Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Κλασικά θεωρήματα της τοπολογίας στην διάσταση 2

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος

Ηράκλειο 2004

1. Ομοτοπία

Η έννοια της ομοτοπίας είναι μία από τις πιο σημαντικές στην Τοπολογία. Ολα τα χρήσιμα τοπολογικά αναλλοίωτα είναι ομοτοπικά αναλλοίωτα.

1.1. Ορισμός. Εστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι. Δύο συνεχείς απεικονίσεις f, $g : X \to Y$ λέγονται *ομοτοπικές* αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $H : [0,1] \times X \to Y$ ώστε $H(0,x) = f(x)$ και $H(1,x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Η H λέγεται *ομοτοπία* από την f στην g και συνήθως γράφουμε $H : f \simeq g$ για συντομία. Επίσης με $H_t : X \to Y$ συμβολίζουμε την ενδιάμεση απεικόνιση $H_t(x) = H(t,x)$, $0 \leq t \leq 1$.

Σύμφωνα με τον ορισμό η f είναι ομοτοπική με την g, αν η g λαμβάνεται από την f με μια συνεχή μεταβολή. Οι ενδιάμεσες απεικονίσεις είναι οι H_t, $0 \leq t \leq 1$. Για να δείξει κάποιος οτι δύο δεδομένες συνεχείς απεικονίσεις είναι ομοτοπικές πρέπει να κατασκευάσει μία ομοτοπία μεταξύ τους. Για να γίνει αυτό χρειάζεται να έχει όσο το δυνατόν καλύτερη γεωμετρική εποπτεία των χώρων στους οποίους οι απεικονίσεις ορίζονται. Αν θέλουμε να αποδείξουμε οτι οι απεικονίσεις δεν είναι ομοτοπικές, τότε πρέπει να αποδείξουμε οτι δεν υπάρχει καμία ομοτοπία μεταξύ τους. Αυτό είναι αρκετά δύσκολο και ένας από τους βασικούς στόχους της Αλγεβρικής Τοπολογίας είναι η ανάπτυξη μεθόδων με τις οποίες μπορεί κάποιος να ανακαλύψει, αν δύο συνεχείς απεικονίσεις δεν είναι ομοτοπικές.

1.2. Παραδείγματα. (α) Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $Y \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σύνολο. Αν f, $g : X \to Y$ είναι δύο συνεχείς απεικονίσεις, τότε η f είναι ομοτοπική με την g. Μία ομοτοπία $H : f \simeq g$ δίνεται από τον τύπο $H(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

Από την άλλη μεριά, κάθε συνεχής απεικόνιση $h : Y \to X$ είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση. Αν $y_0 \in Y$, μια ομοτοπία $G : h \simeq h(y_0)$ δίνεται από τον τύπο $G(t,y) = h((1-t)y + ty_0)$.

(β) Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και f, $g : X \to S^n$ δύο συνεχείς απεικονίσεις, όπου $S^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \|z\| = 1\}$ είναι η n-σφαίρα, $n \geq 1$. Αν $f(x) \neq -g(x)$ για κάθε $x \in X$, τότε $f \simeq g$. Μια ομοτοπία είναι η $H : [0,1] \times X \to S^n$ με τύπο

$$H(t,x) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}.$$

(γ) Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to S^n$, που δεν είναι επί, είναι ομοτοπική με μια σταθερή, γιατί υπάρχει $z_0 \in S^n$ ώστε $f(x) \neq -(-z_0)$ για κάθε $x \in X$, οπότε από το παράδειγμα (β) έχουμε $f \simeq -z_0$.

(δ) Αν $f : S^1 \to S^1$ είναι μια συνεχής απεικόνιση και $z_0 \in S^1$, τότε $f \simeq z_0 \cdot f$ (μιγαδικός πολλαπλασιασμός). Μια τέτοια ομοτοπία είναι η $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ με τύπο $H(t,z) = f(z) \cdot e^{2\pi i t\theta}$, όπου το $0 \leq \theta < 1$ είναι τέτοιο ώστε $z_0 = e^{2\pi i \theta}$. Ειδικά, αν $f = id$, τότε η $z_0 \cdot id$ είναι η στροφή του κύκλου κατά γωνία $2\pi\theta$. Συνεπώς, οι στροφές του κύκλου είναι ομοτοπικές με την ταυτοτική απεικόνιση του κύκλου.

(ε) Εστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και y, $z \in Y$. Οι σταθερές απεικονίσεις με τιμές y και z, αντίστοιχα, είναι ομοτοπικές μεταξύ τους τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει ένα τόξο στον Y από το y στο z. Πράγματι, αν $\gamma : [0,1] \to Y$ είναι ένα τόξο με $\gamma(0) = y$ και $\gamma(1) = z$, τότε η $H : [0,1] \times X \to Y$ με $H(t,x) = \gamma(t)$ είναι μια ομοτοπία από την σταθερή απεικόνιση με τιμή y στην σταθερή απεικόνιση με τιμή z. Αντίστροφα, αν υπάρχει μια τέτοια ομοτοπία H, τότε για οποιοδήποτε $x \in X$ η $\gamma(t) = H(t,x)$ είναι ένα τόξο από το y στο z. Συνεπώς, αν ο Y είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε όλες οι στεθερές απεικονίσεις με τιμές στον Y είναι ομοτοπικές μεταξύ τους.

(στ) Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $f : S^n \to X$ μια συνεχής απεικόνιση, όπου $n \geq 1$. Η f είναι ομοτοπική με σταθερή τότε και μόνον τότε όταν έχει μια συνεχή επέκταση $F : D^{n+1} \to X$ στην κλειστή μοναδιαία μπάλλα $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$. Πράγματι, αν υπάρχει τέτοια επέκταση, τότε η $H : [0,1] \times S^n \to X$ με $H(t,x) = F((1-t)x)$ είναι ομοτοπία της f με την σταθερή απεικόνιση της S^n στον X με τιμή $F(0)$. Αντίστροφα, αν υπάρχει $x_0 \in X$ και $H : f \simeq x_0$, τότε η απεικόνιση $F : D^{n+1} \to X$ με

$$F(x) = \begin{cases} H(1 - \|x\|, \dfrac{x}{\|x\|}), & \text{αν } x \neq 0 \\ x_0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

ορίζεται καλά και είναι συνεχής επέκταση της f.

1.3. Πρόταση. *Η σχέση ομοτοπίας είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων ενός τοπολογικού χώρου X σ΄ έναν τοπολογικό χώρο Y.*

Απόδειξη. Εστω οτι οι f, g, $h : X \to Y$ είναι συνεχείς απεικονίσεις. Τότε η $H(t,x) = f(x)$, $(t,x) \in [0,1] \times X$, είναι μια ομοτοπία $H : f \simeq f$. Αν τώρα $G : f \simeq g$, τότε η $G'(t,x) = G(1-t,x)$, $(t,x) \in [0,1] \times X$, είναι μια ομοτοπία $G' : g \simeq f$. Τέλος, αν $H_1 : f \simeq g$ και $H_2 : g \simeq h$, τότε η $H_3 : [0,1] \times X \to Y$ με

$$H_3(t,x) = \begin{cases} H_1(2t,x), & \text{αν } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ H_2(2t-1,x), & \text{αν } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

είναι μια ομοτοπία $H_3 : f \simeq h$. □

1.4. Πρόταση. *Αν οι f_i, $g_i : X_i \to X_{i+1}$, είναι συνεχείς απεικονίσεις με $f_i \simeq g_i$ $i = 1, 2$, τότε $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.*

Απόδειξη. Εστω οτι $H_i : f_i \simeq g_i$, $i = 1, 2$. Θεωρούμε την $F_1 : [0,1] \times X_1 \to X_3$ με $F_1(t,x) = f_2(H_1(t,x))$ και την $F_2 : [0,1] \times X_1 \to X_3$ με $F_2(t,x) = H_2(t, g_1(x))$. Τότε $F_1 : f_2 \circ f_1 \simeq f_2 \circ g_1$ και $F_2 : f_2 \circ g_1 \simeq g_2 \circ g_1$. Από την πρόταση 1.3 έχουμε λοιπόν $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$. □

Η κλάση ομοτοπίας μίας συνεχούς απεικόνισης $f : X \to Y$ συμβολίζεται με $[f]$ και το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας συνεχών απεικονίσεων του X στον Y με $[X,Y]$. Από την πρόταση 1.4 προκύπτει οτι ορίζεται καλά η σύνθεση κλάσεων ομοτοπίας με

$[g] \circ [f] = [g \circ f]$. Η σύνθεση κλάσεων ομοτοπίας έχει όμοιες ιδιότητες με την σύνθεση απεικονίσεων. Συγκεκριμένα, ισχύει $([h] \circ [g]) \circ [f] = [h] \circ ([g] \circ [f])$ και $[id_Y] \circ [f] = [f]$, $[f] \circ [id_X] = [f]$. Ετσι από την κατηγορία των τοπολογικών χώρων και των συνεχών απεικονίσεων, που είναι οι μορφισμοί τους, παίρνουμε την ομοτοπική κατηγορία με αντικείμενα τους τοπολογικούς χώρους και μορφισμούς τις κλάσεις ομοτοπίας συνεχών απεικονίσεων.

1.5. Ορισμός. Δύο τοπολογικοί χώροι X, Y λέμε οτι έχουν τον ίδιο *ομοτοπικό τύπο* αν είναι ισόμορφοι στα πλαίσια της ομοτοπικής κατηγορίας, δηλαδή αν υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ ώστε $g \circ f \simeq id_X$ και $f \circ g \simeq id_Y$. Οι f, g λέγονται ομοτοπικές ισοδυναμίες. Αν οι X, Y έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο, γράφουμε $X \simeq Y$.

Προφανώς, δύο ομοιομορφικοί χώροι έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο, όχι όμως αντίστροφα.

1.6. Παραδείγματα. (α) Ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει τον ομοτοπικό τύπο μονοσυνόλου. Αν $i : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ είναι η ένθεση $i(0) = 0$ και $r : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ η σταθερή απεικόνιση, τότε $r \circ i = id_{\{0\}}$ και η $H : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $H(t,x) = tx$ είναι μια ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^n}$. Ενας τοπολογικός χώρος με τον ομοτοπικό τύπο σημείου λέγεται *συσταλτός*.

(β) Η n-σφαίρα S^n έχει τον ομοτοπικό τύπο του $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Αν $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ είναι η ένθεση $i(z) = z$ και $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ η απεικόνιση $r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, τότε $r \circ i = id_{S^n}$ και η $H : [0,1] \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ με

$$H(t,x) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$$

είναι μια ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$.

2. Η ομάδα Bruschlinsky ενός τοπολογικού χώρου

Οπως είναι γνωστό, ο μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ είναι αβελιανή ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Μάλιστα, τόσο ο πολλαπλασιασμός, όσο και η απεικόνιση του αντίστροφου είναι συνεχείς. Για κάθε τοπολογικό χώρο X το σύνολο $C(X, S^1) = \{f | f : X \to S^1 \text{ συνεχής}\}$ γίνεται αβελιανή ομάδα με τον προφανή τρόπο, δηλαδή $(\alpha \cdot \beta)(x) = \alpha(x)\beta(x)$, για κάθε $x \in X$. Το αντίστροφο του α είναι το $1/\alpha$, ενώ το μοναδιαίο στοιχείο είναι η σταθερή συνάρτηση 1.

Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ επάγει τον ομομορφισμό ομάδων $f^* : C(Y, S^1) \to C(X, S^1)$ με $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$. Προφανώς, αν η $g : Y \to Z$ είναι συνεχής, τότε $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, ενώ $(id_X)^* = id$. Προκύπτει τώρα οτι αν η f είναι ομοιομορφισμός, τότε η $f^* : C(Y, S^1) \to C(X, S^1)$ είναι ισομορφισμός ομάδων, αφού $(f^{-1})^* \circ f^* = (f^{-1} \circ f)^* = (id_X)^* = id$ και $f^* \circ (f^{-1})^* = id$. Με άλλα λόγια η ομάδα $C(X, S^1)$ είναι τοπολογικό αναλλοίωτο του χώρου X. Το πρόβλημα όμως είναι οτι η ομάδα αυτή είναι τεράστια και δεν μπορεί να υπολογιστεί. Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε μια ομάδα πηλίκο αυτής της ομάδας, την οποία μπορούμε να χειριστούμε, τουλάχιστον για κάποιες μεγάλες κλάσεις τοπολογικών χώρων.

2.1. Λήμμα. *Αν α, α', β, $\beta' \in C(X, S^1)$ και $\alpha \simeq \alpha'$, $\beta \simeq \beta'$, τότε $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha' \cdot \beta'$.*

Απόδειξη. Αν $H : \alpha \simeq \alpha'$ και $G : \beta \simeq \beta'$, τότε η $F : [0,1] \times X \to S^1$ με $F(t,x) = H(t,x)G(t,x)$ είναι μια ομοτοπία $F : \alpha \cdot \beta \simeq \alpha' \cdot \beta'$. □

Ετσι στο σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $[X, S^1]$ ορίζεται η πράξη $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$, που από το λήμμα 2.1 δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων των κλάσεων ομοτοπίας. Με αυτόν τον τρόπο το $[X, S^1]$ γίνεται αβελιανή ομάδα. Σημειώνουμε οτι για κάθε $[\alpha] \in [X, S^1]$ έχουμε $-[\alpha] = [1/\alpha]$ και το ουδέτερο στοιχείο 0 στην $[X, S^1]$ αναπαρίσταται από οποιαδήποτε σταθερή απεικόνιση του X στον S^1, αφού ο τελευταίος είναι κατά τόξα συνεκτικός. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $H^1(X) = [X, S^1]$.

Οπως εύκολα βλέπουμε, το σύνολο

$$B(X, S^1) = \{f | f : X \to S^1 \text{ συνεχής ομοτοπική με σταθερή}\}$$

είναι υποομάδα της $C(X, S^1)$ και $H^1(X) = C(X, S^1)/B(X, S^1)$.

Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ επάγει τον ομομορφισμό $f^* : H^1(Y) \to H^1(X)$ με $f^*([\alpha]) = [\alpha \circ f]$. Αν η $h : X \to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση ομοτοπική με την f και $H : f \simeq h$, τότε για κάθε $\alpha \in C(X, S^1)$ έχουμε $\alpha \circ H : \alpha \circ f \simeq \alpha \circ h$ και συνεπώς $f^*([\alpha]) = h^*([\alpha])$. Ετσι $f^* = h^*$, που σημαίνει οτι ο ομομορφισμός f^* εξαρτάται μόνον από την κλάση ομοτοπίας $[f]$. Προφανώς, αν η $g : Y \to Z$ είναι συνεχής, τότε $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, ενώ $(id_X)^* = id$. Προκύπτει τώρα οτι αν η f είναι ομοιομορφισμός, τότε η $f^* : H^1(Y) \to H^1(X)$ είναι ισομορφισμός ομάδων, αφού $(f^{-1})^* \circ f^* = (f^{-1} \circ f)^* = (id_X)^* = id$ και $f^* \circ (f^{-1})^* = id$. Με άλλα λόγια η ομάδα $H^1(X)$ είναι τοπολογικό αναλλοίωτο του χώρου X. Η αβελιανή ομάδα $H^1(X)$ λέγεται *ομάδα Bruschlinsky* του χώρου X.

Πρέπει να σημειώσουμε οτι η αβελιανή ομάδα $C(X, S^1)$ περιέχει περισσότερες πληροφορίες για τον X από την $H^1(X)$. Οπως δείχνει η επόμενη πρόταση, η $H^1(X)$ είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο του X και συνεπώς περιέχει πληροφορίες μόνον για το «διακριτό μέρος» του X.

2.2. Πρόταση. *Αν οι τοπολογικοί χώροι X, Y έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο, τότε $H^1(X) \cong H^1(Y)$.*

Απόδειξη. Εστω οτι οι $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ είναι αντίστροφες ομοτοπικές ισοδυναμίες, δηλαδή $g \circ f \simeq id_X$ και $f \circ g \simeq id_Y$. Τότε $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (id_X)^* = id$ και όμοια $g^* \circ f^* = id$. Αρα η $f^* : H^1(Y) \to H^1(X)$ είναι ισομορφισμός. □

Ο υπολογισμός της ομάδας Bruschlinsky ενός τοπολογικού χώρου δεν είναι τετριμένο πρόβλημα. Βέβαια, όπως ξέρουμε, $H^1(K) = \{0\}$ για κάθε κυρτό σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$. Γενικότερα, η ομάδα Bruschlinsky κάθε συσταλτού χώρου είναι τετριμένη. Στην επόμενη παράγραφο θα υπολογίσουμε την ομάδα $H^1(S^1)$, που δεν είναι τετριμένη. Από τον υπολογισμό αυτόν θα προκύψουν μερικά από τα κλασικά θεωρήματα της τοπολογίας του $\mathbb{R}^2$, όπως επίσης και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας.

3. Η ομάδα Bruschlinsky του κύκλου και εφαρμογές

Είναι φανερό οτι για τον υπολογισμό της ομάδας Bruschlinsky ενός χώρου X είναι απαραίτητο να ξέρουμε την υποομάδα $B(X, S^1)$ της $C(X, S^1)$. Μια παράσταση των στοιχείων της $B(X, S^1)$, όταν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, δίνει το θεώρημα του S. Eilenberg.

3.1. Λήμμα. *Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση, ώστε $|f(x) - 1| < 1$ για κάθε $x \in X$. Τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f = e^{2\pi i\phi}$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση προκύπτει οτι $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$. Συνεπώς η συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{\mathrm{Im}f(x)}{\mathrm{Re}f(x)}$$

είναι καλά ορισμένη, συνεχής και $f = e^{2\pi i\phi}$.

3.2. Θεώρημα. (S. Eilenberg) *Εστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση. Η f είναι ομοτοπική με σταθερή τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f = e^{2\pi i\phi}$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, αν $f = e^{2\pi i\phi}$ για κάποια συνεχή συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$, τότε η $H : [0, 1] \times X \to S^1$ με $H(t, x) = e^{2\pi i t\phi(x)}$ είναι συνεχής και προφανώς $H : 1 \simeq f$, όπου με 1 συμβολίζουμε την σταθερή συνάρτηση με τιμή $1 \in S^1$.

Εστω τώρα οτι η f είναι ομοτοπική με σταθερή. Επειδή ο S^1 είναι κατά τόξα συνεκτικός, υπάρχει μια ομοτοπία $H : 1 \simeq f$. Επειδή ο (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, η H είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ετσι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|H(t, x) - H(s, y)| < 1$$

για κάθε x, $y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ και t, $s \in [0, 1]$ με $|t - s| < \delta$. Εστω $P = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1\}$ μια διαμέριση του $[0, 1]$ με $t_{k+1} - t_k < \delta$, $k = 0, 1, ..., n - 1$. Τότε έχουμε

$$\left| \frac{H(t_{k+1}, x)}{H(t_k, x)} - 1 \right| < 1$$

για κάθε $x \in X$ και $k = 0, 1, ..., n - 1$. Από το λήμμα 3.1, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi_k : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{H(t_{k+1}, x)}{H(t_k, x)} = e^{2\pi i\phi_k(x)}$$

για κάθε $x \in X$. Ετσι προκύπτει οτι

$$f(x) = H(t_n, x) = \frac{H(t_n, x)}{H(t_{n-1}, x)} \cdot \frac{H(t_{n-1}, x)}{H(t_{n-2}, x)} \cdots \frac{H(t_1, x)}{H(t_0, x)} = e^{2\pi i(\phi_0(x) + ... + \phi_{n-1}(x))}$$

αφού $H(t_0, x) = 1$. Θέτοντας λοιπόν $\phi = \phi_0 + ... + \phi_{n-1}$ έχουμε $f = e^{2\pi i\phi}$. $\square$

3.3. Πόρισμα. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0, 1] \to S^1$ υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε $g = e^{2\pi i\phi}$.*

Απόδειξη. Αφού το $[0, 1]$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχουμε $g \simeq 1$. Ετσι το συμπέρασμα είναι άμεσο από το θεώρημα του Eilenberg. $\square$

3.4. Πόρισμα. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^1 \to S^1$ υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi(0) = 0$, ώστε $f(e^{2\pi it}) = f(1)e^{2\pi i\phi(t)}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Ο ακέραιος αριθμός $\deg f = \phi(1)$ λέγεται βαθμός της f.*

Απόδειξη. Από το πόρισμα 3.3 υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(e^{2\pi it}) = f(1)e^{2\pi i\psi(t)}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Για $t = 0$ έχουμε $f(1) = f(1)e^{2\pi i\psi(0)}$ και συνεπώς $\psi(0) \in \mathbb{Z}$. Θέτουμε τώρα $\phi = \psi - \psi(0)$. Για την μοναδικότητα, αν υπάρχει μια ακόμα συνεχής συνάρτηση $\phi' : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi'(0) = 0$, ώστε $f(e^{2\pi it}) = f(1)e^{2\pi i\phi'(t)}$ για κάθε $t \in [0,1]$, τότε $\phi(t) - \phi'(t) \in \mathbb{Z}$. Αφού το $[0,1]$ είναι συνεκτικό, πρέπει $\phi(t) - \phi'(t) = \phi(0) - \phi'(0) = 0$. □

3.5. Παράδειγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η συνεχής απεικόνιση $f_n : S^1 \to S^1$ με τύπο $f_n(z) = z^n$ έχει βαθμό n. Πράγματι, αν η $\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $\phi_n(t) = nt$, τότε $\phi_n(0) = 0$ και $f_n(e^{2\pi it}) = e^{2\pi int} = e^{2\pi i\phi_n(t)}$. Αρα $\deg f_n = \phi_n(1) = n$.

3.6. Θεώρημα. *Δύο συνεχείς απεικονίσεις $f, g : S^1 \to S^1$ έχουν τον ίδιο βαθμό τότε και μόνον τότε όταν είναι ομοτοπικές.*

Απόδειξη. Εστω οτι $\deg f = \deg g$. Αν οι $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι οι συνεχείς συναρτήσεις με $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $f(e^{2\pi it}) = f(1)e^{2\pi i\phi(t)}$ και $g(e^{2\pi it}) = g(1)e^{2\pi i\psi(t)}$ για κάθε $t \in [0,1]$, τότε $\phi(1) = \psi(1)$. Η απεικόνιση $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ με

$$H(s, e^{2\pi it}) = e^{2\pi i[(1-s)\phi(t)+s\psi(t)]}$$

ορίζεται καλά, γιατί για $t = 0$ έχουμε $(1-s)\phi(0) + s\psi(0) = 0$ και για $t = 1$ έχουμε $(1-s)\phi(1) + s\psi(1) \in \mathbb{Z}$. Η H είναι προφανώς συνεχής και $f(1)H(0, e^{2\pi it}) = f(e^{2\pi it})$, ενώ $g(1)H(1, e^{2\pi it}) = g(e^{2\pi it})$. Δηλαδή,

$$H : \frac{1}{f(1)}f \simeq \frac{1}{g(1)}g$$

και κατά συνέπεια $f \simeq g$, από το παράδειγμα 1.2(δ).

Αντίστροφα, έστω οτι υπάρχει μια ομοτοπία $H : f \simeq g$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $h : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ με

$$h(s,t) = \frac{H(s, e^{2\pi it})}{H(s,1)}.$$

Επειδή το $[0,1] \times [0,1]$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, η h είναι ομοτοπική με σταθερή και από το θεώρημα του Eilenberg υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\psi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$H(s, e^{2\pi it}) = H(s,1)e^{2\pi i\psi(s,t)}$$

για κάθε $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$. Ειδικά για $t = 0$ έχουμε $\psi(s,0) \in \mathbb{Z}$. Θέτοντας $\phi(s,t) = \psi(s,t) - \psi(s,0)$ παίρνουμε μια συνεχή συνάρτηση $\phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi(s,0) = 0$, ώστε

$$H(s, e^{2\pi it}) = H(s,1)e^{2\pi i\phi(s,t)}$$

για κάθε $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$. Ειδικά για $t = 1$ έχουμε $\phi(s,1) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $s \in [0,1]$. Επειδή το $[0,1]$ είναι συνεκτικό, προκύπτει οτι όλοι οι ακέραιοι $\phi(s,1) \in \mathbb{Z}$, $s \in [0,1]$, είναι ίσοι μεταξύ τους. Αρα $\deg f = \phi(0,1) = \phi(1,1) = \deg g$. $\square$.

Από το θεώρημα 3.6 και το παράδειγμα 3.5 προκύπτει αμέσως οτι η απεικόνιση $\deg : H^1(S^1) \to \mathbb{Z}$ είναι καλά ορισμένη, είναι ένα προς ένα και επί. Επιπλέον η deg είναι ομομορφισμός ομάδων. Πράγματι, αν α, $\beta \in H^1(S^1)$ και $\deg(\alpha) = n$, $\deg(\beta) = m$, τότε από το θεώρημα 3.6 και το παράδειγμα 3.5 έχουμε $\alpha = [f_n]$ και $\beta = [f_m]$. Συνεπώς,

$$\deg(\alpha + \beta) = \deg(f_n \cdot f_m) = \deg(f_{n+m}) = n + m = \deg(\alpha) + \deg(\beta).$$

Ετσι αποδείξαμε το επόμενο.

3.7. Θεώρημα. *Η απεικόνιση* $\deg : H^1(S^1) \to \mathbb{Z}$ *είναι ισομορφισμός.* $\square$

3.8. Πόρισμα. *Ο* S^1 *δεν είναι συσταλτός χώρος.* $\square$

Στην συνέχεια θα δούμε μερικές εφαρμογές των προηγουμένων. Εστω $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, οπότε $S^1 = \partial D^2$.

3.9. Πρόταση. *Δεν υπάρχει καμία συνεχής συνάρτηση* $r : D^2 \to S^1$ *τέτοια ώστε* $r(z) = z$ *για κάθε* $z \in S^1$.

Απόδειξη. Αν υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση, τότε ορίζεται η $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ με $H(t,z) = r(tz)$, που είναι συνεχής και $H(0,z) = r(0)$, $H(1,z) = z$ για κάθε $z \in S^1$. Δηλαδή, $H : r(0) \simeq id_{S^1}$. Από το θεώρημα 3.6 έχουμε λοιπόν $0 = \deg(r(0)) = \deg(id_{S^1}) = 1$, αντίφαση. $\square$

3.10. Θεώρημα. (L. E. J. Brouwer) *Κάθε συνεχής απεικόνιση* $f : D^2 \to D^2$ *έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Εστω οτι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in D^2$. Τότε τα σημεία $f(x)$, x ορίζουν μια ημιευθεία με αρχή το $f(x)$. Εστω $r(x)$ το σημείο τομής της ημιευθείας αυτής με τον μοναδιαίο κύκλο S^1, μετά το $f(x)$. Η απεικόνιση $r : D^2 \to S^1$, που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο είναι συνεχής, αφού η f είναι συνεχής, και $r(x) = x$ για κάθε $x \in S^1$. Μάλιστα το $r(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$r(x) = x + \Big[\sqrt{1 - |x|^2 + \langle x, \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}\rangle^2} - \langle x, \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}\rangle\Big] \cdot \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}.$$

Αυτό όμως αντιφάσκει με την πρόταση 3.9. $\square$

Μια δεύτερη εφαρμογή είναι το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας, που θα αποδείξουμε τώρα.

3.11. Θεώρημα. *Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο* $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ *με* $n > 0$ *έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο* $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Εστω οτι $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε ορίζεται η συνεχής συνάρτηση $F : [0, +\infty) \times S^1 \to S^1$ με
$$F(s,z) = \frac{f(sz)}{|f(sz)|}.$$
Ετσι για κάθε $s \geq 0$ έχουμε $F_s \simeq F_0$. Για $\rho = 1 + |a_{n-1}| + ... + |a_0|$ και κάθε $z \in S^1$ έχουμε
$$|f(\rho z) - \rho^n z^n| \leq \rho^{n-1}|a_{n-1}| + ... + \rho|a_1| + |a_0| \leq \rho^{n-1}(|a_{n-1}| + ... + |a_1| + |a_0|) < |\rho^n z^n|.$$
Δηλαδή, το $f(\rho z)$ βρίσκεται μέσα στον ανοιχτό δίσκο με κέντρο το $\rho^n z^n$ και ακτίνα $|\rho^n z^n|$. Ορίζεται λοιπόν η συνεχής συνάρτηση $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ με
$$H(t,z) = \frac{(1-t)f(\rho z) + t\rho^n z^n}{|(1-t)f(\rho z) + t\rho^n z^n|}.$$
Προφανώς $H : F_\rho \simeq f_n$, οπότε από το θεώρημα 3.6 έχουμε
$$n = \deg f_n = \deg F_\rho = \deg F_0 = 0,$$
αφού η F_0 είναι σταθερή, αντίφαση. □

4. Δυϊσμός Alexander στο $\mathbb{R}^2$ και το θεώρημα του Jordan

Εστω $X \subset \mathbb{C}$, το οποίο $\mathbb{C}$ ταυτίζεται τοπολογικά με το $\mathbb{R}^2$. Εστω $\delta : (\mathbb{C} \setminus X) \times X \to S^1$ η συνεχής συνάρτηση με
$$\delta(z,x) = \frac{x-z}{|x-z|}.$$
Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus X$, η συνάρτηση $\delta_z = \delta(z,.) : X \to S^1$ είναι συνεχής. Αν $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus X$ είναι ένα τόξο, τότε η $H_\gamma : [0,1] \times X \to S^1$ με $H_\gamma(t,x) = \delta(\gamma(t), x)$ είναι συνεχής, δηλαδή ομοτοπία.

Εστω επιπλέον οτι το X είναι συμπαγές, οπότε το $\mathbb{C} \setminus X$ είναι ανοιχτό και συνεπώς οι συνεκτικές του συνιστώσες ταυτίζονται με τις κατά τόξα συνεκτικές του συνιστώσες. Αν τα z_0, $z_1 \in \mathbb{C} \setminus X$ ανήκουν στην ίδια κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$, τότε υπάρχει τόξο $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus X$ με $\gamma(0) = z_0$ και $\gamma(1) = z_1$. Προφανώς, $H_\gamma : \delta_{z_0} \simeq \delta_{z_1}$. Αν λοιπόν Σ είναι το σύνολο των κατά τόξα συνεκτικών συνιστωσών του $\mathbb{C} \setminus X$, τότε ορίζεται καλά η συνάρτηση $\Delta : \Sigma \to H^1(X)$ με $\Delta[z] = [\delta_z]$, όπου $[z]$ είναι η κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$ που περιέχει το σημείο z.

4.1. Λήμμα. *Αν το* $z \in \mathbb{C} \setminus X$ *βρίσκεται στην μη-φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του* $\mathbb{C} \setminus X$, *τότε η* δ_z *είναι ομοτοπική με σταθερή, δηλαδή* $[\delta_z] = 0$.

Απόδειξη. Αφού το X είναι συμπαγές, υπάρχει $R > 0$ ώστε $X \subset S(0,R)$. Εστω $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{S(0,R)}$. Αν υπάρχει $x \in X$ ώστε $\delta_{z_0}(x) = \dfrac{z_0}{|z_0|}$, τότε $x|z_0| = z_0(|x - z_0| + |z_0|)$, οπότε $|x| = |x - z_0| + |z_0| > |z_0|$, που είναι αντίφαση, αφού $|x| < R < |z_0|$. Κατά συνέπεια, $\delta_{z_0}(x) \neq \dfrac{z_0}{|z_0|}$, για κάθε $x \in X$. Ετσι η δ_{z_0} δεν είναι επί και άρα είναι ομοτοπική με σταθερή, από το παράδειγμα 1.2(γ). $\square$

Εστω τώρα $H_0(\mathbb{C} \setminus X)$ η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από το Σ. Τότε η Δ επεκτείνεται γραμμικά σ′ έναν μοναδικό ομομορφισμό ομάδων, που συμβολίζουμε πάλι με $\Delta : H_0(\mathbb{C} \setminus X) \to H^1(X)$. Εστω A η μη-φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$ και $< A >$ η (άπειρη) κυκλική υποομάδα της $H_0(\mathbb{C} \setminus X)$ που αυτή παράγει. Σύμφωνα με το λήμμα 4.1 έχουμε $< A > \leq \mathrm{Ker}\Delta$ και συνεπώς ορίζεται καλά ο ομομορφισμός ομάδων $D_X : \tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \to H^1(X)$ με

$$D_X(\sigma + < A >) = \Delta(\sigma),$$

όπου $\tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) = H_0(\mathbb{C} \setminus X)/ < A >$.

4.2. Θεώρημα. (J. W. Alexander) *Για κάθε συμπαγές σύνολο $X \subset \mathbb{C}$ ο $D_X : \tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \to H^1(X)$ είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος του Alexander σημειώνουμε οτι ο ομομορφισμός D_X είναι φυσικός, δηλαδή ανεξάρτητος του X, όπως δείχνει ο ορισμός του. Αυτό διατυπώνεται από το παρακάτω λήμμα, που είναι άμεσο από τους ορισμούς.

4.3. Λήμμα. *Αν $Y \subset X$ είναι δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και $i : Y \to X$, $j : \mathbb{C} \setminus X \to \mathbb{C} \setminus Y$ είναι οι ενθέσεις, τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.* $\square$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "D_X"] & \tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus Y) \arrow[d, "D_Y"] \\
H^1(X) \arrow[r, "i^*"] & H^1(Y)
\end{tikzcd}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος του Alexander βασίζεται στην παρακάτω πρόταση.

4.4. Πρόταση. *Εστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα συμπαγές σύνολο. Τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to S^1$ έχει μια συνεχή επέκταση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus E \to S^1$, όπου το $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι κάποιο πεπερασμένο σύνολο.*

Απόδειξη. Εστω $R > 0$ με $A \subset S(0, R)$ και $g_1 : A \cup (\mathbb{R}^2 \setminus S(0, 2R)) \to \mathbb{R}^2$ η συνεχής συνάρτηση με

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{όταν } x \in A \\ x, & \text{όταν } x \in \mathbb{R}^2 \setminus S(0, 2R). \end{cases}$$

Από το θεώρημα επέκτασης του Tietze, η g_1 επεκτείνεται σε μια συνεχή συνάρτηση $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ετσι έχουμε $g_2|A = f$ και $g_2(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S(0, 2R)$. Τό σύνολο $B = g_2^{-1}(0) \subset \overline{S(0, 2R)}$ είναι συμπαγές και προφανώς $A \cap B = \varnothing$. Θέτουμε

$$\epsilon = \frac{1}{2} \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\} > 0$$

και εστω $c > 0$ ώστε $A \cup B \subset [-c, c] \times [-c, c]$. Θεωρούμε μια διαμέριση του τετραγώνου $Q = [-c, c] \times [-c, c]$ σε ίσα τετράγωνα με πλευρά μικρότερη από ϵ. Τότε κάποιο από τα τεράγωνα της διαμέρισης δεν τέμνει το A και το B ταυτόχρονα. Θεωρούμε το σύνολο

$$Y = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{int}Q) \cup \{\text{κορυφές, πλευρές, τετράγωνα της διαμέρισης, που δεν τέμνουν το } B\}.$$

Προφανώς $A \subset Y$. Θα κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \setminus E \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, για κάποιο κατάλληλο πεπερασμένο σύνολο $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ και θα θέσουμε $\tilde{f} = F/\|F\|$. Ορίζουμε κατ' αρχήν την F στο Y να είναι η g_2, δηλαδή $F(x) = g_2(x)$ για κάθε $x \in Y$. Αν το x είναι μια κορυφή της διαμέρισης εκτός του Y, τότε ορίζουμε το $F(x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με οποιονδήποτε τρόπο. Οι κορυφές εκτός του Y αποτελούν πεπερασμένο σύνολο και αυτό είναι δυνατόν, ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια. Εστω K μια πλευρά της διαμέρισης εκτός του Y. Τότε η F έχει οριστεί στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος K. Επειδή το $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικό, η F επεκτείνεται στο K. Εστω τώρα P ένα τετράγωνο της διαμέρισης εκτός του Y. Τότε η F έχει ήδη οριστεί στο ∂P, όπου είναι και συνεχής. Αρκεί να επεκτείνουμε συνεχώς την F στο P ώστε να παίρνει την τιμή 0 το πολύ σε ένα σημείο. Εστω m_P το κέντρο του τετραγώνου P. Τότε για κάθε $x \in P$ υπάρχουν $0 < t \leq 1$ και $z \in \partial P$ ώστε $x = m_P + t(z - m_P)$. Ορίζουμε τώρα $F(m_P) = 0$ και $F(x) = tF(z)$. Η F είναι καλά ορισμένη, συνεχής επέκταση, αφού τα t και z είναι μοναδικά για την παραπάνω παράσταση του $x \neq m_P$. Προφανώς $(F|P)^{-1}(0) = \{m_P\}$. Μ' αυτόν τον τρόπο έχει οριστεί μια συνεχής συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \setminus E \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, με $F|A = f$, όπου το E είναι το πεπερασμένο σύνολο των κέντρων των τετραγώνων της διαμέρισης του Q που δεν περιέχονται στο Y. $\square$.

Απόδειξη του θεωρήματος του Alexander. Θα δείξουμε πρώτα οτι ο D_X είναι μονομορφισμός. Εστω $\sum_{j=1}^{k} n_j[z_j] + < A > \in \mathrm{Ker}D_X$, όπου $z_j \in \mathbb{C} \setminus X$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq k$. Αυτό σημαίνει οτι η συνάρτηση $f : X \to S^1$ με

$$f(x) = \prod_{j=1}^{k} \frac{(x - z_j)^{n_j}}{|x - z_j|^{n_j}}$$

είναι ομοτοπική με σταθερή. Εστω U_j η κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus X$ που περιέχει το z_j. Η f έχει μια συνεχή επέκταση $f_j : X \cup (U_j \setminus \{z_j\}) \to S^1$ με τον ίδιο τύπο. Επειδή η f είναι ομοτοπική με σταθερή, επεκτείνεται συνεχώς στο $\mathbb{C}$. Πραγματι, από το θεώρημα του Eilenberg υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ με $f = e^{2\pi i \phi}$. Από το θεώρημα επέκτασης του Tietze, η ϕ επεκτείνεται σε μια συνεχή συνάρτηση $\tilde{\phi} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Η $e^{2\pi i \tilde{\phi}} : \mathbb{C} \to S^1$ επεκτείνει τώρα συνεχώς την f. Υπάρχει λοιπόν μια συνεχής επέκταση $g_j : \mathbb{C} \setminus U_j \to S^1$ της f. Αφού $f|X = g_j|X$, ορίζεται η συνεχής συνάρτηση $F_j : \mathbb{C} \setminus \{z_j\} \to S^1$ με $F_j|X \cup (U_j \setminus \{z_j\}) = f_j$ και $F|\mathbb{C} \setminus U_j = g_j$. Επειδή το U_j είναι φραγμένο, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $\partial S(z_j, \epsilon) \subset \mathbb{C} \setminus U_j$, οπότε η $F_j|\partial S(z_j, \epsilon) = g_j|\partial S(z_j, \epsilon)$ είναι ομοτοπική με σταθερή, αφου η g_j είναι. Από την άλλη μεριά, υπάρχει $\epsilon' > 0$ ώστε $\overline{S(z_j, \epsilon')} \subset U_j$, οπότε $F_j|\partial S(z_j, \epsilon') = f_j|\partial S(z_j, \epsilon')$. Η $f_j : \partial S(z_j, \epsilon') \to S^1$ έχει βαθμό n_j, γιατί για $i \neq j$ οι παράγοντες του γινομένου στον τύπο της f_j είναι ομοτοπικοί με σταθερές και συνεπώς δεν συνεισφέρουν στον βαθμό, επειδή επεκτείνονται συνεχώς στον δίσκο $\overline{S(z_j, \epsilon')}$. Αφού τώρα

$$f_j|\partial S(z_j, \epsilon') = F_j|\partial S(z_j, \epsilon') \simeq F_j|\partial S(z_j, \epsilon) = g_j|\partial S(z_j, \epsilon),$$

που είναι ομοτοπική με σταθερή, πρέπει $n_j = 0$. Αυτό δείχνει οτι $\mathrm{Ker}D_X = 0$.

Για να δείξουμε οτι ο D_X είναι επιμορφισμός, θα χρησιμοποιήσουμε την φυσικότητα. Εστω $[f] \in H^1(X)$. Από την πρόταση 4.4, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $E \subset \mathbb{C} \setminus X$ και μια συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus E \to S^1$ της f. Εστω οτι $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Εστω R_1,...,$R_n > 0$ ώστε $\overline{S(a_j, R_j)} \subset \mathbb{C} \setminus X$ και $R > 0$ ώστε

$$X \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{S(a_j, R_j)} \subset S(0, R).$$

Ετσι η f έχει μια συνεχή επέκταση

$$F : \overline{S(0, R)} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} S(a_j, R_j) \to S^1.$$

Αν $M = \overline{S(0, R)} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} S(a_j, R_j)$, αρκεί να δείξουμε οτι η D_M είναι επιμορφισμός, από το λήμμα 4.3, γιατί $i^*[F] = [f]$, δηλαδή $[f] \in \mathrm{Im} i^*$, όπου $i : X \to M$ είναι η ένθεση. Εστω λοιπόν $g : M \to S^1$ μια συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $G : M \to S^1$ με

$$G(x) = \prod_{j=1}^{k} \frac{(x - a_j)^{d_j}}{|x - a_j|^{d_j}}$$

όπου d_j είναι ο βαθμός της $g|\partial S(a_j, R_j)$. Αρκεί να δείξουμε οτι $g \simeq G$. Προφανώς ο βαθμός της $G|\partial S(a_j, R_j)$ είναι d_j και συνεπώς η $\dfrac{g}{G}|\partial S(a_j, R_j)$ επεκτείνεται συνεχώς στον δίσκο $\overline{S(a_j, R_j)}$, αφού έχει βαθμό $d_j - d_j = 0$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $1 \leq j \leq n$, συμπεραίνουμε οτι η g/G επεκείνεται συνεχώς στον $\overline{S(0, R)}$. Αρα η g/G είναι ομοτοπική με σταθερή, δηλαδή $g \simeq G$. □

4.5. Πόρισμα. *Αν το $X \subset \mathbb{C}$ είναι ένα απλό τόξο, δηλαδή ομοιομορφικό με το $[0, 1]$, τότε το $\mathbb{C} \setminus X$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Οπως ξέρουμε $H^1([0, 1]) = \{0\}$ και από το θεώρημα του Alexander $\tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \cong H^1(X) \cong H^1([0, 1]) = \{0\}$. Αρα $H_0(\mathbb{C} \setminus X) \cong \mathbb{Z}$, δηλαδή το $\mathbb{C} \setminus X$ είναι (κατά τόξα) συνεκτικό. □

4.6. Θεώρημα. (C. Jordan) *Αν το $X \subset \mathbb{C}$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη, δηλαδή ομοιομορφικό με S^1, τότε το $\mathbb{C} \setminus X$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, των οποίων μάλιστα είναι το κοινό σύνορο.*

Απόδειξη. Οπως ξέρουμε $H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, και από το θεώρημα του Alexander $\tilde{H}_0(\mathbb{C} \setminus X) \cong H^1(X) \cong H^1(S^1) = \mathbb{Z}$. Αρα $H_0(\mathbb{C} \setminus X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Αυτό σημαίνει οτι το $\mathbb{C} \setminus X$ αποτελείται από δύο (κατά τόξα) συνεκτικές συνιστώσες U_1, U_2. Προφανώς $\partial U_1 \subset X$. Αν $\partial U_1 \neq X$, τότε το ∂U_1 περιέχεται σε ένα απλό τόξο $I \subset X$. Το U_1 είναι μη-κενό, ανοιχτό, αλλά και κλειστό στο $\mathbb{C} \setminus I$, γιατί

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C} \setminus I}(U_1) = \overline{U_1} \cap (\mathbb{C} \setminus I) = U_1 \cup (\partial U_1 \cap (\mathbb{C} \setminus I)) = U_1.$$

Συνεπώς το $\mathbb{C} \setminus I$ δεν είναι συνεκτικό. Αυτό όμως αντιφάσκει με το πόρισμα 4.5. Πρέπει λοιπόν $\partial U_1 = X$, και όμοια $\partial U_2 = X$. □.

Ασκήσεις

1. Εστω $n \geq 1$ και $X = \{(x,y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\}$. Να αποδειχθεί οτι η $f : S^n \to X$ με $f(x) = (x,x)$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

2. Εστω $P(z)$ ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, ώστε $P(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S^1$. Να αποδειχθεί οτι αν $f : S^1 \to S^1$ είναι η συνεχής συνάρτηση με $f(z) = P(z)/|P(z)|$, τότε

$$\deg f = \#\{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0 \text{ και } |z| < 1\}.$$

3. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^1 \to S^1$ με $\deg f \neq 1$ έχει σταθερό σημείο.

4. Εστω f, $g : S^1 \to S^1$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Να αποδειχθεί οτι $\deg(g \circ f) = (\deg f) \cdot (\deg g)$.

5. Εστω X ένας συνεκτικός, συμπαγής μετρικός χώρος και $a \in H^1(X)$. Αν υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ με $n \neq 0$ και $n \cdot a = 0$, να αποδειχθεί οτι $a = 0$.

6. Εστω $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$ μια ένα προς ένα, συνεχής απεικόνιση.
(α) Να αποδειχθεί οτι το $\mathbb{R}^2 \setminus f(D^2)$ είναι συνεκτικό.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $f(\mathrm{int}D^2)$ είναι η φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$.

7. Εστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : U \to \mathbb{R}^2$ μια ένα προς ένα, συνεχής απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι το $f(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και η f είναι τοπολογική εμφύτευση.

Βιβλιογραφία για παραπέρα μελέτη

1. G. Bredon, Topology and Geometry, Springer-Verlag, 1993.
2. J. Dugundji, Topology, Allyn Bacon, 1966.
3. S. T. Hu, Homotopy theory, Academic Press, 1959.
4. W. S. Massey, Algebraic Topology: An introduction, Hartcourt, Brace and World, 1967.
5. J. W. Milnor, Topology from a differentiable viewpoint, University Press of Virginia, 1965.
6. J. Munkres, Topology, Addison Wesley, 1966.
7. E. Spanier, Algebraic Topology, McGraw Hill, 1966.
8. C. T. C. Wall, A geometric introduction to Topology, Addison Wesley, 1972.