμες στο $\{0,1\}$. Καθε $x\in(0,1)$ εχει ακριβως ενα αναπτυγμα, στο οποιο απειρες φορες εμφανιζεται το ψηφιο 0 (δηλαδη τετοιο που δεν εχει σχεδον ολα τα ψηφια ισα με 1). Αν για καθε $x\in(0,1)$, παρουμε ως $A(x)$ ενα τετοιο δυαδικο αναπτυγμα, οριζουμε μια συναρτηση

$$A:(0,1)\xrightarrow{1-1}\{0,1\}^\omega.$$

Επεται οτι

$$c=\mathrm{card}((0,1))\le\mathrm{card}(\{0,1\}^\omega)=2^{\aleph_0}.$$

Στην αποδειξη της προτασης 12 (σελιδα 71) ορισαμε μια συναρτηση $F:\{0,1\}^\omega\xrightarrow{1-1}\mathbb{R}$. Εχουμε λοιπον και $2^{\aleph_0}\le c$. Αλλη μια αποδειξη του $2^{\aleph_0}\le c$ περιεχει η ασκηση 4.31. ■

<u>Παρατηρηση</u>. Το παραπανω θεωρημα μπορει να αποδειχθει και ως εξης. Ξερουμε (ασκηση 4.16), οτι το συνολο $N=(0,1)-\mathbb{Q}$, των αρρητων αριθμων του διαστηματος $(0,1)$, εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους. Τα λεγομενα συνεχη κλασματα οριζουν μια συναρτηση $K:(\omega-\{0\})^\omega\xrightarrow[\text{επι}]{1-1}N$. Επεται λοιπον οτι $c=\mathrm{card}(N)=\mathrm{card}((\omega-\{0\})^\omega)=\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

Χρησιμοποιωντας το θεωρημα 4, μπορουμε ευκολα να αποδειξουμε μερικες σημαντικες αριθμητικες ιδιοτητες του πληθικου αριθμου c.

<u>Προταση 31.</u> $c+c=c$.

<u>Αποδειξη</u>: $c\le c+c=2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0+\aleph_0}=2^{\aleph_0}=c$. ■

Ομοια αποδεικνυονται και τα ακολουθα (ασκηση 4.32).

<u>Προταση 32.</u>

i) Για καθε $n\in\omega$, $n\neq 0$: $c^n=c$.

ii) Για καθε $n\in\omega$, $n\ge 2$: $n^{\aleph_0}=c$.

iii) $c^{\aleph_0}=c$.

iv) $c^c=\aleph_0^{\,c}=2^c$.

<u>Πορισματα.</u> Οι Ευκλειδειοι χωροι $\mathbb{R}^n$ ($n\in\omega$, $n\neq 0$) εχουν τον πληθικο αριθμο του συνεχους. Ειναι λοιπον πληθικα ισοδυναμοι με το συνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων. Το συνολο $\mathbb{R}^\omega$, των απειρων ακολουθιων με πραγματικες τιμες, επισης εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους. Το συνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, των πραγματικων συναρτησεων πραγματικης μεταβλητης, εχει πληθικο αριθμο $2^c$ και συνεπως δεν ειναι ισοπληθικο με το $\mathbb{R}$ (εχουμε $c<2^c$).

Θα επανελθουμε στους πληθικους αριθμους στο τελευταιο κεφαλαιο. Εκει, χρησιμοποιωντας το Αξιωμα Επιλογης, θα δοσουμε εναν ορισμο των πληθικων αριθμων και θα αποδειξουμε μια σημαντικη ιδιοτητα τους:

"Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους $m, n$; $m\le n \vee n\le m$."

Αυτο σημαινει οτι για οποιαδηποτε συνολα A, B, οι πληθικοι τους αριθμοι card(A) και card(B), συγκρινονται.

Θα κλεισουμε το κεφαλαιο, αναφεροντας ενα απο τα σημαντικοτερα προβληματα της θεωριας συνολων.

Ολα τα γνωστα απειρα υποσυνολα του $\mathbb{R}$ που δεν ειναι αριθμησιμα, ειναι ισοπληθικα με ολο το $\mathbb{R}$. Αυτη η παρατηρηση οδηγησε τον Cantor σε μια υποθεση, που ειναι γνωστη ως Εικασια του Συνεχους, η οποια λεει:

"Καθε υποσυνολο του $\mathbb{R}$ η ειναι το πολυ αριθμησιμο η εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους", δηλαδη

$$(\forall X\in\mathcal{P}\mathbb{R})(\mathrm{card}(X)\le\aleph_0 \vee \mathrm{card}(X)=c).$$

Μια συνεπεια της Εικασιας του Συνεχους ειναι το γεγονος οτι δεν υπαρχουν πληθικοι αριθμοι μεταξυ του $\aleph_0$ και του $c$ (ασκηση 4.38). Εχουμε δηλαδη οτι για καθε πληθικο αριθμο $m$:

$$\aleph_0\le m\le c \rightarrow m=\aleph_0 \vee m=c$$

ή ισοδυναμα οτι δεν υπαρχει πληθικος αριθμος m τετοιος ωστε: $\aleph_0<m<c$.

Κανεις δεν μπορεσε ουτε να αποδειξη την Εικασια του Συνεχους ουτε να βρει για αυτην αντιπαραδειγμα. Οταν ο Hilbert το 1900 ανακοινωσε την περιφημη λιστα των σπουδαιοτερων μαθηματικων προβληματων, τοποθετησε την Εικασια του Συνεχους στη πρωτη θεση. Το 1940 ο K.Gödel εδειξε οτι στη θεωρια συνολων ZFC δεν μπορει να αποδειχθει η αρνηση της Εικασιας του Συνεχους. Αργοτερα, το 1966, ο P.Cohen εδειξε οτι δεν αποδεικνυεται και η Εικασια του Συνεχους.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1 Αποδειξτε τις ιδιοτητες της πληθικης ισοδυναμιας συνολων που εκφραζει η προταση 1 (σελιδα 63).

4.2 Εστω $A$ συνολο. Για καθε $B \subseteq A$ οριζουμε τη συναρτηση $\chi_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ (χαρακτηριστικη συναρτηση του $B$) ως εξης:

$$\chi_B(y)=1, \text{ αν } y \in B \quad \text{και} \quad \chi_B(y)=0, \text{ αν } y \notin B.$$

Αποδειξτε οτι:

i) Αν $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $B \neq C$, τοτε $\chi_B \neq \chi_C$.

ii) Για καθε $f : A \longrightarrow \{0,1\}$, υπαρχει $B \subseteq A$ ωστε $f=\chi_B$.

Με βαση τα παραπανω δειξτε οτι για καθε συνολο $A$ ισχυει: $\mathcal{P}A \sim \{0,1\}^A$.

4.3 Εστω $n \in \omega$ και $f : n \longrightarrow n$. Αποδειξτε οτι αν η $f$ ειναι 1-1, τοτε ειναι επι του $n$. Αποδειξτε και το αντιστροφο, δηλαδη οτι αν η $f$ ειναι επι του $n$, τοτε ειναι 1-1.

4.4 Αποδειξτε οτι αν $n \in \omega$ και $X \subseteq n$, τοτε υπαρχει $m \in \omega$, $m \leq n$ ωστε $X \sim m$. Δειξτε επιπλεον οτι αν $X \subset n$, τοτε υπαρχει $m \in \omega$, $m < n$ ωστε $X \sim m$.

4.5 Αποδειξτε οτι η ενωση πεπερασμενου συνολου πεπερασμενων συνολων ειναι πεπερασμενη.

4.6 Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε φυσικους αριθμους $n, m$: $n \times m \sim n \cdot m$.

4.7 Αποδειξτε οτι το καρτεσιανο γινομενο μιας πεπερασμενης οικογενειας πεπερασμενων συνολων ειναι πεπερασμενο.

4.8 Εστω $A$ αριθμησιμο συνολο. Εστω $X \neq \emptyset$. Αποδειξτε οτι τα παρακατω ειναι ισοδυναμα:

i) Το $X$ ειναι το πολυ αριθμησιμο.

ii) $\exists f (f : X \xrightarrow{1-1} A)$.

iii) $\exists f (f : A \xrightarrow[\text{επι}]{} X)$.

4.9 Αποδειξτε την παρακατω γενικευση του Διαγωνιου Λημματος:
"Το δυναμοσυνολο $\mathcal{P}A$ δεν ειναι ισοπληθικο με κανενα υποσυνολο του $A$".
Με βαση το παραπανω, δειξτε οτι δεν υπαρχει συνολο ολων των συνολων.

4.10 Συμπληρωστε την αποδειξη της προτασης 12 (σελιδα 71) ελεγχοντας οτι η συναρτηση $F$ ειναι 1-1.

4.11 Αποδειξτε οτι η ενωση μιας πεπερασμενης οικογενειας το πολυ αριθμησιμων συνολων ειναι το πολυ αριθμησιμο συνολο.

4.12 Εστω A συνολο. Δειξτε οτι υπαρχει η ακολουθια $({}^{n}A)_{n\in\omega}$, οπου ${}^{n}A$ ειναι το συνολο των πεπερασμενων ακολουθιων μηκους n με τιμες στο A. Αποδειξτε οτι υπαρχει το συνολο Seq(A) ολων των πεπερασμενων ακολουθιων με τιμες στο A. Αποδειξτε οτι αν το συνολο $A\neq\emptyset$ ειναι το πολυ αριθμησιμο, τοτε για καθε $n\in\omega$ τα συνολα ${}^{n}A$ ειναι το πολυ αριθμησιμα. Αποδειξτε επισης οτι τοτε το συνολο Seq(A) ειναι αριθμησιμο.

4.13 Δειξτε οτι υπαρχει μια αριθμηση $(P_n)_{n\in\omega}$ του συνολου των πολυωνυμικων συναρτησεων απο το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με ακεραιους συντελεστες. Αποδειξτε οτι το συνολο των αλγεβρικων αριθμων πραγματικων αριθμων ειναι αριθμησιμο.

4.14 Αποδειξτε οτι ενα συνολο ειναι ισοπληθικο με καποιο γνησιο υποσυνολο του εαν και μονον εαν περιεχει αριθμησιμο υποσυνολο.

4.15 Εστω οτι το συνολο X περιεχει ενα αριθμησιμο υποσυνολο. Εστω $b\notin X$. Αποδειξτε οτι τοτε $X\sim X\cup\{b\}$. Αποδειξτε γενικοτερα οτι αν B ειναι ενα το πολυ αριθμησιμο συνολο, ξενο με το X, τοτε $X \sim X\cup B$.

4.16 Χρησιμοποιωντας τη προηγουμενη ασκηση, αποδειξτε οτι καθενα απο τα παρακατω υποσυνολα του $\mathbb{R}$ εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους.

i) $(a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $[a,b)$ (οπου $a,b\in\mathbb{R}$ και $a<b$),

ii) $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ (οπου $a\in\mathbb{R}$),

iii) $(0,1)\cup\{0,1,\ldots,n\}$ (οπου $n\in\omega$, $n\neq 0$),

iv) $(0,1)\cup(\mathbb{Q}\cap(1,2))$,

v) $(0,1)-\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

4.17 Εστω $A_1\cap B_1=\emptyset$ και $A_2\cap B_2=\emptyset$. Αποδειξτε οτι

$$A_1\sim A_2 \wedge B_1\sim B_2 \rightarrow A_1\cup B_1\sim A_2\cup B_2.$$

4.18 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε συνολα $A_1, A_2, B_1, B_2$:

$$A_1\sim A_2 \wedge B_1\sim B_2 \rightarrow A_1\times B_1\sim A_2\times B_2.$$

4.19 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε συνολα $A_1, A_2, B_1, B_2$:

$$A_1\sim A_2 \wedge B_1\sim B_2 \rightarrow A_1^{B_1}\sim A_2^{B_2}.$$

4.20 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε συνολα A, B, C ισχυει:

i) $A\times\emptyset\sim\emptyset$,

ii) $A\times\{\emptyset\}\sim A$,

iii) $A\times B\sim B\times A$,

iv) $(A\times B)\times C\sim A\times(B\times C)$.

4.21 Αποδειξτε οτι για οποιονδηποτε πληθικο αριθμο m και $n \in \omega$, $n \neq 0$:

$$m \cdot n = m + m + \ldots + m \quad (n \text{ φορες}).$$

4.22 Αποδειξτε οτι για καθε συνολο A ισχυει:

i) $A^{\emptyset} \sim \{\emptyset\}$, ii) $A^{\{\emptyset\}} \sim A$,

iii) $A^{\{0,1\}} \sim A \times A$, iv) $\{\emptyset\}^{A} \sim \{\emptyset\}$,

v) $\emptyset^{A} \sim \emptyset$ (για $A \neq \emptyset$).

4.23 Εστω οτι A,B ειναι ξενα συνολα. Αποδειξτε οτι για καθε συνολο C:

$$C^{A \cup B} \sim C^{A} \times C^{B}.$$

4.24 Αποδειξτε οτι για οποιαδηποτε συνολα A,B,C ισχυει:

i) $(A \times B)^{C} \sim A^{C} \times B^{C}$,

ii) $A^{B \times C} \sim (A^{B})^{C}$.

4.25 Αποδειξτε οτι για καθε $n \in \omega$ εχουμε $n \times [0,1) \sim [0,n)$. Αποδειξτε επισης οτι $\omega \times [0,1) \sim [0,+\infty)$.

4.26 Αποδειξτε οτι για οποιονδηποτε πληθικο αριθμο m και $n \in \omega$, $n \neq 0$:

$$m^{n} = m \cdot m \cdot \ldots \cdot m \quad (n \text{ φορες}).$$

4.27 Εστω $A \sim A_1$ και $B \sim B_1$. Αποδειξτε οτι αν υπαρχει $f: A \xrightarrow{1-1} B$, τοτε υπαρχει $g: A_1 \xrightarrow{1-1} B_1$.

4.28 Εστω $A \subseteq B$. Αποδειξτε οτι για καθε συνολο C υπαρχουν συναρτησεις:

i) $F: A \times C \xrightarrow{1-1} B \times C$,

ii) $G: A^{C} \xrightarrow{1-1} B^{C}$,

iii) $H: C^{A} \xrightarrow{1-1} C^{B}$ (για $C \neq \emptyset$).

4.29 Βρειτε παραδειγματα πληθικων αριθμων m,n,p για τους οποιους δεν ικανοποιουνται τα παρακατω:

i) $m < n \longrightarrow p+m < p+n$,

ii) $m < n \longrightarrow p \cdot m < p \cdot n$,

iii) $m < n \longrightarrow m^{p} < n^{p}$,

iv) $m < n \longrightarrow p^{m} < p^{n}$ (για $p \neq 0$).

4.30 Αποδειξτε τους νομους για τους πληθικους αριθμους που εκφραζει η προταση 29 (σελιδα 80).

4.31 Εστω οτι $B \subseteq \{0,1\}^{\omega}$ αποτελειται απο εκεινες τις ακολουθιες που ειναι τελικα ισες με 1. Εστω $X = \{0,1\}^{\omega} - B$. Αποδειξτε οτι το B ειναι αριθμησιμο και, με βαση την ασκηση 4.15, δειξτε οτι $\mathrm{card}(X) = 2^{\aleph_0}$.

Για καθε ακολουθια $a=(a_n)_{n\in\omega}$, $a\in X$ θετουμε:

$$f(a)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n/2^n.$$

Αποδειξτε οτι $f: X \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$, και συνεπως οτι $2^{\aleph_0}\leq c$.

4.32 Αποδειξτε τις αριθμητικες ιδιοτητες του $c$, που εκφραζει η προταση 32.

4.33 Αποδειξτε οτι για καθε πληθικο αριθμο $m\neq 1$ ισχυει: $m<m^m$.

4.34 Βρειτε τους πληθικους αριθμους του συνολου των:

i) Ακολουθιων με τιμες στο $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

ii) Συναρτησεων απο το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Q}$.

4.35 Βρειτε τον πληθικο αριθμο του συνολου $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ των συνεχων πραγματικων συναρτησεων πραγματικης και δειξτε οτι το $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ δεν ειναι πληθικα ισοδυναμο με το συνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ολων των πραγματικων συναρτησεων πραγματικης μεταβλητης.

4.36 Αποδειξτε οτι οι προτασεις:

i) Για καθε πληθικο αριθμο $m$: $\aleph_0\leq m\leq c \rightarrow m=\aleph_0 \vee m=c$.

ii) Δεν υπαρχει πληθικος αριθμος $m$ τετοιος ωστε: $\aleph_0<m<c$.

ειναι ισοδυναμες και οτι ειναι συνεπειες της Εικασιας του Συνεχους.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΟΙ ΔΙΑΤΑΚΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

## 5.1 Καλες διαταξεις.

Ορισμος. Μια (γνησια) γραμμικη διαταξη $R$ ενος συνολου $A$ λεγεται καλη διαταξη του, οταν σε καθε μη κενο υποσυνολο $B$ του $A$ υπαρχει ελαχιστο (ως προς την διαταξη $R$) στοιχειο, δηλαδη

$$B\subseteq A \wedge B\neq\emptyset \longrightarrow (\exists x\in B)(\forall y\in B)(y\neq x \longrightarrow xRy).$$

Το ελαχιστο στοιχειο ενος $B\subseteq A$, $B\neq\emptyset$ (που ειναι μοναδικο) συμβολιζεται $\min_R B$ (ή απλως $\min B$, αν δεν υπαρχει κινδυνος παρεξηγησης). Εχουμε προφανως: $a=\min_R B \leftrightarrow a\in B \wedge \forall y(yRa \longrightarrow y\notin B)$.
Το ζευγος $\langle A,R\rangle$ λεγεται καλα διατεταγμενο συνολο, αν η σχεση $R$ ειναι καλη διαταξη του $A$ και $R\subseteq A\times A$.

Παραδειγμα 1. i) Η Αρχη Ελαχιστου για τους φυσικους αριθμους μας λεει οτι η διαταξη $<$ του συνολου $\omega$ ειναι μια καλη διαταξη του. Ευκολα βλεπουμε οτι για καθε $X\subseteq\omega$, το $X$ ειναι καλα διατεταγμενο απο τη σχεση $<\cap X^2$ (ασκηση 5.1). Ειδικα λοιπον, για καθε φυσικο αριθμο $n$, η διαταξη $<$ στο $n$ (δηλαδη η $<\cap n\times n$) ειναι καλη διαταξη του $n$.
ii) Οι γνωστες διαταξεις των $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ δεν ειναι καλες.

Παρατηρηση. Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Αν $A\neq\emptyset$, τοτε υπαρχει το ελαχιστο του στοιχειο. Εστω $a_0=\min A$. Το $a_0$ ειναι το μικροτερο στοιχειο του $A$. Αν $A-\{a_0\}\neq\emptyset$, τοτε υπαρχει το $\min(A-\{a_0\})=a_1$. Εχουμε $a_0<a_1$ και το $a_1$ ειναι αμεσως επομενο του $a_0$ (ασκηση 5.2). Αν $A-\{a_0,a_1\}\neq\emptyset$, τοτε υπαρχει το $\min(A-\{a_0,a_1\})=a_2$. Εχουμε $a_0<a_1<a_2$ και το $a_2$ ειναι αμεσως επομενο του $a_1$. Την παρακανω διαδικασια μπορουμε να την συνεχισουμε οσο υπαρχουν στοιχεια στο $A$. Εστω οτι εχουμε $a_0<a_1<\ldots<a_n$ και εστω $A-\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}\neq\emptyset$. Θετουμε $a_{n+1}=\min(A-\{a_0,a_1,\ldots,a_n\})$. Τοτε εχουμε $a_0<a_1<\ldots<a_n<a_{n+1}$ και το $a_{n+1}$ ειναι αμεσως επομενο του $a_n$. Αν το $A$ δεν ειναι πεπερασμενο, τοτε οριζεται μια απειρη ακολουθια $(a_n)_{n\in\omega}$, διαδοχικων ως προς τη διαταξη $<$, στοιχειων του $A$, τετοια ωστε για καθε $n\in\omega$ $a_n<a_{n+1}$. Οι οροι της ακολουθιας αποτελουν "αρχικο τμημα" του διατεταγμενου συνολου $\langle A,<\rangle$. Αν $A=\{a_n : n\in\omega\}$, τοτε η διαταξη $<$ στο $A$ ειναι ομοια με τη διαταξη των φυσικων αριθμων. Αν ομως $A-\{a_n : n\in\omega\}\neq\emptyset$, μπορουμε να συνεχισουμε τη διαδικασια. Εστω $a_\omega=\min(A-\{a_n : n\in\omega\})$. Για καθε $n\in\omega$ εχουμε: $a_n<a_\omega$ (το $a_\omega$ ειναι μεγαλυτερο απο ολους τους ορους της ακολουθιας $(a_n)_{n\in\omega}$) και το $a_\omega$ ειναι το μικροτερο στοιχειο του $A$ μ' αυτη την ιδιο-

τητα. Ας προσεξουμε οτι το $a_\omega$ δεν εχει αμεσως προηγουμενο στοιχειο. Αν το $a_\omega$ δεν ειναι το μεγαλυτερο στοιχειο του Α, τοτε η παραπανω διαδικασια μπορει να συνεχιστει.

Παραδειγμα 2. Εστω $B=\{\frac{n}{n+1}: n\in\omega\}\cup\{1\}$. Το $B$ ειναι καλα διατεταγμενο απο τη διαταξη $<$ του συνολου $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμων. Η διαταξη $<$, περιορισμενη στο $B-\{1\}$ ειναι ομοια με τη διαταξη του $\omega$. Η διαδικασια που περιγραψαμε παραπανω δινει $a_n=\frac{n}{n+1}$ για $n\in\omega$ και $a_\omega=1$.

Ορισμοι. Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Ενα υποσυνολο $B$ του $A$ λεγεται *αρχικο τμημα* του $\langle A,<\rangle$, αν για οποιαδηποτε $x,y$:

$$x\in B \wedge y<x \longrightarrow y\in B,$$

δηλαδη μαζι με καθε στοιχειο του $B$, ανηκουν στο $B$ ολα τα προηγουμενα του. Ενα αρχικο τμημα $B$ λεγεται *γνησιο* αν $B\neq A$. Για καθε $a\in A$, το συνολο

$$O_<(a)=\{x\in A: x<a\}$$

το λεμε *αρχικο τμημα που οριζεται απο το a*. Συχνα, αντι για $O_<(a)$ γραφουμε απλως $O(a)$, αν αυτο δεν οδηγει σε παρεξηγησεις.

Παρατηρηση. Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Ευκολα βλεπουμε οτι για καθε $a\in A$ το συνολο $O_<(a)$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $\langle A,<\rangle$. Ισχυει και το αντιστροφο. Καθε γνησιο αρχικο τμημα $B$ οριζεται απο ενα στοιχειο του $A$, δηλαδη υπαρχει $a\in A$ τετοιο ωστε $B=O_<(a)$ (ασκηση 5.5).

Θα αποδειξουμε μερικες ιδιοτητες των καλα διατεταγμενων συνολων.

Προταση 1. Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Δεν υπαρχει ακολουθια $(x_n)_{n\in\omega}$ στοιχειων του $A$ τετοια ωστε για καθε $n\in\omega$: $x_{n+1}<x_n$. Δεν υπαρχει δηλαδη απειρη $<$-φθινουσα ακολουθια.

Αποδειξη: Ας υποθεσουμε οτι $(x_n)_{n\in\omega}$ ειναι μια ακολουθια στοιχειων του $A$, τετοια ωστε:

$$\ldots<x_{n+1}<x_n<\ldots<x_1<x_0.$$

Τοτε το συνολο $\{x_n: n\in\omega\}$ τιμων της ακολουθιας δεν εχει ελαχιστο στοιχειο. Ατοπο. ■

Προταση 2. Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Εστω οτι $f:A\longrightarrow A$ ειναι γνησια αυξουσα, δηλαδη για καθε $x,y$ του $A$:

$$x<y \longrightarrow f(x)<f(y).$$

Τοτε για καθε $x\in A$ ισχυει: $x\leq f(x)$ (δηλαδη $x<f(x)$ ή $x=f(x)$).

Αποδειξη: Αρκει να αποδειξουμε οτι το συνολο $B=\{x\in A: f(x)<x\}$ ειναι κενο. Εστω οτι $B\neq\emptyset$ και $a=\min B$. Τοτε $f(a)<a$ και για καθε $x<a$ εχουμε: $x\leq f(x)$. Λογω του $f(a)<a$, πρεπει να ειναι: $f(a)\leq f(f(a))$. Επειδη ομως η $f$ ειναι

γνησια αυξουσα, απο το $f(a)<a$, επεται οτι $f(f(a))<f(a)$. Ατοπο. ∎

Προταση 3. Αν δυο καλα διατεταγμενα συνολα $\langle A,<_A\rangle$, $\langle B,<_B\rangle$ ειναι ομοια, τοτε ο ισομορφισμος τους ειναι μοναδικος. Υπαρχει δηλαδη ακριβως μια συναρτηση $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$ τετοια ωστε για καθε $x,y\in A$: $x<_A y \leftrightarrow f(x)<_B f(y)$.
Αποδειξη: Ας υποθεσουμε οτι $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$ και $g:A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$ ειναι ισομορφισμοι των διατεταγμενων συνολων $\langle A,<_A\rangle$, $\langle B,<_B\rangle$. Για καθε $x,y\in A$ εχουμε τοτε:

$$x<_A y \leftrightarrow f(x)<_B f(y) \quad \text{και} \quad x<_A y \leftrightarrow g(x)<_B g(y).$$

Επεται οτι για καθε $x,y\in A$ εχουμε:

$$x<_A y \longrightarrow f(x)<_B f(y) \longrightarrow g^{-1}(f(x))<_A g^{-1}(f(y)),$$

που σημαινει οτι η συνθεση $g^{-1}\circ f:A \longrightarrow A$ ειναι γνησια αυξουσα. Απο την προταση 2, επεται οτι για καθε $x\in A$: $x\leq_A g^{-1}(f(x))$, αρα $g(x)\leq_B f(x)$.

Ομοια αποδεικνυεται οτι η συναρτηση $f^{-1}\circ g:A \longrightarrow A$ ειναι γνησια αυξουσα. Επομενως για καθε $x\in A$ εχουμε: $x\leq_A f^{-1}(g(x))$, αρα $f(x)\leq_B g(x)$.

Απο τα παραπανω βλεπουμε λοιπον οτι για καθε $x\in A$ πρεπει να ειναι $f(x)=g(x)$. Αυτο σημαινει οτι οι ισομορφισμοι $f$ και $g$ ταυτιζονται. ∎

Προταση 4. Ενα καλα διατεταγμενο συνολο δεν ειναι ομοιο με κανενα γνησιο αρχικο του τμημα.
Αποδειξη: Εστω οτι $B$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του καλα διατεταγμενου συνολου $\langle A,<\rangle$. Τοτε $B=O(a)$ για καποιο $a\in A$. Ας υποθεσουμε οτι υπαρχει ισομορφισμος $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} O(a)$. Τοτε η $f:A \longrightarrow A$ ειναι γνησια αυξουσα και συνεπως (απο την προταση 2) πρεπει να ισχυει $a\leq f(a)$. Αυτο ειναι αδυνατο, διοτι $f(a)\in O(a)$. ∎

Πορισμα. Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Εστω $x,y\in A$, $x\neq y$. Τοτε τα αρχικα τμηματα $O(x)$ και $O(y)$ δεν ειναι ομοια.
Αποδειξη: Λογω του $x\neq y$, εχουμε $x<y$ ή $y<x$. Αν $x<y$, τοτε το $O(x)$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $O(y)$, αρα τα $O(x)$ και $O(y)$ δεν ειναι ισομορφικα. Ομοια στην περιπτωση $y<x$. ∎

## 5.2 Η Αρχη Υπερπεπερασμενης Επαγωγης.

Το παρακατω θεωρημα ειναι γενικευση της Αρχης Επαγωγης για τους φυσικους αριθμους. Μας επιτρεπει να κανουμε επαγωγικες αποδειξεις ως προς καλες διαταξεις, καθως και, οπως θα δουμε αργοτερα, επαγωγικους ορισμους πανω σε καλα διατεταγμενα συνολα.

Θεωρημα 1. (Αρχη Υπερπεπερασμενης Επαγωγης).
Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο και $X\subseteq A$. Ας υποθεσουμε πως για καθε $a\in A$, απο το γεγονος οτι ανηκουν στο $X$ ανηκουν ολα τα προηγουμενα

του a στοιχεια, επεται οτι και το a ανηκει στο X, δηλαδη

$$(\forall a\in A)(O_<(a)\subseteq X \longrightarrow a\in X).$$

Τοτε X=A.

Αποδειξη: Αν ηταν X⊂A, τοτε παιρνοντας a=min(A−X), θα ειχαμε οτι $a\notin X$ και $O_<(a)\subseteq X$. Ατοπο. ■

Η Αρχη Υπερπεπερασμενης Επαγωγης διατυπωνεται ισοδυναμα ως εξης.

Θεωρημα 2. Εστω <A,<> καλα διατεταγμενο συνολο. Εστω Φ τυπος. Ας υποθεσουμε οτι για καθε a∈A ισχυει:

$$((\forall x\in O_<(a))\Phi(x)) \longrightarrow \Phi(a).$$

Τοτε $(\forall a\in A)\Phi(a)$.

Αποδειξη: Θετουμε $X=\{x\in A:\Phi(x)\}$ και εχουμε οτι για καθε a∈A:

$$O_<(a)\subseteq X \longrightarrow a\in X.$$

Απο το θεωρημα 1, επεται οτι X=A, που σημαινει οτι $(\forall a\in A)\Phi(a)$. ■

Πιο κατω θα γνωρισουμε αρκετες εφαρμογες της Αρχης Υπερπεπερασμενης Επαγωγης.

## 5.3 Συγκριση καλων διαταξεων.

Ορισμος. Εστω <A,R>,<B,S> καλα διατεταγμενα συνολα. Λεμε οτι η διαταξη R ειναι μικροτερη απο την S, και γραφουμε $\langle A,R\rangle \prec \langle B,S\rangle$, οταν το <A,R> ειναι ομοιο με καποιο γνησιο αρχικο τμημα του <B,S>.

Η προταση 4 και οι ασκησεις 5.14, 5.15 μπορουν να διατυπωθουν ως εξης.

Προταση 5. Εστω <A,R>,<B,S>,<C,T> καλα διατεταγμενα συνολα.

i) $\neg(\langle A,R\rangle \prec \langle A,R\rangle)$.

ii) $\langle A,R\rangle \prec \langle B,S\rangle \longrightarrow \neg(\langle B,S\rangle \prec \langle A,R\rangle)$.

iii) $\langle A,R\rangle \prec \langle B,S\rangle \wedge \langle B,S\rangle \prec \langle C,T\rangle \longrightarrow \langle A,R\rangle \prec \langle C,T\rangle$.

Το επομενο θεωρημα ειναι γνωστο ως Νομος Τριχοτομιας του Cantor για τις καλες διαταξεις.

Θεωρημα 3. Για οποιαδηποτε καλα διατεταγμενα <A,R>,<B,S> ισχυει:

$$\langle A,R\rangle \prec \langle B,S\rangle \text{ ή } \langle A,R\rangle \approx \langle B,S\rangle \text{ ή } \langle B,S\rangle \prec \langle A,R\rangle.$$

Αποδειξη: Θεωρουμε τη σχεση

$$F=\{\langle x,y\rangle\in A\times B: O_R(x)\approx O_S(y)\},$$

οπου το $O_R(x)\approx O_S(y)$ σημαινει οτι αρχικο τμημα $O_R(x)$ του <A,R> ειναι ομοιο με το αρχικο τμημα $O_S(y)$ του <B,S>.

Απο το πορισμα στη σελιδα 91 εχουμε οτι για οποιαδηποτε x,y,z:

$$\langle x,y\rangle\in F\wedge\langle x,z\rangle\in F \longrightarrow y=z,$$

δηλαδη η $F$ ειναι συναρτηση. Ομοια αποδεικνυεται οτι η $F$ ειναι 1-1, δηλαδη οτι και η $F^{-1}$ ειναι συναρτηση.

Παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου $dom(F)$ της $F$ ειναι αρχικο τμημα του $\langle A,R\rangle$. Πραγματικα, εστω $a\in dom(F)$ και $xRa$. Τοτε $O_R(a)\cong O_S(b)$ για καποιο $b\in B$. Το $O_R(x)$ ειναι αρχικο τμημα του $O_R(a)$, αρα (ασκηση 5.7) ειναι ομοιο με ενα αρχικο τμημα του $O_S(b)$. Υπαρχει λοιπον $y\in B$ τετοιο ωστε $O_R(x)\cong O_S(y)$. Αρα $\langle x,y\rangle\in F$ και συνεπως $x\in dom(F)$.

Ομοια αποδεικνυεται οτι το $rng(F)=dom(F^{-1})$ ειναι αρχικο τμημα του $\langle B,S\rangle$. Εχουμε λοιπον $F:dom(F)\xrightarrow[\text{επι}]{1-1} rng(F)$.

Θα αποδειξουμε οτι η $F$ ειναι ισομορφισμος. Αρκει να ελεγξουμε οτι διατηρει τις διαταξεις $R,S$, δηλαδη οτι για καθε $x_1,x_2\in dom(F)$:

$$x_1Rx_2 \longrightarrow F(x_1)SF(x_2).$$

Εστω $x_1,x_2\in dom(F)$, $F(x_1)=y_1$, $F(x_2)=y_2$. Τοτε $O_R(x_1)\cong O_S(y_1)$, $O_R(x_2)\cong O_S(y_2)$ και $O_R(x_1)\subset O_R(x_2)$. Επειδη τα $O_R(x_2)$, $O_S(y_2)$ ειναι ομοια και το $O_R(x_1)$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $O_R(x_2)$, επεται οτι το $O_R(x_1)$ ειναι ομοιο με ενα γνησιο αρχικο τμημα $O_S(z)$ του $O_S(y_2)$. Συνεπως, για καποιο $z\in B$, $zSy_2$, εχουμε $O_S(z)\cong O_R(x_1)$. Αφου $O_R(x_1)\cong O_S(y_1)$, εχουμε $O_S(y_1)\cong O_S(z)$. Απο το πορισμα στη σελιδα 91, επεται οτι $z=y_1$. Αρα $y_1Sy_2$, που σημαινει οτι $F(x_1)SF(x_2)$.

Οι διαταξεις $R$ στο $dom(F)$ και $S$ στο $rng(F)$ ειναι λοιπον ομοιες. Αν $dom(F)=A$ και $rng(F)=B$, τοτε εχουμε $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$. Αν $dom(F)=A$ και το $rng(F)$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $\langle B,S\rangle$, τοτε $\langle A,R\rangle\prec\langle B,S\rangle$. Αν το $dom(F)$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $\langle A,R\rangle$ και $rng(F)=B$, τοτε εχουμε $\langle B,S\rangle\prec\langle A,R\rangle$.

Αρκει να αποδειξουμε οτι αποκλειεται η περιπτωση να ειναι και το $dom(F)$ και το $rng(F)$ γνησια αρχικα τμηματα. Πραγματικα, ας υποθεσουμε οτι $dom(F)=O_R(a)$ και $rng(F)=O_S(b)$, για καποια $a\in A$, $b\in B$. Τοτε θα ειχαμε

$$F:O_R(a)\xrightarrow[\text{επι}]{1-1} O_S(b),$$

και επειδη η $F$ ειναι ισομορφισμος, θα ηταν $O_R(a)\cong O_S(b)$. Επομενως, απο τον ορισμο της $F$, $\langle a,b\rangle\in F$. Τοτε ομως θα ειχαμε $a\in dom(F)$, που δεν ειναι δυνατο, διοτι $dom(F)=O_R(a)$. ∎

<u>Παρατηρηση</u>. Η διαζευξη στο παραπανω θεωρημα ειναι αποκλειστικη. Λογω της προτασης 4, δεν ειναι δυνατο να ισχυουν συγχρονως δυο απο τις συνθηκες: $\langle A,R\rangle\prec\langle B,S\rangle$, $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$, και $\langle B,S\rangle\prec\langle A,R\rangle$.

<u>Πορισμα</u>. Αν δυο συνολα $X,Y$ δεχονται καλες διαταξεις, τοτε το $X$ ειναι

ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του Y ειτε το Y ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του X. Εχουμε δηλαδη

$$\mathrm{card}(X)\leq\mathrm{card}(Y) \vee \mathrm{card}(Y)\leq\mathrm{card}(X),$$

που σημαινει οτι οι πληθικοι αριθμοι των συνολων X, Y συγκρινονται.

## 5.4 Διατακτικοι αριθμοι.

Ο Cantor ορισε τους διατακτικους αριθμους ως διατακτικους τυπους των καλα διατεταγμενων συνολων, δηλαδη ως αφηρημενους αντιπροσωπους για τις κλασεις ομοιων καλων διαταξεων. Αναπτυξε μια πλουσια θεωρια των διατακτικων αριθμων. Η υπερπεπερασμενη επαγωγη πανω στους διατακτικους αριθμους χρησιμοποιειται μεχρι σημερα στις μαθηματικες αποδειξεις και κατασκευες συνολων.

Οι μαθηματικοι σταματησαν να εχουν επιφυλαξεις για αυτους τους αφηρημενους "αριθμους", οταν ο J. von Neumann (το 1928) εδωσε εναν κομψο ορισμο των διατακτικων αριθμων. Εδειξε οτι για καθε καλα διατεταγμενο συνολο $\langle A,R\rangle$ υπαρχει ακριβως ενα μεταβατικο συνολο T τετοιο ωστε το $\langle A,R\rangle$ ειναι ομοιο με το $\langle T,\in_T\rangle$. Ετσι καθε καλη διαταξη ειναι λοιπον ομοια με τη σχεση του "ανηκειν" περιορισμενη σε ενα μεταβατικο συνολο T, το οποιο μαλιστα βρισκουμε με εναν ομοιομορφο, κατασκευαστικο τροπο. Θα ορισουμε ως διατακτικο τυπο $\overline{\langle A,R\rangle}$, του καλα διατεταγμενου συνολου $\langle A,R\rangle$, το μοναδικο αυτο συνολο T και θα δουμε οτι ικανοποιειται το αιτημα του Cantor:

$$\overline{\langle A,R\rangle}=\overline{\langle B,S\rangle} \leftrightarrow \langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle.$$

Παρακατω θα ορισουμε τους διατακτικους αριθμους ως συνολα με τη μεθοδο του von Neumann. Ας δουμε πρωτα ενα παραδειγμα.

<u>Παραδειγμα 3</u>. Εστω $A=\{\frac{n}{n+1}:\ n\in\omega\}$, $\prec\ =<_{\mathbb{R}}\cap(A\times A)$. Το $\langle A,\prec\rangle$ ειναι ομοιο με το $\langle\omega,\in_\omega\rangle$. Για τον (μοναδικο) ισομορφισμο $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \omega$, εχουμε $f(0)=\emptyset$, $f(\frac{1}{2})=\{\emptyset\}$, $f(\frac{2}{3})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ και γενικα

$$f(\tfrac{n}{n+1})=n=\{0,1,\ldots,n-1\}=\{f(0),f(\tfrac{1}{2}),\ldots,f(\tfrac{n-1}{n})\}.$$

Ισχυει δηλαδη $f(x)=\{f(y):y\prec x\}$, για καθε $x\in A$ (ασκηση 5.16).

<u>Ορισμος</u>. Εστω $\langle A,R\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Ενα μεταβατικο συνολο T λεγεται <u>∈-εικονα</u> του $\langle A,R\rangle$, οταν $\langle A,R\rangle\simeq\langle T,\in_T\rangle$. Ο μοναδικος ισομορφισμος $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} T$, λεγεται <u>∈-ισομορφισμος</u> του $\langle A,R\rangle$.

<u>Προταση 8</u>. Εστω T ∈-εικονα του $\langle A,<\rangle$. Ο ∈-ισομορφισμος $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} T$ εχει την ιδιοτητα:

$$(\forall a\in A)\ f(a)=\{f(x):x<a\}.$$

Αποδειξη: Εστω $a \in A$. Η f διατηρει τις διαταξεις $<$ και $\in_T$, αρα για καθε για καθε $x \in A$: $x<a \rightarrow f(x) \in f(a)$. Επομενως $\{f(x): x<a\} \subseteq f(a)$.

Ας υποθεσουμε οτι $t \in f(a)$. Λογω μεταβατικοτητας του T, εχουμε $t \in T$. Υπαρχει λοιπον $x \in A$ (η f ειναι επι του T) ωστε $t=f(x)$ και $f(x) \in_T f(a)$. Επεται οτι $x<a$ και συνεπως $t \in \{f(x): x<a\}$. Αρα $f(a) \subseteq \{f(x): x<a\}$.

Αποδειξαμε οτι για καθε $a \in A$ ισχυει: $f(a)=\{f(x): x<a\}$, που ειναι το ζητουμενο. ∎

Παρατηρηση. Αν T ειναι $\in$-εικονα του $\langle A, R\rangle$, τοτε ο $\in$-ισομορφισμος του $\langle A, R\rangle$ διδεται απο

$$f(a)=f[O_R(a)]=\mathrm{rng}(f \upharpoonright O_R(a)).$$

Παραδειγμα 4. Εστω $B=\{\frac{n}{n+1}: n \in \omega\} \cup \{1\}$. Θα βρουμε την $\in$-εικονα του καλα διατεταγμενου συνολου $\langle B, \prec\rangle$, οπου $\prec = <_R \cap (B \times B)$. Ας υποθεσουμε οτι η f ειναι ισομορφισμος των $\langle B, \prec\rangle$ και $\langle T, \in_T\rangle$. Τοτε για καθε $n \in \omega$ πρεπει να ισχυει (απο την προταση 6): $f(\frac{n}{n+1})=\{f(x): x \prec \frac{n}{n+1}\}$. Αρα $f(0)=\emptyset$. Ευκολα ελεγχουμε με επαγωγη οτι για καθε $n \in \omega$: $f(\frac{n}{n+1})=n$. Εχουμε ακομα $f(1)=\omega$, αφου $f(1)=\{f(x): x \prec 1\}=\{f(\frac{n}{n+1}): n \in \omega\}=\{n: n \in \omega\}=\omega$.

Βλεπουμε λοιπον οτι αν T ειναι $\in$-εικονα του $\langle B, \prec\rangle$, πρεπει να ισχυει $T=\omega \cup \{\omega\}$. Η συναρτηση f με $f(a)=\{f(x): x \prec a\}$ για $a \in B$, ειναι $\in$-ισομορφισμος των $\langle B, \prec\rangle$ και $\langle \omega \cup \{\omega\}, \in_{\omega \cup \{\omega\}}\rangle$.

Αργοτερα θα δουμε οτι για καθε καλα διατεταγμενο συνολο υπαρχει μια $\in$-εικονα του. Τωρα θα αποδειξουμε την μοναδικοτητα.

Προταση 7. Εστω $\langle A, <\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Υπαρχει το πολυ μια $\in$-εικονα του $\langle A, <\rangle$.

Αποδειξη: Εστω T, S μεταβατικα συνολα. Ας υποθεσουμε οτι $f: A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} T$ και $g: A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} S$ ειναι $\in$-ισομορφισμοι του $\langle A, <\rangle$. Θα αποδειξουμε οτι $f=g$ και συνεπως $T=S$.

Θεωρουμε το συνολο $C=\{x \in A: f(x)=g(x)\}$. Χρησιμοποιωντας την Αρχη Υπερπεπερασμενης Επαγωγης, θα δειξουμε οτι $C=A$. Εστω $a \in A$ και $O(a) \subseteq C$. Τοτε εχουμε $f(x)=g(x)$ για καθε $x<a$. Επεται οτι (προταση 6)

$$f(a)=\{f(x): x<a\}=\{g(x): x<a\}=g(a),$$

που σημαινει οτι $a \in C$.

Αποδειξαμε λοιπον οτι για καθε $a \in A$: $O(a) \subseteq C \rightarrow a \in C$. Αρα $C=A$. Αυτο σημαινει οτι $f=g$ και επομενως $T=S$. ∎

Πορισμα. Εστω οτι $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ ειναι καλα διατεταγμενα συνολα με $\in$-εικονες α και β, αντιστοιχα. Απο την παραπανω προταση επεται οτι:

$$\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle \leftrightarrow \alpha=\beta.$$

<u>Ορισμος</u>. Καθε μεταβατικο συνολο $T$ που ειναι καλα διατεταγμενο απο τη σχεση $\in_T=\{\langle x,y\rangle\in T\times T: x\in y\}$ λεγεται <u>διατακτικος αριθμος</u>.

<u>Παραδειγμα 5</u>. i) Οι φυσικοι αριθμοι ειναι διατακτικοι αριθμοι.

ii) Το συνολο $\omega$ των φυσικων αριθμων ειναι διατακτικος αριθμος.

iii) Αν το συνολο $\alpha$ ειναι διατακτικος αριθμος, τοτε και το συνολο συνολο $\alpha\cup\{\alpha\}$ ειναι διατακτικος αριθμος (ασκηση 5.19). Ειδικα εχουμε οτι τα συνολα:

$$\omega\cup\{\omega\},\ \omega\cup\{\omega\}\cup\{\omega\cup\{\omega\}\},\ \omega\cup\{\omega\}\cup\{\omega\cup\{\omega\}\}\cup\{\omega\cup\{\omega\}\cup\{\omega\cup\{\omega\}\}\},\ \text{κ.ο.κ.}$$

ειναι διατακτικοι αριθμοι.

Οι διατακτικοι αριθμοι παραδοσιακα συμβολιζονται με μικρα γραμματα του ελληνικου αλφαβητου. Στη συνεχεια, αυτα τα γραμματα θα τα χρησιμοποιουμε <u>μονο</u> για διατακτικους αριθμους. Ετσι λοιπον, οταν θα γραφουμε $\Phi(\xi)$, θα εννοουμε: "$\xi$ ειναι διατακτικος αριθμος και $\Phi(\xi)$".

<u>Παρατηρηση</u>. Οι $\in$-εικονες των καλα διατεταγμενων συνολων ειναι προφανως διατακτικοι αριθμοι. Ισχυει και το αντιστροφο, δηλαδη καθε διατακτικος αριθμος $\alpha$ ειναι $\in$-εικονα ενος καλα διατεταγμενου συνολου (του $\langle\alpha,\in_\alpha\rangle$). Οι διατακτικοι αριθμοι χαρακτηριζονται λοιπον ως οι $\in$-εικονες των καλα διατεταγμενων συνολων.

<u>Ορισμος</u>. Αν ο διατακτικος αριθμος $\alpha$ ειναι $\in$-εικονα ενος καλα διατεταγμενου συνολου $\langle A,R\rangle$, τοτε λεμε οτι το $\alpha$ <u>διατακτικο αριθμο του $\langle A,R\rangle$</u> και γραφουμε $\overline{\langle A,R\rangle}=\alpha$. Λεμε επισης οτι το $\langle A,R\rangle$ ειναι καλη διαταξη τυπου $\alpha$.

Το τελευταιο πορισμα μας λεει οτι:

$$\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle \leftrightarrow \overline{\langle A,R\rangle}=\overline{\langle B,S\rangle},$$

δηλαδη οτι οι διατακτικοι αριθμοι μπορουν να θεωρηθουν διατακτικοι τυποι των καλα διατεταγμενων συνολων.

Οι βασικες ιδιοτητες των διατακτικων αριθμων προκυπτουν απο τις γενικες ιδιοτητες των καλων διαταξεων, που γνωρισαμε νωριτερα.

<u>Προταση 8</u>. Για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους $\alpha,\beta$ ισχυει:

$$\langle\alpha,\in_\alpha\rangle\cong\langle\beta,\in_\beta\rangle \leftrightarrow \alpha=\beta.$$

<u>Προταση 9</u>. Τα αρχικα τμηματα των διατακτικων αριθμων ειναι διατακτικοι αριθμοι.

<u>Αποδειξη</u>: Εστω $\alpha$ διατακτικος αριθμος. Αν $X\in\alpha$, τοτε $\in_X=\in_\alpha\cap X^2$. Η σχεση

$\epsilon_X$ ειναι λοιπον καλη διαταξη του X (ασκηση 5.1). Αρκει να αποδειξουμε οτι αν X ειναι αρχικο τμημα του $\langle\alpha,\epsilon_\alpha\rangle$, τοτε ειναι μεταβατικο συνολο. Εστω $y\in X$ και $t\in y$. Τοτε $y\in\alpha$ και συνεπως $t\in\alpha$. Εχουμε λοιπον $t\,\epsilon_\alpha\, y$. Αν το X ειναι αρχικο τμημα του $\langle\alpha,\epsilon_\alpha\rangle$, τοτε πρεπει να ισχυει $t\in X$. ∎

<u>Προταση 10</u>. Εστω α διατακτικος αριθμος. Για καθε $x\in\alpha$ ισχυει:

$$O(x)=x.$$

<u>Αποδειξη</u>: Εστω $x\in\alpha$. Για καθε y εχουμε:

$$y\in O(x) \leftrightarrow y\,\epsilon_\alpha\, x \leftrightarrow y\in\alpha\wedge x\in\alpha\wedge y\in x \leftrightarrow y\in x.$$

(η τελευταια ισοδυναμια ισχυει, διοτι $x\in\alpha$ και το α ειναι μεταβατικο).
Αρα $O(x)=x$. ∎

<u>Πορισμα 1</u>. Καθε διατακτικος αριθμος ταυτιζεται με το συνολο των γνησιων αρχικων του τμηματων.

<u>Πορισμα 2</u>. Τα στοιχεια των διατακτικων αριθμων ειναι διατακτικοι αριθμοι.

<u>Πορισμα 3</u>. Εστω α,β διατακτικοι αριθμοι. Το $\langle\alpha,\epsilon_\alpha\rangle$ ειναι ομοιο με γνησιο αρχικο τμημα του $\langle\beta,\epsilon_\beta\rangle$ εαν και μονον εαν $\alpha\in\beta$.

<u>Προταση 11</u>. Για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους α,β,γ ισχυει:

i) $\alpha\notin\alpha$.

ii) $\alpha\in\beta \rightarrow \beta\notin\alpha$.

iii) $\alpha\in\beta \wedge \beta\in\gamma \rightarrow \alpha\in\gamma$.

iv) $\alpha\in\beta \vee \alpha=\beta \vee \beta\in\alpha$.

<u>Αποδειξη</u>: Το τελευταιο πορισμα μας λεει οτι: $\alpha\in\beta \leftrightarrow \langle\alpha,\epsilon_\alpha\rangle \prec \langle\beta,\epsilon_\beta\rangle$. Τα ζητουμενα προκυπτουν λοιπον απο την προταση 5 και το Νομο Τριχοτομιας για τις καλες διαταξεις (σελιδα 92). ∎

## 5.5 <u>Συγκριση διατακτικων αριθμων</u>.

<u>Ορισμος</u>. Εστω α,β διατακτικοι αριθμοι. Λεμε οτι ο α ειναι <u>μικροτερος</u> απο τον β και γραφουμε $\alpha<\beta$, οταν $\alpha\in\beta$. Λεμε οτι ο α ειναι μικροτερος η ισος β και γραφουμε $\alpha\leq\beta$, οταν $\alpha<\beta$ η $\alpha=\beta$.

<u>Παρατηρησεις</u>. 1) Το παραπανω πορισμα 3 μας λεει οτι για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους α,β:

$\alpha<\beta \leftrightarrow \langle\alpha,\epsilon_\alpha\rangle$ ειναι ομοιο με ενα γνησιο αρχικο τμημα του $\langle\beta,\epsilon_\beta\rangle$
(δηλαδη οταν $\langle\alpha,\epsilon_\alpha\rangle \prec \langle\beta,\epsilon_\beta\rangle$).

Αυτο σημαινει οτι η ιδιοτητα <, που ορισαμε πιο πανω, ταυτιζεται με την ιδιοτητα $\prec$ των καλα διατεταγμενων συνολων.

ii) Για τους φυσικους αριθμους η ιδιοτητα < συμφωνει με τη διαταξη τους.

Η προταση 11 μπορει να διατυπωθει και ως εξης:

Προταση 11'. Για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους $\alpha, \beta, \gamma$ ισχυει:

i) $\neg(\alpha<\alpha)$.

ii) $\alpha<\beta \rightarrow \neg(\beta<\alpha)$.

iii) $\alpha<\beta \wedge \beta<\gamma \rightarrow \alpha<\gamma$.

iv) $\alpha<\beta \vee \alpha=\beta \vee \beta<\alpha$.

Αντιστοιχους νομους για την ιδιοτητα $\leq$, εκφραζει η ασκηση 5.21.

Παρατηρηση. Ευκολα βλεπουμε οτι, για καθε διατακτικο αριθμο $\alpha$, η κλαση των διατακτικων αριθμων που ειναι μικροτεροι απο τον $\alpha$, ειναι συνολο. Πραγματικα, εχουμε:

$$\{\xi: \text{"}\xi \text{ ειναι διατακτικος αριθμος"} \wedge \xi<\alpha\}=\{\xi:\xi\in\alpha\}=\alpha.$$

Ξερουμε οτι για καθε διατακτικο αριθμο $\alpha$, το συνολο $\alpha\cup\{\alpha\}$ ειναι επισης διατακτικος αριθμος (ασκηση 5.19). Δεχομαστε τον ακολουθο ορισμο.

Ορισμος. Εστω $\alpha$ διατακτικος αριθμος. Ο διατακτικος αριθμος $\alpha\cup\{\alpha\}$ λεγεται επομενος του $\alpha$ και συμβολιζεται $\alpha'$.

Παρατηρησεις. Ειναι φανερο οτι για καθε διατακτικο αριθμο $\alpha$ ισχυει: $\alpha<\alpha'$. Ευκολα αποδεικνυεται οτι δεν υπαρχει διατακτικος αριθμος μεταξυ των $\alpha$ και $\alpha'$, δηλαδη ο $\alpha'$ ειναι αμεσως επομενος του $\alpha$ (ασκηση 5.22).

## 5.6 Συνολα διατακτικων αριθμων.

Προταση 12. Για καθε συνολο διατακτικων αριθμων $A$, η σχεση

$$<_A=\{\langle x,y\rangle\in A^2 : x<y\}$$

ειναι γραμμικη διαταξη του $A$.

Αποδειξη: Απο την προταση 11'. ∎

Το επομενο ειναι γνωστο ως Αρχη Ελαχιστου Διατακτικου Αριθμου.

Θεωρημα 4. Σε καθε μη κενο συνολο $B$ διατακτικων αριθμων υπαρχει ο μικροτερος διατακτικος αριθμος.

Αποδειξη: Εστω $\alpha$ οποιοδηποτε στοιχειο του $B$. Θεωρουμε το συνολο

$$C=B\cap\alpha=\{\xi:\xi\in B\wedge\xi<\alpha\}.$$

Αν $C=\emptyset$, τοτε το $\alpha$ ειναι το μικροτερο στοιχειο του $B$. Εστω οτι $C\neq\emptyset$. Το $\langle\alpha,\in_\alpha\rangle$ ειναι καλα διατεταγμενο συνολο και $C\subseteq\alpha$. Αρα υπαρχει $\beta\in C$ που ειναι ελαχιστο (ως προς τη διαταξη $\in_\alpha$). Για καθε γεα εχουμε οτι: αν γεβ, τοτε γ∉C. Θα δειξουμε οτι το β ειναι το μικροτερο στοιχειο του συνολου B. Προφανως β∈B. Αν γ<β, τοτε επειδη το α ειναι μεταβατικο και βεα, εχουμε οτι γεα. Απο την επιλογη του β επεται οτι γ∉C, και συνεπως γ∉B. Αυτο σημαινει οτι κανενας διατακτικος αριθμος μικροτερος απο το β δεν ανηκει στο συνολο B, δηλαδη το β ειναι το μικροτερο στοιχειο του B. ∎

<u>Πορισμα 1</u>. Για καθε συνολο διατακτικων αριθμων A, η σχεση $<_A$ ειναι καλη διαταξη του A.

<u>Πορισμα 2</u>. Καθε μεταβατικο συνολο διατακτικων αριθμων A ειναι διατακτικος αριθμος.

<u>Αποδειξη</u>: Για καθε ξ,η∈A ισχυει: $\xi<\eta \leftrightarrow \xi\in\eta$. Εχουμε λοιπον οτι $<_A = \in_A$. Απο το πορισμα 1, εχουμε οτι το $\langle A, \in_A\rangle$ ειναι καλα διατεταγμενο συνολο. Επειδη το A ειναι μεταβατικο συνολο, ειναι διατακτικος αριθμος. ∎

Η Αρχη Ελαχιστου Διατακτικου Αριθμου, διατυπωνεται και ως εξης.

<u>Θεωρημα 5</u>. Εστω Φ τυπος. Ας υποθεσουμε οτι $\exists\alpha\Phi(\alpha)$. Τοτε

$$\exists\alpha(\Phi(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta<\alpha \rightarrow \neg\Phi(\beta))).$$

<u>Αποδειξη</u>: Εστω $\alpha_0$ οποιοσδηποτε διατακτικος αριθμος ωστε $\Phi(\alpha_0)$. Θεωρουμε το συνολο $X=\{\xi\in\alpha_0 : \Phi(\xi)\}$. Αν $X=\emptyset$, τοτε το $\alpha_0$ ειναι ο μικροτερος διατακτικος αριθμος που εχει την ιδιοτητα Φ. Εχουμε τοτε

$$\Phi(\alpha_0) \wedge \forall\beta(\beta<\alpha_0 \rightarrow \neg\Phi(\beta)).$$

Αν $X\neq\emptyset$, τοτε παιρνοντας το μικροτερο στοιχειο του συνολου X εχουμε:

$$\Phi(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta<\alpha \rightarrow \neg\Phi(\beta)). \ ∎$$

<u>Ορισμοι</u>. Εστω B μη κενο συνολο διατακτικων αριθμων. Με minB συμβολιζουμε το μικροτερο διατακτικο αριθμο που ανηκει στο B.

Εστω Φ τυπος. Εστω οτι $\exists\xi\Phi(\xi)$. Με $\min\xi{:}\Phi(\xi)$ συμβολιζουμε τον μικροτερο διατακτικο αριθμο που ικανοποιει τον τυπο Φ.

<u>Θεωρημα 6</u>. Εστω A συνολο διατακτικων αριθμων. Υπαρχει διατακτικος αριθμος που ειναι μεγαλυτερος απο ολα τα στοιχεια του A.

<u>Αποδειξη</u>: Η ενωση ⋃A, ως μεταβατικο συνολο διατακτικων αριθμων, ειναι διατακτικος αριθμος (ασκηση 5.25). Εστω ⋃A=β. Για καθε ξ∈A εχουμε ξ≤β (ασκηση 5.26). Ο διατακτικος αριθμος β' ειναι λοιπον γνησια μεγαλυτερος απο ολα τα στοιχεια του συνολου A. ∎

<u>Πορισμα</u>. Εστω A συνολο διατακτικων αριθμων. Υπαρχει διατακτικος αριθμος που δεν ανηκει στο A. Υπαρχει λοιπον (απο την Αρχη Ελαχιστου) ο

μικροτερος διατακτικος αριθμος που δεν ανηκει στο Α.

Ενα απο τα πρωτα παραδοξα της αφελους θεωριας συνολων διακιστωθηκε το 1897 απο τον Burali-Forti. Η χρησιμοποιηση του συνολου ολων των διατακτικων αριθμων τον οδηγησε σε αντιφαση. Στις αξιωματικες θεωριες συνολων αποδεικνυεται απλως οτι η κλαση των διατακτικών αριθμων ειναι μια γνησια κλαση. Σα συνεπεια του τελευταιου πορισματος, εχουμε αμεσως το ακολουθο.

<u>Θεωρημα 7</u>. Δεν υπαρχει συνολο ολων των διατακτικων αριθμων.

<u>Ορισμος</u>. Για καθε συνολο διατακτικων αριθμων Α οριζουμε ως supΑ τον μικροτερο διατακτικο αριθμο ~~που δεν ανηκει στο Α)~~ που είναι μεγαλύτερος από όλα τα στοιχεία του Α.

<u>Παρατηρησεις</u>. Εστω Α συνολο διατακτικων αριθμων.

Αν το β ειναι μεγιστο στοιχειο του Α, τοτε supΑ=β'.

Αν στο Α δεν υπαρχει μεγιστο στοιχειο, τοτε ο διατακτικος αριθμος α=∪Α ειναι μεγαλυτερος απο ολα τα στοιχεια του Α και ειναι ο μικροτερος διατακτικος αριθμος με αυτη την ιδιοτητα. Σ' αυτη την περιπτωση εχουμε λοιπον supΑ=∪Α (ασκηση 5.26).

Επισης, για καθε διατακτικο αριθμο ξ εχουμε supξ=ξ.

Στην επομενη παραγραφο θα αποδειξουμε για καθε καλα διατεταγμενο συνολο υπαρχει η ε-εικονα του. Στην αποδειξη θα χρησιμοποιησουμε ενα αξιωματικο σχημα της θεωριας συνολων ZF, που δεν γνωρισαμε μεχρι τωρα.

## 5.7 <u>Το σχημα αντικαταστασης</u>.

Το σχημα αντικαταστασης προστεθηκε στα αξιωματα του Zermelo απο τον A.Fraenkel το 1922. Ειναι ισχυροτερο απο το σχημα υποσυνολων (ασκηση 5.28) και θεωρειται βασικο για τη θεωρια συνολων. Οπως θα δουμε, ειναι διαισθητικα φανερο. Για να καταλαβουμε το νοημα του, εισαγουμε πρωτα μια βοηθητικη εννοια.

<u>Ορισμος</u>. Εστω Φ(x,y) τυπος και x,y μεταβλητες. Λεμε οτι ο Φ <u>οριζει αντιστοιχιση</u> οταν

$$\forall x \exists ! y \Phi(x,y),$$

που σημαινει οτι για καθε x υπαρχει ακριβως ενα y ωστε Φ(x,y).

Αν ο τυπος Φ οριζει αντιστοιχιση, τοτε για καθε x, το μοναδικο y για το οποιο ισχυει Φ(x,y), το λεμε <u>Φ-παραδειγμα</u> για το x.

<u>Παραδειγμα 8</u>. 1) Στο κεφαλαιο 1 ειδαμε οτι για καθε συνολο x υπαρχει και ειναι μοναδικο το μονοσυνολο του. Αρα ο τυπος

οριζει αντιστοιχιση.

Ομοια εχουμε οτι καθενας απο τους τυπους: $y=\mathcal{P}x$, $y=\bigcup x$ οριζει αντιστοιχιση.

ii) Στον τυπο $y=\emptyset$ δεν εμφανιζεται ως ελευθερη μεταβλητη το x. Λογω της μοναδικοτητας του κενου συνολου, εχουμε ομως $\forall x\exists ! y(y=\emptyset)$. Επομενως ο τυπος $y=\emptyset$ οριζει αντιστοιχιση.

iii) Θεωρουμε τον τυπο $\Phi(x,y)$:

"y ειναι πρωτο μελος του ζευγους x",

δηλαδη τον: $\exists z(\langle y,z\rangle=x)$. Ο τυπος $\Phi(x,y)$ δεν οριζει αντιστοιχιση, διοτι αν το x δεν ειναι διατεταγμενο ζευγος, τοτε δεν υπαρχει y με $\Phi(x,y)$. Ομως για τα x που ειναι διατεταγμενα ζευγη, υπαρχει μοναδικο y τετοιο ωστε $\Phi(x,y)$.

Μπορουμε να βρουμε εναν τυπο $\Phi^*(x,y)$ που οριζει αντιστοιχιση και εχει το ιδιο νοημα με τον $\Phi(x,y)$ για εκεινα τα x που ειναι διατεταγμενα ζευγη. Στα x που δεν ειναι διατεταγμενα ζευγη, θα αντιστοιχει ως παραδειγμα το $\emptyset$. Συγκεκριμενα, παιρνουμε ως $\Phi^*(x,y)$ τον τυπο:

$$\exists z(\langle y,z\rangle=x) \vee \neg(\exists t\exists z(\langle t,z\rangle=x))\wedge y=\emptyset,$$

δηλαδη τον:

"y ειναι πρωτο μελος του ζευγους x" $\vee$

$\vee$ "x δεν ειναι διατεταγμενο ζευγος και $y=\emptyset$".

Η ασκηση 5.29 εκφραζει μια γενικευση της παραπανω παρατηρησης.

Το αξιωματικο σχημα αντικαταστασης του Fraenkel διατυπωνεται ως εξης.

<u>A8. Σχημα αντικαταστασης.</u> Εστω οτι ο τυπος $\Phi(x,y)$ οριζει αντιστοιχιση. "Εστω Α συνολο. Υπαρχει ενα συνολο Β τετοιο ωστε:

i) $(\forall a\in A)(\exists b\in B)\Phi(a,b)$,

ii) $(\forall b\in B)(\exists a\in A)\Phi(a,b)$."

Υπαρχει δηλαδη ενα συνολο Β, στο οποιο ανηκουν τα Φ-παραδειγματα για ολα τα στοιχεια του Α (συνθηκη i) και μονον αυτα (συνθηκη ii).

<u>Ορισμοι.</u> Το παραπανω συνολο Β, που για δοσμενο Α ειναι μοναδικο (απο το αξιωμα εκτασης) συμβολιζεται

$$B=\{y:(\exists x\in A)\Phi(x,y)\}$$

το λεμε <u>εικονα</u> του συνολου Α μεσω της αντιστοιχισης Φ.

Αν Β ειναι εικονα του συνολου Α μεσω της αντιστοιχισης Φ, τοτε για καθε $y$ ισχυει:

$$y\in B \leftrightarrow (\exists x\in A)\Phi(x,y).$$

Το σχημα αντικαταστασης ειναι βασικο για τη θεωρια συνολων. Εφαρμοζεται σε αποδειξεις υπαρξης και για κατασκευες πολλων συνολων. Ειναι διαισθητικα αποδεκτο το γεγονος, οτι αν σε καθε στοιχειο ενος συνολου $A$ αντιστοιχει ενα "παραδειγμα", τοτε η συλλογη των "παραδειγματων" για ολα τα στοιχεια του $A$ σχηματιζει συνολο.

<u>Παραδειγμα 7.</u> i) Στο κεφαλαιο I δειξαμε οτι για οποιοδηποτε συνολο $A$ υπαρχει το συνολο $\{\{x\}:x\in A\}$. Μια πιο συντομη δικαιολογηση της υπαρξης αυτου του συνολου, μας δινει το σχημα αντικαταστασης. Ο τυπος $y=\{x\}$ προφανως οριζει αντιστοιχιση. Αν το συνολο $B$ ειναι η εικονα του $A$ μεσω αυτου του τυπου, τοτε για καθε $y$ ισχυει:

$$y\in B \leftrightarrow (\exists x\in A)(y=\{x\}).$$

Συνεπως εχουμε $B=\{\{x\}:x\in A\}$.

ii) Ομοια μπορουμε να αποδειξουμε οτι για καθε συνολο $A$ υπαρχουν τα συνολα $\{\bigcup x:x\in A\}$, $\{\mathcal{P}x:x\in A\}$.

<u>Προταση 13.</u> Εστω $\Phi$ τυπος. Εστω $A$ συνολο. Ας υποθεσουμε οτι

$$(\forall x\in A)\exists!y\ \Phi(x,y).$$

Τοτε υπαρχει μοναδικο συνολο $B$ τετοιο ωστε για καθε $y$:

$$y\in B \leftrightarrow (\exists x\in A)\Phi(x,y).$$

(δηλαδη $B=\{y:(\exists x\in A)\Phi(x,y)\}$).

<u>Αποδειξη</u>: Ο τυπος $\Phi(x,y)$ δεν οριζει αναγκαστικα αντιστοιχιση. Θα βρουμε ομως εναν τυπο $\Phi'(x,y)$ που:

i) οριζει αντιστοιχιση,

ii) για καθε $x\in A$: $\Phi(x,y) \leftrightarrow \Phi'(x,y)$.

Τοτε, απο το σχημα αντικαταστασης, θα εχουμε οτι υπαρχει το συνολο

$$\{y:(\exists x\in A)\Phi'(x,y)\},$$

που (λογω του ii) ειναι το ζητουμενο συνολο $B$.

Ως $\Phi'(x,y)$ αρκει να παρουμε τον τυπο

$$x\in A\wedge\Phi(x,y)\ \vee\ x\notin A\wedge y=\emptyset.$$

Ευκολα ελεγχεται οτι ο $\Phi'(x,y)$ ικανοποιει τις παραπανω απαιτησεις. ∎

<u>Παραδειγμα 8.</u> Εστω $C$ συνολο. Αποδεικνυεται (με επαγωγη) οτι για καθε $n\in\omega$, $n\geq 2$ υπαρχει η καρτεσιανη δυναμη $C^n$. Θετοντας επιπλεον $C^0=\{\emptyset\}$ και $C^1=C$, εχουμε: $(\forall n\in\omega)\exists!y(y=C^n)$. Αν και το $C^x$ δεν εχει το νοημα που θελουμε για $x\notin\omega$, με βαση την παραπανω προταση, βλεπουμε οτι υπαρχει το

συνολο $\{C^n : n\in\omega\}$.

Ομοια δικαιολογειται και η υπαρξη του συνολου $\{\langle n, C^n\rangle : n\in\omega\}$, δηλαδη της ακολουθιας $(C^n)_{n\in\omega}$.

Στην ασκηση 4.12 αποδεικνυεται οτι για καθε συνολο A υπαρχει το συνολο Seq(A) ολων των πεπερασμενων ακολουθιων με τιμες στο A. Χρησιμοποιωντας την προταση 13, μπορουμε να το δειξουμε απλουστερα. Για καθε $n\in\omega$ το συνολο $^nA$ των ακολουθιων μηκους n με τιμες στο A ειναι μοναδικο. Επεται οτι υπαρχει το συνολο $\{^nA : n\in\omega\}$. Το Seq(A) ειναι η ενωση του τελευταιου συνολου.

Τωρα θα αποδειξουμε το βασικο θεωρημα αυτου του κεφαλαιου. Αυτο μας λεει οτι καθε καλα διατεταγμενο συνολο ειναι ομοιο με εναν διατακτικο αριθμο, συνεπως μας επιτρεπει να θεωρησουμε τους διατακτικους αριθμους ως τυπους των καλα διατεταγμενων συνολων.

Θα διατυπωσουμε πρωτα ενα χρησιμο λημμα, του οποιου η αποδειξη περιεχεται στην ασκηση 5.17.

<u>Λημμα</u>. Εστω οτι $\langle S, \in_S\rangle$ ειναι ∈-εικονα του καλα διατεταγμενου συνολου $\langle B, R\rangle$ και $f: B \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} S$ ειναι ο ∈-ισομορφισμος. Τοτε:

1) Για καθε $b\in B$, το συνολο $f(b)$ ειναι ∈-εικονα του $O_R(b)$ (διατεταγμενου απο την R).

ii) Καθε $y\in S$ ειναι ∈-εικονα ενος γνησιου αρχικου τμηματος του $\langle B, R\rangle$ (του $O_R(f^{-1}(y))$).

<u>Θεωρημα 8</u>. Εστω $\langle A, R\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Υπαρχει (μοναδικη) ∈-εικονα του $\langle A, R\rangle$.

<u>Αποδειξη</u>: Η μοναδικοτητα αποδειχθηκε στην προταση 7 (σελιδα 85).

Θεωρουμε το συνολο

$$C=\{x: \text{"υπαρχει η ∈-εικονα του } O_R(x)\text{"}\}.$$

Το C ειναι αρχικο τμημα του $\langle A, R\rangle$. Πραγματικα, αν το $O_R(x)$ εχει ∈- εικονα και $yRx$, (απο το 1 του λημματος) υπαρχει η ∈-εικονα του $O_R(x)$.

Η σχεση R ειναι καλη διαταξη του C. Θα δειξουμε οτι υπαρχει η ∈-εικονα του C. Απο τον ορισμο του C, για καθε $x\in C$ υπαρχει (μοναδικο) συνολο $T_x$, που ειναι ∈-εικονα του $O_R(x)$. Βασει του αξιωματικου σχηματος αντικαταστασης (προταση 13), υπαρχει το συνολο $T=\{T_x : x\in C\}$.

Απο το ii του λημματος, επεται οτι το συνολο T ειναι μεταβατικο. Πραγματικα, αν $y\in T_x$, τοτε υπαρχει $z\in O_R(x)$ τετοιο ωστε $y=T_z$.

Το συνολο $F=\{\langle x, T_x\rangle : x\in C\}$ (υπαρχει απο το σχημα αντικαταστασης) ειναι συναρτηση. Εχουμε $F: C \xrightarrow[\text{επι}]{} T$. Επειδη για $x\neq y$, τα τμηματα $O_R(x)$,

$O_R(y)$ δεν ειναι ομοια (πορισμα στη σελιδα 91), βλεπουμε οτι η F ειναι 1-1. Απο το λημμα εχουμε επισης οτι

$$yRx \leftrightarrow y\in O_R(x) \leftrightarrow T_y\in T_x .$$

Αυτο σημαινει οτι η F ειναι $\in$-ισομορφισμος. Συνεπως, το T ειναι $\in$-εικονα του C.

Η αποδειξη θα ολοκληρωθει, αν δειξουμε οτι $C=A$. Αν το C ηταν γνησιο αρχικο τμημα του $\langle A,R\rangle$, τοτε για καποιο $a\in A$ θα ειχαμε $C=O_R(a)$. Παραπανω δειξαμε οτι υπαρχει η $\in$-εικονα του C. Απο τον ορισμο του C, επεται λοιπον οτι $a\in C$. Αυτο ομως ειναι αδυνατο, διοτι $a\notin O_R(a)$. ■

## 5.8 Ο αριθμος Hartogs.

Ορισμος. Λεμε οτι το συνολο A κυριαρχειται απο το συνολο B, οταν το A ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του B, δηλαδη οταν υπαρχει συναρτηση $f:A \xrightarrow{1-1} B$ (συγκρινετε με τον ορισμο στη σελιδα 77).

Για δοσμενο συνολο A θα εξετασουμε τους διατακτικους αριθμους που κυριαρχουνται απο το A. Ειναι προφανες οτι αν ο διατακτικος αριθμος ξ κυριαρχειται απο το A και $\eta<\xi$, τοτε και ο η κυριαρχειται απο το A. Θα δειξουμε οτι οι διατακτικοι αριθμοι που κυριαρχουνται απο το συνολο A αποτελουν συνολο.

Λημμα. Εστω A συνολο. Οι $\in$-εικονες των υποσυνολων του A που δεχονται καλη διαταξη σχηματιζουν συνολο.

Αποδειξη: Εστω R μια καλη διαταξη με $fld(R)=B\subseteq A$. Υπαρχει ακριβως ενας διατακτικος αριθμος $\xi_R$ που ειναι $\in$-εικονα του $\langle B,R\rangle$.

Θεωρουμε το συνολο

$$X=\{R\in\mathcal{P}(A\times A): \text{"R ειναι σχεση καλης διαταξης"}\}.$$

Απο το σχημα αντικαταστασης επεται οτι υπαρχει το συνολο $Y=\{\xi_R : R\in X\}$. Για καθε υποσυνολο B του A που δεχεται μια καλη διαταξη, εχουμε οτι η $\in$-εικονα του $\langle B,R\rangle$ ανηκει στο συνολο Y. ■

Θεωρημα 8 (Hartogs). Για καθε συνολο A υπαρχει διατακτικος αριθμος που δεν κυριαρχειται απο το A.

Αποδειξη: Θα αποδειξουμε οτι αν ενας διατακτικος αριθμος κυριαρχειται απο το A, τοτε ειναι $\in$-εικονα ενος καλα διατεταγμενου υποσυνολου του A. Τοτε, με βαση το λημμα, θα εχουμε οτι υπαρχει το συνολο ολων των διατακτικων αριθμων που κυριαρχουνται απο το A. Υπαρχει λοιπον (θεωρημα 5) διατακτικος αριθμος που δεν κυριαρχειται απο το A.

Ας υποθεσουμε οτι ο διατακτικος αριθμος ξ κυριαρχειται απο το A.

Τοτε υπαρχει συναρτηση $f:\xi \xrightarrow{1-1} A$. Για το $B=rng(f)$ εχουμε $f:\xi \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$.
Η συναρτηση f οριζει στο B μια σχεση καλης διαταξης ως εξης:

$$xR_f y \leftrightarrow f^{-1}(x)<f^{-1}(y).$$

Η f ειναι προφανως ισομορφισμος των $\langle\xi,\in_\xi\rangle$ και $\langle B,R_f\rangle$. Συνεπως το $\xi$ ειναι $\in$-εικονα του $\langle B,R_f\rangle$ (με $\in$-ισομορφισμο τη συναρτηση $f^{-1}$).

Δειξαμε οτι το $\xi$ ειναι $\in$-εικονα ενος καλα διατεταγμενου υποσυνολου του A. ■

<u>Πορισμα</u>. Για καθε συνολο A υπαρχει ο μικροτερος διατακτικος αριθμος που δεν κυριαρχειται απο το A.

<u>Ορισμος</u>. Ο μικροτερος διατακτικος αριθμος που δεν κυριαρχειται απο το συνολο A λεγεται <u>αριθμος Hartogs</u> του A και συμβολιζεται με H(A). Εχουμε δηλαδη

$$H(A)=\min\xi: \text{"}\xi \text{ δεν κυριαρχειται απο το } A\text{"}.$$

Συμφωνα με τα παραπανω, υπαρχουν διατακτικοι αριθμοι που δεν κυριαρχουνται απο το $\omega$. Ο μικροτερος απο αυτους συμβολιζεται με $\omega_1$. Δηλαδη εχουμε $\omega_1=H(\omega)$.

Ο Cantor συμβολιζε $\Omega$ το συνολο ολων των διατακτικων αριθμων που ειναι το πολυ αριθμησιμοι. Στοιχεια του $\Omega$ ειναι λοιπον ακριβως οι διατακτικοι αριθμοι που κυριαρχουνται απο το $\omega$. Επεται οτι $\Omega=\omega_1$ (ασκηση 5.311).

Τον πληθικο αριθμο του συνολου $\omega_1$ τον συμβολιζουμε $\aleph_1$.

Επειδη $\omega<\omega_1$ και το $\omega_1$ δεν ειναι αριθμησιμο, εχουμε:

$$\aleph_0<\aleph_1.$$

Αποδεικνυεται οτι δεν υπαρχει πληθικος αριθμος μεταξυ του $\aleph_0$ και του $\aleph_1$, δηλαδη οτι αν $m<\aleph_1$, τοτε $m\leq\aleph_0$ (ασκηση 5.32). Συνεπως ο πληθικος αριθμος $\aleph_1$ ειναι αμεσως επομενος του $\aleph_0$.

## 5.9 <u>Οριακοι διατακτικοι αριθμοι. Πραξεις με διατακτικους αριθμους.</u>

<u>Ορισμος</u>. Ενας διατακτικος αριθμος λεγεται <u>οριακος</u> οταν δεν ειναι επομενος καποιου διατακτικου αριθμου.

<u>Παρατηρηση</u>. Αν το $\lambda$ ειναι οριακος διατακτικος αριθμος, τοτε στο $\lambda$ δεν υπαρχει μεγιστο (ως προς τη διαταξη $\in_\lambda$) στοιχειο.

<u>Παραδειγμα 9</u>. i)Το 0 ειναι οριακος διατακτικος αριθμος.

ii) Ο μικροτερος απειρος οριακος διατακτικος αριθμος ειναι το $\omega$.

iii) Οριζουμε ανδαρομικα: $\omega+0=\omega$, $\omega+(n+1)=(\omega+n)'$ (για $n\in\omega$). Εχουμε δηλαδη: $\omega+n\cdot\omega$ ... (n φορες). Βασει του αξιωματικου σχηματος αντικαταστασης, υπαρχει το συνολο $\bigcup\{\omega+n : n\in\omega\}$. Αυτο ειναι μεταβατικο συνολο διατακτικων αριθμων, αρα ειναι διατακτικος αριθμος. Τον συμβολιζουμε με $\omega+\omega$. Για καθε διατακτικο αριθμο $\xi\in\omega+\omega$, εχουμε $\xi'\in\omega+\omega$. Αυτο σημαινει οτι το $\omega+\omega$ δεν ειναι επομενος κανενος διατακτικου αριθμου, δηλαδη οτι ειναι οριακος διατακτικος αριθμος.

Ο διατακτικος αριθμος $\omega+\omega$, που ορισαμε πιο πανω ειναι ο διατακτικος τυπος του "αθροισματος" δυο καλων διαταξεων τυπου $\omega$. Η ασκηση 5.9 μας λεει πως μπορουμε να ορισουμε μια πραξη προσθεσης καλων διαταξεων. Το αθροισμα $\langle A,R\rangle+\langle B,S\rangle$ δυο καλα διατεταγμενων συνολων $\langle A,R\rangle$ και $\langle B,S\rangle$ ειναι ενα καλα διατεταγμενο συνολο του οποιου ο διατακτικος τυπος εξαρταται μονο απο τους διατακτικους τυπους των $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$. Συνεπως, οριζεται μια πραξη προσθεσης διατακτικων αριθμων. Συγκεκριμενα, το $\alpha+\beta$ ειναι ο διατακτικος τυπος του αθροισματος δυο καλα διατεταγμενων συνολων τυπου $\alpha$ και $\beta$.

Αποδεικνυεται οτι η προσθεση των διατακτικων αριθμων ειναι προσεταιριστικη πραξη. Ας προσεξουμε ομως οτι δεν ειναι αντιμεταθετικη. Εχουμε π.χ. $1+\omega=\omega$ και $\omega+1\neq\omega$ (ασκηση 5.10), αρα $\omega+1\neq 1+\omega$.

Για οποιαδηποτε καλα διατεταγμενα συνολα $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$, η αντιλεξικογραφικη διαταξη του καρτεσιανου γινομενου $A\times B$ ειναι μια καλη διαταξη του (ασκηση 5.13). Ετσι προκυπτει ενα καλα διατεταγμενο συνολο $\langle A,R\rangle\cdot\langle B,S\rangle$, του οποιου ο διατακτικος τυπος εξαρταται μονο απο τους διατακτικους τυπους των $\langle A,R\rangle$ και $\langle B,S\rangle$. Μπορουμε λοιπον να ορισουμε μια πραξη πολλαπλασιασμου διατακτικων αριθμων. Το γινομενο $\alpha\cdot\beta$ ειναι ο διατακτικος τυπος του καλα διατεταγμενο συνολου $\langle\alpha,\epsilon_\alpha\rangle\cdot\langle\alpha,\epsilon_\alpha\rangle$.

Ο πολλαπλασιασμος των διατακτικων αριθμων ειναι προσεταιριστικη πραξη. Δεν ειναι ομως αντιμεταθετικη. Ευκολα ελεγχεται οτι $2\cdot\omega=\omega$, ενω $\omega\cdot 2=\omega+\omega$. Εχουμε λοιπον $2\cdot\omega\neq\omega+\omega$.

Οι παραπανω πραξεις με διατακτικους αριθμους οριζονται και με αλλον τροπο. Χρησιμοποιωντας την Αρχη Υπερπεπερασμενης Αναδρομης, που θα γνωρισουμε πιο κατω, μπορουμε να ορισουμε την προσθεση + και τον πολλαπλασιασμο · των διατακτικων αριθμων, ετσι ωστε να συμφωνουν με τις πραξεις που περιγραψαμε παραπανω. Δεν θα ασχοληθουμε περισσοτερο μ' αυτες τις πραξεις. Θα σημειωσουμε μονο μερικες ιδιοτητες τους.

Για οποιονδηποτε διατακτικο αριθμο $\alpha$, ο αριθμος $\alpha+1$ ειναι ο αμεσως επομενος του $\alpha$. Εχουμε δηλαδη $\alpha'=\alpha+1$.

Η προσθεση και ο πολλαπλασιασμος, περιορισμενοι στους φυσικους αριθμους, συμφωνουν με τις γνωστες πραξεις στο ω.

Οι διατακτικοι αριθμοι:

$$\omega+\omega,\ \omega+\omega+\omega,\ \omega+\omega+\omega+\omega\ \ \text{κ.ο.κ.}$$

$$\omega\cdot\omega,\ \omega\cdot\omega\cdot\omega,\ \omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega\ \ \text{κ.ο.κ.}$$

ειναι οριακοι διατακτικοι αριθμοι. Ο μικροτερος μη αριθμησιμος διατακτικος αριθμος $\omega_1$ ειναι επισης οριακος. Το τελευταιο προκυπτει ευκολα π.χ. απο την ασκηση 5.33.

## 5.10 Υπερπεπερασμενες ακολουθιες. Αρχη Υπερπεπερασμενης Αναδρομης.

Ορισμος. Υπερπεπερασμενη ακολουθια λεμε καθε συναρτηση που εχει πεδιο ορισμου εναν διατακτικο αριθμο. Μηκος μιας υπερπεπερασμενης ακολουθιας λεμε το πεδιο ορισμου της. Μια υπερπεπερασμενη ακολουθια x μηκους α συμβολιζεται ως

$$\langle x_\xi : \xi<\alpha\rangle \quad \text{ή} \quad (x_\xi)_{\xi<\alpha}.$$

Παρατηρησεις. Οι πεπερασμενες ακολουθιες και οι απειρες ακολουθιες μηκους ω ειναι προφανως υπερπεπερασμενες ακολουθιες. Η εννοια της υπερπεπερασμενης ακολουθιας ειναι λοιπον μια γενικευση της γνωστης εννοιας ακολουθιας.

Ας σημειωσουμε οτι αν f ειναι μια υπερπεπερασμενη ακολουθια με μηκος α, τοτε εχουμε $\mathrm{dom}(f)=\{\xi:\xi<\alpha\}$ και $\mathrm{rng}(f)=\{f_\xi:\xi<\alpha\}$.

Ειναι επισης φανερο οτι αν f ειναι μια υπερπεπερασμενη ακολουθια με μηκος α και β<α, τοτε ο περιορισμος $f\restriction\beta$ της f στο β ειναι μια υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους β.

Παραδειγμα 10. Στο παραδειγμα 4 (σελιδα 95) βρηκαμε τον ισομορφισμο f του συνολου $B=\{\frac{n}{n+1}: n\in\omega\}\cup\{1\}$, που ειναι καλα απο τη σχεση $<_R\cap(B\times B)$, με τον διατακτικο αριθμο $\omega\cup\{\omega\}$. Επειδη $f:B\xrightarrow[\text{επι}]{1-1}\omega\cup\{\omega\}$, η αντιστροφη συναρτηση $f^{-1}:\omega\cup\{\omega\}\xrightarrow[\text{επι}]{1-1}B$, δινει μια "αριθμηση" του συνολου B. Ως δεικτες χρησιμοποιουνται οι φυσικοι αριθμοι και το ω, δηλαδη οι διατακτικοι αριθμοι που ειναι μικροτεροι απο το ω+1. Η $f^{-1}$ ειναι λοιπον μια υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους ω+1.

Η ακολουθη προταση γενικευει το παραπανω παραδειγμα και μας δινει εναν χαρακτηρισμο των συνολων που δεχονται μια καλη διαταξη.

Προταση 14. Εστω Α συνολο. Το Α ειναι πεδιο τιμων μιας αμφιμονοσημαντης υπερπεπερασμενης ακολουθιας αν και μονο αν υπαρχει μια καλη διαταξη του Α.

__Αποδειξη__: $(\rightarrow)$ Εστω οτι $g=(g_\xi)_{\xi<\alpha}$ ειναι μια αμφιμονοσημαντη υπερπεπερασμενη ακολουθια με $rng(g)=A$. Τοτε εχουμε $g:\alpha \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} A$. Η καλη διαταξη του $\alpha$ μεταφερεται απο την $g$ στο $A$ ως εξης:

$$xRy \leftrightarrow g^{-1}(x)<g^{-1}(y).$$

Η σχεση $R$ ειναι μια καλη διαταξη του $A$. Αποδειξαμε λοιπον το $(\rightarrow)$. Ας σημειωσουμε επιπλεον οτι το $\langle A,R\rangle$ ειναι καλα διατεταγμενο συνολο τυπου $\alpha$. Πραγματικα, η συναρτηση $g^{-1}$ ειναι ισομορφισμος του $\langle A,R\rangle$ με το $\alpha$.

Για να δειξουμε το $(\leftarrow)$, ας υποθεσουμε οτι $R$ ειναι μια καλη διαταξη του $A$. Εστω οτι $\alpha$ ειναι η $\in$-εικονα του $\langle A,R\rangle$ και $f$ ο $\in$-ισομορφισμος. Τοτε $f^{-1}:\alpha \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} A$, δηλαδη η $f^{-1}$ ειναι μια αμφιμονοσημαντη υπερπεπερασμενη ακολουθια με πεδιο τιμων το συνολο $A$. ■

Θα αποδειξουμε τωρα το σημαντικοτερο θεωρημα της θεωριας των διατακτικων αριθμων, που ειναι γνωστο ως Αρχη Υπερπεπερασμενης Αναδρομης. Αυτο μας επιτρεπει να οριζουμε υπερπεπερασμενες ακολουθιες, στις οποιες καθε ορος εξαρταται απο τους προηγουμενους μεσω μιας προκαθορισμενης αντιστοιχισης.

__Θεωρημα 10__ (Αρχη Υπερπεπερασμενης Αναδρομης).
Εστω οτι ο τυπος $\Phi$ οριζει αντιστοιχιση. Για καθε διατακτικο αριθμο $\alpha$ υπαρχει ακριβως μια υπερπεπερασμενη ακολουθια $f$ με μηκος $\alpha$ τετοια ωστε

$$(\forall\xi<\alpha)\ \Phi(f\restriction\xi, f(\xi)),$$

δηλαδη για καθε $\xi<\alpha$:

$$f(\xi)=\text{"το μοναδικο } y \text{ ωστε } \Phi(f\restriction\xi, y)\text{"}.$$

Για να καταλαβουμε καλυτερα την αποδειξη του θεωρηματος, θα διατυπωσουμε πρωτα μερικα λημματα. Ας συμβολισουμε $\Theta(\alpha,f)$ τον τυπο:

"$f$ ειναι υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους $\alpha$" $\wedge$ $(\forall\xi<\alpha)\ \Phi(f\restriction\xi, f(\xi))$.

__Λημμα 1__. $\Theta(\beta,g)\wedge\gamma<\beta \rightarrow \Theta(\gamma, g\restriction\gamma)$.

__Λημμα 2__. $\Theta(\beta,g)\wedge\Theta(\beta,h) \rightarrow g=h$.

__Αποδειξη__: Ας υποθεσουμε οτι $g\neq h$. Τοτε υπαρχει $\xi<\beta$ ωστε $g(\xi)\neq h(\xi)$. Εστω $\eta=\min\xi{:}\,g(\xi)\neq h(\xi)$. Τοτε εχουμε $g(\eta)\neq h(\eta)$ και για καθε $\xi<\eta$: $g(\xi)=h(\xi)$, δηλαδη $g\restriction\eta=h\restriction\eta$. Επειδη ομως ισχυει $\Phi(g\restriction\eta, g(\eta))\wedge\Phi(h\restriction\eta, h(\eta))$ και ο τυπος $\Phi$ οριζει αντιστοιχιση, επεται οτι πρεπει $g(\eta)=h(\eta)$. Ατοπο. ■

__Λημμα 3__. $\Theta(\beta,g)\wedge\Theta(\gamma,h)\wedge\beta<\gamma \rightarrow g=h\restriction\beta$.

__Λημμα 4__. Εστω $\Theta(\gamma,g)$ και $\Phi(g,y)$. Τοτε ισχυει $\Theta(\gamma+1, g\cup\{\langle\gamma,y\rangle\})$.

__Λημμα 5__. Εστω $\lambda$ οριακος διατακτικος αριθμος. Ας υποθεσουμε οτι για καθε $\gamma<\lambda$ υπαρχει $g$ τετοιο ωστε $\Theta(\gamma,g)$. Τοτε υπαρχει $f$ ωστε $\Theta(\lambda,f)$.

Αποδειξη: Για $\xi<\lambda$, συμβολιζουμε $g_\xi$ τη μοναδικη (λογω του λημματος 2) συναρτηση για την οποια ισχυει $\Theta(\xi,g_\xi)$. Απο το λημμα 1 επεται οτι για καθε $\gamma<\beta<\lambda$ εχουμε $g_\gamma=g_\beta\restriction\gamma$, αρα $g_\gamma\subseteq g_\beta$. Συνεπως, η ενωση

$$g=\bigcup(g_\xi:\xi<\lambda)$$

ειναι συναρτηση, που για καθε $\xi<\lambda$ επεκτεινει την $g_\xi$ (ασκηση 2.14).

Θα αποδειξουμε οτι ισχυει $\Theta(\lambda,g)$. Η $g$ ειναι μια υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους $\lambda$, διοτι $\mathrm{dom}(g)=\bigcup(\mathrm{dom}(g_\xi):\xi<\lambda)=\bigcup\lambda=\lambda$. Αρκει λοιπον να ελεγξουμε οτι για καθε $\xi<\lambda$ ισχυει $\Phi(g\restriction\xi,g(\xi))$.

Εστω $\xi<\lambda$. Εχουμε $\xi+1<\lambda$, αφου το $\lambda$ ειναι οριακος διατακτικος αριθμος. Λογω της υποθεσης $\Theta(\xi+1,g_{\xi+1})$, ισχυει $\Phi(g\restriction\xi+1,g(\xi+1))$. Επειδη ομως $g_{\xi+1}\subseteq g$, επεται οτι $g_{\xi+1}(\xi)=g(\xi)$ και $g_{\xi+1}\restriction\xi=g\restriction\xi$. Συνεπως εχουμε

$$\Phi(g\restriction\xi,g(\xi)).\ \blacksquare$$

Αποδειξη του θεωρηματος: Η μοναδικοτητα επεται απο το λημμα 2. Για να αποδειξουμε την υπαρξη της ζητουμενης υπερπεπερασμενης ακολουθιας $f$, θεωρουμε το συνολο

$$\{\xi\in\alpha:(\exists g)\Theta(\xi,g)\}.$$

Αυτο, βασει του λημματος 1, ειναι ενα αρχικο τμημα του $\alpha$. Αρα εχουμε $\{\xi\in\alpha:(\exists g)\Theta(\xi,g)\}=\beta$, για καποιον διατακτικο αριθμο $\beta\leq\alpha$. Για καθε $\xi<\beta$ υπαρχει λοιπον μοναδικο $g_\xi$ ωστε $\Theta(\xi,g_\xi)$. Εφαρμοζοντας το λημμα 3 (αν το $\beta$ ειναι επομενος καποιου διατακτικου αριθμου) ή το λημμα 4 (οταν το $\beta$ ειναι οριακος διατακτικος αριθμος), εχουμε οτι:

(*) $$(\exists f)\Theta(\beta,f).$$

Παρατηρουμε οτι $\beta=\alpha$. Πραγματικα, αν ηταν $\beta<\alpha$, τοτε απο τον ορισμο του $\beta$ και τη συνθηκη (*), θα ειχαμε $\beta\in\{\xi\in\alpha:(\exists g)\Theta(\xi,g)\}$. Θα ηταν δηλαδη $\beta\in\beta$, που ειναι αδυνατο.

Αφου $\beta=\alpha$, η συνθηκη (*) σημαινει ακριβως οτι υπαρχει υπερπεπερασμενη ακολουθια $f$ μηκους $\alpha$, τετοια που για καθε $\xi<\alpha$ ισχυει:

$$f(\xi)=\text{"το μοναδικο } y \text{ ωστε } \Phi(f\restriction\xi,y)\text{"}.\ \blacksquare$$

Ορισμος. Με $X^{<\alpha}$ συμβολιζουμε το συνολο ολων των υπερπεπερασμενων ακολουθιων με μηκος μικροτερο απο $\alpha$. Με $X^{\leq\alpha}$ συμβολιζουμε το συνολο ολων των υπερπεπερασμενων ακολουθιων με μηκος το πολυ $\alpha$.

Παρατηρησεις. Η Αρχη Υπερπεπερασμενης Αναδρομης μπορει να εφαρμοστει και με τυπους που δεν οριζουν αντιστοιχιση (με την εννοια του ορισμου στη σελιδα 100). Αρκει μονο να ξερουμε οτι για καθε υπερπεπερασμενη ακολουθια g με μηκος μικροτερο απο α, υπαρχει ακριβως ενα y τετοιο ωστε

$$\Phi(g,y).$$

Στην αποδειξη του θεωρηματος 10, μονο για τετοιες g χρειαστηκαμε την υπαρξη μοναδικου Φ-παραδειγματος.

Μπορουμε να απαιτησουμε και λιγοτερο. Αρκει, για ενα δοσμενο συνολο Χ, να εχουμε:

$$(\forall g\in X^{<\alpha})(\exists!\, y\in X)\Phi(g,y).$$

Τοτε υπαρχει μοναδικη υπερπεπερασμενη ακολουθια $f:\alpha\longrightarrow X$ τετοια που

$(\forall\xi<\alpha)\ f(\xi)=$"το μοναδικο y ωστε $\Phi(f\restriction\xi,y)$".

Η δικαιολογηση ειναι ομοια με την αποδειξη της προτασης 13 (σελιδα 102). Σ' αυτη την περιπτωση, ο τυπος Φ οριζει μια συναρτηση

$$h:X^{<\alpha}\longrightarrow X$$

ωστε

$$(\forall\xi<\alpha)\ (f(\xi)=h(f\restriction\xi)).$$

Στις εφαρμογες, οι ορισμοι με υπερπεπερασμενη αναδρομη εχουν συνηθως μια ειδικη μορφη. Λογω διαφορετικης φυσεως των οριακων διατακτικων αριθμων απο αυτους που ειναι επομενοι, αλλιως οριζονται οι οροι με οριακο δεικτη και αλλιως οι οροι που εχουν δεικτη εναν επομενο διατακτικο αριθμο. Χρησιμοποιουνται στον ορισμο δυο τυποι $\Phi_1$ και $\Phi_2$. Καθε ορος μορφης $f(\xi+1)$ εξαρταται μονον απο τον αμεσως προηγουμενο, δηλαδη απο τον $f(\xi)$, μεσω του τυπου $\Phi_1$. Οι οροι με οριακο δεικτη εξαρτωνται απο ολους τους προηγουμενους μεσω του τυπου $\Phi_2$. Τετοιοι ορισμοι εχουν την ακολουθη μορφη:

$f(\xi+1)=$"το μοναδικο y ωστε $\Phi_1(f(\xi),y)$",

$f(\lambda)=$"το μοναδικο y ωστε $\Phi_2(f\restriction\lambda,y)$" (για οριακο λ).

Στην περιπτωση $\alpha=\omega$ εχουμε εναν ορισμο μορφης:

$(\forall n\in\omega)\ f(n+1)=$"το μοναδικο y ωστε $\Phi_1(f(n),y)$",

δηλαδη εναν συνηθισμενο αναδρομικο ορισμο στους φυσικους αριθμους.

Η Αρχη Υπερπεπερασμενης Αναδρομης για $\alpha=\omega$ μας δινει τη λεγομενη ισχυρη μορφη αναδρομης στους φυσικους αριθμους. Μας επιτρεπει να οριζουμε αναδρομικες ακολουθιες στις οποιες ο καθε ορος εξαρταται απο ολους τους προηγουμενους. Μπορουμε π.χ., για ενα δοσμενο συνολο Χ και μια συναρτηση $h:X^{<\omega}\longrightarrow X$, να ορισουμε αναδρομικα για καθε $n\in\omega$:

$$f(n)=h(\langle f(k):k<n\rangle).$$

Τοτε εχουμε $f(0)=h(\varnothing)$, $f(1)=h((f(0)))$, $f(2)=h((f(0),f(1)))$ κ.ο.κ. Γενικα $f(n+1)=h((f(0),f(1),\ldots,f(n)))$.

Ας δουμε μερικα παραδειγματα ορισμων με υπερπεπερασμενη αναδρομη.

Παραδειγμα 11. i) Για $n\in\omega$ οριζουμε αναδρομικα:

$R_0=\emptyset$,

$R_{n+1}=\mathcal{P}R_n$.

Ετσι ορισαμε μια ακολουθια $(R_n)_{n<\omega}$. Η ενωση $\bigcup(R_n:n<\omega)$ ειναι το λεγομενο συνολο διαδοχικα πεπερασμενων συνολων.

ii) Θετοντας

$R_\omega=\bigcup_{n<\omega}R_n$,

οριζουμε μια υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους $\omega+1$ που επεκτεινει την $(R_n)_{n<\omega}$.

Ας σημειωσουμε οτι ο ορος $R_\omega$ εχει διαφορετικο ορισμο απο τους ορους $R_n$ για $n<\omega$. Εχουμε

$R_{n+1}$= "το δυναμοσυνολο του $R_n$" = "το μοναδικο y ωστε $y=\mathcal{P}R_n$",

$R_\omega$= "η ενωση της οικογενειας $(R_n)_{n<\omega}$" =
"το μοναδικο y ωστε $y=\bigcup_{n<\omega}R_n$".

iii) Μπορουμε τον παραπανω ορισμο να τον επεκτεινουμε και να εχουμε υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους $\omega+1$, $\omega+2$, κ.ο.κ. Γενικα, για οποιονδηποτε διατακτικο αριθμό α οριζουμε για $\xi<\alpha$:

$R_{\xi+1}=\mathcal{P}R_\xi$,

$R_\xi=\bigcup_{\eta<\xi}R_\eta$ (για οριακο ξ).

Ας σημειωσουμε ακομα οτι για το 0, που ειναι οριακος διατακτικος αριθμος, εχουμε $R_0=\bigcup(R_\eta:\eta<0)=\bigcup\emptyset=\emptyset$.

Παραδειγμα 12. i) Ο αναδρομικος ορισμος της προσθεσης φυσικων αριθμων (σελιδα 54) μπορει να γενικευθει ως εξης. Για οποιονδηποτε διατακτικο αριθμο η (το η ειναι παραμετρος στον ορισμο) θετουμε:

$\eta+0=\eta$,

$\eta+(n+1)=(\eta+n)+1$.

Ετσι ορισαμε την ακολουθια $(\eta,\eta+1,\eta+2,\ldots)$, δηλαδη την $(\eta+n)_{n<\omega}$.

ii) Ο διατακτικος αριθμος $\eta+\omega$ μπορει να οριστει ως "οριο" της παραπανω ακολουθιας. Συγκεκριμενα, θετουμε:

$\eta+\omega=\sup\{\eta+n:n<\omega\}$,

ή ισοδυναμα (ασκηση 5,36):

$\eta+\omega=\bigcup_{n<\omega}\eta+n$.

Ας παρατηρησουμε οτι το παραπανω ειναι μια γενικευση του ορισμου του αριθμου $\omega+\omega$, που δοθηκε στο παραδειγμα 9iii (σελιδα 108). Ευκολα μπορουμε να ελεγξουμε οτι το $\eta+\omega$ ειναι ο διατακτικος τυπος του αθροισματος των διατακτικων αριθμων η και ω, οπως αυτο οριζεται στην ασκηση 5.9.

iii) Γενικα, για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους α και β, μπορουμε να ορισουμε το αθροισμα α+β με υπερπεπερασμενη αναδρομη ως προς το β (με παραμετρο το α). Θετουμε:

(1) $\alpha+0=\alpha$,

(2) $\alpha+(\xi+1)=(\alpha+\xi)+1$,

(3) $\alpha+\lambda=\bigcup_{\xi<\lambda}\alpha+\xi$ (για οριακο $\lambda\neq0$).

Αν εχουν οριστει τα αθροισματα $\alpha+\xi$ για $\xi<\beta$, τοτε οριζεται και το $\alpha+\beta$. Αν $\beta=0$, χρησιμοποιουμε το (1), αν το $\beta$ ειναι επομενος διατακτικος αριθμος - το (2) και για οριακο $\beta$ - το (3).

Ας παρατηρησουμε οτι εχουμε διαφορετικους ορισμους για το 0 και απειρο οριακο διατακτικο αριθμο. Μπορουμε ομως να εχουμε εναν ορισμο κοινο και για τις δυο περιπτωσεις. Ο τυπος $\Phi(g,y)$:

"$|g|=0 \wedge y=\alpha \vee |g|$ απειρο οριακο $\wedge\ y=\bigcup rng(g)$",

οπου $|g|$ ειναι το μηκος της $g$, για καθε $\alpha$ και καθε υπερπεπερασμενη ακολουθια $g$ με οριακο μηκος, οριζει ακριβως ενα $y$.

Στο επομενο κεφαλαιο θα δουμε μερικα παραδειγματα εφαρμογης της Αρχης Υπερπεπερασμενης Αναδρομης σε αλλους κλαδους των Μαθηματικων.

Παρατηρηση. Εστω $\Phi$ τυπος που οριζει αντιστοιχιση. Το Θεωρημα Υπερπεπερασμενης Αναδρομης μας λεει οτι για καθε διατακτικο αριθμο $\alpha$ υπαρχει μοναδικη υπερπεπερασμενη ακολουθια $f$ που οριζεται αναδρομικα μεσω του τυπου $\Phi$. Εχουμε δηλαδη

$$\forall\alpha\exists! f\ \Theta(\alpha,f),$$

οπου $\Theta(\alpha,f)$ ειναι ο τυπος:

"$f$ ειναι υπερπεπερασμενη ακολουθια μηκους $\alpha$" $\wedge\ (\forall\xi<\alpha)\ \Phi(f\restriction\xi, f(\xi))$.

Αυτο σημαινει οτι ο τυπος $\Theta$ οριζει αντιστοιχιση.

Ας συμβολισουμε με $f_\alpha$ το μοναδικο $f$ τετοιο ωστε $\Theta(\alpha,f_\alpha)$. Οι υπερπεπερασμενες ακολουθιες $f_\alpha$ και $f_\beta$, για $\alpha\neq\beta$, συμφωνουν μεταξυ τους. Δηλαδη για καθε $\xi$, αν $\xi<\alpha$ και $\xi<\beta$, εχουμε $f_\alpha(\xi)=f_\beta(\xi)$. Ολες οι $f_\alpha$ με μηκος μεγαλυτερο απο $\xi$ εχουν λοιπον την ιδια τιμη $y_\xi$. Σε καθε διατακτικο αριθμο $\xi$ αντιστοιχει ακριβως ενα $y_\xi$.

Η αντιστοιχιση του $y_\xi$ στο $\xi$ διδεται απο εναν τυπο $\Psi$. Ο τυπος αυτος περιγραφει την "ενωση" των $f_\alpha$. Η κλαση ολων των $f_\alpha$ δεν ειναι ομως συνολο (αφου οι διατακτικοι αριθμοι δεν σχηματιζουν συνολο). Η "ενωση" τους δεν ειναι λοιπον συναρτηση. Η συλλογη ολων των των ζευγων $\langle\xi,y_\xi\rangle$

ειναι μια γνησια κλαση που οριζει αντιστοιχιση. Αν περιοριστουμε στα ξ μικροτερα απο εναν διατακτικο αριθμο α, τοτε (απο το αξιωμα αντικαταστασης) η παραπανω αντιστοιχιση δινει το συνολο $\{<\xi,y_\xi>:\xi<\alpha\}$, δηλαδη την υπερπεπερασμενη ακολουθια $f_\alpha$.

Ξεκινωντας λοιπον με μια αντιστοιχιση Φ, με βαση την Αρχη Υπερπεπερασμενης Αναδρομης, μπορουμε οχι μονο να ορισουμε μια υπερπεπερασμενη ακολουθια $f_\alpha$ για καθε διατακτικο αριθμο α, αλλα να ορισουμε και μια νεα αντιστοιχιση Ψ που για καθε διατακτικο αριθμο ξ δινει ακριβως ενα $y_\xi$.

## 5.11 Αρχικοι διατακτικοι αριθμοι. Η ιεραρχια των αλεφ.

Σ' αυτη την παραγραφο θα δειξουμε πως μπορουν να οριστουν οι πληθικοι αριθμοι για τα συνολα που δεχονται μια καλη διαταξη. Θα ασχοληθουμε μονο με τετοια συνολα και θα δωσουμε εναν ορισμο που ικανοποιει το αιτημα του Cantor για τους πληθικους αριθμους.

Αποδειξαμε νωριτερα (θεωρημα Β, σελιδα 103) οτι καθε καλα διατεταγμενο συνολο ειναι ομοιο με εναν διατακτικο αριθμο. Συνεπως, για καθε συνολο X που δεχεται καλη διαταξη, υπαρχει ενας διατακτικος αριθμος ξ και μια συναρτηση f τετοια ωστε

$$f:X\xrightarrow[\text{επι}]{1-1}\xi.$$

Τουτο σημαινει οτι το συνολο X ειναι πληθικα ισοδυναμο με καποιον διατακτικο αριθμο. Αυτος ο διατακτικος αριθμος δεν ειναι υποχρεωτικα μοναδικος, αφου υπαρχουν συνολα τα οποια δεχονται πολλες καλες διαταξεις διαφορετικου τυπου. Ειναι ομως μοναδικος ο μικροτερος δυνατος τετοιος αριθμος.

Ορισμος. Για καθε συνολο που δεχεται μια καλη διαταξη θετουμε:

$$card(X)=\min\xi:X\sim\xi.$$

Ο διατακτικος αριθμος card(X) λεγεται πληθικος αριθμος του συνολου X.

Οι παρακατω προτασεις ειναι αμεσες συνεπειες του ορισμου.

Προταση 15. Για οποιαδηποτε συνολα X,Y ισχυει:

i) $X\sim Y \leftrightarrow (\min\xi:X\sim\xi)=(\min\xi:Y\sim\xi) \leftrightarrow card(X)=card(Y)$.

ii) $card(X)\leq card(Y) \vee card(Y)\leq card(X)$.

Προταση 16. Για καθε συνολο X ισχυει:

i) $X\sim card(X)$.

ii) $card(card(X))=card(X)$.

Συμφωνα με τον ορισμο του κεφαλαιου 4, η ιδιοτητα

$$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$$

σημαινει οτι το συνολο X ειναι ισοπληθικο με ενα υποσυνολο του Y. Πιο κατω θα δουμε οτι τωρα η ιδιοτητα αυτη εχει ενα νεο νοημα. Ταυτιζεται με την ιδιοτητα $\leq$ συγκρισης των διατακτικων αριθμων.

<u>Προταση 17</u>. Εστω $\mathrm{card}(X)=\alpha$, $\mathrm{card}(Y)=\beta$. Τοτε

$$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \exists f(f:X \xrightarrow{1-1} Y).$$

<u>Αποδειξη</u>: Το $(\rightarrow)$ ειναι φανερο. Για το $(\leftarrow)$ ας υποθεσουμε οτι το X ειναι ισοπληθικο με καποιο υποσυνολο του Y. Τοτε το α ειναι ισοπληθικο με ενα υποσυνολο του β. Αν ηταν $\beta<\alpha$, τοτε (απο το θεωρημα των Cantor, Shröder και Bernstein) θα ειχαμε οτι $\alpha \sim \beta$. Θα ηταν συνεπως $X \sim \beta$. Αυτο ομως ειναι αδυνατο, αφου $\alpha=\min\xi:X\sim\xi$ και $\beta<\alpha$. Εχουμε λοιπον: $\alpha \leq \beta$. ∎

<u>Πορισμα</u>. Αν $\mathrm{card}(X)=\alpha$ και $\mathrm{card}(Y)=\beta$, τοτε: $\alpha<\beta$ εαν και μονον εαν το X ειναι ισοπληθικο με ενα υποσυνολο του Y και τα X,Y δεν ειναι πληθικα ισοδυναμα. Η συγκριση $<$ των πληθικων αριθμων ταυτιζεται λοιπον με την ιδιοτητα $<$ συγκρισης των διατακτικων αριθμων.

<u>Παρατηρησεις</u>. Κανενας φυσικος αριθμος δεν ειναι ισοπληθικος με αλλον φυσικο αριθμο. Για καθε $n\in\omega$ λοιπον, ο παραπανω ορισμος μας δινει

$$\mathrm{card}(n)=n.$$

Συνεπως, ο ορισμος του πληθικου αριθμου για τα πεπερασμενα συνολα που δεχθηκαμε στο κεφαλαιο 4, συμφωνει με τον παραπανω.

Το ω επισης δεν ειναι πληθικα ισοδυναμο με κανεναν μικροτερο διατακτικο αριθμο. Δηλαδη $(\min\xi:\omega\sim\xi)=\omega$. Αρα για το ω, και καθε αριθμησιμο συνολο X, εχουμε $\mathrm{card}(X)=\omega$. Ο αφηρημενος πληθικος αριθμος $\aleph_0$, που εισηγαγε ο Cantor για τα απειρα αριθμησιμα συνολα, μπορει τωρα να οριστει απλως ως εξης:

$$\aleph_0=\omega.$$

Ομοια, για τον μικροτερο μη αριθμησιμο διατακτικο αριθμο $\omega_1$ εχουμε $\mathrm{card}(\omega_1)=\omega_1$ (το $\omega_1$ δεν ειναι ισοπληθικο με κανεναν μικροτερο διατακτικο αριθμο). Το $\aleph_1$ που οριστηκε νωριτερα ως ο πληθικος αριθμος του $\omega_1$, μπορουμε να το ορισουμε τωρα απλως ως

$$\aleph_1=\omega_1.$$

Ας σημειωσουμε ακομα μερικες ιδιοτητες των διατακτικων αριθμων, οι οποιες ειναι συνεπειες των παραπανω προτασεων.

<u>Προταση 18</u>. Για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους α,β ισχυει:

i) $card(\alpha)\le\alpha$,

ii) $\alpha\le\beta \longrightarrow card(\alpha)\le card(\beta)$,

iii) $card(\alpha)<card(\beta) \longrightarrow \alpha<\beta$.

Ας παρατηρησουμε ομως οτι δεν αληθευουν οι αντιστροφες των προτασεων ii και iii. Εχουμε π.χ. $\omega+1\sim\omega$ και συνεπως $card(\omega+1)=card(\omega)$. Αρα $card(\omega+1)\le card(\omega)$ ενω δεν ισχυει το $\omega+1<\omega$.

Ειδαμε παραπανω οτι, τουλαχιστον για τα συνολα που δεχονται μια καλη διαταξη, υπαρχει ενας ικανοποιητικος ορισμος του πληθικου αριθμου. Πληθικοι αριθμοι τετοιων συνολων ειναι καποιοι απο τους διατακτικους αριθμους.

<u>Ορισμος</u>. Ενας διατακτικος αριθμος λεγεται <u>αρχικος</u>, οταν δεν ειναι πληθικα ισοδυναμος με κανεναν μικροτερο διατακτικο αριθμο. Ενας διατακτικος αριθμος α ειναι λοιπον αρχικος αν και μονο αν

$$\min\{\xi:\alpha\sim\xi\}=\alpha,$$

δηλαδη οταν $card(\alpha)=\alpha$.

Οι φυσικοι αριθμοι και το ω ειναι αρχικοι διατακτικοι αριθμοι. Ο διατακτικος αριθμος $\omega_1$ ειναι επισης αρχικος. Μεταξυ του ω και του $\omega_1$ δεν υπαρχει αλλος αρχικος διατακτικος αριθμος, αφου

$$\omega\le\xi<\omega_1 \longrightarrow card(\xi)=\aleph_0.$$

<u>Προταση 19</u>. Για καθε συνολο Α, αριθμος Hartogs H(A) ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος.

<u>Αποδειξη</u>: Απο τον ορισμο του αριθμου Hartogs εχουμε

$$H(A)=\min\{\xi: \text{"}\xi \text{ δεν κυριαρχειται απο το } A\text{"}\}.$$

Το H(A) δεν κυριαρχειται λοιπον απο το Α και για καθε $\xi<H(A)$, το ξ κυριαρχειται απο το Α. Αρα κανενα ξ μικροτερο απο το H(A) δεν μπορει να ειναι ισοπληθικο με το H(A). ■

<u>Προταση 20</u>. Για καθε διατακτικο αριθμο α εχουμε:

$$H(\alpha)=\min\{\xi: \text{"}\xi \text{ ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος και } \alpha<\xi\text{"}\}.$$

<u>Αποδειξη</u>: Εστω κ αρχικος διατακτικος αριθμος και $\kappa<H(\alpha)$. Τοτε το κ κυριαρχειται απο τα το α, αρα $card(\kappa)\le card(\alpha)$. Επειδη εχουμε $\kappa=card(\kappa)$ και $card(\alpha)\le\alpha$, επεται οτι $\kappa\le\alpha$.

Δειξαμε παραπανω οτι για καθε αρχικο διατακτικο αριθμο κ ισχυει:

$$\kappa<H(\alpha) \longrightarrow \kappa\le\alpha$$

(ή ισοδυναμα: $\alpha<\kappa \longrightarrow H(\alpha)\le\kappa$).

Επειδη το H(α) ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος μεγαλυτερος απο το $\alpha$, απο τα παραπανω επεται οτι ειναι ο μικροτερος δυνατος τετοιος α-ριθμος. ■

<u>Πορισμα 1</u>. Για κανεναν διατακτικο αριθμο $\alpha$, δεν υπαρχει αρχικος διατακτικος αριθμος μεταξυ των card$(\alpha)$ και H$(\alpha)$.

<u>Αποδειξη</u>: Εχουμε προφανως card$(\alpha) \leq \alpha <$ H$(\alpha)$. Οι αρχικοι διατακτικοι αριθμοι card$(\alpha)$ και H$(\alpha)$ εχουν λοιπον την ιδιοτητα:

$$\text{card}(\alpha) < \text{H}(\alpha).$$

Απο την τελευταια προταση επεται οτι αν $\kappa$ ειναι αρχικος διατακτικος α-ριθμος με $\kappa <$ H$(\alpha)$, τοτε $\kappa \leq \alpha$. Συνεπως ισχυει

$$\kappa < \text{H}(\alpha) \longrightarrow \kappa \leq \text{card}(\alpha)$$

για καθε αρχικο διατακτικο αριθμο $\kappa$. ■

<u>Πορισμα 2</u>. Αν $\kappa$ ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος, τοτε ο αριθμος Hartogs H$(\kappa)$ ειναι ο αμεσως επομενος αρχικος διατακτικος αριθμος.

<u>Ορισμος</u>. Με $\kappa^+$ συμβολιζουμε τον αμεσως επομενο αρχικο διατακτικο αριθμο του αρχικου διατακτικου αριθμου $\kappa$.

<u>Προταση 21</u>. Εστω A συνολο αρχικων διατακτικων αριθμων. Η ενωση $\kappa = \bigcup A$ ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος.

<u>Αποδειξη</u>: Εστω $\beta < \kappa$. Τοτε για καποιο $\alpha \in A$ ισχυει $\beta < \alpha$. Αν ηταν $\beta \sim \kappa$, τοτε (λογω του $\beta \leq \alpha \leq \kappa$) θα ειχαμε $\beta \sim \alpha$. Αυτο ομως ειναι αδυνατο, διοτι το $\alpha$ ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος και $\beta < \alpha$.

Αποδειξαμε οτι ο διατακτικος αριθμος $\kappa$ δεν ειναι ισοπληθικος με κανεναν μικροτερο διαδιατακτικο αριθμο, δηλαδη οτι ειναι αρχικος. ■

<u>Πορισμα</u>. Εστω $(\beta_\xi)_{\xi<\alpha}$ γνησια αυξουσα, υπερπεπερασμενη ακολουθια αρχικων διατακτικων αριθμων. Τοτε το

$$\kappa = \sup\{\beta_\xi : \xi < \alpha\}$$

ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος.

<u>Προταση 22</u>. Η συλλογη των αρχικων διατακτικων αριθμων ειναι γνησια κλαση.

<u>Αποδειξη</u>: Αρκει να αποδειξουμε οτι για καθε συνολο διατακτικων αριθμων A υπαρχει αρχικος διατακτικος αριθμος που δεν ανηκει στο A. Εστω οτι $\beta = \sup A$. Το H$(\beta)$ ειναι αρχικος διατακτικος αριθμος. Επειδη $\beta <$ H$(\beta)$, επεται οτι [redacted] για καθε $\lambda \in A$ εχουμε: $\lambda \leq \beta <$ H$(\beta)$. ■

Η ακολουθη ιδιοτητα των αρχικων διατακτικων αριθμων ειναι αμεση συνεπεια της προτασης 12 (σελιδα 98).

**Προταση 23.** Καθε συνολο A αρχικων διατακτικων αριθμων ειναι καλα διατεταγμενο απο τη σχεση $<_A=\{\langle\kappa,\lambda\rangle\in A^2:\kappa<\lambda\}$.

**Η ιεραρχια των αλεφ.**

Θα ορισουμε τωρα, με υπερπεπερασμενη αναδρομη, μια ιεραρχια στην κλαση των απειρων αρχικων διατακτικων αριθμων. Θα δοσουμε δηλαδη μια "αριθμηση" αυτης της κλασης με τη βοηθεια των διατακτικων αριθμων. Για μια τετοια αριθμηση δεν αρκει ενα συνολο διατακτικων αριθμων, διοτι οι αρχικοι διατακτικοι αριθμοι δεν αποτελουν συνολο. Για καθε $\xi$ οριζεται μοναδικος απειρος διατακτικος αριθμος $\omega_\xi$, ετσι εστε για $\xi,\eta$:

$$\xi<\eta \leftrightarrow \omega_\xi<\omega_\eta.$$

Ορισμος.

$$\omega_0=\omega,$$
$$\omega_{\xi+1}=\omega_\xi^{+},$$
$$\omega_\lambda=\sup\{\omega_\xi:\xi<\lambda\} \qquad (\text{για απειρο οριακο } \lambda).$$

Ο μικροτερος απειρος αρχικος διατακτικος αριθμος ειναι το $\omega$. Ο αμεσως επομενως του $\omega$ αρχικος διατακτικος αριθμος ειναι ο μικροτερος μη αριθμησιμος διατακτικος αριθμος, δηλαδη το $\omega_1$ που γνωρισαμε νωριτερα. Γενικα το $\omega_{\xi+1}$ ειναι ο αμεσως επομενος του $\omega_\xi$ αρχικος αριθμος (δηλαδη ο αριθμος $H(\omega_\xi)$). Για απειρο οριακο $\lambda$, ο αριθμος $\omega_\lambda$ ειναι ο μικροτερος διατακτικος αριθμος που ειναι μεγαλυτερος απο ολους τους αριθμους $\omega_\xi$ για $\xi<\lambda$.

Χρησιμοποιωντας την Αρχη Ελαχιστου Διατακτικου Αριθμου (θεωρημα 5 στη σελιδα 99) η με υπερπεπερασμενη επαγωγη (π.χ. οπως αυτη εκφραζεται στην ασκηση 5.38) μπορουμε να αποδειξουμε οτι για καθε $\xi$ ο διατακτικος αριθμος $\omega_\xi$ ειναι αρχικος. Ειναι φανερο οτι αν το $\omega_\xi$ ειναι αρχικος, τοτε και το $\omega_{\xi+1}$ ειναι αρχικος. Αν το $\lambda$ ειναι απειρος οριακος διατακτικος αριθμος και για καθε $\xi<\lambda$ το $\omega_\xi$ ειναι αρχικος, τοτε ο διατακτικος αριθμος $\sup\{\omega_\xi:\xi<\lambda\}$ ειναι επισης αρχικος (πορισμα απο την προταση 21).

Για απειρο οριακο $\lambda$ εχουμε επισης οτι

$$\omega_\lambda=\bigcup_{\xi<\lambda}\omega_\xi.$$

Πραγματικα, επειδη η υπερπεπερασμενη ακολουθια $\langle\omega_\xi:\xi<\lambda\rangle$ δεν εχει μεγιστο στοιχειο, εχουμε οτι $\bigcup_{\xi<\lambda}\omega_\xi=\sup\{\omega_\xi:\xi<\lambda\}$.

Ευκολα αποδεικνυεται οτι καθε απειρος αρχικος διατακτικος αριθμος ειναι μορφης $\omega_\xi$ για καποιο διατακτικο αριθμο $\xi$ (ασκηση 5.39).

Οπως ειδαμε πιο πανω, τους αρχικους διατακτικους αριθμους μπορουμε να τους θεωρησουμε πληθικους αριθμους για τα συνολα που δεχονται καλη διαταξη. Οι απειροι αρχικοι αριθμοι λοιπον, οπως και οι φυσικοι αριθμοι, ειναι συγχρονως διατακτικοι και πληθικοι αριθμοι. Παραδοσιακα, χρησιμοποιειται για αυτους διπλος συμβολισμος. Για το $\omega_\xi$ γραφουμε και $\aleph_\xi$ (αλεφ ξ), οταν θελουμε να τονισουμε οτι το $\omega_\xi$ ειναι πληθικος αριθμος. Ορίζουμε δηλαδη για καθε διατακτικο αριθμο ξ:

$$\aleph_\xi=\omega_\xi.$$

Ο νεος συμβολισμος συμφωνει με τον προηγουμενο για τους δυο αριθμους αλεφ που γνωρισαμε νωριτερα. Εχουμε δηλαδη $\aleph_0=\omega=\omega_0$ και $\aleph_1=\omega_1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1 Εστω $\langle X,R\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο και $Y\subseteq X$. Αποδειξτε οτι η σχεση $R\cap Y\times Y$ ειναι καλη διαταξη του συνολου Y.

5.2 Εστω $\langle X,R\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Εστω $a\in X$. Αποδειξτε οτι αν το a δεν ειναι μεγιστο στοιχειο, τοτε υπαρχει στο A το αμεσως επομενο του στοιχειο.

5.3 Αποδειξτε οτι αν R ειναι γραμμικη διαταξη ενος πεπερασμενου συνολου A, τοτε η R ειναι καλη διαταξη του A.

5.4 Εστω $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$ ομοια διατεταγμενα συνολα. Αποδειξτε οτι αν η R ειναι καλη διαταξη του A, τοτε η S ειναι καλη διαταξη του B

5.5 Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Αποδειξτε οτι:

i) Για καθε $a\in A$, το $O_<(a)$ ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $\langle A,<\rangle$.

ii) Αν το B ειναι γνησιο αρχικο τμημα του $\langle A,<\rangle$, τοτε υπαρχει $a\in A$ τετοιο ωστε $B=O_<(a)$).

5.6 Εστω $\langle A,<\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Αποδειξτε οτι για καθε $x,y\in A$:

$$x<y \leftrightarrow O_<(x)\subset O_<(y).$$

Εστω B το συνολο των γνησιων αρχικων τμηματων του $\langle A,<\rangle$. Αποδειξτε οτι τα διατεταγμενα συνολα $\langle A,<\rangle$ και $\langle B,<_B\rangle$ ειναι ομοια.

5.7 Εστω οτι $F:A\xrightarrow[\text{επι}]{1-1}B$ ειναι ισομορφισμος των καλα διατεταγμενων συνολων $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$. Αποδειξτε οτι για καθε $a\in A$, ο περιορισμος $F\restriction O_R(a)$ ειναι ισομορφισμος του $O_R(a)$ με ενα αρχικο τμημα του $\langle B,S\rangle$. Βρειτε αυτο το τμημα.

5.8 (Η "επομενη" καλη διαταξη). Εστω $\langle A,R\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο. Εστω $b\notin A$. Στο συνολο $B=A\cup\{b\}$ θεωρουμε τη σχεση $R'=R\cup\{\langle x,b\rangle : x\in A\}$. Αποδειξτε οτι:

i) $R'\cap A^2=R$ (δηλαδη οτι η R' συμφωνει στο A με την R).

ii) Το b ειναι μεγιστο στοιχειο του B (ως προς τη διαταξη R').

iii) Το A ειναι αρχικο τμημα του $\langle B,R'\rangle$ ($A=O_{R'}(b)$).

iv) Η σχεση R' ειναι καλη διαταξη του B.

5.9 ("Προσθεση" καλων διαταξεων). Εστω $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$ καλα διατεταγμενα συνολα. Εστω $A\cap B=\emptyset$. Στο $A\cup B$ θεωρουμε τη σχεση $T=R\cup S\cup\{\langle a,b\rangle : a\in A\wedge b\in B\}$.

Αποδειξτε οτι:

i) $T\cap A^2=R$ και $T\cap B^2=S$ (δηλαδη οτι η $T$ συμφωνει με τις $R$ και $S$ στο $A$ και $B$, αντιστοιχα).

ii) Η $T$ ειναι καλη διαταξη του $A\cup B$.

iii) Το $A$ ειναι αρχικο τμημα του $\langle A\cup B,T\rangle$.

Το καλα διατεταγμενο συνολο $\langle A\cup B,T\rangle$ συμβολιζεται $\langle A,R\rangle+\langle B,S\rangle$.

5.10 Εστω $b\notin\omega$. Το $\langle\{b\},\varnothing\rangle$ ειναι καλα διατεταγμενο συνολο. Εφαρμοζοντας την ασκηση 5.9, βρειτε τα αθροισματα $\langle\omega,<\rangle+\langle\{b\},\varnothing\rangle$ και $\langle\{b\},\varnothing\rangle+\langle\omega,<\rangle$. Ειναι ομοιες οι καλες διαταξεις που προκυπτουν;

5.11 Στο συνολο $\omega\times\{0,1\}$ θεωρουμε τη σχεση $R$ που οριζεται απο:

$$\langle m,x\rangle R\langle n,y\rangle \leftrightarrow x<y \vee (x=y \wedge m<n).$$

Αποδειξτε οτι η $R$ ειναι καλη διαταξη του $\omega\times\{0,1\}$. Βρειτε τα αρχικα τμηματα $O_R(\langle n,1\rangle)$ για $n\in\omega$.

5.12 Στο συνολο $\omega\times\omega$ θεωρουμε τις σχεσεις $<_L$ και $<_A$ που οριζονται απο

$$\langle m,x\rangle<_L\langle n,y\rangle \leftrightarrow m<n \vee (m=n \wedge x<y),$$

$$\langle m,x\rangle<_A\langle n,y\rangle \leftrightarrow x<y \vee (x=y \wedge m<n).$$

Αποδειξτε οτι οι σχεσεις $<_L$ και $<_A$ ειναι καλες διαταξεις του $\omega^2$. Αυτες ονομαζονται λεξικογραφικη και αντιλεξικογραφικη διαταξη του $\omega^2$, αντιστοιχα.

5.13 ("Πολλαπλασιασμος" καλων διαταξεων). Εστω $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$ καλα διατεταγμενα συνολα. Στο $A\times B$ θεωρουμε την σχεση $T$ που οριζεται απο

$$\langle x,y\rangle T\langle z,t\rangle \leftrightarrow ySt \vee (y=t \wedge xRz).$$

Αυτη ειναι η λεγομενη "αντιλεξικογραφική" διαταξη του $A\times B$ που οριζεται απο τις διαταξεις $R,S$ και συμβολιζεται $\langle A,R\rangle\cdot\langle B,S\rangle$. Αποδειξτε οτι η $T$ ειναι καλη διαταξη του $A\times B$. Βρειτε παραδειγματα καλα διατεταγμενων συνολων $\langle A,R\rangle$ και $\langle B,S\rangle$ τετοιων ωστε τα $\langle A,R\rangle\cdot\langle B,S\rangle$ και $\langle B,S\rangle\cdot\langle A,R\rangle$ να μην ειναι ομοια.

5.14 Εστω $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ καλα διατεταγμενα συνολα. Αποδειξτε οτι αν $\langle A,R\rangle$ ειναι ομοιο με καποιο γνησιο αρχικο τμημα του $\langle B,S\rangle$, τοτε το $\langle B,S\rangle$ δεν ειναι ομοιο με κανενα αρχικο τμημα του $\langle A,R\rangle$.

5.15 Αποδειξτε οτι αν το καλα διατεταγμενο συνολο $\langle A,R\rangle$ ειναι ομοιο με ενα αρχικο τμημα του καλα διατεταγμενου συνολου $\langle B,S\rangle$ και το $\langle B,S\rangle$ ειναι ομοιο με ενα αρχικο τμημα του καλα διατεταγμενου συνολου $\langle C,T\rangle$, τοτε το $\langle A,R\rangle$ ειναι ομοιο με ενα αρχικο τμημα του $\langle C,T\rangle$.

5.16 Εστω $f$ ισομορφισμος των καλα διατεταγμενων συνολων $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$. Αποδειξτε οτι για καθε $a\in A$:

i) $O_S(f(a))=f[O_R(a)]$.

ii) $f(a)=\min_S\{y\in B: (\forall x\in O_R(a))(f(x)Sy)\}$.

iii) $f(a)=\min_S\{y\in B: f[O_R(a)]\subseteq O_S(y)\}$.

iv) $O_S(f(a))=\{f(x): xRa\}$.

Αν ειδικα το B ειναι μεταβατικο συνολο και $S=\epsilon_B$, αποδειξτε οτι για καθε $a\in A$:

$$f(a)=O_\epsilon(f(a))=\{f(x): xRa\}.$$

5.17 Εστω $\langle A,R\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο με ε-εικονα α. Αποδειξτε οτι:

i) Αν B ειναι αρχικο τμημα του $\langle A,R\rangle$, τοτε υπαρχει $\beta\in\alpha$ τετοιο ωστε: $\langle B,R\cap B^2\rangle$ εχει ε-εικονα το β.

ii) Καθε $\beta\in\alpha$ ειναι ε-εικονα ενος αρχικου τμηματος του $\langle A,R\rangle$.

Με βαση τα παραπανω αποδειξτε οτι αν $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$ ειναι καλα διατεταγμενα συνολα με ε-εικονες α και β, αντιστοιχα, τοτε ισχυει:

$$\langle A,R\rangle \quad \langle B,S\rangle \leftrightarrow \alpha\in\beta.$$

5.18 Αποδειξτε οτι αν $S\subseteq T$, τοτε $\epsilon_S=\epsilon_T\cap S^2$.

5.19 Αποδειξτε οτι για καθε διατακτικο αριθμο α, το συνολο $\alpha\cup\{\alpha\}$ ειναι διατακτικος αριθμος.

5.20 Αποδειξτε οτι για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους α, β ισχυει:

i) $\alpha'=\beta' \leftrightarrow \alpha=\beta$.

ii) $\alpha<\beta \leftrightarrow \alpha\subset\beta$.

iii) $\alpha\leq\beta \leftrightarrow \alpha\subseteq\beta$.

5.21 Για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους α, β, γ ισχυει:

i) $\alpha\leq\alpha$.

ii) $\alpha\leq\beta \wedge \beta\leq\alpha \rightarrow \alpha=\beta$.

iii) $\alpha\leq\beta \wedge \beta\leq\gamma \rightarrow \alpha\leq\gamma$.

iv) $\alpha\leq\beta \vee \beta\leq\alpha$.

5.22 Αποδειξτε οτι ο διατακτικος αριθμος $\alpha\cup\{\alpha\}$, ειναι αμεσως επομενος του α, δηλαδη οτι δεν υπαρχει διατακτικος αριθμος β τετοιος ωστε:

$$\alpha<\beta<\alpha\cup\{\alpha\}.$$

5.23 Αποδειξτε οτι τα θεωρηματα 4 και 5 στη σελιδα 98 ειναι ισοδυναμα.

5.24 Εστω $\langle A,R\rangle$ καλα διατεταγμενο συνολο τυπου α. Εστω $B\subseteq A$. Αποδειξτε οτι αν β ειναι ο διατακτικος τυπος του $\langle B,R\cap B^2\rangle=\beta$, τοτε $\beta\leq\alpha$.

5.25 Αποδειξτε οτι αν A ειναι συνολο διατακτικων αριθμων, τοτε η συνστη $\cup A$ διατακτικος αριθμος.

5.26 Εστω $A$ συνολο διατακτικων αριθμων και $\alpha=\cup A$. Αποδειξτε οτι:

i) Για καθε $\xi\in A$: $\xi\leq\alpha$.

ii) Το $\alpha$ ειναι ο μικροτερος διατακτικος αριθμος με την ιδιοτητα i.

Αποδειξτε επισης οτι:

iii) Αν στο $A$ δεν υπαρχει μεγιστο στοιχειο, τοτε το $\alpha$ ειναι ο μικροτερος διατακτικος αριθμος με την ιδιοτητα:

$$(\forall\xi\in A)\xi<\alpha.$$

iv) Αν $\beta$ ειναι το μεγαλυτερο στοιχειο του $A$, τοτε $\alpha=\beta'$.

5.27 Εστω οτι A8' ειναι ενα σχημα αξιωματων που προκυπτει απο το A8, αν σ' αυτο απαιτησουμε να ικανοποιειται μονον η πρωτη συνθηκη. Χρησιμοποιωντας το σχημα υποσυνολων A7, δειξτε οτι απο το A8' προκυπτει το σχημα αντικαταστασης A8.

5.28 Δειξτε οτι το σχημα υποσυνολων (A7) αποδεικνυεται απο το σχημα αντικαταστασης (A8).

5.29 Ενας τυπος $\Phi(x,y)$ λεγεται μονοσημαντος αν

$$\forall x\forall y\forall z(\Phi(x,y)\land\Phi(x,z)\ \longrightarrow\ y=z).$$

Οριζουμε ως $\Phi^{*}(x,y)$ τον τυπο:

$$\Phi(x,y)\ \lor\ \neg(\exists t\Phi(x,t))\land y=\emptyset.$$

Αποδειξτε οτι ο $\Phi^{*}(x,y)$ οριζει αντιστοιχιση.

5.30 Εστω οτι ο τυπος $\Psi(x,y)$ ειναι μονοσημαντος (ασκηση 5.23). Εστω $A$ συνολο. Αποδειξτε οτι υπαρχει μοναδικο συνολο $C$ τετοιο ωστε:

i) $(\forall x\in A)(\exists y\Psi(x,y)\ \longrightarrow\ (\exists y\in C)\Psi(x,y))$.

ii) $(\forall y\in C)(\exists x\in A)\Psi(x,y)$.

Το συνολο $C$ λεγεται εικονα του $A$ μεσω του μονοσημαντου τυπου $\Psi$.

5.31 Αποδειξτε οτι για καθε συνολο $A$ ο αριθμος Hartogs $H(A)$ εχει τις ιδιοτητες:

i) $H(A)=\{\xi$: "$\xi$ κυριαρχειται απο το $A$"$\}$.

ii) $H(A)=\sup\{\xi$: "$\xi$ κυριαρχειται απο το $A$"$\}$.

iii) Αν $\xi<H(A)$, τοτε $\xi$ και $H(A)$ δεν ειναι πληθικα ισοδυναμα.

5.32 Αποδειξτε, χρησιμοποιωντας την ασκηση 5.24, οτι αν $A\subseteq\omega_1$, τοτε $\mathrm{card}(A)=\aleph_1$ ή $\mathrm{card}(A)\leq\aleph_0$.

5.33 Αποδειξτε οτι για καθε διατακτικο αριθμο $\alpha$, αν $\omega\leq\alpha$ τοτε:

i) Το $\alpha$ ειναι ισοπληθικο με το $\alpha+1$.

ii) Το α ειναι ισοπληθικο με το $α+ω$.

5.34 Αποδειξτε οτι αν το συνολο Α κυριαρχειται απο εναν διατακτικο αριθμο, τοτε το Α δεχεται μια καλη διαταξη.

5.35 Αποδειξτε οτι ενας διατακτικος αριθμος λ ειναι οριακος αν και μονο αν $\bigcup λ=λ$.

5.36 Εστω οτι $(α_n)_{n\in ω}$ ειναι μια γνησια αυξουσα ακολουθια διατακτικων αριθμων (δηλαδη για καθε $n\in ω$: $α_n<α_{n+1}$). Εστω $λ=\sup\{α_n : n\in ω\}$. Αποδειξτε οτι $λ=\bigcup\{α_n : n\in ω\}$ και οτι το λ ειναι οριακος διατακτικος αριθμος.

5.37 Εστω Χ συνολο και α διατακτικος αριθμος. Αποδειξτε οτι υπαρχουν τα συνολα $X^{\le α}$ και $X^{<α}$ των υπερπεπερασμενων ακολουθιων με μηκος το πολυ α και μηκος μικροτερο απο α, αντιστοιχα.

5.38 Εστω Φ τυπος. Εστω οτι $(x_ξ)_{ξ<α}$ ειναι μια αμφιμονοσημαντη υπερπεπερασμενη ακολουθια. Ας υποθεσουμε οτι:

i) $Φ(x_0)$,

ii) $(Φ(x_ξ) \to Φ(x_{ξ+1}))$ για καθε ξ με $ξ+1<α$,

iii) $(\forall ξ<λ)Φ(x_ξ) \to Φ(x_λ)$ για καθε οριακο $λ<α$.

Αποδειξτε οτι τοτε $(\forall ξ<α)Φ(x_ξ)$.

5.39 Αποδειξτε οτι για καθε απειρο αρχικο διατακτικο αριθμο κ υπαρχει διατακτικος αριθμος ξ τετοιος ωστε $κ=ω_ξ$.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

### 6.1 <u>Το αξιωμα επιλογης.</u>

Ενα απο τα αξιωματα για τη θεωρια συνολων που διατυπωσε το 1904 ο Zermelo, το λεγομενο αξιωμα επιλογης, αξιζει ιδιαιτερης προσοχης. Λογω της μη κατασκευαστικης φυσεως του, αρκετοι μαθηματικοι δεν το δεχθηκαν ως διαισθητικα αληθινο. Το αξιωμα επιλογης διαφερει απο τα υπολοιπα αξιωματα της θεωριας συνολων. Μας λεει για την υπαρξη καποιων συνολων χωρις να καθοριζει τα στοιχεια τους. Αργοτερα, μερικες "περιεργες" συνεπειες του αξιωματος επιλογης, αυξησαν το πληθος αυτων που το απορριπτουν. Οι περισσοτεροι μαθηματικοι το δεχονται ομως χωρις καμια επιφυλαξη. Το θεωρουν μαλιστα απαραιτητο, αφου χρησιμοποιειται ουσιαστικα για τις αποδειξεις αρκετων βασικων θεωρηματων σε πολλους κλαδους των Μαθηματικων.

Για τους λογους που αναφεραμε πιο πανω, διακρινουμε θεωρια συνολων με και χωρις το αξιωμα επιλογης. Τα Α1 ως Α8 που γνωρισαμε μεχρι τωρα, μαζι με το αξιωμα κανονικοτητας Α9 που διατυπωνεται στο παραρτημα, αποτελουν το αξιωματικο συστημα ZF. Με ZFC συμβολιζουμε το συστημα αξιωματων Α1 ως Α10, δηλαδη τα αξιωματα της θεωριας συνολων ZF μαζι με το αξιωμα επιλογης. Στη συνεχεια θα σημειωνουμε με ° τα θεωρηματα της θεωριας ZFC, δηλαδη εκεινες τις προτασεις, για την αποδειξη των οποιων χρησιμοποιηθηκε το αξιωμα επιλογης.

Το αξιωμα επιλογης εχει πολλες ισοδυναμες διατυπωσεις. Μια απ' αυτες ειναι η ακολουθη.

<u>Α10. Αξιωμα επιλογης.</u>

"Εστω Α συνολο μη κενων, ξενων μεταξυ τους συνολων. Υπαρχει συνολο S που με καθενα απο τα συνολα του Α εχει ακριβως ενα κοινο στοιχειο".
Συμβολικα:

$$(\forall x\in A)x\neq\emptyset \wedge (\forall x\in A)(\forall y\in A)(x\neq y \longrightarrow x\cap y=\emptyset) \longrightarrow \exists S(\forall x\in A)\exists u(S\cap x=\{u\}).$$

Το συνολο S λεγεται <u>συνολο επιλογης</u> για το Α, διοτι απο καθενα συνολο του Α "επιλεγει" ενα στοιχειο.

Οταν το Α αποτελειται απο ενα μη κενο συνολο Χ, τοτε μπορουμε απο το Χ να παρουμε ενα στοιχειο. Δεν υπαρχει επισης προβλημα επιλογης αν το Α ειναι πεπερασμενο. Γενικα ομως, η δυνατοτητα επιλογης δεν εξασφαλιζεται χωρις ειδικο αξιωμα.

Ευκολα αποδεικνυεται οτι οι παρακατω δυο προτασεις ειναι ισοδυναμες με το αξιωμα επιλογης (ασκηση 8.1).

*Προταση 1.* Εστω $(A_t)_{t\in T}$ οικογενεια μη κενων συνολων. Υπαρχει μια συναρτηση f με πεδιο ορισμου το συνολο T, τετοια ωστε για καθε $t\in T$:

$$f(t)\in A_t.$$

Υπαρχει δηλαδη μια συναρτηση επιλογης για την οικογενεια $(A_t)_{t\in T}$.

Το παραπανω σημαινει οτι το γενικευμενο καρτεσιανο γινομενο μιας οικογενειας μη κενων συνολων, ειναι μη κενο. Εχουμε δηλαδη:

$$(\forall t\in T)(A_t\neq\emptyset) \longrightarrow (\prod_{t\in T} A_t\neq\emptyset).$$

Η προταση 1 απαντα λοιπον στο ερωτημα που θεσαμε στο κεφαλαιο 2 (σελιδα 29).

*Προταση 2.* Εστω A συνολο. Υπαρχει συναρτηση W με $dom(W)=\mathcal{P}A-\{\emptyset\}$, ωστε:

$$(\forall Y\in\mathcal{P}A)(A\neq\emptyset \longrightarrow W(Y)\in Y).$$

Μια τετοια συναρτηση W λεγεται <u>συναρτηση επιλογης</u> για τα υποσυνολα του A, αφου "διαλεγει" απο καθε μη κενο υποσυνολο του A ενα στοιχειο.

<u>Παρατηρηση</u>. Χωρις να χρησιμοποιησουμε το αξιωμα επιλογης, μπορουμε να ορισουμε μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του ω. Αρκει για καθε $Z\subseteq\omega$, $Z\neq\emptyset$ να θεσουμε απλως: $W(Z)=\min Z$.

Γενικοτερα, για καθε συνολο A που δεχεται μια καλη διαταξη R, θετοντας:

$$W(Z)=\min_R Z \qquad (\text{για } Z\subseteq A,\ Z\neq\emptyset),$$

οριζουμε μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του A.

## 8.2 <u>Το Λημμα των Kuratowski και Zorn.</u>

Στα Μαθηματικα, αντι για το αξιωμα επιλογης, εφαρμοζεται συχνα ενα ισοδυναμο μ' αυτο θεωρημα. Το θεωρημα αυτο αποδειχθηκε απο τους Kuratowski (1922) και Zorn (1935) και ειναι γνωστο ως Λημμα του Zorn.

Πριν αποδειξουμε το Λημμα των Kuratowski-Zorn, θα ορισουμε μια βοηθητικη εννοια που απλοποιει τη διατυπωση του.

<u>Ορισμος</u>. Εστω ≤ μερικη διαταξη ενος συνολου X. Ενα υποσυνολο $\mathcal{A}$ του X λεγεται <u>αλυσιδα</u>, οταν το $\mathcal{A}$ ειναι γραμμικα διατεταγμενο απο τη σχεση ≤, δηλαδη οταν

$$(\forall x\in\mathcal{A})(\forall y\in\mathcal{A})(x\leq y \vee y\leq x).$$

*<u>Θεωρημα 1.</u> (Λημμα Kuratowski-Zorn).*

Εστω $\langle X,\leq\rangle$ μερικως διατεταγμενο συνολο που ικανοποιει τη συνθηκη:

(+) "Για καθε αλυσιδα υπαρχει ανω φραγμα".

Τοτε στο X υπαρχει μειζον (maximal) στοιχειο, δηλαδη

$$(\exists c\in X)(\forall x\in X)(c\leq x \longrightarrow x=c).$$

<u>Αποδειξη</u>: Εστω $x_0$ οποιοδηποτε στοιχειο του X. Ας υποθεσουμε οτι δεν υπαρχει στο X μειζον στοιχειο x με $x_0\leq x$. Τοτε για καθε $x\in X$ ($x_0\leq x$) υπαρχει $y\in X$ ωστε $y\neq x$ και $x\leq y$ (δηλαδη $x<y$). Αυτο σημαινει οτι τα συνολα:

$$\{y\in X: x<y\}$$

(για $x\in X$, $x_0\leq x$) ειναι μη κενα.

Απο την υποθεση του θεωρηματος επεται οτι για καθε αλυσιδα $\mathcal{A}$, το συνολο $\{y\in X: (\forall a\in\mathcal{A})a\leq y\}$ των ανω φραγματων της $\mathcal{A}$ δεν ειναι κενο. Αν η αλυσιδα $\mathcal{A}$ δεν περιεχει μεγιστο στοιχειο, τοτε καθε ανω φραγμα της ειναι γνησιο. Για τετοιες αλυσιδες εχουμε οτι το συνολο:

$$\Gamma(\mathcal{A})=\{y\in X: (\forall a\in\mathcal{A})a<y\}$$

των γνησιων ανω φραγματων της $\mathcal{A}$ ειναι μη κενο.

Εχουμε λοιπον οτι:

(1) Για καθε $x\in X$, $x_0\leq x$: $\{y\in X: x<y\}\neq\varnothing$.

(2) Για καθε αλυσιδα $\mathcal{A}$ χωρις μεγιστο στοιχειο: $\Gamma(\mathcal{A})\neq\varnothing$.

Εστω W μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του X. Βασει των (1) και (2) μπορουμε, με τη βοηθεια της συναρτησης W, για <u>καθε</u> διατακτικο αριθμο α, να ορισουμε μια γνησια αυξουσα, υπερπεπερασμενη ακολουθια $(z_\xi)_{\xi<\alpha}$ στοιχειων του X. Θα καταληξουμε σε ατοπο, διοτι δεν υπαρχουν τετοιες ακολουθιες με οποιοδηποτε μηκος α (το α πρεπει να ειναι μικροτερο απο τον αριθμο Hartogs H(X) του συνολου X).

Με υπερπεπερασμενη επαγωγη οριζουμε:

$$z_0=x_0,$$
$$z_{\xi+1}=W(\{y\in X: z_\xi<y\}),$$
$$z_\lambda=W(\Gamma(\{z_\xi:\xi<\lambda\}))\quad (\text{για οριακο } \lambda\neq 0).$$

Ειναι προφανες οτι για καθε ξ: $z_\xi<z_{\xi+1}$. Επισης αν λ ειναι οριακος διατακτικος αριθμος και $\xi<\lambda$, τοτε $z_\xi<z_\lambda$. Επεται οτι υπερπεπερασμενη ακολουθια $(z_\xi)_{\xi<\alpha}$ ειναι γνησια αυξουσα στο $\langle X,\leq\rangle$. ∎

<u>Παρατηρηση</u>. Ας σημειωσουμε οτι παραπανω δειξαμε κατι ισχυροτερο. Αποδειξαμε οτι αν το $\langle X,\leq\rangle$ μερικως διατεταγμενο συνολο ικανοποιει τη συνθηκη (+) των Kuratowski-Zorn, τοτε για καθε $x_0\in X$ υπαρχει στο X μειζον στοιχειο y με $x_0\leq y$.

Το γεγονος οτι το Λημμα των Kuratowski-Zorn ειναι ισοδυναμο με το αξιωμα επιλογης δεν ειναι αμεσως φανερο. Θα το δουμε στην επομενη παραγραφο. Μια αλλη δικαιολογηση περιεχει η ασκηση 6.7.

<u>Παραδειγμα 1</u>. Εφαρμοζοντας το Λημμα των Kuratowski-Zorn, θα αποδειξουμε οτι σε καθε διανυσματικο χωρο υπαρχει βαση.

Εστω V διανυσματικος χωρος. Θεωρουμε το συνολο

$X=\{Y\in\mathcal{P}V$: "Y ειναι γραμμικα ανεξαρτητο συνολο διανυσματων"$\}$.

Η σχεση $\subseteq_X$ ειναι μερικη διαταξη του X. Θα δειξουμε οτι το $\langle X,\subseteq_X\rangle$ ικανοποιει τη συνθηκη των Kuratowski-Zorn.

Εστω $\mathcal{A}$ μια αλυσιδα του $\langle X,\subseteq_X\rangle$. Αυτο σημαινει οτι για καθε $Y,Z\in\mathcal{A}$: $Y\subseteq Z$ η $Z\subseteq Y$. Η ενωση $\bigcup\mathcal{A}$ ειναι προφανως ενα συνολο διανυσματων που περιεχει καθε στοιχειο του $\mathcal{A}$. Αρκει να αποδειξουμε οτι το $\bigcup\mathcal{A}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο. Θα εχουμε τοτε οτι $\bigcup\mathcal{A}\in X$, και συνεπως οτι το $\bigcup\mathcal{A}$ ειναι ανω φραγμα της αλυσιδας $\mathcal{A}$.

Εστω $\{v_0,v_1,\ldots,v_k\}$ ενα πεπερασμενο υποσυνολο του $\bigcup A$. Τοτε υπαρχουν $Y_0,Y_1,\ldots,Y_k$ στοιχεια του A, τετοια ωστε $v_0\in Y_0, v_1\in Y_1,\ldots,v_k\in Y_k$. Επειδη το ειναι αλυσιδα, μεταξυ των συνολων $Y_0,Y_1,\ldots,Y_k$ υπαρχει ενα $Y_l$ $(0\le l\le k)$ που περιεχει τα υπολοιπα. Συνεπως εχουμε $\{v_0,v_1,\ldots,v_k\}\subseteq Y_l$. Επειδη το συνολο $Y_l$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο, επεται οτι τα διανυσματα $v_0,v_1,\ldots,v_k$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα.

Δειξαμε λοιπον οτι καθε πεπερασμενο υποσυνολο του $\bigcup\mathcal{A}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο, που σημαινει οτι το $\bigcup\mathcal{A}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.

Απο το Λημμα των Kuratowski-Zorn εχουμε οτι στο $\langle X,\subseteq\rangle$ υπαρχει ενα μειζον στοιχειο B. Για καθε διανυσμα $v\in V$, το συνολο $B\cup\{v\}$ ειναι γνησια επεκταση του B, αρα δεν ειναι γραμμικα ανεξαρτητο. Επεται οτι το v ειναι γραμμικος συνδυασμος στοιχειων του B. Αυτο σημαινει οτι το B ειναι βαση του χωρου V. Συμφωνα με την παραπανω παρατηρηση, μπορουμε να υποθεσουμε επιπλεον οτι το B ειναι επεκταση ενος προκαθορισμενου συνολου $Y_0$ γραμμικα ανεξαρτητων διανυσματων. Δειξαμε λοιπον πιο πανω οτι καθενα τετοιο συνολο $Y_0$ μπορει να επεκταθει σε βαση του χωρου V.

## 6.3 Η Αρχη Καλης Διαταξης.

Αλλη μια σημαντικη για τη θεωρια συνολων συνεπεια του αξιωματος επιλογης ειναι η λεγομενη Αρχη Καλης Διαταξης του Zermelo. Το θεωρημα αυτο, οπως θα δουμε πιο κατω, ειναι ισοδυναμο με το αξιωμα επιλογης. Θα το αποδειξουμε εφαρμοζοντας το Λημμα των Kuratowski-Zorn. Η ασκηση 6.8 περιγραφει μιαν αλλη αποδειξη του.

*<u>Θεωρημα 2</u>. (Αρχη Καλης Διαταξης του Zermelo).

Καθε συνολο δεχεται καλη διαταξη.

Αποδειξη: Εστω A συνολο. Θεωρουμε το συνολο

$$X=\{\langle B,\rho\rangle : B\subseteq A \wedge \text{"}\rho \text{ ειναι καλη διαταξη του } B\text{"}\}.$$

Στο X θεωρουμε τη σχεση ≤ που οριζεται ως εξης:

(*) $\langle B,\rho\rangle\leq\langle C,\sigma\rangle \leftrightarrow$ "B ειναι αρχικο τμημα του C" $\wedge$ $\sigma\cap B^2=\rho$.

Ευκολα ελεγχεται οτι η σχεση ≤ ειναι μερικη διαταξη του συνολου X. Θα δειξουμε οτι ικανοποιειται η υποθεση (+) του Λημματος Kuratowski-Zorn.

Εστω $\mathcal{A}=\{\langle B_i,\rho_i\rangle : i\in I\}$ μια αλυσιδα στοιχειων του X. Θετουμε

$$B=\bigcup_{i\in I}B_i \quad \text{και} \quad \rho=\bigcup_{i\in I}\rho_i.$$

Αποδεικνυεται (ασκηση 6.9) οτι η σχεση ρ ειναι καλη διαταξη του B και για καθε $i\in I$: $\langle B_i,\rho_i\rangle\leq\langle B,\rho\rangle$. Εχουμε συνεπως οτι $\langle B,\rho\rangle\in X$ και το $\langle B,\rho\rangle$ ειναι ανω φραγμα της αλυσιδας $\mathcal{A}$.

Απο το Λημμα των Kuratowski-Zorn επεται λοιπον οτι υπαρχει στο X ενα μειζον (ως προς τη διαταξη ≤) στοιχειο $\langle B,\rho\rangle$. Πρεπει να ειναι B=A. Πραγματικα, αν υπηρχε $c\in A-B$, τοτε στο $B'=B\cup\{c\}$ οριζεται μια καλη διαταξη ρ' (η "επομενη" της ρ). Θα ειχαμε τοτε

$$\langle B,\rho\rangle\leq\langle B',\rho'\rangle \text{ και } \langle B,\rho\rangle\neq\langle B',\rho'\rangle$$

που ειναι αδυνατο, αφου $\langle B,\rho\rangle$ ειναι μειζον. Επειδη εχουμε B=A, επεται οτι η σχεση ρ ειναι καλη διαταξη του συνολου A. ∎

Παρατηρηση. Οπως ειδαμε στην παρατηρηση της σελιδας 125, για καθε συνολο που δεχεται μια καλη διαταξη, μπορουμε να ορισουμε μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του. Απο την Αρχη Καλης Διαταξης (ΑΚΔ) επεται λοιπον οτι για καθε συνολο υπαρχει μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του. Το τελευταιο γεγονος ειναι ισοδυναμο με το αξιωμα επιλογης (ασκηση 6.1). Η Αρχη Καλης Διαταξης αποδειχθηκε με βαση το Λημμα των Kuratowski-Zorn (AKZ). Εχουμε δηλαδη οτι

$$(\text{Αξ.Επ.}) \longrightarrow (\text{AKZ}) \longrightarrow (\text{ΑΚΔ}) \longrightarrow (\text{Αξ.Επ.}).$$

Επεται λοιπον οτι το αξιωμα επιλογης, το Λημμα Kuratowski-Zorn και η Αρχη Καλης Διαταξης του Zermelo ειναι ισοδυναμα.

## 6.4 Οι πληθικοι αριθμοι στη θεωρια ZFC.

Στην παραγραφο 5.11 γνωρισαμε εναν ορισμο των πληθικων αριθμων για τα συνολα που δεχονται καλη διαταξη. Καθε τετοιο συνολο ειναι ισοπληθικο με καποιον διατακτικο αριθμο. Ο μικροτερος διατακτικος αριθμος μ' αυτη την ιδιοτητα ειχε οριστει ως ο πληθικος αριθμος του συνολου. Θεσαμε τοτε

$$\text{card}(A)=\min\xi : A\sim\xi.$$

το οποιο εχει νοημα για εκεινα τα συνολα A που δεχονται καλη διαταξη.

Απο την Αρχη Καλης Διαταξης επεται οτι ο παραπανω αριθμος card(A) οριζεται για καθε συνολο A. Στη θεωρια συνολων ZFC εχουμε λοιπον εναν σαφη ορισμο των πληθικων αριθμων.

Για καθε συνολο A ο αριθμος card(A) ειναι ενας αρχικος διατακτικος αριθμος. Για πεπερασμενα συνολο A το card(A) ειναι ενας φυσικος αριθμος. Για τους απειρους αρχικους διατακτικους αριθμους ορισαμε μια μια ιεραρχια, τη λεγομενη ιεραρχια των αλεφ (σελιδα 113). Καθε απειρο συνολο εχει ως πληθικο αριθμο καποιου αλεφ. Για καθε απειρο συνολο A υπαρχει λοιπον (μοναδικος) διατακτικος αριθμος ξ τετοιος ωστε:

$$\mathrm{card}(A)=\aleph_\xi.$$

Συμφωνα με τα παραπανω και αυτα που δειξαμε στην παραγραφο 5.11 (προταση 1511, σελιδα 113), βλεπουμε οτι για οποιαδηποτε συνολα, συγκρινονται οι πληθικοι τους αριθμοι. Δειξαμε λοιπον μια σημαντικη ιδιοτητημα των πληθικων αριθμων που δεν εχει αποδειχθει στο κεφαλαιο 4.

°<u>Θεωρημα 3</u>. Για οποιαδηποτε συνολα A,B ισχυει:

$$\mathrm{card}(A)\le\mathrm{card}(B) \quad \vee \quad \mathrm{card}(B)\le\mathrm{card}(A)$$

ή ισοδυναμα:

$$\mathrm{card}(A)<\mathrm{card}(B) \quad \vee \quad \mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B) \quad \vee \quad \mathrm{card}(B)<\mathrm{card}(A).$$

Το παραπανω διατυπωνεται και ως ενας νομος για τους πληθικους αριθμους.

°<u>Θεωρημα 3'</u>. (Νομος Τριχοτομιας για τους πληθικους αριθμους).
Για οποιουσδηποτε πληθικους αριθμους m,n ισχυει:

$$m<n \vee m=n \vee n<m.$$

<u>Παρατηρηση</u>. Στο προβλημα συγκρισης των πληθικων αριθμων δεν μπορουμε να απαντησουμε χωρις το αξιωμα επιλογης. Και τουτο διοτι ο Νομος Τριχοτομιας ειναι ισοδυναμος με αυτο το αξιωμα. Πραγματικα, ας υποθεσουμε οτι για οποιαδηποτε συνολα συγκρινονται οι πληθικοι τους αριθμοι. Τοτε για καθε συνολο A υπαρχει ενας διατακτικος αριθμος α ωστε

$$\mathrm{card}(A)\le\mathrm{card}(\alpha)$$

(οποιοσδηποτε α που δεν κυριαρχειται απο το A). Αυτο σημαινει οτι καθε συνολο κυριαρχειται απο καποιον διατακτικο αριθμο, και συνεπως (ασκηση 5.34) οτι δεχεται μια καλη διαταξη. Βλεπουμε λοιπον οτι η Αρχη Καλης Διαταξης, αρα και το αξιωμα επιλογης, ειναι συνεπεια του Νομου Τριχοτομιας για τους πληθικους αριθμους.

Για τα αριθμησιμα συνολα εχουμε card(A)=$\aleph_0$. Ο πρωτος πληθικος αριθμος που ειναι μεγαλυτερος απο το $\aleph_0$ ειναι το $\aleph_1$ (που ειναι ο μικροτερος μη αριθμησιμος διατακτικος αριθμος). Ο πληθικος αριθμος του συνεχους (c=card(ℝ)) ειναι καποιο αλεφ. Δηλαδη για καποιοον διατακτικο αριθμο ξ ισχυει: $c=\aleph_\xi$. Απο την Εικασια του Συνεχους (σελιδα 83) προκυπτει οτι μεταξυ των $\aleph_0$ και c δεν υπαρχει αλλος πληθικος αριθμος (ασκηση 4.36). Συνεπως εχουμε οτι

$$c=\aleph_1.$$

Στη θεωρια συνολων ZFC ευκολα αποδεικνυεται οτι η παραπανω ισοτητα ειναι ισοδυναμη με την Εικασια του Συνεχους (ασκηση 6.10).

## 6.5 Αλλες συνεπειες του αξιωματος επιλογης.

Το αξιωμα επιλογης μας επιτρεπει να απαντησουμε και σε αλλα ερωτηματα που θεσαμε νωριτερα. Οπως ειδαμε στο κεφαλαιο 4, καθε απειρο συνολο ειναι και κατα Dedekind απειρο (σελιδα 67). Τωρα μπορουμε να αποδειξουμε οτι ισχυει και το αντιστροφο. Με τη βοηθεια του αξιωματος επιλογης, αποδεικνυεται αμεσα (ασκηση 6.5) οτι καθε απειρο συνολο περιεχει ενα αριθμησιμο υποσυνολο. Αλλη μια αιτιολογηση μας δινει ο Νομος Τριχοτομιας (αν A απειρο, τοτε πρεπει να ειναι $\aleph_0\leq$card(A)). Εχουμε συνεπως (απο την ασκηση 4.14) οτι καθε απειρο συνολο ειναι ισοπληθικο με καποιο γνησιο υποσυνολο του.

°**Προταση 3.** Ενα συνολο ειναι απειρο εαν και μονον εαν ειναι κατα Dedekind απειρο.

Η προταση 1 του κεφαλαιου 5 μας λεει οτι οι καλες διαταξεις δεν εχουν απειρες φθινουσες ακολουθιες. Χρησιμοποιωντας καταλληλα το αξιωμα επιλογης, μπορουμε να αποδειξουμε και το αντιστροφο (ασκηση 6.4). Εχουμε λοιπον τον ακολουθο χαρακτηρισμο των καλων διαταξεων:

°**Προταση 4.** Εστω R γνησια γραμμικη διαταξη του συνολου A. Η σχεση R ειναι καλη διαταξη του A αν και μονο αν δεν υπαρχει απειρη R-φθινουσα ακολουθια στοιχειων του A.

Η προταση 14 του κεφαλαιου 4 δειχνει πως, χρησιμοποιωντας δοσμενες αριθμησεις $(f_n)_{n\in\omega}$ μιας αριθμησιμης οικογενειας $(A_n)_{n\in\omega}$ μη κενων συνολων, μπορουμε να ορισουμε μια αριθμηση της ενωσης $\bigcup_{n\in\omega} A_n$. Το αξιωμα επιλογης μας επιτρεπει να διαλεξουμε τετοιες αριθμησεις και να αποδειξουμε την παρακατω ιδιοτητα (ασκηση 6.12).

°<u>Προταση 5</u>. Η ενωση μιας αριθμησιμης οικογενειας το πολυ αριθμησιμων συνολων ειναι το πολυ αριθμησιμη.

Απο την παραπανω προταση επεται αμεσως μια σημαντικη ιδιοτητα του διατακτικου αριθμου $\omega_1$ (ασκηση 6.13).

°<u>Προταση 6</u>. Εστω $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ ακολουθια αριθμησιμων διατακτικων αριθμων. Τοτε ο διατακτικος αριθμος $\bigcup_{n\in\omega}\alpha_n$ (συνεπως και ο $\sup\{\alpha_n : n\in\omega\}$) ειναι αριθμησιμος. Εχουμε δηλαδη:

$$(\forall n\in\omega)(\alpha_n<\omega_1) \longrightarrow \Big(\bigcup_{n\in\omega}\alpha_n<\omega_1\Big).$$

## 6.6 Εφαρμογες της Αρχης Υπερπεπερασμενης Αναδρομης.

Θα κλεισουμε το κεφαλαιο με δυο παραδειγματα εφαρμογης της Αρχης Υπερπεπερασμενης Αναδρομης στα Μαθηματικα.

<u>Τα Borel συνολα.</u>

Τα Borel υποσυνολα των Ευκλειδειων χωρων $\mathbb{R}^n$ (και γενικοτερα των μετρικων χωρων) παιζουν σημαντικο ρολο στη Μαθηματικη Αναλυση. Θα περιγραψουμε πρωτα το συνηθισμενο τους ορισμο. Μετα, χρησιμοποιωντας υπερπεπερασμενη αναδρομη, θα δωσουμε εναν διαφορετικο ορισμο. Ο τελευταιος ορισμος των Borel συνολων μας επιτρεπει να αποδεικνυουμε πολλες ιδιοτητες τους με υπερπεπερασμενη επαγωγη.

Ο ορος "οικογενεια", οπως συνηθιζεται στα Μαθηματικα, παρακατω θα σημαινει απλως συνολο.

Η οικογενεια $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνολων του χωρου X, οριζεται ως η μικροτερη οικογενεια $\mathcal{Y}$ υποσυνολων του X που περιεχει τα κλειστα συνολα και ειναι κλειστη ως προς τις πραξεις αριθμησιμων ενωσεων και τομων. Η $\mathcal{B}(X)$ ειναι δηλαδη η μικροτερη οικογενεια $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{P}(X)$ που ικανοποιει τις πιο κατω συνθηκες:

i) Αν F ειναι κλειστο υποσυνολο του X, τοτε $F\in\mathcal{Y}$.

ii) Αν $A\in\mathcal{Y}$, τοτε $X-A\in\mathcal{Y}$.

iii) Αν για καθε $n\in\omega$: $A_n\in\mathcal{Y}$, τοτε $\bigcup_{n\in\omega}A_n\in\mathcal{Y}$.

iv) Αν για καθε $n\in\omega$: $A_n\in\mathcal{Y}$, τοτε $\bigcap_{n\in\omega}A_n\in\mathcal{Y}$.

Η αιτιολογηξη υπαρξης της οικογενειας $\mathcal{B}(X)$ δεν ειναι δυσκολη (ασκηση 6.14).

Ευκολα βλεπουμε οτι τα ανοικτα υποσυνολα του χωρου X, ως συμπληρωματα κλειστων συνολων, ειναι Borel συνολα. Ειναι φανερο οτι σε αριθμησιμες ενωσεις κλειστων συνολων (τα λεγομενα $F_\sigma$ συνολα) ειναι Borel. Οι αριθμησιμες τομες ανοικτων συνολων (τα λεγομενα $G_\delta$ συνολα) ειναι επισης Borel συνολα.

Οι οικογενειες των $F_\sigma$ και των $G_\delta$ συνολων δεν εξαντλουν τα Borel συνολα. Αποδεικνυεται οτι στους Ευκλειδειους χωρους υπαρχουν αριθμησιμες ενωσεις $G_\delta$ συνολων ($G_{\delta\sigma}$ συνολα) και αριθμησιμες τομες $F_\sigma$ συνολων ($F_{\sigma\delta}$ συνολα) που δεν ειναι ουτε $F_\sigma$ ουτε $G_\delta$. Ομως ουτε οι οικογενειες $G_{\delta\sigma}$ και $F_{\sigma\delta}$ εξαντλουν τα Borel συνολα. Υπαρχουν Borel συνολα με πιο συνθετη "δομη".

Ας παρατηρησουμε οτι απο τις συνθηκες iii και iv του ορισμου, αρκει μονον μια. Πραγματικα, απο τους νομους του de Morgan εχουμε

$$\bigcap_{n\in\omega} A_n = X-\Big(\bigcup_{n\in\omega}(X-A_n)\Big),$$
$$\bigcup_{n\in\omega} A_n = X-\Big(\bigcap_{n\in\omega}(X-A_n)\Big).$$

Συνεπως, μια οικογενεια $\mathcal{Y}$ που εχει την ιδιοτητα ii, ικανοποιει την iii αν και μονο αν ικανοποιει την iv.

Συμφωνα με τα παραπανω, ο ορισμος της οικογενειας $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνολων του χωρου X, μπορει να εκφραστει πιο συντομα και ως εξης. Η $\mathcal{B}(X)$, ειναι η μικροτερη οικογενεια $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{P}(X)$ που ικανοποιει τις συνθηκες:

i') Αν G ειναι ανοικτο υποσυνολο του X, τοτε $G\in\mathcal{Y}$.

ii) Αν $A\in\mathcal{Y}$, τοτε $X-A\in\mathcal{Y}$.

iii) Αν για καθε $n\in\omega$: $A_n\in\mathcal{Y}$, τοτε $\bigcup_{n\in\omega} A_n\in\mathcal{Y}$.

Θα γνωρισουμε τωρα εναν αλλον τροπο ορισμου των Borel συνολων.

Θα ορισουμε την οικογενεια των Borel συνολων βημα-βημα με υπερπεπερασμενη επαγωγη.

Ξεκιναμε απο την οικογενεια ($\mathcal{G}$) των ανοικτων συνολων του χωρου. Στα επομενα βηματα θα φροντισουμε να ικανοποιουνται οι συνθηκες ii και iii. Στο πρωτο βημα παιρνουμε την οικογενεια των συμπληρωματων των ανοικτων συνολων και τις αριθμησιμες ενωσεις αυτων των συμπληρωματων. Σχηματιζουμε ετσι μια οικογενεια συνολων (τα $F_\sigma$ συνολα) που περιεχει την οικογενεια ($\mathcal{F}$) των κλειστων συνολων και ειναι προφανως κλειστη ως προς αριθμησιμες ενωσεις (δηλαδη ικανοποιει τη συνθηκη iii). Η νεα αυτη οικογενεια δεν ειναι ομως κλειστη ως προς συμπληρωματα (δεν ικανοποιειται δηλαδη η συνθηκη ii).

Συνεχιζουμε τη διαδικασια, παιρνοντας στο δευτερο βημα τα συμπληρωματα των $F_\sigma$ συνολων και τις αριθμησιμες ενωσεις αυτων των συμπληρωματων. Η νεα οικογενεια (των $G_{\delta\sigma}$ συνολων) ικανοποιει τη συνθηκη iii και δεν ικανοποιει την ii.

Συνεχιζουμε την παραπανω διαδικασια επαγωγικα. Στο βημα n+1 (για $n\in\omega$) οριζουμε μια οικογενεια συνολων $\Sigma_{n+1}$. Αυτη αποτελειται απο τις αριθμησιμες ενωσεις συμπληρωματων στοιχειων της προηγουμενης οικογενειας, δηλαδη της $\Sigma_n$. Παιρνουμε τωρα την ενωση των $\Sigma_n$. Προκυπτει μια οικογενεια συνολων που ικανοποιει τη συνθηκη ii ($A\in\Sigma_n \longrightarrow X-A\in\Sigma_{n+1}$) αλλα δεν ειναι κλειστη ως προς αριθμησιμες ενωσεις, δηλαδη δεν ικανοποιει τη συνθηκη iii.

Η διαδικασια μπορει να συνεχιστει με υπερπεπερασμενη επαγωγη. Οπως ειδαμε πιο πανω, δεν αρκει η απλη, πεπερασμενη επαγωγη. Πριν διατυπωσουμε τον ορισμο, εισαγουμε μερικους συμβολισμους.

Εστω X συνολο και $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{P}(X)$. Με $\mathcal{C}(\mathcal{Y})$ συμβολιζουμε την οικογενεια των συμπληρωματων στοιχειων της οικογενειας $\mathcal{Y}$. Εχουμε δηλαδη

$$\mathcal{C}(\mathcal{Y})=\{X-A: A\in\mathcal{Y}\}.$$

Αν $A\in\mathcal{Y}$, εχουμε προφανως οτι $X-A\in\mathcal{C}(\mathcal{Y})$. Με $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ συμβολιζουμε την οικογενεια των αριθμησιμων ενωσεων στοιχειων της οικογενειας $\mathcal{Y}$, δηλαδη

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y})=\{\bigcup_{n\in\omega}A_n : (\forall n\in\omega)(A_n\in\mathcal{Y})\}.$$

Ευκολα βλεπουμε οτι, για οποιαδηποτε οικογενεια $\mathcal{Y}$, η $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ ειναι κλειστη ως προς αριθμησιμες ενωσεις.

Εστω X Ευκλειδειος (η γενικοτερα μετρικος) χωρος. Με υπερπεπερασμενη επαγωγη, οριζουμε για $\xi<\omega_1$:

$\Sigma_0=\mathcal{G}$="η οικογενεια των ανοικτων συνολων του X".

$\Sigma_{\xi+1}=\mathcal{S}(\mathcal{C}(\Sigma_\xi))$.

$\Sigma_\lambda=\bigcup_{\xi<\lambda}\Sigma_\xi$ (για οριακο $\lambda\neq 0$).

Εχουμε δηλαδη:

$A\in\Sigma_0 \leftrightarrow$ A ειναι ανοικτο υποσυνολο του X.

$A\in\Sigma_{\xi+1} \leftrightarrow$ υπαρχει ακολουθια $(B_n)_{n\in\omega}$ στοιχειων του $\Sigma_\xi$ ωστε $A=\bigcup_{n\in\omega}(X-B_n)$.

$A\in\Sigma_\lambda \leftrightarrow$ για καποιο $\xi<\lambda$: $A\in\Sigma_\xi$ (αν λ οριακο, $\lambda\neq 0$).

Θετουμε

$$\Sigma=\bigcup_{\xi<\omega_1}\Sigma_\xi.$$

Ευκολα ελεγχεται οτι η οικογενεια Σ:

(1) Περιεχει τα ανοικτα συνολα.

(2) Ειναι κλειστη ως προς συμπληρωματα.

Αποδεικνυεται οτι τα κλειστα συνολα ειναι αριθμησιμες τομες ανοικτων συνολων ($\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}_\delta$). Συνεπως, τα ανοικτα συνολα ειναι αριθμησιμες ενωσεις κλειστων συνολων. Εχουμε δηλαδη $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}_\sigma$ ή ισοδυναμα:

(3) $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$.

Με υπερπεπερασμενη επαγωγη μπορουμε να αποδειξουμε οτι:

(4) Για καθε $\xi<\omega_1$: $\Sigma_\xi \subseteq \Sigma_{\xi+1}$ και γενικοτερα, για $\xi\leq\eta<\omega_1$: $\Sigma_\xi \subseteq \Sigma_\eta$.

Με βαση την προταση 6, αποδεικνυεται τωρα ευκολα οτι η $\Sigma$:

(5) Ειναι κλειστη ως προς αριθμησιμες ενωσεις.

Απο τα παραπανω ειναι φανερο οτι η οικογενεια $\Sigma$ ικανοποιει τις συνθηκες I', II και III (σελιδα 132) του κλασσικου ορισμου των Borel συνολων. Περιεχει λοιπον την οικογενεια $\mathcal{B}(X)$ που ειναι η μικροτερη με αυτες τις ιδιοτητες. Εχουμε δηλαδη:

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \Sigma.$$

Ισχυει και το αντιστροφο. Με υπερπεπερασμενη επαγωγη αποδεικνυεται οτι για καθε $\xi<\omega_1$ ισχυει: $\Sigma_\xi \subseteq \mathcal{B}(X)$ (ασκηση 6.15 iv). Επομενως εχουμε:

$$\Sigma \subseteq \mathcal{B}(X).$$

Αρα οι οικογενειες $\Sigma$ και $\mathcal{B}(x)$ ειναι ισες.

Βλεπουμε λοιπον οτι και οι δυο ορισμοι μας δινουν την ιδια οικογενεια συνολων.

<u>Παρατηρηση</u>. Αποδεικνυεται (η αποδειξη δεν ειναι ευκολη) οτι η υπερπεπερασμενη ακολουθια $(\Sigma_\xi)_{\xi<\omega_1}$ ειναι γνησια αυξουσα, δηλαδη οτι για καθε $\xi<\omega_1$ υπαρχουν συνολα που ανηκουν στην $\Sigma_\xi$ και δεν ανηκουν σε καμια $\Sigma_\eta$ για $\eta<\xi$. Τουτο σημαινει οτι τα $\omega_1$ βηματα του αναδρομικου ορισμου ηταν απαραιτητα. Για καθε $\alpha<\omega_1$, η ενωση $\bigcup_{\xi<\alpha}\Sigma_\xi$ γνησια περιεχεται στην οικογενεια $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνολων του χωρου $X$.

<u>Το τελειο μερος κλειστου συνολου.</u>

Θα δουμε παρακατω πως κατασκευαζεται το λεγομενο τελειο μερος ενος κλειστου υποσυνολου του $\mathbb{R}$. Ο Cantor χρησιμοποιησε αυτη την κατασκευη για να αποδειξει μια σημαντικη ιδιοτητα των κλειστων υποσυνολων του $\mathbb{R}$.

Ενα κλειστο υποσυνολο του $\mathbb{R}$ λεγεται <u>τελειο</u>, οταν δεν περιεχει μεμονωμενα σημεια, δηλαδη αν καθε στοιχειο του ειναι σημειο συσσωρευσης.

Η ακολουθη προταση ειναι γνωστη ως θεωρημα των Cantor-Bendixon:

"Καθε κλειστο υποσυνολο $F$ του $\mathbb{R}$ ειναι ενωση δυο ξενων συνολων

$$F = T \cup A,$$

οπου το $T$ ειναι τελειο και το $A$ ειναι το πολυ αριθμησιμο".

Αποδεικνυεται οτι η για καθε $F$, η παραπανω παρασταση του συνολου

F ειναι μοναδικη. Το συνολο T λεγεται <u>τελειο μερος</u> του F.

Το τελειο μερος ενος αριθμησιμου συνολου ειναι το κενο συνολο. Τα υπεραριθμησιμα υποσυνολα του ℝ εχουν μη κενο τελειο μερος.

Θα κατασκευασουμε το τελειο μερος ενος δοσμενου κλειστου συνολου F, ξεκινωντας απο το F και αφαιρωντας βημα-βημα τα μεμονωμενα σημεια. Αν απο το F αφαιρεσουμε τα μεμονωμενα σημεια, εχουμε ενα κλειστο υποσυνολο F' του F που δεν ειναι υποχρεωτικα τελειο. Το F' μπορει να εχει μεμονωμενα σημεια.

Εισαγουμε πρωτα μια βοηθητικη εννοια.

<u>Παραγωγο των Cantor-Bendixon</u> ενος συνολου $X \subseteq \mathbb{R}$ λεμε το συνολο $X'$ των σημειων συσσωρευσης του X.

Ευκολα αποδεικνυεται οτι για καθε X, το συνολο X' ειναι κλειστο. Αν το συνολο X ειναι κλειστο, τοτε περιεχει την παραγωγο του, δηλαδη εχουμε $X' \subseteq X$. Το $X-X'$ ειναι τοτε το συνολο των μεμονωμενων σημειων του X. Το συνολο $X-X'$ ειναι το πολυ αριθμησιμο (ασκηση 8.16). Ειναι φανερο οτι ενα κλειστο συνολο X ειναι τελειο εαν και μονον εαν ισχυει $X=X'$.

Εστω F κλειστο υποσυνολο του ℝ. Με υπερπεπερασμενη επαγωγη, για $\xi<\omega_1$ οριζουμε την παραγωγο Cantor-Bendixon $F_\xi$ ταξης ξ του συνολου F.

$$F_0=F.$$
$$F_{\xi+1}=(F_\xi)'.$$
$$F_\lambda=\bigcap_{\xi<\lambda} F_\xi \quad \text{(για οριακο } \lambda\neq 0\text{).}$$

Η $(F_\xi:\xi<\omega_1)$, που ορισαμε πιο πανω, ειναι μια φθινουσα υπερπεπερασμενη ακολουθια κλειστων υποσυνολων του ℝ. Μια τετοια ακολουθια δεν μπορει να ειναι γνησια φθινουσα (ασκηση 8.17). Υπαρχει λοιπον διατακτικος $\alpha<\omega_1$ τετοιος ωστε $F_{\alpha+1}=F_\alpha$. Η τελευταια ισοτητα σημαινει οτι το συνολο $F_\alpha$ ειναι τελειο, αφου $F_\alpha=(F_\alpha)'$. Για καθε $\beta\geq\alpha$ εχουμε τοτε $F_\beta=F_\alpha$, δηλαδη η $(F_\xi:\xi<\omega_1)$ σταθεροποιειται.

Θα κλεισουμε το κεφαλαιο με την αποδειξη του θεωρηματος Cantor-Bendixon. Παιρνουμε ως T το παραπανω $F_\alpha$. Το T ειναι τελειο υποσυνολο του F. Αρκει να δειξουμε οτι η διαφορα $A=F-T$ ειναι το πολυ αριθμησιμη. Απο τον ορισμο της ακολουθιας $(F_\xi:\xi<\omega_1)$ εχουμε οτι, για καθε $\xi<\omega_1$, οι διαφορες $F_\xi-F_{\xi+1}=F_\xi-(F_\xi)'$ ειναι το πολυ αριθμησιμες. Με υπερπεπερασμενη επαγωγη βλεπουμε οτι, για καθε $\beta<\omega_1$, η διαφορα $F_0-F_\beta$ ειναι το πολυ αριθμησιμη. Πραγματικα, αρκει να παρατηρησουμε οτι:

$$F_0-F_{\xi+1}\subseteq(F_0-F_\xi)\cup(F_\xi-F_{\xi+1}),$$
$$F_0-F_\lambda=F_0-\Big(\bigcap_{\xi<\lambda}F_\xi\Big)=\bigcup_{\xi<\lambda}(F_0-F_\xi) \quad \text{(για οριακο } \lambda\neq 0\text{).}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.1 Αποδειξτε οτι οι προτασεις 1 και 2 (σελιδα 125) ειναι ισοδυναμες με το αξιωμα επιλογης.

6.2 Αποδειξτε οτι το αξιωμα επιλογης ειναι ισοδυναμο με την προταση: "Για καθε σχεση R υπαρχει συναρτηση f τετοια ωστε dom(R)=dom(f)".

6.3 Αποδειξτε οτι αν $f:A \xrightarrow[\text{επι}]{} B$, τοτε card(B)≤card(A).

6.4 Εστω R γνησια γραμμικη διαταξη του συνολου A. Αποδειξτε οτι η R ειναι καλη διαταξη του A αν και μονο αν δεν υπαρχει απειρη R-φθινουσα ακολουθια στοιχειων του A. Συγκρινετε με την προταση 1 του κεφαλαιου 5 (σελιδα 90).

6.5 Εστω A απειρο συνολο. Χρησιμοποιωντας μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του A, αποδειξτε οτι το A περιεχει αριθμησιμο υποσυνολα, και συνεπως οτι ειναι ισοπληθικο με κανοιο γνησιο υποσυνολο του (ασκηση 4.14).

6.6 Εστω $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ και $a\in\mathbb{R}$. Ας υποθεσουμε οτι υπαρχει $\varepsilon>0$ ωστε για καθε $\delta>0$ υπαρχει $x\in\mathbb{R}$ τετοιο ωστε:

$$|x-a|<\delta \wedge |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$$

Αποδειξτε οτι τοτε υπαρχει ακολουθια πραγματικων αριθμων $(x_n)_{n\in\omega}$ με οριο το a για την οποια η ακολουθια $(f(x_n))_{n\in\omega}$ δεν συγκλινει στο f(a).

6.7 Εστω $(A_t)_{t\in T}$ οικογενεια μη κενων συνολων. Μερικη συναρτηση επιλογης για την $(A_t)_{t\in T}$ λεμε μια συναρτηση f με $\mathrm{dom}(f)\subseteq T$ τετοια ωστε για καθε $t\in T$: $f(t)\in A_t$. Χρησιμοποιωντας το Λημμα των Kuratowski-Zorn, αποδειξτε στο συνολο των μερικων συναρτησεων επιλογης υπαρχει μειζον (maximal ως προς τον εγκλεισμο ⊆). Δειξτε οτι μια τετοια συναρτηση ειναι συναρτηση επιλογης για την οικογενεια $(A_t)_{t\in T}$.

6.8 Εστω A συνολο και $b\notin A$. Εστω $W:\mathcal{P}A-\{\emptyset\} \longrightarrow A$ μια συναρτηση επιλογης για τα υποσυνολα του A. Επεκτεινουμε την W στο $\mathcal{P}A$ θετοντας $W(\emptyset)=b$. Για οποιονδηποτε διατακτικο αριθμο α, με υπερπεπερασμενη επαγωγη, οριζουμε για ξ<α:

$$x_\xi=W(A-\{x_\eta:\eta<\xi\}).$$

Αποδειξτε οτι αν $x_\alpha\neq b$, τοτε ο διατακτικος αριθμος α κυριαρχειται απο το A. Δειξτε οτι υπαρχει α ωστε $x_\alpha=b$. Δειξτε οτι για τον μικροτερο α μ' αυτη την ιδιοτητα, εχουμε $A=\{x_\eta : \eta<\alpha\}$ και συνεπως οτι το συνολο A (ως πεδιο τιμων μιας αμφιμονοσημαντης υπερπεπερασμενης ακολουθιας) δεχεται καλη διαταξη.

6.9 Εστω $\{<B_i,\rho_i>: i\in I\}$ μια οικογενεια καλα διατεταγμενων συνολων. Ας υποθεσουμε οτι για οποιαδηποτε $i, j\in I$:

$$<B_i,\rho_i>\preceq<B_j,\rho_j> \quad \eta \quad <B_j,\rho_j>\preceq<B_i,\rho_i>,$$

οπου $\preceq$ ειναι η σχεση που οριζεται απο την συνθηκη (*) στη σελιδα 128. Θετουμε

$$B=\bigcup_{i\in I}B_i \quad \text{και} \quad \rho=\bigcup_{i\in I}\rho_i.$$

Αποδειξτε οτι η σχεση ρ ειναι καλη διαταξη του B και για καθε $i\in I$:

$$<B_i,\rho_i>\preceq<B,\rho>.$$

6.10 Αποδειξτε οτι αν ισχυει $c=\aleph_1$, τοτε καθε απειρο, μη αριθμησιμο συνολο πραγματικων αριθμων εχει τον πληθικο αριθμο του συνεχους.

6.11 Αποδειξτε, χωρις τη χρηση του αξιωματος επιλογης, οτι για οποιουσδηποτε διατακτικους αριθμους $\alpha<\omega_1$ και $\beta<\omega_1$ ισχυει:

i) $\alpha+\beta<\omega_1$, ii) $\alpha\cdot\beta<\omega_1$.

6.12 Εστω $(A_n)_{n\in\omega}$ ακολουθια συνολων. Χρησιμοποιωντας καταλληλα το αξιωμα επιλογης και την προταση 14 στη σελιδα 72, αποδειξτε οτι αν καθενα απο τα συνολα $A_n$ (για $n\in\omega$) ειναι το πολυ αριθμησιμο, τοτε η ενωση $\bigcup_{n\in\omega}A_n$ ειναι το πολυ αριθμησιμη.

6.13 Αποδειξτε οτι για καθε ακολουθια $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ αριθμησιμων διατακτικων αριθμων, ο διατακτικος αριθμος $\bigcup_{n\in\omega}\alpha_n$ (αρα και ο $\sup\{\alpha_n : n\in\omega\}$) ειναι αριθμησιμος. Δειξτε δηλαδη οτι:

$$(\forall n\in\omega)(\alpha_n<\omega_1) \longrightarrow (\bigcup_{n\in\omega}\alpha_n<\omega_1).$$

6.14 Δειξτε οτι το δυναμοσυνολο του $\mathbb{R}$ ικανοποιει τις συνθηκες i-iv του ορισμου των Borel συνολων (σελιδα 131). Αποδειξτε οτι αν $\mathcal{Y},\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ικανοποιουν αυτες τις συνθηκες, τοτε και $\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}$ επισης τις ικανοποιει. Αποδειξτε γενικοτερα οτι αν οι συνθηκες ικανοποιουνται για καθε $\mathcal{Y}\in\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}\neq\emptyset$, $\mathfrak{F}\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$), τοτε ικανοποιουνται και απο την τομη $\bigcap\mathfrak{F}$. Αποδειξτε οτι υπαρχει η οικογενεια των Borel υποσυνολων

6.15 Εστω Σ η οικογενεια που οριστηκε στη σελιδα 133. Αποδειξτε οτι:

i) Η Σ περιεχει τα ανοικτα συνολα και ειναι κλειστη ως προς συμπληρωματα.

ii) Για οποιαδηποτε $\xi\leq\eta<\omega_1$ ισχυει: $\Sigma_\xi\subseteq\Sigma_\eta$ (θεωρηστε δεδομενο οτι $\Sigma_0\subseteq\Sigma_1$

και χρησιμοποιηστε υπερπεπερασμενη επαγωγη).

iii) Η $\Sigma$ ειναι κλειστη ως προς αριθμησιμες ενωσεις.

iv) Για καθε $\xi<\omega_1$: $\Sigma_\xi \subseteq B(X)$.

6.16 Εστω $X\subseteq\mathbb{R}$. Δειξτε οτι για καθε $x\in X$ που ειναι μεμονωμενο σημειο του $X$ υπαρχουν ρητοι αριθμοι $q$ και $r$ τετοιοι ωστε το $x$ ειναι μοναδικο σημειο της τομης του $X$ με το ανοικτο διαστημα $(q-r,q+r)$. Αποδειξτε οτι το συνολο $X-X'$ ειναι το πολυ αριθμησιμο.

6.17 Εστω $X,Y$ κλειστα υποσυνολα του $\mathbb{R}$. Εστω $X\subset Y$. Δειξτε οτι υπαρχουν ρητοι αριθμοι $q$ και $r$, τετοιοι ωστε το διαστημα $(q-r,q+r)$ τεμνει το $Y$ και ειναι ξενο με το $Y$. Με βαση το παραπανω, αποδειξτε οτι καμια φθινουσα υπερπεπερασμενη ακολουθια $(F_\xi)_{\xi<\omega_1}$ κλειστων υποσυνολων του $\mathbb{R}$ δεν ειναι γνησια φθινουσα.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Τα A1 ως A9 ειναι αξιωματα της θεωριας συνολων ZF (Zermelo-Fraenkel). Τα A1 ως A10 ειναι αξιωματα της θεωριας συνολων ZFC (ZF+Choice).

A1. Αξιωμα εκτασης.

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B).$$

"Για οποιοδηποτε συνολα A και B, αν τα A,B εχουν τα ιδια στοιχεια, τοτε ειναι ισα".

A2. Αξιωμα υπαρξης κενου συνολου.

$$\exists y \forall x\, x \notin y.$$

"Υπαρχει ενα συνολο που δεν εχει κανενα στοιχειο".

A3. Αξιωμα ζευγους.

$$\forall a \forall b \exists c (\forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b)).$$

"Για οποιαδηποτε a, b υπαρχει ενα συνολο c του οποιου στοιχεια ειναι το a, το b, και μονον αυτα".

A4. Αξιωμα ενωσης.

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists y \in A) x \in y)).$$

"Για καθε συνολο A υπαρχει ενα συνολο B στο οποιο ανηκουν τα στοιχεια των στοιχειων του A, και μονον αυτα".

A5. Αξιωμα δυναμοσυνολου.

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)).$$

"Για καθε συνολο A υπαρχει ενα συνολο B που αποτελειται ακριβως απο τα υποσυνολα του A".

A6. Αξιωμα απειρου.

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A)).$$

"Υπαρχει επαγωγικο συνολο, δηλαδη ενα συνολο A στο οποιο ανηκει το κενο συνολο και μαζι με καθε στοιχειο x του A, στο A ανηκει και το $x \cup \{x\}$ (το επομενο του x συνολο)".

A7. Αξιωματικο σχημα διαχωρισμου υποσυνολων.

Εστω Φ τυπος της γλωσσας της θεωριας συνολων.

$$\forall A \exists B (\forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \Phi(x))).$$

"Για καθε συνολο A υπαρχει ενα συνολο B στο οποιο ανηκουν εκεινα απο τα στοιχεια του A που ικανοποιουν τον τυπο Φ, και μονον αυτα".

A8. <u>Αξιωματικο σχημα αντικαταστασης.</u>

Εστω $\Phi(x,y)$ τυπος της γλωσσας της θεωριας συνολων, τετοιος ωστε: $\forall x \exists! y\, \Phi(x,y)$ (δηλαδη ο $\Phi(x,y)$ οριζει αντιστοιχιση).

$$\forall A \exists B(\forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\Phi(x,y))).$$

"Για καθε συνολο A υπαρχει ενα συνολο B του οποιου στοιχεια ειναι τα y που για καποιο x του ικανοποιουν τον τυπο $\Phi(x,y)$, και μονον αυτα".

A9. <u>Αξιωμα κανονικοτητας.</u>

$$\forall x(x \neq \emptyset \longrightarrow (\exists y(y \in x \wedge (\forall z \in x) z \notin y))).$$

"Σε καθε μη κενο συνολο υπαρχει ε-ελασσον στοιχειο. Δηλαδη, αν το συνολο x δεν ειναι κενο, τοτε υπαρχει σ' αυτο ενα y τετοιο ωστε κανενα στοιχειο του x δεν ανηκει στο y (το y δεν εχει στο x ε-προηγουμενο)".

A10. <u>Αξιωμα επιλογης.</u>

$$\forall A[(\forall x \in A) x \neq \emptyset \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \longrightarrow x \cap y = \emptyset) \longrightarrow \exists S(\forall x \in A)\exists u(S \cap x = \{u\})].$$

"Για καθε συνολο A μη κενων, ξενων ανα δυο συνολων, υπαρχει ενα συνολο S που εχει ενα ακριβως κοινο στοιχειο με καθε συνολο του A".

Α

Δ

# Ε

Ζ



Θ



Ι



Κ

Λ



Μ

Ρ

## Σ

Τ



Υ



Φ