ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2005-2006 ΜΕ ΤΙΤΛΟ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΟΛΙΤΟΝΙΩΝ»

Θα εισαγάγουμε τις βασικές έννοιες της θεωρίας σολιτονίων (γνωστής και ως θεωρίας πλήρως ολοκληρωσίμων συστημάτων) και την βασική μεθόδο επίλυσης προβλημάτων αρχικής τιμής για εξισώσεις σολιτονίων, ήτοι την μέθοδο αντίστροφης σκέδασης.

Πιό συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε στις βασικές εξισώσεις της θεωρίας όπως η εξίσωση KdV, η μη γραμμική εξίσωση Schroedinger, η εξίσωση sine-Gordon, αλλά και το σύστημα συνήθων διαφορικών γνωστό ως «άλυσος του Toda», στην ιστορία τους και σε βασικές εφαρμογές (στην υδροδυναμική, στην μη γραμμική οπτική, στο πρόβλημα των Fermi-Pasta-Ulam). Θα δώσουμε ορισμένα παραδείγματα ειδικών λύσεων και θα εισαγάγουμε την έννοια του σολιτονίου. Έπειτα θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο πρόβλημα αρχικών τιμών για την άλυσο του Toda και θά παρουσιάσουμε αναλυτικά την μέθοδο αντίστροφης σκέδασης, η οποία έχει βέβαια ενδιαφέρον ανεξάρτητο από την εφαρμογή της στα σολιτόνια καθώς επιλύει ένα σημαντικό πρόβλημα της κβαντικής μηχανικής.

Θά εξετάσουμε το φασματικό πρόβλημα του τριδιαγωνίου τελεστή Jacobi και θα ορίσουμε τα δεδομένα σκέδασης. Θα εξετάσουμε επίσης το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, θα λύσουμε την εξίσωση Gelfand-Levitan-Marcenko και θα παραγάγουμε τον τύπο του F.Dyson για την γενική λύση της αλύσου ως ορίζουσα τύπου Fredholm. Θα αποδείξουμε ότι το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι ισοδύναμο με πρόβλημα παραγοντοποιήσης αναλυτικών πινάκων τύπου Riemann-Hilbert.
Θα εισαγάγουμε τις βασικές έννοιες της θεωρίας παραγοντοποιήσης Riemann-Hilbert. Τέλος θα αναφερθούμε σε ασυμπτωτικά προβλήματα και θα εισαγάγουμε την ιδέα της μεθόδου steepest descent (μέθοδος μεγίστης καθόδου), τονίζοντας την αναλογία με την αντίστοιχη γραμμική περίπτωση.
Αν υπάρξει χρόνος θα αναφερθούμε και στο περιοδικό πρόβλημα της αλύσου Toda. Θα μελετήσουμε το αντίστοιχο φασματικό πρόβλημα (διακριτο πρόβλημα Sturm-Liouville) και θα δείξουμε ότι το αντιστροφο φασματικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα αντιστροφής της απεικόνισης Abel από μία επιφάνεια Riemann προς την Ιακωβιανή της.

Δεν θα απαιτούνται ειδικές γνώσεις για διαφορικές εξισώσεις εκτος απο πολύ βασικά πράγματα για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ενώ οι γραμμικοί τελεστές που εμφανίζονται στο πρόβλημα της αντίστροφης σκέδασης επιδέχονται αναπαράσταση ως πίνακες (άπειρης βέβαια διάστασης) και συνεπώς θα είναι διαισθητικά πιό εύπεπτοι. Η έννοια του φάσματος τελεστη σε χωρο Hilbert θα οριστεί απλά.
Μόνες απαιτούμενες γνώσεις: Βασικά πράγματα για μιγαδική ανάλυση, τά οποία θά καλύψω αν χρειαστεί.
Ο βαθμός του μαθήματος θα βασιστεί αποκλειστικά σε εβδομαδιαίες ασκήσεις.

Σπύρος Καμβύσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΟΛΙΤΟΝΙΩΝ

0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ. ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΣΟΛΙΤΟΝΙΩΝ.

Η επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι βασικό πρόβλημα της μαθηματικής φυσικης. Τα φυσικά φαινόμενα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις.

Διακρίνουμε ανάμεσα σε «συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ)» και «διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ΜΔΕ)».

Επίσης διακρίνουμε ανάμεσα σε «γραμμικές» διαφορικές εξισώσεις και «μη γραμμικές» διαφορικές εξισώσεις. Γραμμική είναι μία εξίσωση όταν γραμμικός συνδυασμός λύσεων είναι επίσης λύση της εξίσωσης. Το πρόβλημα επίλυσης γραμμικών εξισώσεων είναι σε "μεγάλο βαθμό" λυμένο. Για ΜΔΕ σημαντικά βήματα έγιναν το $2^{ο}$ μισό του $20^{ου}$ αιώνα. Ο χώρος των λύσεων γραμμικής εξίσωσης είναι γραμμικός διανυσματικός χώρος και η απλή δομή τέτοιων χώρων καθιστά το πρόβλημα απλούστερο. Επίσης, το πρόβλημα αρχικών τιμών για γραμμικές εξισώσεις εξέλιξης (evolution equations) τείνει να επιδέχεται λύσης για όλους τους χρόνους, σε αντίθεση με την μη γραμμική περίπτωση όπου φιανόμενα blow-up είναι συνήθη.

Η σημασία των γραμμικών εξισώσεων είναι τεράστια. Πολλές θεμελιώδεις εξισώσεις της κλασικής φυσικής είναι γραμμικές (π.χ. εξισώσεις Maxwell). Επίσης εξισώσεις που εκφράζουν «καθολικά» φαινόμενα είναι συχνά γραμμικές (π.χ. κυματική εξίσωση, εξίσωση διάχυσης θερμότητας, εξίσωση Laplace). Επιπλέον ακόμα και όταν έχουμε να μελετήσουμε μια μη γραμμική εξίσωση, είναι πολλές φορές χρήσιμο να «γραμμικοποιήσουμε», δηλαδή να θεωρήσουμε μία γραμμική προσέγγιση (γύρω από μία λύση).

Από το σύνολο των μη γραμμικών εξισώσεων, υπάρχει ένα ενδιαφέρον και σημαντικό υποσύνολο, όπου ο χώρος των λύσεων δεν είναι μεν γραμμικός, αλλά έχει μία πλούσια γεωμετρική και αναλυτική δομή που μας επιτρέπει να λύσουμε τουλάχιστον ορισμένα επιμέρους προβλήματα. Αυτές είναι οι λεγόμενες «πλήρως ολοκληρώσιμες εξισώσεις» ή «εξισώσεις σολιτονίων». Υπάρχουν πλήρως ολοκληρώσιμες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (π.χ. εξίσωσεις Painleve), πλήρως ολοκληρώσιμα συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (π.χ. η άλυσος Toda) και πλήρως ολοκληρώσιμες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (π.χ. εξισώσεις Korteweg-de-Vries, μη γραμμικές εξισώσεις Schroedinger σε 1+1 διαστάσεις (μια χώρου και μια χρόνου), Kadomtsev-Petviashvilli σε 2+1 διαστάσεις, self-dual Yang-Mills σε 4 διαστάσεις, κλπ.) Υπάρχουν ακόμα και «διακριτά πλήρως ολοκληρώσιμα » συστήματα (σε χώρο και χρόνο!). Τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα αφορούν *δυναμικά συστήματα.*

Τι ακριβώς εννοούμε όταν μιλάμε για «επίλυση» εξίσωσης; Στην καλύτερη περίπτωση έχουμε απλούς τύπους για το σύνολο των λυσεων. Αυτό συμβαίνει πολύ σπάνια. Στην χειρότερη περίπτωση μπορούμε να εγγυηθούμε μόνο υπαρξη (ή και μοναδικότητα) κάποιων αποδεκτών λύσεων με κάποια ομαλότητα (π.χ. συνεχείς, διαφορίσιμες, κλπ.) Σε ενδιάμεσες περιπτώσεις (κάτι που συμβαίνει συχνά στην ολοκληρώσιμη περίπτωση) μπορούμε να βρούμε περίπλοκους τύπους (π.χ. ορίζουσες άπειρης διάστασης τύπου Fredholm) ή να αναγάγουμε τη λύση σε ένα πρόβλημα μιγαδικής ανάλυσης τύπου Riemann-Hilbert. Για προβλήματα αρχικών τιμών σε γραμμικές εξισώσεις, εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Fourier καταλήγουμε σε ολοκληρωτικούς τύπους. Ούτως ή άλλως το σημαντικότερο πλεονέκτημα μιάς τέτοιας «επίλυσης» είναι η δυνατότητα ασυμπτωτικής έκφρασης, είτε για μεγάλους χρόνους, είτε όταν κάποια παράμετρος τείνει στο άπειρο. [Παρεμπιπτόντως ακόμα και στην περίπτωση των γραμμικών εξισώσεων, λύσεις σε κλειστή μορφή δεν υπάρχουν πάντα. Το πρόβλημα μικτών προβλημάτων αρχικών – οριακών τιμών (πέρα από ερωτήματα ύπαρξης, μοναδικότητας και ομαλότητας) «λύθηκε» μόνο πρόσφατα (βλέπε εργασίες Φωκά και συνεργατών), ανάγεται δε και αυτό σε προβλήματα τύπου Riemann-Hilbert.] Λύσεις σε μορφή σειράς ή ολοκληρώματος είναι χρήσιμες όχι τόσο διότι προσφέρουν κάποια διαίσθηση όσον αφορά ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης αλλά κυρίως διότι τέτοιες μορφές προσφέρονται σε ασυμπτωτική ανάλυση ή σε εύκολα συμπεράσματα περί ομαλότητας της λύσης. Όπως θα δούμε αργότερα τα προβλήματα τύπου Riemann-Hilbert επιδέχονται ασυμπτωτική ανάλυση, και μάλιστα γενικεύοντας τις μεθόδους που εφαρμόζονται και στην ασυμπτωτική ανάλυση ολοκληρωμάτων (steepest descent, βλέπε [DZ], [KMM]).

Η σημασία λοιπόν τών εξισώσεων σολιτονίων (όπως άλλωστε και των γραμμικών εξισώσεων) έγκειται στό ότι αφ'ενός είναι «επιλύσιμες», αφ'ετέρου έχουν σημαντικές «καθολικές» εφαρμογές. Μία μεγάλη κατηγορία τών εξισώσεων σολιτονίων είναι *κυματικές*. (Η γραμμική κυματική εξίσωση δεν είναι η μόνη που περιγράφει κυματική διάδοση.) Τα σολιτόνια είναι μεν κύματα, αλλά έχουν και ιδιαίτερες ιδιότητες που θυμίζουν σωματίδια. (Γι'αυτο άλλωστε και ονομάστηκαν «σολιτόνια» από τους Kruskal και Zabusky το 1965.) Για την ακρίβεια, είναι μοναχικά (solitary) κύματα, εντοπισμένα χωρικά (localized in space), και που αν συγκρουστούν, διατηρούν την μορφή και την ταχύτητά τους. Επίσης (εν αντιθέσει με τα περισσότερα γραμμικά κύματα) είναι ευσταθή (stable) παρά την ύπαρξη διασποράς. (Η διασπορά αντισταθμίζεται απο την μη γραμμικότητα.) Ιδού λοιπόν ένα καινούργιο φαινόμενο που δεν καλύπτεται από τις γραμμικές εξισώσεις!

Τελειώνοντας αυτή την μικρή εισαγωγή, αξίζει να τονίσει κανείς ορισμένες εφαρμογές των σολιτονίων σε προβλήματα που αρχικά φαίνονται τελείως άσχετα. Ισως το εντυπωσιακότερο αφορά το πρόβλημα της κατανομής των ιδιοτιμών τυχαίων αυτοσυζυγών (και όχι μόνο) πινάκων μεγάλης διάστασης. (Εδώ δίνουμε μία κατανομή π.χ. Gauss στα ανεξάρτητα στοιχεία του πίνακα.) Αποδεικνύεται ότι υπάρχει οριακή κατανομή και ότι οι οριακές συναρτήσεις συσχέτισης ικανοποιούν εξισώσεις σολιτονίων, είναι δε ανεξάρτητες της αρχικής κατανομής (εφ'όσον κάποιες συνθήκες συμμετρίας ικανοποιούνται). Αυτό το φαινόμενο λέγεται *καθολικότητα (universality)* στη στατιστική μηχανική.

I. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΕΕΣ.

1. Οι πιο βασικες εξισωσεις σολιτονιων:

(α) Η εξισωση Korteweg-de-Vries (KdV)

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0. \tag{1}$$

(β) Η μη γραμμικη εξισωση Schrödinger

$$iq_t + q_{xx} \pm 2|q|^2 q = 0. \tag{2}$$

Το προσημο $+$ αντιστοιχει στην λεγομενη περιπτωση εστιασης (focusing) και το προσημο $-$ αντιστοιχει στην περιπτωση αφεστιασης (defocusing).

(γ) Η εξισωση Sine-Gordon

$$q_{tt} - q_{xx} + sinq = 0. \tag{3}$$

(δ) Η εξισωση Kadomtsev-Petviashvilli

$$(q_t - 6qq_x + q_{xxx})_x + 3q_{yy} = 0. \tag{4}$$

(ε) Η αλυσος Toda.

$$\dot{x}_n = y_n, \dot{y}_n = e^{x_{n-1} - x_n} - e^{x_n - x_{n+1}} \tag{5}$$

οπου ο δεικτης μπορει να παρει πεπερασμενο η απειρο αριθμο τιμων.

(στ) Συνηθης Διαφορικη Εξισωση Painlevé II.

$$g^{'''} + (6g - \eta)g' - 2g = 0. \tag{6}$$

Το ενδιαφερον μας θα εστιασθει σε προβληματα αρχικων τιμων. Υποθετουμε, χαριν ευκολιας, οτι τα αρχικα δεδομενα $q(x,0)$ για τις (α), (β), (γ) και τα αρχικα δεδομενα $q(x,y,0)$ για την (δ) ανηκουν στην κλαση Schwartz, ενω τα αρχικα δεδομενα για την (ε) ειναι τετοια ωστε για μεγαλα $|n|$

$$x_n = n, \quad y_n = 0. \tag{7}$$

2. Παραγωγη της εξισωσης Korteweg-de-Vries (KdV). Η KdV ως εξισωση μακρων υδατικων κυματων μικρου πλατους.

Συντεταγμενες x, z.
Αστροβιλο, ασυμπιεστο υγρο (π.χ.νερο), χωρις ιξωδες.
ϕ δυναμικο ταχυτητας.
Ανω επιφανεια ελευθερη.
Κατω επιφανεια

$$\phi_z = 0, \quad z = 0. \tag{8}$$

Εστω hz η καθετη αποσταση απο το αδιαταρακτο επιπεδο, a το πλατος της ταλαντωσης της επιφανειας του υδατος, h το αδιαταρακτο βαθος, l τυπικη κλιμακα οριζοντιου μηκους, $\alpha = a/h, \delta = h/l$.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Εστω $z = 1 + \alpha\zeta$. Υποθετοντας $\delta = O(\alpha^2)$ και χρησιμοποιωντας τα αναπτυγματα πολλαπλων κλιμακων για τα ζ και ϕ ως προς την μικρη παραμετρο α, να δειξετε οτι η εξισωση KdV οντως περιγραφει την κινηση του ζ.

Υποδειξη. Γραφτε πρωτα τις εξης εξισωσεις:

Εξισωση συνεχειας.

Συνεχεια καθετης πιεσης στην ελευθερη επιφανεια (θυμηθειτε την εξισωση Bernoulli· δεν υπαρχει επιφανειακη ταση).

Καθετη ταχυτητα σωματιδιου κειμενου στην ελευθερη επιφανεια = Καθετη ταχυτητα κινησης της ελευθερης επιφανειας.

Για βοηθεια, καλες αναφορες ειναι τα βιβλια των Newell [N] και Drazin-Johnson [DJ].

Για αυστηρες αποδειξεις βλεπε [SW].

3. Οδευον κυμα.

Ας ψαξουμε για λυσεις της (1), της μορφης

$$q(x,t) = f(\xi), \quad \xi = x - ct, \tag{9}$$

οπου $c \geq 0$ σταθερα. Η (1) γινεται

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0. \tag{10}$$

Ολοκληρωνοντας

$$-cf - 3f^2 + f'' = A, \tag{11}$$

οπου A σταθερα. Πολλαπλασιαζοντας με f' και ολοκληρωνοντας

$$1/2(f')^2 = f^3 + 1/2cf^2 + Af + B, \tag{12}$$

οπου A, B σταθερες. Ας υποθεσουμε τωρα οτι

$$f, f', f'' \to 0, \quad \xi \to \pm\infty, \tag{13}$$

ψαχνουμε δηλαδη για λυσεις εντοπισμενες στο χωρο. Τοτε

$$(f')^2 = f^2(2f + c), \tag{14}$$

αρα για καθε λυση f εχουμε $2f + c \geq 0$. Ολοκληρωνοντας και παλι, εχουμε

$$\int \frac{df}{f(2f+c)^{1/2}} = \pm \int d\xi \tag{15}$$

και αντικαθιστωντας $f = -\frac{1}{2} sech^2\theta$ καταληγουμε

$$q(x,t) = f(x - ct) = -\frac{1}{2}csech^2[\frac{1}{2}c^{1/2}(x - ct - x_0)], \tag{16}$$

οπου η φαση x_0 ειναι σταθερα ολοκληρωσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αν το προσημο του μη γραμμικου ορου γινει θετικο, τοτε και η λυση θα αλλαξει προσημο.

Η παραπανω λυση ειναι ενα μοναχικο κυμα (solitary wave). Αργοτερα θα δικαιολογησουμε την ονομασια 'σολιτονιο' που υποδηλωνει σωματιδιακο χαρακτηρα.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Να βρειτε εντοπισμενα οδευοντα κυματα για τις (β) (περιπτωση εστιασης) (δ) και (ε). Βρειτε επισης οδευοντα κυματα για την (γ) με

$$f', f'' \to 0, \quad \xi \to \pm\infty, \tag{17}$$

4. Ελλειπτικες συναρτησεις.

Αν στις παραπανω εξισωσεις δεν θεσουμε $A = B = 0$ θα βρουμε γενικοτερες λυσεις.

Εστω

$$F(f) = f^3 + 1/2cf^2 + Af + B. \tag{18}$$

Για την λυση της

$$1/2(f')^2 = F(f) \tag{19}$$

χρειαζεται μια διερευνηση της θεσης των πραγματικων ριζων f_1, f_2, f_3 της $F = 0$. Υπαρχουν 5 περιπτωσεις: f_2, f_3 μη πραγματικες· $f_1 < f_2 = f_3$, $f_1 < f_2 < f_3$, $f_1 = f_2 < f_3$, $f_1 = f_2 = f_3$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Να γινει ποιοτικη αναλυση των οδευοντων κυματων για καθε μια απο τις 5 περιπτωσεις. Ειδικοτερα δειξτε οτι στην περιπτωση τριπλης ριζας η λυση ειναι της μορφης

$$f(\xi) = -\frac{c}{6} + \frac{2}{(\xi - b)^2}. \tag{20}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4. Να γινει ποσοτικη αναλυση των οδευοντων κυματων στην γενικη περιπτωση $f_1 < f_2 < f_3$. Δειξτε οτι $c = -2(f_1 + f_2 + f_3)$ και

$$f(\xi) = f_2 - (f_2 - f_3)cn^2[(f_1 - f_3)^{1/2}2^{-1/2}(\xi - \xi_3)|m] \tag{21}$$

οπου $f(\xi_3) = f_3,\ m = \frac{f_2 - f_3}{f_1 - f_3}$ και η ελλειπτικη συναρτηση $cn(.|m)$ οριζεται μεσω

$$cn(v|m) = cos(\phi), \qquad v = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 - msin^2\theta)^{1/2}}. \tag{22}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. 1. Η ταχυτητα, το σχημα και το μηκος του κυματος εξαρτωνται απο το πλατος μεσω μιας πολυπλοκης σχεσης. Προκειται για χαρακτηριστικο μη γραμμικων κυματων.

2. Οταν $m \to 1$ αναπαραγεται η λυση σολιτονιου: $cn(.|m) \to sech(.)$. Οταν $m \to 0$ αναπαραγεται ενα γραμμικο κυμα: $cn(.|m) \to cos(.)$.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Επαληθευσατε οτι οι $q(x,t) = \frac{2}{x^2}, \quad q(x,t) = \frac{6x(x^3 - 24t)}{(x^3 + 12t)^2}$ ειναι ρητες λυσεις της KdV. Ψαχνοντας λυσεις της μορφης $q(x,t) = -\frac{g(\eta)}{(3t)^{2/3}}$ οπου $\eta = x(3t)^{-1/3}$ δειξτε οτι η g πρεπει να ικανοποιει την εξισωση Painlevé II

$$g''' + (6g - \eta)g' - 2g = 0. \tag{23}$$

5. Σολιτονια

ΑΣΚΗΣΗ 6. Δειξτε οτι η παρακατω ειναι λυση της KdV.

$$q(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2}logA(x,t), \tag{24}$$

οπου

$$A(x,t) = [1+\frac{c_1^2}{2k_1}exp(-2k_1x)][1+\frac{c_2^2}{2k_2}exp(-2k_2x)] - \frac{c_1^2c_2^2}{(k_1+k_2)^2}exp(-2(k_1+k_2)x), \tag{25}$$

οπου οι $k_1 > k_2$ θετικες σταθερες, και $c_{1,2}(t) = d_{1,2}exp(4k_{1,2}^3t)$ με τις d_1, d_2 επισης θετικες σταθερες.

Ευκολα υπολογιζει κανεις οτι οταν $t \to \infty$ τοτε

$$q(x,t) \sim -2k_1^2sech^2[k_1x - 4k_1^2t - x_1)] - 2k_2^2sech^2[k_2x - 4k_2^2t - x_2)] \tag{26}$$

και οταν $x \to -\infty$ τοτε

$$q(x,t) \sim -2k_1^2sech^2[k_1x - 4k_1^2t - y_1) - 2k_2^2sech^2[k_2x - 4k_2^2t - y_2)], \tag{27}$$

οπου x_1, x_2, y_1, y_2 σταθερες.

Με αλλα λογια η $q(x,t)$ εκφραζει αλληλεπιδραση δυο μοναχικων κυματων που διατηρουν το σχημα, το πλατος και την ταχυτητα τους μετα την αλληλεπιδραση. Υπαρχει μονο διαφορα φασης. Η συμπεριφορα αυτη θυμιζει σωματιδια, εξ ου και ο ορος 'σολιτονια' (Kruskal-Zabusky 1965, [KZ]). Ενα αλλο στοιχειο που ενισχυει αυτη την σωματιδιακη ερμηνεια ειναι η ευσταθεια (stability) των σολιτονιων. Ενω λυσεις γενικης γραμμικης κυματικης εξισωσης τεινουν να διασπαρουν, στην περιπτωση της KdV η μη γραμμικοτητα αντισταθμιζει την διασπορα με αποτελεσμα την υπαρξη αυτων των ευσταθων κυματων (βλεπε επομενη παραγραφο).

Θα δουμε αργοτερα οτι υπαρχει γενικοτερα μια λυση της KdV που εκφραζει αλληλεπιδραση N (για οποιονδηποτε φυσικο N) μοναχικων κυματων που επισης διατηρουν το σχημα, το πλατος και την ταχυτητα τους μετα την αλληλεπιδραση. Εχουμε λοιπον μια κυματικη λυση μη γραμμικης εξισωσης που μπορει να ερμηνευθει ως αλληλεπιδραση σωματιδιων!

6. Διασπορα

Ας προσπαθησουμε να αναλυσουμε ξεχωριστα την σημασια των διαφορετικων ορων της KdV

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0. \tag{28}$$

Ας θεωρησουμε πρωτα την γραμμικη εξισωση

$$q_t + q_{xxx} = 0, \tag{29}$$

με αρχικα δεδομενα

$$q(x, 0) = q_0(x). \tag{30}$$

Υποθετοντας, π.χ. οτι τα αρχικα δεδομενα ανηκουν στην κλαση Schwartz, μπορουμε να παρουμε μετασχηματισμους Fourier. Εχουμε

$$\hat{q}(\xi, t) = \int e^{-ix\xi} q(x, t) dx. \tag{31}$$

και συνεπως

$$\hat{q}_t(\xi, t) = -i\xi^3 \hat{q}(\xi, t). \tag{32}$$

Λυνοντας την συνηθη διαφορικη εξισωση καταληγουμε

$$\hat{q}(\xi, t) = \hat{q}(\xi, 0) e^{-i\xi^3 t} \tag{33}$$

και τελος εφαρμοζοντας τον αντιστροφο μετασχηματισμο Fourier, εχουμε

$$q(x, t) = \int \hat{q}(\xi, 0) e^{ix\xi - i\xi^3 t} d\xi. \tag{34}$$

Ο τυπος αυτος μας λεει οτι η λυση της 'γραμμικης KdV' ειναι συνθεση απλων ημιτονοειδων κυματων. Παρατηρουμε ομως οτι υπαρχει διασπορα λογω της σχεσης συχνοτητας - μηκους κυματος

$$\omega(\xi) = -\xi^3. \tag{35}$$

Αυτο σημαινει οτι και αν ακομα αρχισουμε με απλα αρχικα δεδομενα οπως $sechx$ αυτα θα διασπαρουν!

7. Μη γραμμικοτητα.

Ας θεωρησουμε τωρα την μη γραμμικη εξισωση Burgers-Hopf

$$q_t - 6qq_x = 0, \tag{36}$$

παλι με αρχικα δεδομενα

$$q(x, 0) = q_0(x). \tag{37}$$

Η εξισωση αυτη λυνεται με την μεθοδο των χαρακτηριστικων του Riemann.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Λυσατε την εξισωση Burgers-Hopf με την μεθοδο των χαρακτηριστικων. Δειξτε οτι δεν υπαρχει κλασσικη λυση για καθε χρονο t. (Υπαρχει ομως ασθενης λυση!)

Ερμηνευουμε τα παραπανω ως εξης. Ο γραμμικος ορος τεινει να διασπειρει το κυμα ενω ο μη γραμμικος ορος συντεινει στην αυξηση της παραγωγου της λυσης και στην δημιουργια ωστικων κυματων (shock waves). Ο γραμμικος ορος μετριαζει την μη γραμμικοτητα και το τελικο αποτελεσμα ειναι η υπαρξη ενος ευσταθους σολιτονιου!

II. Η ΑΛΥΣΟΣ TODA

1. Εξισωσεις Toda και μεταβλητες Flaschka

Εστω συστημα σωματιδιων ισης μαζας τοποθετημενων σε ευθεια. Εστω x_n η αποσταση του n-οστου σωματιδιου απο ενα σταθερο σημειο και y_n η ταχυτητα του n-οστου σωματιδιου. Υποθετουμε οτι σε καθε σωματιδιο ασκουνται δυναμεις μονο απο τα δυο γειτονικα σωματιδια, οι οποιες ειναι απωστικες και εκθετικες. Εχουμε, με αλλα λογια, ενα συστημα συνηθων διαφορικων εξισωσεων.

$$\dot{x}_n = y_n, \quad \dot{y}_n = e^{x_{n-1}-x_n} - e^{x_n - x_{n+1}}. \tag{1}$$

Αν ο δεικτης n παιρνει πεπερασμενο αριθμο τιμων $n = 1, ..., N$, οπου N δοσμενος φυσικος, εχουμε μια πεπερασμενη αλυσο. Αν θεσουμε $x_0 = -\infty, x_{N+1} = \infty$ τοτε εχουμε μια ελευθερη πεπερασμενη αλυσο. Επισης μπορουμε να θεωρησουμε την απειρη αλυσο οπου $-\infty < n < \infty$. Ακομα υπαρχει και η περιοδικη αλυσος οπου $x_n = x_{n+N}$ για καποιον φυσικο N.

Με αλλα λογια το εν λογω δυναμικο συστημα μπορει να εχει πεπερασμενη η απειρη διασταση. Η αλυσος Toda ειναι μαλιστα Χαμιλτονιανο συστημα οπου η Χαμιλτονιανη ειναι

$$H = \Sigma_n (e^{x_n - x_{n+1}} + \frac{1}{2} y_n^2). \tag{2}$$

Θετουμε τωρα

$$a_n = \frac{1}{2} e^{(-x_n + x_{n+1})/2}, \ b_n = -y_n/2. \tag{3}$$

Οι νεες μεταβλητες a_n, b_n ειναι γνωστες ως μεταβλητες του Flaschka. Ως προς τις μεταβλητες του Flaschka η αλυσος Toda γραφεται

$$\dot{a}_n = 2(b_n^2 - b_{n-1}^2), \ \dot{b}_n = b_n(a_{n+1} - a_n). \tag{4}$$

2. Το ζευγος Lax.

Εναλλακτικος τροπος εκφρασης της αλυσου Toda, μεσω τριδιαγωνιων τελεστων. Για την απειρη αλυσο,

$$\dot{L} = [L, B(L)] = B(L)L - LB(L), \tag{5}$$

οπου L και $B(L)$ τριδιαγωνιοι τελεστες στον χωρο Hilbert $l^2(-\infty, \infty)$ τετοιοι ωστε, αν $f \in l^2(-\infty, \infty)$ τοτε

$$(Lf)_n = a_{n-1}f_{n-1} + b_n f_n + a_n f_{n+1}, \tag{6}$$

και

$$(Bf)_n = a_{n-1}f_{n-1} - a_n f_{n+1}. \tag{7}$$

Εαν υποθεσουμε οτι τα a_n, b_n ειναι φραγμενα (του n μεταβαλλομενου) τοτε ειναι προφανες οτι οι L, B ειναι φραγμενοι τελεστες. Αυτο ισχυει, π.χ., στην περιπτωση που εξεταζουμε στο επομενο κεφαλαιο.

Στην περιπτωση της ελευθερης αλυσου οι L και $B(L)$ ειναι απλα τριδιαγωνιοι πινακες πεπερασμενης διαστασης (βλεπε παραγραφο 4 παρακατω). Γιάυτο ειναι ισως καλο να φανταστει κανεις τους παραπανω τελεστες στον $l^2(-\infty, \infty)$ ως τριδιαγωνιους πινακες απειρης διαστασης.

Στην περιοδικη περιπτωση οι L και $B(L)$ ειναι επισης πινακες πεπερασμενης διαστασης, αλλα οχι τριδιαγωνιοι. Σε σχεση με την ελευθερη αλυσο υπαρχει μια διαφορα: τα στοιχεια στις θεσεις $(1, N)$ και $(N, 1)$ του L ειναι a_N αντι για 0 και τα στοιχεια στις θεσεις $(1, N)$ και $(N, 1)$ του $B(L)$ ειναι a_N και $-a_N$ αντιστοιχα.

Ο L ειναι συμμετρικος πινακας (σε πεπερασμενη διασταση) η αυτοσυζυγης τελεστης (σε απειρη διασταση). Ο $B(L)$ ειναι αντισυμμετρικος πινακας η αντιαυτοσυζυγης τελεστης. Οι L και B αποτελουν το λεγομενο ζευγος Lax.

Μια εντυπωσιακη απορροια της εκφρασης της αλυσου μεσω του ζευγους Lax ειναι η διατηρηση του φασματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.1. Εστω L συμμετρικος τριδιαγωνιος πινακας πεπερασμενης διαστασης που ικανοποιει την

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB, \tag{8}$$

με $B = -B^T$. Τοτε η εξελιξη του L ειναι ισοφασματικη. Με αλλα λογια το φασμα του L σε χρονο t ειναι ισο με το φασμα του L σε χρονο 0. Επισης η εξελιξη ιδιοδιανυσματος δινεται απο την

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = B(t)\phi(t). \tag{9}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Οριζουμε τον πινακα U ως λυση της ΣΔΕ

$$\frac{dU}{dt} = BU, \tag{10}$$

με αρχικα δεδομενα $U(0) = I$. Απο την θεωρια υπαρξης και μοναδικοτητας λυσης ΣΔΕ επεται οτι ο U ειναι καλα ορισμενος. Επισης οριζουμε τον πινακα G μεσω της

$$\frac{dG}{dt} = -GB, \tag{11}$$

με αρχικα δεδομενα $G(0) = I$. Καθως επεται ευκολα οτι

$$\frac{d(GU)}{dt} = 0, \tag{12}$$

με αρχικα δεδομενα $GU(0) = I$, εχουμε οτι $G = U^{-1}$ για καθε t. Ευκολα καταληγουμε

$$\frac{dU^{-1}LU}{dt} = 0. \tag{13}$$

Αρα ο $U^{-1}LU$ ειναι σταθερος και δη ισος με $(U^{-1}LU)(t=0) = L(t=0)$. Αρα

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}. \tag{14}$$

[Παρατηρουμε εδω οτι ο πινακας U ειναι ορθογωνιος. Οντως, εχουμε

$$\frac{dU^T}{dt} = -U^T B, \tag{15}$$

με αρχικα δεδομενα $U^T(0) = I$, συνεπως, παλι απο την θεωρια υπαρξης και μοναδικοτητας λυσης ΣΔΕ επεται οτι $G = U^T$ αρα $UU^T = I$ για καθε t.]

Επεται ευκολα οτι οι ιδιοτιμες του $L(t)$ διατηρουνται καθως

$$det(\lambda I - L(t)) = det(\lambda I - U(t)L(0)U(t)^{-1}) = det(U(t)(\lambda I - L(0))U^{-1}(t)) \tag{16}$$
$$= det(U(t))det(\lambda I - L(0))det(U^{-1}(t)) = det(\lambda I - L(0)). \tag{17}$$

Εστω τωρα $\phi(t)$ ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην ιδιοτιμη $\lambda(t)$. Αρα

$$L(t)\phi(t) = \lambda(t)\phi(t). \tag{18}$$

Συνεπως

$$L(0)\phi(0) = \lambda(0)\phi(0). \tag{19}$$

Απο την (15) εχουμε

$$L(t)U(t)\phi(0) = U(t)L(0)\phi(0) = U(t)\lambda(0)\phi(0) = \lambda(0)U(t)\phi(0) = \lambda(t)U(t)\phi(0). \tag{20}$$

Συγκρινοντας με την (19) και επειδη οι ιδιοτιμες του $L(t)$ ειναι μονες (ευκολη ασκηση) συμπεραινουμε οτι

$$\phi(t) = U(t)\phi(0), \tag{21}$$

αρα παραγωγιζοντας και χρησιμοποιωντας την (11) καταληγουμε οτι

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = B(t)\phi(t). \tag{22}$$

3. Πληρης ολοκληρωσιμοτητα.

Οι ιδιοτιμες $\lambda(t)$ ειναι λυσεις της $det(L - \lambda I) = 0$, δηλαδη ενος πολυωνυμου με συντελεστες πολυωνυμα στα a_n, b_n. Επεται η υπαρξη N πολυωνυμικων διατηρητων ποσοτητων.

Ευκολα επαληθευει κανεις οτι

$$\dot{L}^k = [L^k, B(L^k)] = B(L^k)L^k - L^k B(L^k), \tag{23}$$

για καθε $k = 1, 2, 3, ...$ Επεται οτι και οι ιδιοτιμες του L^k διατηρουνται και συνεπως οι ποσοτητες $tr(L^k)$ διατηρουνται.

Ειναι γνωστο οτι οι $tr(L^k),\ k = 1, 2, 3, ..., N$ ειναι ανεξαρτητες. Επισης

ΑΣΚΗΣΗ 8

(α) Δειξτε οτι η συνολικη ορμη Σb_n ισουται με $2\Sigma\lambda_n$.
(β) Δειξτε οτι η συνολικη ενεργεια $\Sigma(e^{x_n - x_{n+1}} + \frac{1}{2}y_n^2)$ ισουται με $2\Sigma\lambda_n^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ II.2. Οι $I_k = tr(L^k),\ k = 1, 2, 3, ..., N$ ειναι σε ενελιξη, δηλαδη ικανοποιουν την σχεση $\{I_k, I_j\} = 0,\ k, j, = 1, 2, 3, ..., N$ οπου $\{A, B\} = \Sigma(\frac{\partial A}{\partial a_n}\frac{\partial B}{\partial b_n} - \frac{\partial B}{\partial a_n}\frac{\partial A}{\partial b_n})$. Επισης οι διαφορικες μορφες dI_k ειναι γραμμικα ανεξαρτητες σε καθε σημειο (a_n, b_n).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Απλη επαληθευση.

Η σημασια του παραπανω θεωρηματος εγκειται στο οτι καθε Χαμιλτονιανο συστημα διαστασης $2N$ τετοιο ωστε να υπαρχουν διατηρουμενες ποσοτητες με τις παραπανω ιδιοτητες ειναι 'πληρως ολοκληρωσιμο', δηλαδη μπορει να λυθει με ολοκληρωματα. Αυτο ειναι το θεωρημα των Liouville-Arnold, βλεπε [A], σελ.272.

Πιο συγκεκριμενα, αν

$$M = \{(a, b) : I_k(a, b) = j_k, \quad k = 1, ..., N, \quad a_n > 0, b_n \in R\} \tag{24}$$

και οι dI_k ειναι γραμμικα ανεξαρτητες σε καθε σημειο του M, τοτε το M ειναι λεια πολλαπλοτητα, αμεταβλητη ως προς την ροη Toda. Αν επισης το M ειναι συμπαγες και συνεκτικο (εδω ειναι) τοτε ειναι τορος

$$T^N = \{(\Phi^1, \Phi^2, ..., \Phi^N) mod(2\pi)\}. \tag{25}$$

Πανω στον T^N εχουμε την σχεδον περιοδικη κινηση.

$$d\Phi/dt = \Omega(I_1, I_2, ..., I_n). \tag{26}$$

Οι I_k, Φ^k δεν ειναι συμπλεκτικες συντεταγμενες, αλλα υπαρχουν $F_k = F_k(I_1, ..., I_N)$ τετοια ωστε οι $F_k, \Phi^k, k = 1, ..., N,$ να ειναι συμπλεκτικες συντεταγμενες. Ο μετασχηματισμος $(a_k, b_k) \rightarrow (I_k, \Phi^k)$ ειναι κανονικος.

Το θεωρημα των Liouville-Arnold προσφερει εναν ξεκαθαρο ορισμο της εννοιας της πληρους ολοκληρωσιμοτητας για Χαμιλτονιανα συστηματα πεπερασμενης διαστασης. Στην περιπτωση της απειρης διαστασης τετοιος (η αλλος) αυστηρος ορισμος της πληρους ολοκληρωσιμοτητας δεν υπαρχει. Ναι μεν εχει κανεις συχνα απειρο αριθμο διατηρουμενων συναρτησεων που να ικανοποιουν παρομοια σχεση $\{A, B\} = 0$ αλλα αυτο δεν συνεπαγεται παντα υπαρξη μεταβλητων δρασης-γωνιας.

4. Λυση της ελευθερης αλυσου (Moser, 1975).

Το θεωρημα των Liouville-Arnold μας εγγυαται την υπαρξη λυσης της ελευθερης αλυσου αλλα δεν την κατασκευαζει. Θα δειξουμε εδω πως ο Jürgen Moser ανηγηαγε το προβλημα λυσης της ελευθερης αλυσου σ' ενα προβλημα που ελυσε ο Stieltjes το 1894, ητοι την αναγωγη αναπτυξης ρητης συναρτησης με μερικα κλασματα σε αναπτυξη με συνεχομενα κλασματα.

Εχουμε την αλυσο

$$\dot{x}_n = y_n, \quad \dot{y}_n = e^{x_{n-1}-x_n} - e^{x_n-x_{n+1}}. \tag{27}$$

και θετουμε

$$x_0 = -\infty, \quad x_{N+1} = \infty, \tag{28}$$

για καποιον φυσικο αριθμο N. Αρα εχουμε

$$a_0 = a_N = 0, \qquad b_0 = b_{N+1} = 0 \tag{29}$$

και ο τελεστης L ειναι πινακας διαστασης N.

Η πρωτη σειρα των εξισωσεων (6) γραφεται αναλυτικα ως

$$a_1 f_j^2 + b_1 f_j^1 = \lambda_j f_j^1, \tag{30}$$

οπου λ_j ειναι ιδιοτιμη του τελεστη L και f_j ειναι το αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα.

Επισης, απο την (9),

$$\dot{f}_j^1 = -a_1 f_j^2. \tag{31}$$

Διαλεγοντας τα ιδιοδιανυσματα f_j με νορμα 1 και επειδη αποτελουν ορθοκανονικο συστημα εχουμε

$$\Sigma_j f_j^n f_j^{n'} = \delta_{nn'}, \qquad \Sigma_n f_j^n f_{j'}^n = \delta_{jj'}. \tag{32}$$

Απο την (30) καταληγουμε

$$\Sigma_j \lambda_j (f_j^1)^2 = b_1. \tag{33}$$

Παρατηρωντας οτι

$$\frac{d}{dt}\Sigma_j (f_j^1)^2 = 0, \tag{34}$$

απο τις (31) και (32) εχουμε

$$\dot{f}_j^1 = -(\lambda_j - \Sigma_i \lambda_i (f_i^1)^2) f_j^1. \tag{35}$$

Λυνοντας την παραπανω εχουμε

$$(f_j^1)^2(t) = \frac{(f_j^1)^2(t=0)e^{-2\lambda_j t}}{\Sigma_l (f_l^1)^2(t=0)e^{-2\lambda_l t}}. \tag{36}$$

Θα δειξουμε οτι η απεικονιση

$$\Lambda : \{a_1, a_2, ..., a_{N-1}, b_1, b_2, ..., b_N\} \to \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N, f_1^1, f_2^1, ..., f_{N-1}^1\} \tag{37}$$

ειναι αμφιμονοσημαντη κατασκευαζοντας την αντιστροφη απεικονιση Λ^{-1}. (Παρατηρουμε εδω οτι καθως $\Sigma_j |f_j^1(t)|^2 = 1$ η πρωτη συνταταγμενη του f_N εξαρταται απο τις πρωτες συνταταγμενες των αλλων $N-1$ ιδιοδιανυσματων.) Σημειωνουμε εδω οτι οι Λ, Λ^{-1} ειναι τα αντιστοιχα των απεικονισεων σκεδασης και αντιστροφης σκεδασης για την ελευθερη αλυσο (βλ.κεφ.3).

Εχοντας λυσει το προβλημα αντιστροφης του Λ και εχοντας υπ' οψιν την εξελιξη των $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N, f_1^1, f_2^1, ..., f_{N-1}^1\}$, με αλλα λογια την διατηρηση των ιδιοτιμων λ_j και τους τυπους (36) για $j = 1, ..., N-1$, θα εχουμε λυσει και την ελευθερη αλυσο Toda.

Απο την (6) εχουμε

$$Lf_k = \lambda_k f_k, \quad (L - \lambda I)f_k = (\lambda_k - \lambda)f_k. \tag{38}$$

Οριζοντας τον αναλυοντα

$$R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1} \tag{39}$$

για $\lambda \neq \lambda_k$ εχουμε

$$Rf_k = \frac{1}{\lambda_k - \lambda} f_k. \tag{40}$$

Οριζοντας την συναρτηση $F(\lambda)$ ως την συντεταγμενη R_{11} του πινακα R εχουμε

$$F(\lambda) = \Sigma_k \frac{r_k^2}{\lambda_k - \lambda}, \tag{41}$$

οπου $r_k = f_k^1$. Παιρνοντας $|\lambda| \to \infty$ και συγκρινοντας με την (39) καταληγουμε

$$\Sigma_k r_k^2 = 1. \tag{42}$$

Εστω $\Delta_N = det(L - \lambda I)$ και Δ_{N-n+1} η οριζουσα του ελασσονος πινακα που κατασκευαζεται απο την διαγραφη των πρωτων $n-1$ σειρων και στηλων του R. Εχουμε

$$\Delta_N = (b_1 - \lambda)\Delta_{N-1} - a_1^2 \Delta_{N-2} \tag{43}$$

και γενικοτερα

$$\Delta_{N-n+1} = (b_n - \lambda)\Delta_{N-n} - a_n^2 \Delta_{N-n-1}, \quad n = 1, 2, ... \tag{44}$$

Οριζοντας $\Delta_{-1} = 0, \quad \Delta_0 = 1$, η παραπανω σχεση ισχυει μεχρι $n = N$.

Εστω τωρα E, Z τα διανυσματα με N συντεταγμενες

$$E_l = \Sigma_k f_k^l f_k^1, \qquad Z_l = \Sigma_k \frac{f_k^l f_k^1}{\lambda_k - \lambda}. \tag{45}$$

Προφανως $E_l = \delta_{l1}$ και $RE = Z$, αρα $(L - \lambda I)Z = E$. Κατα συντεταγμενες,

$$(b_1 - \lambda)Z_1 + \alpha_1 Z_2 = 1, \tag{46}$$

$$\alpha_1 Z_1 + (b_2 - \lambda)Z_2 + \alpha_2 Z_3 = 0, \tag{47}$$

$$.......$$

$$\alpha_{N-1} Z_{N-1} + (b_N - \lambda)Z_N = 0, \tag{48}$$

Λυνοντας το συστημα για Z_1 και παρατηρωντας οτι η οριζουσα των συντελεστων του ZX ειναι η Δ_N και οτι $Z_1 = F$, εχουμε

$$F(\lambda) = Z_1 = \frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_N}. \tag{49}$$

Παρομοια απο την (43) εχουμε

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_{N-1}} = b_1 - \lambda - \frac{a_1^2}{\frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_{N-2}}} \tag{50}$$

και απο την (44)

$$\frac{\Delta_{N-n+1}}{\Delta_{N-n}} = b_n - \lambda - \frac{a_n^2}{\frac{\Delta_{N-n}}{\Delta_{N-n-1}}}. \tag{51}$$

Καταληγουμε στην ακολουθη αναπτυξη της F σε συνεχομενα κλασματα

$$F(\lambda) = \cfrac{1}{b_1 - \lambda - \cfrac{a_1^2}{b_2 - \lambda ...}} \tag{52}$$

$$..........$$

$$-\frac{a_{N-1}^2}{b_N - \lambda} \tag{53}$$

Εχουμε λοιπον δυο αναπαραστασεις για την συναρτηση $F(\lambda)$: την (41) με μερικα κλασματα και την (52) με συνεχομενα κλασματα. Το προβλημα μας ειναι να εκφρασουμε τις παραμετρους στην αναπαρασταση με συνεχομενα κλασματα μεσω των παραμετρων που εμφανιζονται στην αναπαρασταση με μερικα κλασματα.

Το προβλημα αυτο εχει λυθει απο τον Stieltjes το 1894. Δεν παρουσιαζουμε τις λεπτομερειες της επιλυσης (βλεπε π.χ. [T] σελ.159-165), παρα μονο τον τελικο τυπο. Εχουμε, για $n \geq 1$,

$$a_{N-n}^2 = \frac{detC_{n-1} detC_{n+1}}{detC_n} \tag{54}$$

οπου C_n ειναι ο πινακας διαστασης $n-1$ με συντεταγμενες $C_n^{ij} = c_{i+j-1}$ οπου οι σταθερες c_j οριζονται απο την σειρα Laurent της F, δηλαδη

$$F(\lambda) = \Sigma_j (-1)^j \frac{c_j}{\lambda^j}. \tag{55}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Εναλλακτικη λυση της ελευθερης αλυσου Toda παρουσιαζεται στο αρθρο [Sy], οπου το προβλημα αναγεται στο κλασικο προβλημα παραγοντοποιησης αντιστρεπτου πινακα ως γινομενο ορθογωνιου και κατω τριγωνικου πινακα.

III. Η ΑΠΕΙΡΗ ΑΛΥΣΟΣ TODA. ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (INVERSE SCATTERING PROBLEM).

1. Η απειρη αλυσος Toda.

Θεωρουμε το συστημα ΣΔΕ

$$\dot{x}_n = y_n, \quad \dot{y}_n = e^{x_{n-1}-x_n} - e^{x_n - x_{n+1}}, \tag{1}$$

οπου ο δεικτης n παιρνει απειρο αριθμο τιμων $-\infty < n < \infty$.

Το εν λογω Χαμιλτονιανο δυναμικο συστημα εχει απειρη διασταση. Η Χαμιλτονιανη ειναι η

$$H = \Sigma_n (e^{x_n - x_{n+1}} + \frac{1}{2} y_n^2). \tag{2}$$

Οι μεταβλητες του Flaschka οριζονται ως

$$a_n = \frac{1}{2} e^{(-x_n + x_{n+1})/2}, b_n = \frac{y_n}{2}. \tag{3}$$

Η αλυσος Toda γραφεται

$$\dot{a}_n = a_n (b_{n+1} - b_n), \ \dot{b}_n = 2(a_n^2 - a_{n-1}^2). \tag{4}$$

Επισης εχουμε

$$\dot{L} = [L, B(L)] = B(L)L - LB(L), \tag{5}$$

οπου L και $B(L)$ τριδιαγωνιοι τελεστες στον χωρο Hilbert $l^2(-\infty, \infty)$ τετοιο ωστε, αν $f \in l^2(-\infty, \infty)$ τοτε

$$(Lf)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + a_n f_{n+1}, (Bf)_n = a_{n-1} f_{n-1} - a_n f_{n+1}. \tag{6}$$

Παρατηρουμε οτι ο L ειναι συμμετρικος και ο B αντισυμμετρικος.

Το ενδιαφερον μας θα εστιασθει στο προβληματα αρχικων τιμων. Υποθετουμε οτι τα αρχικα δεδομενα ειναι τετοια ωστε για μεγαλα $|n|$

$$a_n = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0. \tag{7}$$

2.Φασμα. Ιδιοτιμες.

ΟΡΙΣΜΟΣ III.1. Αν υπαρχουν λ και $f \in l^2$ τετοια ωστε $Lf = \lambda f$, λεμε οτι η λ ειναι ιδιοτιμη και η f ειναι ιδιοσυναρτηση του L. Η αποδειξη του προηγουμενου κεφαλαιου επεκτεινεται και στην περιπτωση μας. Εχουμε λοιπον

ΘΕΩΡΗΜΑ III.1. Οι ιδιοτιμες του L διατηρουνται.

Θα δωσουμε μια διαφορετικη αποδειξη αργοτερα.

ΟΡΙΣΜΟΣ III.2. Αν υπαρχουν λ και $f \in l^\infty \backslash l^2$ τετοια ωστε $Lf = \lambda f$, λεμε οτι η λ ειναι γενικευμενη ιδιοτιμη και οτι η f ειναι γενικευμενη ιδιοσυναρτηση (η συναρτηση Jost) του L.

ΟΡΙΣΜΟΣ III.3. Η ενωση των συνολων των ιδιοτιμων και των γενικευμενων ιδιοτιμων λεγεται φασμα του L.

ΑΣΚΗΣΗ 9. Το φασμα του L ειναι πραγματικο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ο παρων ορισμος δεν ειναι ο γενικος ορισμος του φασματος τελεστη. Ειναι ομως πιο απλος, πιο ευχρηστος και επαρκης για το προβλημα μας. Για εναν πιο γενικο ορισμο του φασματος μη φραγμενων τελεστων βλεπε το βιβλιο των Reed-Simon [RS], Κεφαλαιο 7. Στην περιπτωση μας ομως οι δυο ορισμοι δινουν το ιδιο αποτελεσμα.

Η εξισωση $Lf = \lambda f$ ειναι ενα συστημα γραμμικων εξισωσεων διαφορων δευτερης ταξης. Αρα υπαρχουν δυο γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις.

Για καθε n

$$((L - \lambda I)f)_n = a_{n-1}f_{n-1} + (b_n - \lambda)f_n + a_n f_{n+1} = 0. \tag{8}$$

Ας αρχισουμε την αναλυση για μεγαλα n. Υπαρχει N τετοιο ωστε για $|n| > N, \quad a_n = 1/2,\ b_n = 0$. Εχουμε

$$f_{n-1} - 2\lambda f_n + f_{n+1} = 0. \tag{9}$$

Αρα η ασυμπτωτικη μορφη των f_n οταν $|n| > N$ ειναι

$$f_n = C(t) z^{\pm n}, \tag{10}$$

οπου $2\lambda = (z + z^{-1})$. Ας διαλεξουμε την περιπτωση $f_n = C(t)z^n$. Απο την αλλη μερια, λογω του Θεωρηματος II.1,

$$\frac{df_n}{dt} = \frac{1}{2}(f_{n-1} - f_{n+1}), \tag{11}$$

αρα $C(t) = cexp(-i\omega t)$ οπου c σταθερα και $2i\omega = (z - z^{-1})$. Ας παρουμε $c = 1$.

Αν ενδιαφερομαστε για φραγμενες f θα πρεπει ειτε $|z| = 1$, οποτε $-1 \leq \lambda \leq 1$ και $\lambda = cosk, 0 \leq k \leq \pi$, αλλα και $\omega = sink, 0 \leq k \leq \pi$, στην οποια περιπτωση η λ θα ειναι γενικευμενη ιδιοτιμη.

Η βασικη ιδεα ειναι ως εξης. Αρχιζουμε την αναλυση της f για μεγαλα n και κοιταζουμε πως συνεχιζεται εως οτου $n \to -\infty$. Με αλλα λογια εξεταζουμε την σκεδαση της f που οφειλεται στα a_n, b_n. Αντιστοιχα μπορουμε να αρχισουμε την αναλυση της f για μεγαλα $-n$ και να κοιταξουμε πως συνεχιζεται εως οτου $n \to \infty$. Επειδη το συστημα μας ειναι δευτερης ταξης, υπαρξουν παντα μονο δυο ιδιοσυναρτησεις. Ειναι προφανες οτι καθε τιμη λ, τετοια ωστε $-1 \leq \lambda \leq 1$ ειναι γενικευμενη ιδιοτιμη γι αυτο και το συνολο των γενικευμενων ιδιοτιμων λεγεται συνεχες φασμα. Αντιθετα το συνολο των ιδιοτιμων ειναι διακριτο και μαλιστα πεπερασμενο, οπως θα δουμε αργοτερα, το αποκαλουμε δε διακριτο φασμα.

Εστω ιδιοτιμη $\lambda = \lambda_1$ που αντιστοιχει σε $z = z_1$ με $|z_1| < 1$. Τοτε $f_n = exp(\beta t) z_1^n, \quad 2\lambda = (z_1 + z_1^{-1}), \quad 2\beta = (z_1 + z_1^{-1})$. Εν γενει, οταν $n \to -\infty$ η f_n θα ειναι γραμμικος συνδυασμος των z_1^n και z_1^{-n}. Ενδεχομενα ομως υπαρχουν ιδιαιτερες τιμες του z_1 για τις οποιες συντελεστης του z_1^n ειναι 0. Τοτε πετυχαινουμε ιδιοτιμη.

Ας εστιασουμε τωρα την προσοχη μας στην χρονικη στιγμη 0.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ.2. Οταν $t = 0$ εχουμε

$$f_n(z) = \Sigma_{m=n}^{\infty} K(n,m) z^m, \tag{12}$$

οπου ο πυρηνας $K(n,m)$ ειναι ανεξαρτητος του z αλλα εξαρταται απο τα a_n, b_n. Επισης η συναρτηση $f_n(z)$ ειναι αναλυτικη στο συνολο $\mathbf{C} \backslash \{0\}$, με πολο στο 0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανως η (12) ισχυει για μεγαλα n. Οντως $K(n,m) = 0$ οταν $m \neq n$. Απο την (8) (επαγωγικα) ειναι προφανες οτι μπορουμε να εκφρασουμε την $f_{n-1}(z)$ δεδομενων των $f_n(z), f_{n+1}(z)$. Οσον αφορα την αναλυτικοτητα, παρατηρουμε οτι η $f_n(z)$ ειναι γινομενο πολυωνυμου και (ενδεχομενα αρνητικης) δυναμης του z. ΟΕΔ

Ορισαμε το $K(n,m)$ δεδομενων των a_n, b_n. Αντιστροφα δεδομενου $K(n,m)$ μπορουμε να ανακατασκευασουμε τα a_n, b_n.

Απο τις (12) και (8), συγκρινοντας τους συντελεστες των $z^{n-1}, z^n, z^{n+1}, ...$ εχουμε

$a_{n-1} K(n-1, n-1) = \frac{1}{2} K(n,n)$

$a_{n-1} K(n-1, n) + b_n K(n,n) = \frac{1}{2} K(n, n+1)$

$a_{n-1} K(n-1, n+1) + a_n K(n+1, n+1) + b_n K(n, n+1) = \frac{1}{2}[K(n,n) + K(n, n+2)]$ κλπ.

Απο τις δυο πρωτες εξισωσεις εχουμε

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ.3.

$$a_n = \frac{K(n+1, n+1)}{2k(n,n)}, \quad b_n = \frac{K(n, n+1)}{2k(n,n)} - \frac{K(n-1, n)}{2k(n-1, n-1)}. \tag{13}$$

3. Σκεδαση

Εχουμε δυο γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις της (8), τις $f_n(z)$ και $f_n(z^{-1})$ που οριστικαν απο την συμπεριφορα $f_n(z) = z^n$ και $f_n(z^{-1}) = z^{-n}$ για μεγαλα n.

Παρομοια εχουμε δυο διαφορετικες γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις της (8), τις $g_n(z)$ και $g_n(z^{-1})$ που οριστικαν απο την συμπεριφορα $g_n(z) = z^n$ και $g_n(z^{-1}) = z^{-n}$ για μεγαλα $-n$.

Αναγκαστικα οι $g_n(z)$ και $g_n(z^{-1})$ θα ειναι γραμμικοι συνδυασμοι των $f_n(z)$ και $f_n(z^{-1})$. Οριζουμε λοιπον τους συντελεστες σκεδασης $\alpha(z)$ και $\beta(z)$ ως εξης:

$$g_n(z) = \alpha(z) f_n(z^{-1}) + \beta(z) f_n(z) \tag{14}$$

Παρομοια

$$g_n(z^{-1}) = \alpha(z^{-1}) f_n(z) + \beta(z^{-1}) f_n(z^{-1}) \tag{15}$$

Επισης οριζουμε τους $\bar{\alpha}(z)$ και $\bar{\beta}(z)$ ως εξης:

$$f_n(z) = \bar{\alpha}(z) g_n(z^{-1}) + \bar{\beta}(z) g_n(z), \tag{16}$$

συνεπως

$$f_n(z^{-1}) = \bar{\alpha}(z^{-1}) g_n(z) + \bar{\beta}(z^{-1}) g_n(z^{-1}). \tag{17}$$

Επεται απο τις παραπανω οτι
$\alpha(z)\bar{\alpha}(z^{-1}) + \beta(z)\bar{\beta}(z) = 1$
$\alpha(z)\bar{\beta}(z^{-1}) + \beta(z)\bar{\alpha}(z) = 0$
$\bar{\alpha}(z)\alpha(z^{-1}) + \beta(z^{-1})\bar{\beta}(z^{-1}) = 1$
$\bar{\beta}(z)\alpha(z^{-1}) + \beta(z^{-1})\bar{\alpha}(z^{-1}) = 0$
$\bar{\alpha}(z)\alpha(z^{-1}) + \beta(z)\bar{\beta}(z) = 1$
$\bar{\alpha}(z)\beta(z^{-1}) + \bar{\beta}(z)\alpha(z) = 0$
$\bar{\alpha}(z^{-1})\alpha(z) + \beta(z^{-1})\bar{\beta}(z^{-1}) = 0$
$\bar{\alpha}(z^{-1})\beta(z) + \bar{\beta}(z^{-1})\alpha(z^{-1}) = 0$
και
$\bar{\alpha}(z) = \alpha(z), \quad \bar{\beta}(z) = -\beta(z^{-1})$
$\alpha(z)\alpha(z^{-1}) = 1 + \beta(z)\beta(z^{-1})$
ΠΡΟΤΑΣΗ Για $|z| = 1$ εχουμε $|\alpha(z)|^2 = 1 + |\beta(z)|^2$.
ΟΡΙΣΜΟΙ Συντελεστης μεταδοσης $T(z) = \frac{1}{\alpha(z)}$.
Συντελεστης ανακλασης $R(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$.
Συνεπως $|T(z)|^2 + |R(z)|^2 = 1$.

Αντιστροφα μπορουμε να υπολογισουμε τους T, R μεσω των ιδιοσυναρτησεων f_n, g_n. Εχουμε οντως οτι

$$\alpha(z) = \frac{g_n(z) f_{n+1}(z) - g_{n+1}(z) f_n(z)}{W_n(z)} \tag{18}$$

οπου

$$W_n(z) = f_n(z^{-1})f_{n+1}(z) - f_n(z)f_{n+1}(z^{-1}) \tag{19}$$

ειναι ενα ειδος διακριτης Βρονσκιανης.

Ευκολα παρατηρει κανεις οτι

$$W_n(z)a_n = W_{n-1}(z)a_{n-1} \tag{20}$$

και συνεπως $W_n = a_N/a_n W_N$. Οταν το N ειναι μεγαλο, εχουμε $W_N(z) = z - z^{-1}$και $a_n = 1/2$. Αρα

$$W_n(z) = \frac{z - z^{-1}}{2a_n}. \tag{21}$$

Απο την (19) συμπεραινουμε οτι

$$\alpha(z) = \frac{2a_n}{z - z^{-1}}(g_n(z)f_{n+1}(z) - g_{n+1}(z)f_n(z)). \tag{22}$$

Επεται αμεσως οτι

ΘΕΩΡΗΜΑ III.4. Η $\alpha(z)$ ειναι αναλυτικη στον κλειστο μοναδιαιο δισκο εκτος απο τυχον πολους στα σημεια ± 1. Συνεπως το συνολο των ριζων της $\alpha(z)$ στον ανοικτο μοναδιαιο δισκο ειναι πεπερασμενο.

Εστω $\{z_1, z_2, z_3, ..., z_n\}$ το συνολο των ριζων της $\alpha(z)$ στον ανοικτο μοναδιαιο δισκο. Εχουμε αυτοματα

$$g_n(z_j) = \beta(z_j)f_n(z_j). \tag{23}$$

Αρα οι συναρτησεις $g_n(z_j), f_n(z_j)$ φθινουν και οταν $n \to \infty$ αλλα και οταν $n \to -\infty$. Ειδικοτερα, ανηκουν στον χωρο Hilbert l^2. Με αλλα λογια

ΘΕΩΡΗΜΑ III.5. Οι ποσοτητες $\lambda_j = 1/2(z_j + z_j^{-1})$ ειναι ιδιοτιμες του L και οι αντιστοιχες g_n, f_n ειναι ιδιοσυναρτησεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ III.6. Το φασμα του L αποτελειται απο τις ιδιοτιμες και το συνεχες φασμα $[-1, 1]$. Οι αντιστοιχες f_n, g_n για $z \in [-1, 1]$ λεγονται γενικευμενες ιδιοσυναρτησεις η ιδιοσυναρτησεις Jost.

ΣΧΟΛΙΟ. Η φθινουσα συμπεριφορα του ¨δυναμικου' (a_n, b_n) οδηγει στην μερικη αναλυτικοτητα των συντελεστων σκεδασης. Αυτη η συνδεση θυμιζει τα θεωρηματα Paley-Wiener για τον μετασχηματισμο Fourier. Θα δουμε αργοτερα οτι ο μετασχηματισμος σκεδασης παιζει ενα ρολο αντιστοιχο του μετασχηματισμου Fourier στις πληρως ολοκληρωσιμες εξισωσειες.

4. Σταθερες κανονικοποιησης.

Τα δεδομενα σκεδασης αποτελουνται απο:

τον συντελεστη ανακλασης

τον συντελεστη μεταδοσης

τις ιδιοτιμες λ_j (η τα z_j)

τις σταθερες κανονικοποιησης c_j που οριζονται παρακατω.

Κανονικοποιουμε τις $g_n(z_j), f_n(z_j)$ ως εξης. Εστω

$$\zeta_n(z_j) = \mu g_n(z_j) = \mu\beta(z_j)f_n(z_j), \tag{24}$$

οπου το μ εχει επιλεγει ετσι ωστε

$$\Sigma_n|\zeta_n(z_j)|^2 = 1. \tag{25}$$

Οι σταθερες

$$c_j = \mu\beta(z_j) \tag{26}$$

λεγονται σταθερες κανονικοποιησης (norming constants).

ΘΕΩΡΗΜΑ III.7. Η συμπεριφορα του συντελεστη μεταδοσης $T(z) = \frac{1}{\alpha(z)}$ γυρω απο τους πολους z_j διδεται απο

$$T(z) = \frac{1}{\alpha(z)} \sim -\frac{z_j c_j^2}{\beta(z_j)(z - z_j)}. \tag{27}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Εστω $g_n'(z)$ η παραγωγος της $g_n(z)$ ως προς z. Παραγωγιζοντας την εξισωση

$$a_{n-1}g_{n-1} + (b_n - \lambda)g_n + a_n g_{n+1} = 0, \tag{28}$$

εχουμε

$$a_{n-1}g_{n-1}' + (b_n - \lambda)g_n' + a_n g_{n+1}' = \lambda' g_n. \tag{29}$$

Επισης

$$a_{n-1}f_{n-1} + (b_n - \lambda)f_n + a_n f_{n+1} = 0. \tag{30}$$

Πολλαπλασιαζοντας τις παραπανω με f_n και g_n' αντιστοιχα και αφαιρωντας εχουμε

$$\lambda' f_n g_n = a_{n-1}[g_{n-1}'f_n - g_n' f_{n-1}] - a_n[g_n' f_{n+1} - g_{n+1}' f_n]. \tag{31}$$

Αθροιζοντας εχουμε

$$\lambda'(z_j)\Sigma_{-\infty}^{n} g_n'(z_j)f_n'(z_j) = -a_n[g_n' f_{n+1} - g_{n+1}' f_n] \tag{32}$$

και

$$\lambda'(z_j)\Sigma_{n+1}^{\infty} g_n'(z_j)f_n'(z_j) = a_n[f_n' g_{n+1} - f_{n+1}' g_n]. \tag{33}$$

Αθροιζοντας και χρησιμοποιωντας την (18) εχουμε

$$\lambda'(z_j)\Sigma_{-\infty}^{\infty}g_n'(z_j)f_n'(z_j) = -\frac{z_j - z_j^{-1}}{2}\alpha'(z_j). \tag{34}$$

Μετα απο απλους υπολογισμους και χρησιμοποιωντας την (24) καταληγουμε

$$\alpha'(z_j) = (-1/z_j)\Sigma_{-\infty}^{\infty}g_n'(z_j)f_n'(z_j) = \frac{-1}{z_j\mu^2\beta(z_j)}\Sigma_{-\infty}^{\infty}|\zeta_n(z_j)|^2. \tag{35}$$

Απο τις (25) και (26) εχουμε

$$\alpha'(z_j) = -\frac{\beta(z_j)}{z_j c_j^2}. \quad OED \tag{36}$$

5. Αντιστροφο προβλημα σκεδασης και η εξισωση Gelfand-Marchenko.

Απο την (14), πολλαπλασιαζοντας με z^{m-1}, διαιρωντας με $\alpha(z)$, και ολοκληρωνοντας πανω στον μοναδιαιο κυκλο C (που προφανως περικλειει το 0 και τα z_j),

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g_n(z)}{\alpha(z)}z^{m-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (f_n(z^{-1}) + R(z)f_n(z))z^{m-1}dz. \tag{37}$$

Απο την αναπαρασταση (σε χρονο 0)

$$f_n(z) = \Sigma_{m=n}^{\infty}K(n,m)z^m, \tag{38}$$

και το θεωρημα υπολοιπων του Cauchy εχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f_n(z^{-1})z^{m-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\Sigma_{n'=n}^{\infty}K(n,n')\oint_C z^{m-n'-1} = K(n,m), \quad m \geq n. \tag{39}$$

Παρατηρωντας οτι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C R(z)f_n(z)z^{m-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\Sigma_{n'=n}^{\infty}K(n,n')\oint_C R(z)z^{m+n'-1}dz \tag{40}$$

καταληγουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C (f_n(z^{-1}) + R(z)f_n(z))z^{m-1}dz = K(n,m) + \Sigma_{n'=n}^{\infty}K(n,n')F_c(n'+m), \tag{41}$$

οπου η

$$F_c(m) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C R(z)z^{m-1}dz \tag{42}$$

μπορει να θεωρηθει ως η συνεισφορα του συνεχους φασματος.

Απο την αλλη μερια το αριστερο μερος της (37) γραφεται ως

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1} dz = I_a + I_0, \tag{43}$$

οπου

$$I_a = -\Sigma_j g_n(z_j) z_j^{m-1} \frac{z_j c_j^2}{\beta(z_j)} = -\Sigma_j c_j \Sigma_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z_j^{n'+m} \tag{44}$$

ειναι η συνεισφορα του διακριτου φασματος και I_0 ειναι η συνεισφορα του πολου στο 0.

ΑΣΚΗΣΗ 10.

$$I_0 = \frac{\delta_{nm}}{K(n,n)}. \tag{45}$$

Γραφοντας

$$F_d(m) = \Sigma_j c_j^2 z_j^m, \tag{46}$$

εχουμε οτι

$$I_a = \Sigma_{n'=n}^{\infty} K(n, n') F_d(n' + m), \quad m \geq n, \tag{47}$$

συνεπως, απο τις (41), (43), (45), (47),

$$\frac{\delta_{nm}}{K(n,n)} = K(n, m) + \Sigma_{n'=n}^{\infty} K(n, n') F(n' + m), \quad m \geq n, \tag{48}$$

με

$$F = F_d + F_c = \Sigma_j c_j^2 z_j^m + \frac{1}{2\pi i}\oint_C R(z) z^{m-1} dz. \tag{49}$$

Οριζοντας

$$\kappa(n, m) = \frac{K(n, m)}{K(n, n)}, \quad m > n, \tag{50}$$

εχουμε

$$\kappa(n, m) + F(n + m) + \Sigma_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') F(n' + m), \quad m > n, \tag{51}$$

ενω, απο την (48) με $m = n$, εχουμε

$$K(n, n)^{-2} = 1 + F(2n) + \Sigma_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') F(n' + n). \tag{52}$$

Η εξισωση (51) ειναι διακριτη μορφη της περιφημης εξισωσης Gelfand-Levitan. Εχοντας λυσει την (51), απο την (52) και την (50) παιρνουμε τον πυρηνα $K(n, m)$. Απο την (13) παιρνουμε τοτε τα a_n, b_n.

Με αλλα λογια, δεδομενων των δεδομενων σκεδασης $R(z), \lambda_j, c_j$ ανακατασκευασαμε το δυναμικο a_n, b_n. Αρα, κατα καποιον τροπο, επιλυσαμε το προβλημα αντιστροφης σκεδασης αναγοντας το στην λυση μιας γραμμικης ολοκληρωτικης εξισωσης τυπου Fredholm.

6. Το προβλημα σκεδασης με πιο γενικα δεδομενα. Γενικος χαρακτηρισμος των δεδομενων σκεδασης.

ΑΣΚΗΣΗ 11. Απο τον τυπο Poisson-Jensen της μιγαδικης αναλυσης δειξτε οτι

$$T(z) = \Pi_{j=1}^{N} \frac{|z_j|(z - z_j^{-1})}{z - z_j} exp[\frac{1}{4\pi i} \int_C ln(1 - |R(s)|^2) \frac{s+z}{s(s-z)} ds. \qquad (53)$$

Αρα απο τον R και τις ιδιοτιμες μπορουμε να ανακατασκευασουμε τον T.

Το προβλημα σκεδασης λυνεται με γενικοτερα δεδομενα απο οτι εχουμε δεχθει ως τωρα. Συγκεκριμενα, μπορουμε να δεχθουμε δεδομενα a_n, b_n τετοια ωστε

$$\Sigma_n |n| (|1 - 2a_n| + |b_n|) < \infty. \qquad (54)$$

Για την αποδειξη απαιτουνται ορισμενες λεπτες εκτιμησεις του $K(n, m)$ (που οριζεται και ως συντελεστης Fourier της f_n). Οι αντιστοιχες συνθηκες για τα δεδομενα σκεδασης

$$R(z), \lambda_j, c_j \qquad (55)$$

ειναι ([Te], p.179):

ΘΕΩΡΗΜΑ III.8. Για δεδομενα τ.ω.

$$\Sigma_n |n| (|1 - 2a_n| + |b_n|) < \infty. \qquad (56)$$

εχουμε

(α) ο R ειναι συνεχης στον μοναδιαιο κυκλο εκτος ενδεχομενα απο τα σημεια -1 και 1,

$$R^*(z) = R(z^*), \qquad (57)$$

υπαρχει θετικη σταθερα C τ.ω.

$$C^2 |1 - k^2|^2 \leq |1 - R(k)|^2 \qquad (58)$$

και οι συντελεστες Fourier F_j του $R(k^{-1})$ ικανοποιουν την

$$\Sigma_{j=1}^{\infty} |F_j - F_{j+2}| < \infty, \qquad (59)$$

οπου z^* ειναι ο μιγαδικος συζυγης του z,

(β) οι ριζες του $\alpha = \frac{1}{T}$ (οπως οριζεται απο την (53)) ειναι μονες και οι σταθερες κανονικοποιησης c_j ειναι θετικες.

Αντιστροφα, δεδομενα που ικανοποιουν τις (α), (β) οδηγουν μονοσημαντα σε αρχικα δεδομενα που ικανοποιουν την (54) μεσω της εξισωσης Gelfand-Levitan που ειναι επιλυσιμη. Για την αποδειξη βλεπε [Te], p.181.

7. Λυση της εξισωσης Gelfand-Marchenko ως σειρα.

Η λυση της εξισωσης Gelfand-Levitan μπορει να γραφτει ως σειρα. Οριζοντας τον τελεστη

$$X : l^2 \to l^2, \quad X_m(f) = \Sigma_n F(n+m) f_n \tag{60}$$

και επεκτεινοντας τον ορισμο των κ θετοντας $\kappa(m,n) = 0, \quad m < n$, η εξισωση Gelfand-Levitan γραφεται

$$(I + X)\kappa = F. \tag{61}$$

Εχοντας εξασφαλισει τις καταλληλες εκτιμησεις για τον X καταληγουμε οτι η σειρα

$$\kappa = (I - X + X^2 + ...)F \tag{62}$$

συγκλινει και λυνει την εξισωση Gelfand-Levitan.

Θα δουμε αργοτερα οτι στην περιπτωση που θεσουμε $R(z) = 0$, η σειρα αναγεται σε αθροισμα πεπερασμενου αριθμου ορων, μπορει δε να γραφτει ως οριζουσα. Στην γενικη περιπτωση $R(z) \neq 0$ η σειρα επισης γραφεται ως οριζουσα, αλλα απειρης διαστασης, τυπου Fredholm (ο λεγομενος τυπος του Dyson).

IV. ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ IV.1.. Οταν τα a_n, b_n μεταβαλλονται κατα Toda τοτε

$$\alpha(z,t) = \alpha(z,0), \quad \beta(z,t) = \beta(z,0)exp[(z^{-1}-z)t], \quad c_j^{\pm} = c_j(0)exp[(z_j^{-1}-z_j)t/2]. \tag{1}$$

Απο το προηγουμενο κεφαλαιο βλεπουμε οτι τα δεδομενα σκεδασης διατηρουν τις ιδιοτητες της παραγραφου 6. Αρα μπορουμε παντα να λυσουμε το προβλημα αντιστροφης σκεδασης σε οποιοδηποτε χρονο t. Απο το αμφιμονοσημαντο του μετασχηματισμου σκεδασης συμπεραινουμε οτι εχουμε μοναδικη λυση της αλυσου Toda.

Η λυση αυτη γραφεται ως σειρα, συμφωνα με την παραγραφο 7 του προηγουμενου κεφαλαιου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρουμε την συναρτηση σκεδασης

$$S(n,z) = \frac{g_n(z)}{\alpha(z)} = f_n(z^{-1}) + R(z)f_n(z) \tag{2}$$

και αναχαλουμε οτι σε χρονο t και μεγαλα n εχουμε

$$S(n,z) = (z^{-n} + +R(z,t)z^n)e^{i\omega t}, \qquad i\omega = (z - z^{-1})/2. \tag{3}$$

Καθοτι η $S(n,z)$ ειναι λυση της $LS = \lambda S$ εχουμε $\frac{dS}{dt} = BS$ (Βλεπε αποδειξη θεωρηματος II.1). Αρα

$$\dot{S}(n,z) = a_{n-1}S(n-1,z) - a_nS(n+1,z) \tag{4}$$

Ασυμπτωτικα εχουμε, για n μεγαλα,

$$\dot{S}(n,z) = \frac{1}{2}(z^{-n+1}-z^{-n-1})+R(z,t)(z^{n-1}-z^{n+1})e^{i\omega t} = \frac{1}{2}(z-z^{-1})(z^{-n}+R(z,t)z^n)e^{i\omega t}. \tag{5}$$

Παραγωγιζοντας την (3) και συγκρινοντας με την (5) βρισκουμε

$$\dot{R}(z,t) = [\frac{1}{2}(z^{-1}-z) - i\omega]R(z,t) = (z^{-1}-z)R(z,t). \tag{6}$$

Λυνοντας την ΣΔΕ καταληγουμε

$$R(z,t) = R(z,0)exp[(z^{-1}-z)t]. \tag{7}$$

Παρομοιος υπολογισμος για την παρασταση $\alpha(z,t)S(n,z,t)$ οδηγει στην

$$\alpha(z,t) = \alpha(z,0) \tag{8}$$

και συνεπως

$$\beta(z,t) = \beta(z,0)exp[(z^{-1} - z)t]. \tag{9}$$

Εφόσον οι ιδιοτιμες του τελεστη L ειναι συναρτησεις των ριζων του α επεται οτι διατηρουνται, και αποδεικνυει το θεωρημα ΙΙΙ.1. Το συνεχες φασμα ειναι παντα $[-1,1]$ αρα ολο το φασμα διατηρειται.

Τελος εχουμε τα εξης:

ΑΣΚΗΣΗ 12 Απο την

$$\dot{\zeta}_n(z_j,t) = a_{n-1}\zeta_{n-1}(z_j,t) - a_n\zeta_{n+1}(z_j,t) \tag{10}$$

καταληξατε οτι

$$c_j(t) = c_j(0)exp[\frac{1}{2}(z^{-1} - z)t]. \tag{11}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Εχουμε πλεον ολα τα κομματια της μεθοδου αντιστροφης σκεδασης για την λυση της αλυσου Toda.

(α) Δεδομενων a_n, b_n σε χρονο 0 εχουμε κατασκευασει τα δεδομενα σκεδασης R, λ_j, c_j κλπ.

(β) Ειδαμε οτι αν τα a_n, b_n ακολουθουν τη ροη αλυσου Toda, τοτε τα δεδομενα σκεδασης ακολουθουν μια πολυ απλη εκθετικη εξελιξη.

(γ) Εχοντας τα δεδομενα σκεδασης σε χρονο t ειδαμε οτι μπορουμε να ανακατασκευασουμε τα αντιστοιχα $a_n(t), b_n(t)$ λυνοντας την εξισωση Gelfand-Levitan.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1. Η ομοιοτητα με την μεθοδο του μετασχηματισμου Fourier για ορισμενα προβληματα αρχικων δεδομενων για γραμμικες ΜΔΕ ειναι προφανης.

2. Οπως και για τον μετασχηματισμο Fourier υπαρχουν θεωρηματα τυπου Paley-Wiener για τον συντελεστη ανακλασης. Βλεπε [Z]. Για παραδειγμα:

ΘΕΩΡΗΜΑ IV.2.. Η απεικονιση που οριζεται απο τον τελεστη ανακλασης R για την μη γραμμικη εξισωση Schrödinger ειναι ισομορφισμος αναμεσα στους χωρους Sobolev $H^{k,j} = \{f : f, \partial_x^k f, x^j f \in L^2(R)\}$ και $H^{j,k} \cap \{f : ||f||_\infty < 1\}$ με νορμα $||f|| = (||f||_2^2 + ||\partial_x^k||_2^2 + ||x^j f||_2^2)^{1/2}$ για καθε $k \geq 0, j \geq 1$.

Επισης ο μετασχηματισμος Fourier συναρτησης με συμπαγη φορεα ειναι αναλυτικος σε ολο το μιγαδικο επιπεδο. Το ιδιο συμβαινει και για τον συντελεστη ανακλασης οπως ειδαμε τουλαχιστον στην πεπριπτωση Toda.

3. Το γραμμικο οριο του συντελεστη ανακλασης στην περιπτωση μη υπαρξης ιδιοτιμων ειναι ο μετασχηματισμος Fourier! Επισης η υπαρξη ιδιοτιμων ειναι καθαρα μη γραμμικο φαινομενο. Για την μη γραμμικη εξισωση Schrödinger, π.χ., οταν η νορμα L_1 των αρχικων δεδομενων ειναι μικρη δεν υπαρχουν ιδιοτιμες. Πιο συγκεκριμενα εχουμε

ΘΕΩΡΗΜΑ IV.3.. Στην περιπτωση αφεστιασης η μη γραμμικη εξισωση Schrödinger δεν εχει ποτε σολιτονια αν τα αρχικα δεδομενα ειναι τετοια ωστε $\int |q(x,0)|dx < +\infty$. Με αλλα λογια ο αντιστοιχος τελεστης Lax δεν εχει ιδιοτιμες. Αντιθετα στην περιπτωση εστιασης η μη γραμμικη εξισωση Schrödinger δεν εχει σολιτονια αν τα αρχικα δεδομενα ειναι αρκετα μικρα, δηλ. τετοια ωστε $\int |q(x,0)|dx < ln(2+3^{1/2}) = 1,32......$

Για την αποδειξη του δευτερου ισχυρισμου βλεπε [NMPZ], σελ. 72-73.

Επισης

ΘΕΩΡΗΜΑ IV.4.. Αν $r(\xi)$ ο συντελεστης ανακλασης που αντιστοιχει στα αρχικα δεδομενα $q(x,0)$ με $\int |q(x,0)|dx < +\infty$, και $r^\epsilon(\xi)$ ο συντελεστης ανακλασης που αντιστοιχει στα αρχικα δεδομενα $\epsilon q(x,0)$ τοτε

$$||r^\epsilon(\xi) - \frac{i}{2}\int_R \epsilon q(x,0) exp(-ik\xi)dx|| = O(\epsilon^2), \tag{12}$$

ομοιομορφα στο x οταν $\epsilon \to 0$.

Στο κεφαλαιο 7 θα δειξουμε οτι και ο αντιστροφος τελεστης σκεδασης τεινει στον αντιστροφο μετασχηματισμο Fourier στο γραμμικο οριο.

V. ΛΥΣΕΙΣ ΣΟΛΙΤΟΝΙΩΝ. ΔΙΑΤΗΡΗΤΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΣΟΛΙΤΟΝΙΩΝ

Θετοντας $R = 0$ στην εξισωση Gelfand-Levitan θα βρουμε λυσεις σολιτονιων της αλυσου Toda. Πιο συγκεκριμενα, θεωρωντας αρχικα δεδομενα στα οποια αντιστοιχει μια ιδιοτιμη (του τελεστη Lax), θα βρουμε την λυση ενος σολιτονιου. Πιο γενικα, θεωρωντας αρχικα δεδομενα στα οποια αντιστοιχουν N ιδιοτιμες (του τελεστη Lax), θα βρουμε μια λυση που περιγραφει την αλληλεπιδραση N σολιτονιων.

ΘΕΩΡΗΜΑ V.1. Εστω λυση της αλυσου Toda με (αρχικα) δεδομενα σκεδασης $R = 0$, $z_1 = \pm e^{-\gamma}, c_1 > 0$. (Επειδη το φασμα του L ειναι πραγματικο και οι ιδιοτιμες δεν μπορουν να ειναι $0, \infty$, ο z_1 μπορει να γραφτει ως $z_1 = \pm e^{-\gamma}, \quad \gamma > 0$.) Τοτε

$$2a_n^2(t) - 1 = \beta^2 sech^2(\gamma n - \beta t + \delta_0), \tag{1}$$

οπου $\beta = \pm sinh\gamma$ και $e^{\delta_0} = c_1(1 - z_1^2)^{-1/2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθετοντας $\kappa(n, m) = c_1 A^{(n)} z_1^m$ μπορουμε να λυσουμε την Gelfand-Levitan ευκολα. Χρησιμοποιωντας τις (13) και (52) του κεφ.3 καταληγουμε στην (1).

ΘΕΩΡΗΜΑ V.2. Εστω λυση της αλυσου Toda με (αρχικα) δεδομενα σκεδασης $R = 0$, $z_j = \pm e^{-\gamma_j}, c_j > 0, \quad j = 1, ..., N$. Τοτε

$$2a_n^2(t) - 1 = \frac{detB(n)detB(n-2)}{(detB(n-1))^2}. \tag{2}$$

οπου ο πινακας $B(n)$ οριζεται ως $B(n)_{ij} = \delta_{ij} + c_i c_j \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αυτη τη φορα υποθετουμε $\kappa(n, m) = \Sigma_j c_j A_j^{(n)} z_j^m$ και αντικαθιστουμε στην Gelfand-Levitan. Τα υπολοιπα ειναι αλγεβρα. Βλεπε [T] σελ.62-64 για λεπτομερειες.

ΑΣΚΗΣΗ 13. Αποδειξτε οτι οταν $t \to \pm\infty$ η παραπανω λυση ειναι ασυμπτωτικα ισοδυναμη με αθροισμα σολιτονιων

$$\Sigma_j \beta_j^2 sech_j^2(\gamma_j n - \beta_j t + \delta_j^{\pm}), \tag{3}$$

οπου $\delta_j^{\pm}$ πραγματικες σταθερες που εξαρτωνται απο τα $z_j, c_j, \quad j = 1, ..., N$.

Με αλλα λογια η παραπανω λυση περιγραφει την αλληλεπιδραση N σολιτονιων!

Ακομα πιο εντυπωσιακο ειναι το γεγονος οτι αν αρχισουμε με οποιαδηποτε αρχικα δεδομενα, τοτε η λυση της αλυσου Toda και παλι αναγεται ασυμπτωτικα σε αθροισμα σολιτονιων οταν $t \to \pm\infty$. Πιο συγκεκριμενα εχουμε

$$||2a_n^2(t) - 1 - \Sigma_j \beta_j^2 sech_j^2(\gamma_j n - \beta_j t + \delta_j)||_\infty \to 0, \tag{4}$$

οταν $t \to \pm\infty$, οπου τα z_j, c_j οριζονται ομοιως και οι δ_j πραγματικες σταθερες που εξαρτωνται απο τα $z_j, c_j, j = 1, ..., N$ και την συναρτηση $R(z)$.

ΔΙΑΤΗΡΗΤΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ V.2. Εστω L_0 ο τριδιαγωνιος τελεστης Lax που αντιστοιχει στα δεδομενα $a_n^0 = 1/2, b_n^0 = 0$, για καθε n. Τοτε οι ποσοτητες $tr(L^p - L_0^p)$ ειναι σταθερες οταν τα a_n, b_n εξελισσονται κατα Toda. Επισης, οταν $\lambda \in C, |\lambda| \to \infty$,

$$-\Sigma_{p=1}^{\infty} \frac{tr(L^p - L_0^p)}{p\lambda^p} = ln \frac{\alpha(z)}{\alpha(z=0)}, \tag{5}$$

οπου $2\lambda = z + z^{-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ανακαλουμε οτι ο L ειναι φραγμενος τελεστης στον l^2 καθοτι τα a_n, b_n ειναι φραγμενα απο σταθερες ανεξαρτητες του n. Κατασκευαζουμε τον αναλυοντα τελεστη του L στο λ, δηλαδη τον $R_\lambda(L) = (L - \lambda I)^{-1}$. Τοτε ευκολα επαληθευεται οτι

$$R_\lambda(L) = \frac{f_n g_m}{W}, \quad n \leq m, \tag{6}$$

και

$$R_\lambda(L) = \frac{f_m g_n}{W}, \quad n > m, \tag{7}$$

οπου οι ιδιοσυναρτησεις f_n, g_n και W η διακριτη Βρονσκιανη w ειναι οπως οριστηκαν στο Κεφαλαιο 3. Παρατηρουμε οτι ο $R_\lambda(L)$ οριζεται για καθε $\lambda \in C$ εκτος απο τους απλους πολους στα z_j (ριζες του α). Ευκολα επαληθευεται οτι ο $R_\lambda(L)$ ειναι φραγμενος οταν το λ δεν ανηκει στο φασμα του L.

Τελος επαληθευουμε οτι $tr(R_\lambda(L) - R_\lambda(L_0)) = \frac{d}{d\lambda} log\alpha(z)$. Αναπτυσσοντας σε σειρες Neumann και ολοκληρωνοντας ως προς λ καταληγουμε στο επιθυμητο αποτελεσμα. Επισης επαληθευεται ευκολα οτι τα $tr(L^p - L_0^p)$ δεν απειριζονται, λογω της συνθηκης

$$\Sigma_n |n| (|1 - 2a_n| + |b_n|) < \infty. \tag{8}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. ΦΑΣΜΑ ΤΕΛΕΣΤΗ.

Στο Κεφαλαιο 3 ορισαμε το φασμα του L ως ενωση ιδιοτιμων και γενικευμενων ιδιοτιμων. Τετοιος ορισμος δεν ειναι επαρκης στην περιπτωση πιο γενικων τελεστων, π.χ. αν τα a_n, b_n ειναι μιγαδικα οποτε ο L δεν ειναι αυτοσυζυγης.

Ο γενικος ορισμος του φασματος φραγμενου τελεστη σε χωρο Hilbert οριζει οτι ο μιγαδικος λ δεν ανηκει στο φασμα του L αν ο αναλυων $R_\lambda(L) = (L - \lambda I)^{-1}$ δεν ειναι φραγμενος. Ειδαμε λοιπον στην παραπανω οτι οι δυο ορισμοι δινουν ταυτοσημα αποτελεσματα. Ο γενικος ορισμος ειναι μεν πιο φυσικος διοτι δεν αναφερεται σε χωρους μεγαλυτερους απο τον εν λογω χωρο Hilbert, αλλα ειναι και πιο δυσχρηστος.

VI. A RIEMANN-HILBERT FACTORIZATION PROBLEM FOR THE TODA LATTICE

We begin by recalling the analysis of the scattering and inverse scattering for the discrete Lax operator L (the analogue of the Schrödinger operator in the KdV case). It is defined on the Hilbert space l^2 as follows:

$$(Lf)_n = a_{n-1}f_{n-1} + b_n f_n + a_n f_{n+1}, \tag{VI.1}$$

where b_n and $a_n - 1/2$ are decaying fast as $n \to \infty$.

It is easy to see that the continuous spectrum of L consists of the band $[-1, 1]$ with multiplicity 2. In this chapter, we will assume for simplicity that the discrete spectrum is empty. (This means that no solitons are allowed.)

Let us focus on the time $t = 0$ for the moment. Recall the definition of the Jost functions as follows:

$$\begin{aligned} Lf_n(z) &= \lambda f_n(z) \quad ; \phi(n,z) \ \sim z^n, \qquad \text{as } n \to \infty, \\ Lg_n(z) &= \lambda g_n(z) \quad ; \psi(n,z) \ \sim z^n, \qquad \text{as } n \to -\infty. \end{aligned} \tag{VI.2}$$

Note that in the more general initial data case we cannot have equality for large n but only asymptotic equivalence, Here the spectral variable z is defined by

$$2\lambda = z + 1/z.$$

The band [-1,1] in the λ-plane with multiplicity 2 is thus mapped to the unit circle in the z-plane with multiplicity 1.

Next, let $A_n^+ = \Pi_{k=n}^{\infty}(2a_k)^{-1}$, $A_n^- = \Pi_{k=-\infty}^{n-1}(2a_k)^{-1}$ and $A = A_n^+ A_n^-$. Then we have the following analyticity results (see e.g.[Te]). We can write

$$\begin{aligned} f_n(z) &= A_n^+ z^n v_n(z) \\ g_n(z^{-1}) &= A_n^- z^{-n} u_n(z) \end{aligned} \tag{VI.3}$$

where $v_n(z) = 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty} v_{n,k} z^k$ and $u_n(z) = 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty} u_{n,k} z^k$, both series converging uniformly in $|z| \leq 1$. Futhermore from (VI.2) we can derive the following recursive relation

$$\begin{aligned} v_n(z) = 1 &- \Sigma_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{1-z^2}(2b_j z v_j(z) + (4a_n^2 - 1)z^2 v_{j+1}(z)) \\ &+ \Sigma_{j=n+1}^{\infty} \frac{z^{2(j-n)}}{1-z^2}(2b_j z v_j(z) + (4a_n^2 - 1)z^2 v_{j+1}(z)). \end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Now, as $n \to -\infty$, we get

$$(VI.4)\quad \begin{aligned} v_n(z) &\sim 1 - \Sigma_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-z^2}(2b_j z v_j(z) + (4a_n^2 - 1)z^2 v_{j+1}(z)) \\ &+ z^{-2n}\Sigma_{j=-\infty}^{\infty} \frac{z^{2j}}{1-z^2}(2b_j z v_j(z) + (4a_n^2 - 1)z^2 v_{j+1}(z)). \end{aligned}$$

On the other hand, when $z \neq \pm 1$, $f_n(z), g_n(z)$ and $f_n(z^{-1}), g_n(z^{-1})$ are two sets of independent solutions of the second order difference equation $L\chi = \lambda\chi$. Hence there exist $\alpha(z), \beta(z), \bar{\alpha}(z), \bar{\beta}(z)$ such that

(VI.5)

$$f_n(z) = \bar{\alpha}(z) g_n(z^{-1}) + \bar{\beta}(z) g_n(z), g_n(z^{-1}) = \alpha(z^{-1}) f_n(z) + \beta(z^{-1}) f_n(z^{-1}) z \in C, z \neq \pm 1.$$

Making use of (VI.3) and (VI.5) we get

$$v_n(z) = \frac{A_n^-}{A_n^+}\alpha(z) z^{-2n} u_n(z) + \frac{A_n^-}{A_n^+}\alpha(z) u_n(z^{-1}).$$

As $n \to -\infty, A_n^- \to 1, A_n^+ \to A, u_n(z) \to 1, u_n(z^{-1}) \to 1$. Hence,

$$Av_n(z) \sim \alpha(z) z^{-2n} + \alpha(z).$$

Using (VI.4) we get

$$\begin{aligned} \frac{\beta(z)}{A} &= -\Sigma_{j=-\infty}^{\infty} \frac{z^{2j}}{1-z^2}(2b_j z v_j(z) + (4a_n^2 - 1)z^2 v_{j+1}(z)), \\ \frac{\alpha(z)}{A} &= -\Sigma_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-z^2}(2b_j z v_j(z) + (4a_n^2 - 1)z^2 v_{j+1}(z)). \end{aligned}$$

Define $T(z) = \frac{1}{\alpha(z)}$ and $R(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$. Then,

$$\frac{1}{AT(z)} = 1 - \Sigma_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-z^2}(2b_j z v_j(z) + (4a_n^2 - 1)z^2 v_{j+1}(z)),$$

for $|z| \leq 1$. Thus, $T(z)$ is defined not only on $|z| = 1$, but is also extended meromorphically to $|z| < 1$, and in fact $T(0) = 1/A$. Our assumption that no bound states exist is in fact equivalent to the fact that $T(z)$ is indeed holomorphic in $|z| < 1$.

We note here that in general, the reflection coefficient $R(z)$ cannot be extended meromorphically unless the decay of b_n and $a_n - 1/2$ is exponential.

Next define

$$(VI.6)\quad \begin{aligned} U_1(n,z) &= \psi(n,z), \\ U_2(n,z) &= T(z)\phi(n,z). \end{aligned}$$

Since $\phi(n,z) \sim A_n^+ z^n$ and $\psi(n,z) \sim A_n^- z^{-n}$ near $z = 0$, we have

$$(VI.7)\quad \begin{aligned} U_1(n,z) &\sim A_n^- z^{-n}, \\ U_2(n,z) &\sim (A_n^-)^{-1} z^n, \\ &\text{near } z = 0. \end{aligned}$$

The following relation is easy to prove:

$$\alpha^*(z) = \alpha(z^{-1}), \ |R(z)|^2 + |T(z)|^2 = 1.$$

Hence $\alpha(z)\alpha(z^{-1}) = |\alpha(z)|^2 = \frac{1}{|T(z)|^2} = \frac{1}{1-|R(z)|^2}$.

We can now rewrite (VI.5) as

$$U_1(n,z) = -\beta(z)\alpha(z)U_2(n,z) + |\alpha(z)|^2 U_2(n,z^{-1})$$
$$U_2(n,z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} U_1(n,z) + U_1(n,z^{-1}).$$

By their definitions, and by the properties of the functions f and g (see discussion after VI.3) we can extend U_1 and U_2 inside, but also outside the unit circle (extending $U_1(n,z^{-1})$ and $U_2(n,z^{-1})$). On the unit circle we denote the inner normal limit of U_1 by U_1^+ and the normal limit from outside by U_1^- (and similarly with U_2) . We finally get

$$\begin{pmatrix} U_2^+ & U_1^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^- & U_2^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-|R(z)|^2 & -R^*(z) \\ R(z) & 1 \end{pmatrix}$$

with asymptotics

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_n^- z^{-n} & (A_n^-)^{-1} z^n \end{pmatrix}$$

at $z = 0$ and

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_n^- z^{n} & (A_n^-)^{-1} z^{-n} \end{pmatrix}$$

at $z = \infty$.

Defining

$$y_1(n,z) = \frac{U_2(n,z)}{z^n} \quad \text{when } |z| < 1,$$
$$y_1(n,z) = \frac{U_1(n,z)}{z^n} \quad \text{when } |z| > 1,$$
$$y_2(n,z) = \frac{U_1(n,z)}{z^{-n}} \quad \text{when } |z| < 1,$$
$$y_2(n,z) = \frac{U_2(n,z)}{z^{-n}} \quad \text{when } |z| > 1,$$

and letting $Y = (y_1, y_2)$, we end up with the Riemann-Hilbert matrix factorization problem:

(VI.8)
$$Y_+ = Y_- \begin{pmatrix} 1-|R(z)|^2 & -R^*(z)z^{2n} \\ R(z)z^{-2n} & 1 \end{pmatrix}$$

with asymptotics at ∞ :

(VI.9)
$$Y(\infty) = \begin{pmatrix} (A_n^-)^{-1} & A_n^- \end{pmatrix}$$

Futhermore,

$$Y(0) = \begin{pmatrix} A_n^- & (A_n^-)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Note that the solution of (VI.8)-(VI.9) is unique as follows easily by Liouville's theorem.

During the Toda flow the evolution of the reflection coefficient with time is given by

$$R(z) = R(z,t) = R(z,0)exp(t(z - z^{-1})).$$

So, at time t, relation (VI.8) becomes

$$\text{(VI.10)}\quad Y_+(z,t) = Y_-(z,t)\begin{pmatrix} 1 - |R(z,0)|^2 & -R^*(z,0)z^{2n}e^{-t(z-z^{-1})} \\ R(z,t)z^{-2n}e^{t(z-z^{-1})} & 1 \end{pmatrix}.$$

As the Riemann-Hilbert problem for Y has an inconvenient condition at infinity, we will reduce it to the one as follows: let Q(z) be analytic in $\mathbb{C} - C$, with normal limits Q_+ and Q_- on C, satisfying

$$\text{(VI.11)}\qquad \begin{aligned} Q_+ &= Q_- u_{n,t}, \\ Q(\infty) &= I, \end{aligned}$$

where $u_{n,t}$ is the 2x2 matrix appearing in the right hand side of (VI.10).

THEOREM VI.1. Let

$$Q(0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

say, and

$$\text{(VI.12)}\qquad Y = \begin{pmatrix} (\frac{1+\beta}{\alpha})^{1/2} & (\frac{\alpha}{1+\beta})^{1/2} \end{pmatrix} Q.$$

Then V solves (VI.8)-(VI.9), up to a constant scalar multiple.

PROOF: Clearly (VI.8) holds. On the other hand we have the following lemmas.

LEMMA 1. $Q(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (Q(0))^{-1} Q(z^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PROOF: We observe that

$$u(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (u(z^{-1}))^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thus,

$$Q_+(z) = Q_-(z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (u(z^{-1}))^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

hence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q_+(z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q_-(z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (u(z^{-1}))^{-1}.$$

Applying this to z^{-1},

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q_+(z^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q_-(z^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Defining

$$H(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q(z^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

we have

$$H_+(z) = H_-(z)u(z)$$

and thus (by Liouville's theorem)

$$H(z) = F^{-1}Q(z)$$

for some constant invertible matrix F. Thus,

$$Q(z) = F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q(z^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{VI.13}$$

Letting $z \to \infty$, we get

$$I = F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

which gives F. The lemma now follows from (VI.13).

It follows from Lemma 1 that for Y defined by (VI.12) we have

$$Y(z) = Y(z^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{VI.14}$$

LEMMA 2. If Y satisfies (VI.8) and (VI.14) then Y also satisfies (VI.9), up to a scalar multiple.

PROOF: We show that there is only one solution of (VI.8) satisfying the symmetry condition (VI.14). In fact, suppose there is a second one, say X. Consider the matrix

$$Z = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}.$$

Then, $Z_+ = Z_- u$, hence $detZ_+ = detZ_-\ detu = detZ_-$, and by Liouville's theorem, $detZ$ is constant, say c. On the other hand, by assumption,

$$M(z) = M(z^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and, taking determinants,

$$c = c(-1),$$

hence $c = 0$, thus X and Y are dependent. This proves Lemma 2, and the theorem also follows.

LEMMA 3. If

$$Q(0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

then $\beta = -\gamma$ and $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

PROOF: By a Liouville's-theorem-argument as in Lemma 2, it follows that $detQ$ is constant, and in fact 1, from which the second assertion of Lemma 3 follows. The first assertion follows immediately, by setting $z = 0$ in Lemma 1.

A direct consequence of the Theorem above together with Lemma 3 is that the solution of (VI.8)-(VI.9) satisfies

$$Y(0) = k \left(\quad (\tfrac{\alpha}{1+\beta})^{1/2} \quad (\tfrac{1+\beta}{\alpha})^{1/2} \right),$$

for some constant k. Comparing with (VI.9) we get $k = 1$ and

$$A_n^- = (\frac{\alpha}{1+\beta})^{1/2} \tag{VI.15}$$

from which a_n can be recovered by dividing.

$$2a_n = \frac{A_{n+1}^-}{A_n^-}. \tag{VI.16}$$

Thus we have reduced the inverse scattering problem (and hence the Cauchy problem for the Toda lattice) to the Riemann-Hilbert problem (VI.11) and in particular to finding the first row of the solution $Q(z)$ at $z = 0$.

VII. RIEMANN-HILBERT FACTORIZATION, SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS AND THE METHOD OF STATIONARY PHASE

1. THE RIEMANN-HILBERT PROBLEM FOR NLS

The solution of an integrable system via the inverse scattering transform can always be reduced to the solution of a Riemann-Hilbert factorization problem. In particular, the asymptotic analysis of the given equation is thus reduced to the asymptotic analysis of a Riemann-Hilbert problem.

Consider, for example, the nonlinear Schrödinger equation (defocusing case).

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} - |u|^2 u = 0. \tag{1}$$

Suppose we want to solve it under some initial data $u_0(x)$ that, for simplicity, are considered to belong to the Schwartz class.

Let $r(z)$ be the reflection coefficient corrsponding to u_0. It is a fact of direct scattering theory that r is also Schwartz, and that $|r(z)| < 1,\ for\ all\ z \in \mathbb{R}$. Also, there are no eigenvalues for the Lax (or Zakharov-Shabat or Dirac) operator. The continuous spectrum is the whole real line.

Let Q solve

$$Q_+(z) = Q_-(z) \begin{pmatrix} 1 - |r(z)|^2 & -r^*(z)e^{-2izx-4iz^2t} \\ r(z)e^{2izx+4iz^2t} & 1 \end{pmatrix},\ Imz = 0, \tag{2}$$

Note that the jump matrix has determinant 1. Also

$$lim_{z\to\infty} Q(z) = I. \tag{3}$$

This is a Riemann-Hilbert factorization problem: Q is a matrix function, analytic in the complement of the real line, satisfying the jump condition and the asymptotics above.

The solution of the Riemann-Hilbert problem enables us to recover $u(x,t)$. Indeed one can prove

$$u(x,t) = -2lim_{z\to\infty} zQ_{21}. \tag{4}$$

Thus, the initial value problem for NLS is reduced to the above Riemann-Hilbert factorization problem.

Conversely, suppose we are given a Riemann-Hilbert problem of the form

$$Q_+(z) = Q_-(z)e^{i\theta(x,t,z)ad\sigma_3}v(z), \;\; z \in \Sigma,$$

where $v(z)$ is independent of x, t. Above, for example, $\theta(x,t,z) = 2izx + 4iz^2t$ and

$$v(z) = \begin{pmatrix} 1 - |r(z)|^2 & -r^*(z) \\ r(z) & 1 \end{pmatrix}.$$

Define $m(x,t,z) = Q(z)e^{i\theta(x,t,z)\sigma_3}$. Then $m_+ = m_- v$ for $z \in \Sigma$. Differentiating with respect to x or t, we also get $\partial_x m_+ = \partial_x m_- v$ and $\partial_t m_+ = \partial_t m_- v$, for $z \in \Sigma$. Hence both $\partial_x m \cdot m^{-1}$ and $\partial_t m \cdot m^{-1}$ have no jumps, so they are entire functions. By calculating $\partial_x m$ and $\partial_t m$ at infinity, we find

$$m_x = U(x,t,z)m,$$

$$m_t = V(x,t,z)m,$$

where U, V are polynomials in z [quadratic in the NLS case].

This is essentially the Lax pair arising from the Riemann-Hilbert problem above. The compatibility condition $m_{xt} = m_{tx}$ leads to NLS.

So, the Riemann-Hilbert formulation entails the Lax pair but also encodes the inverse scattering problem. Perhaps then this is the essence of integrability!

2. SCALAR RIEMANN-HILBERT PROBLEMS

In the scalar case, a Riemann-Hilbert problem can be explicitly solved. For example, let d solve

$$d_+(z) = d_-(z)q(z),$$

$$lim_{z\to\infty} d(z) = 1,$$

where q is a scalar $1 + L^1 \cap L^\infty$ function on the real line. Taking logarithms

$$logd_+(z) = logd_-(z) + logq(z),$$

and by the Plemelj-Sokhotskii formula

$$logd = \int_{\mathbb{R}} \frac{logq(s)}{2\pi i(s-z)} ds,$$

hence

$$d = exp[\int_{\mathbb{R}} \frac{logq(s)}{2\pi i(s-z)} ds].$$

Note that indeed

$$lim_{z\to\infty} d(z) = 1.$$

However, it is not a priori clear that the integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{logq(s)}{2\pi i(s-z)} ds$ is defined. For this we need to have ensured that the index of q is zero, i.e $\int_{\mathbb{R}} dlogq(s) = 0$.

In any case, scalar problems, to the extent that they are solvable, are explicitly solvable. This is not so for matrix problems.

3. PROOF OF THE PLEMELJ-SOKHOTSKII FORMULA

LEMMA. Suppose ϕ_n is a sequence of bounded non-negative functions in $\mathbb{R}$ such that $\int \phi_n = c$, a positive constant independent of n and that for every positive ϵ we have $lim_{n\to\infty} \int_{|x-x_0|>\epsilon} \phi_n(x)dx = 0$.

Then $\phi_n \to c\delta(x-x_0)$ weakly (in say the Schwartz distribution sense).

PROOF. I want to prove that for every smooth g of local support $\int \phi_n(x)g(x)dx \to cg(x_0)$. I thus split

$$\int \phi_n(x)g(x)dx = \int_{|x-x_0|>\epsilon} \phi_n(x)g(x)dx + \int_{|x-x_0|\le\epsilon} \phi_n(x)g(x)dx.$$

The first term is bounded by $||g||_\infty \int_{|x-x_0|>\epsilon} \phi_n(x)dx$ and thus tends to 0 for all ϵ. By the mean value theorem for g in $|x-x_0| \le \epsilon$ we have $g(x) = g(x_0) + (x-x_0)g'(s)$, for some s with $|s-x_0| \le \epsilon$. We thus express the second term as $\int_{|x-x_0|\le\epsilon} \phi_n(x)g(x)dx = g(x_0)\int_{|x-x_0|\le\epsilon} \phi_n(x)dx + \int_{|x-x_0|\le\epsilon} g'(s(x))(x-x_0)\phi_n(x)dx$. The first term tends to $cg(x_0)$ as $n \to \infty$. The second term is bounded by $\epsilon||g'||_\infty c$, for all $\epsilon > 0$. Hence result.

Applying the Lemma to
$\phi_n(x) = \frac{\frac{1}{n}}{(x-x_0)^2+\frac{1}{n^2}}$ we get

$$lim_n \int g(x)\frac{\frac{1}{n}}{(x-x_0)^2+\frac{1}{n^2}}dx \to \pi g(x_0).$$

Now $\int_{\mathbb{R}} \frac{g(s)}{2\pi i(s-z-i/n)}ds - \int_{\mathbb{R}} \frac{g(s)}{2\pi i(s-z+i/n)}ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{2ig(s)}{2\pi in((s-z)^2+(i/n)^2)}ds$ and taking the limit as $n \to \infty$ we recover the Plemelj-Sokhotskii formula.

COROLLARY. One has

$$lim_n \frac{1}{x-x_0+\frac{i}{n}} = PV\frac{1}{x-x_0} - i\pi\delta(x-x_0).$$

PROOF: Just note that

$$lim_n \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(1/n)^2} = PV\frac{1}{x-x_0}$$

and apply the above result.

4. RIEMANN-HILBERT DEFORMATIONS. A SINGULAR INTEGRAL EQUATION AND THE BEALS-COIFMAN FORMULA

The solution of a Riemann-Hilbert problem can be reduced to the solution of a singular integral equation. Using the NLS case as a model we have $\Sigma = \mathbb{R}$. But the discussion below is fairly general.

Define the matrix Cauchy operators as follows:

$$C_{\pm} : (L^2(\Sigma))_{2x2} \to (L^2(\Sigma))_{2x2}$$
$$(C_{\pm}f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_{\pm}}$$

where $z \in \Sigma$ and the signs "+" and "-" conote normal limits as $z \to \Sigma$, from the right and the left of Σ respectively (with respect to its orientation).

It is a fact from analysis that C_+ and C_- are bounded (see e.g. [S], p.29, and use the corollary above). From the Plemelj-Sokhotskii formula

$$C_+ - C_- = I.$$

Note that the jump of the RH problem for NLS can be factorized as

$$(b^-)^{-1}b^+$$

where

(5)
$$b^+ = \begin{pmatrix} 1 & -r^*(z)e^{2izx+4iz^2t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$b^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r(z)e^{-2izx-4iz^2t} & 1 \end{pmatrix}.$$

Now, given any $2x2$ matrices w^+, w^-, we can introduce the following singular integral operator $C_w : L^2 \to L^2$. First define the "Cauchy" operators C:

$$\text{for } z \notin \Sigma, \quad \text{let } (Cf)(z) = (2\pi i)^{-1}\int_{\Sigma}\frac{f(w)dw}{w - z} \quad \text{and}$$

Then, let the operator C_w be defined by

$$C_w f = C_+(fw^-) + C_-(fw^+)$$

for a 2x2 matrix valued f. Let $\mu \in L^2$ solve the singular integral equation

(*)
$$\mu = I + C_w\mu.$$

THEOREM Given any two matrices b^+, b^- such that $detb^- = detb^+$, let Q be defined by the integral formulae ([BC]-[Z])

$$Q_+ = I + C_+(\mu w)$$

$$Q_- = I + C_-(\mu w)$$

$$Q = I + C(\mu w) \quad \text{on } \mathbb{C} \setminus \Sigma,$$

where $w = w^+ + w^-$ and

$$w^+ = b^+ - I \quad \text{and } w^- = I - b^-.$$

Then Q provides the unique solution of the following Riemann-Hilbert problem.

$$(**) \qquad \begin{aligned} Q_+(z) = Q_-(z)(b^-)^{-1}(z)b^+(z),\ z \in \Sigma, \\ limQ(z) = I, \end{aligned}$$

as $z \to \infty$ in compact subsets of $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.

PROOF: Uniqueness: The jump matrix in has determinant 1. Hence $det\ Q$ is holomorphic. It is also equal to 1 at infinity. By Liouville's theorem it is constant, and hence equal to 1 everywhere. In particular Q^{-1} exists. Now, suppose there was another solution, say $\tilde{Q}$. Then $\tilde{Q}Q^{-1}$ exists, is holomorphic, and is I at infinity. By Liouville, it has to be identically I.

To show that Q defined above solves (**) note that

$$Q_+(I + w^+)^{-1} = (I + C_+(\mu w))(I + w^+)^{-1} =$$

$$(I + C_+(\mu w^+) + C_+(\mu w^-))(I + w^+)^{-1} =$$

$$(I + \mu w^+ + C_-(\mu w^+) + C_+(\mu w^-))(I + w^+)^{-1},$$

$$since\ C_+ - C_- = I,$$

$$= (I + \mu w^+ + C_w\mu)(I + w^+)^{-1},\ by\ the\ definition\ of\ C_w,$$

$$= (\mu w^+ + \mu)(I + w^+)^{-1} = \mu,\ by\ (12).$$

$$Similarly\ Q_-(I - w^-)^{-1} = (I + C_-(\mu w))(I - w^-)^{-1} =$$

$$(I + C_-(\mu w^+) + C_-(\mu w^-))(I - w^-)^{-1} =$$

$$(I - \mu w^- + C_-(\mu w^+) + C_+(\mu w^-))(I - w^-)^{-1} =$$

$$(I - \mu w^- + C_w\mu)(I - w^-)^{-1} = (\mu - \mu w^-)(I - w^-)^{-1} = \mu.$$

Hence $Q_+(I + w^+)^{-1} = Q_-(I - w^-)^{-1}$ and thus $Q_-^{-1}Q_+ = (I - w^-)^{-1}(I + w^+) = (b^-)^{-1}b^+$ and thus $Q_+ = Q_-(b^-)^{-1}b^+$.

The above theory is useful if one seeks asymptotics of the solution of a Riemann-Hilbert problem with respect to a parameter [e.g. time t]. The idea is to "deform" the factorization problem (**) into one that can be solved explicitly, in a series of steps each of which involves either an extension or a deletion of a part of the factorization contour, or a substitution of $w_\pm$ by approximate (for large times) matrices, or an appropriate conjugation. The choice of the contour extensions or deletions depends on the phase of the exponentials appearing in $b_\pm$. For each step, the final factorization problem is an approximation to the initial one in the sense that the solution as given by the corresponding integral formula is close to the exact solution of (**).

There are basically two kind of deformations used. Deformations of a "geometric type" involve a contour deformation. This is allowed if the jump matrix on that contour is analytic. These deformations are exact, not approximate. There are also "analytic" type deformations that involve perturbing the formula

(***) $$Q = I + C(\mu w) = I + \int_\Sigma \frac{(I - C_w)^{-1}(I)(s)w(s)}{2\pi i(s-z)}ds$$

with respect to w while keeping the contour Σ fixed. Such deformations are only approximate, with respect to some underlying parameter (like t for example).

5. FOURIER TRANSFORM AS LINEAR LIMIT OF THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM

If w is small (say $||w||_\infty$ is small) and because the Cauchy operator is bounded (in L^2 but not only), we can expand $(I-C_w)^{-1}(I)$ as a Neumann series of operators from L^2 to L^2 : $(I - C_w)^{-1}(I) = I + C_w(I) + C_w^2(I) + C_w^3(I) + ...$

The solution of the RH problem near ∞ is

$$Q \sim I + \int_\Sigma \frac{w(s)}{2\pi i(s-z)}ds$$

and hence

(6) $$u(x,t) = -2lim_{z\to\infty} zQ_{21} \sim \frac{i}{\pi}\int_\Sigma r(z)e^{2izx+4iz^2t}.$$

6. THE METHOD OF STATIONARY PHASE FOR LINEAR PDEs

Consider the Cauchy problem for the linear equation

$$u_t + u_{xxx} = 0, u(x,0) = u_0(x).$$

It can be solved via Fourier transforms. Let

$$\hat{u}(\xi, t) = \int e^{-ix\xi} u(x,t)dx.$$

Then

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -i\xi^3 \hat{u}(\xi, t),$$

so

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}(\xi, 0)e^{-i\xi^3 t}$$

and

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(\xi, 0)e^{ix\xi - i\xi^3 t} d\xi.$$

x=c t, c σταθερά

To understand the long time asymptotic behavior of the solution one needs to apply the stationary phase method to the above fomula. The principle is that the dominating contribution comes from the vicinity of the two stationary phase points $\xi_{1,2} = \pm(\frac{x}{3t})^{1/2}$. Through a local change of variables at each stationary phase point $\tau(\xi)$ such that $\tau(\xi_j) = 0$ we can calculate each contributing integral asymptotically to all orders with exponential error.

In general, suppose one has an integral of the form

$$f(t) = \int_a^b g(z)e^{ith(z)} dz,$$

where t is meant to be a large and positive variable, g is continuous and h is twice differentiable. Suppose z_0 is the only stationary phase point of h in (a, b), with $a < z_0 < b, h'(z_0) = 0, h"(z_0) > 0$.

The assumption of Stokes and Kelvin is that the dominating contribution to f arises from the immediate vicinity of the stationary phase point. This assumption can be rigorously justified (see e.g. [E]).

Accepting the assumption above, we perform the local change of variables $h(z) - h(z_0) = u^2$ and obtain

$$f(t) = \int_a^b g(z) e^{ith(z)} dz \sim \int_{z_0-\epsilon}^{z_0+\epsilon} g(z) e^{ith(z)} dz = \int_{-u_1}^{u_2} 2u \frac{g(z)}{h'(z)} e^{it(h(z_0)+u^2)} du,$$

where $u_1 = [h(z_0 - \epsilon) - h(z_0)]^{1/2}, u_2 = [h(z_0 + \epsilon) - h(z_0)]^{1/2}$. Near $u = 0$ we have $g(z) \sim g(z_0)$ and $2u\frac{1}{h'(z)} \sim [\frac{2}{h"(z)}]^{1/2}$. So,

$$f(t) \sim [\frac{2}{h"(z)}]^{1/2} g(z_0) \int_{-u_1}^{u_2} e^{it(u^2+h(z_0))} d\cancel{z}.$$

0 du

Fresnel integral

Accepting the same assumption above, we extend the integral domain to the whole real line.

$$f(t) \sim [\frac{2}{h"(z)}]^{1/2} g(z_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(u^2+h(z_0))} d\cancel{z}.$$

0 du

This can now be computed exactly. Indeed

$$f(t) \sim [\frac{2\pi}{th"(z_0)}]^{1/2} g(z_0) e^{ith(z_0)+i\pi/4}. \tag{6}$$

In particular the oscillating exponential integral decays like $t^{-1/2}$.

REMARK. If instead of the phase $x\xi - \xi^3 t$ we had a non-real phase, or if the stationary phase points themselves were not real, then it would be necessary to deform the contour of integration to a union of contours of *steepest descent*. We will not concern ourselves with this more general case (again see [E]). We simply note that the analogous situation for nonlinear integrable PDEs appears when the underlying Lax operator is not self-adjoint. In such a case the Riemann-Hilbert problem must be deformed to one supported on a union of contours of steepest descent. The problem of finding such contours is equivalent to a maximin non-convex variational problem of electrostatic type with external field in two dimensions. See [KMM] and [KR].

7. THE METHOD OF STATIONARY PHASE FOR NONLINEAR INTEGRABLE PDEs

Consider, again, the nonlinear Schrödinger equation (defocusing case).

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} - |u|^2 u = 0,$$

under initial data $u_0(x)$ that belong to the Schwartz class.

It was first realized by Its [IN], motivated by the study of the work of Jimbo, Miwa, Ueno, that the long time asymptotics for the solution of (1) can be extracted by reducing the problem (2)-(3) to a "local" RH problem located in a small neighborhood of the stationary phase point z_0 such that $\theta'(z_0) = 0$ where $\theta = zx + 2z^2 t$. The deformation method has been made rigorous and systematic in [DZ]. Here are the basic ideas.

Suppose $z_0 = -\frac{x}{4t}$, the stationary phase point of $\theta(x,t,z) = 2izx + 4iz^2 t$. Consider the region $z_0 < M$, some positive constant. Apart form the factorization (5), we also note

$$\begin{pmatrix} 1-|r(z)|^2 & -r^*(z)e^{-2i\theta} \\ r(z)e^{2i\theta} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r^*(z)e^{-2i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r(z)e^{2i\theta} & 1 \end{pmatrix} \; for \; z > z_0,$$

$$= \begin{pmatrix} d_-^{-1}(z) & 0 \\ \frac{r(z)d_-^{-1}(z)e^{-2i\theta}}{1-|r(z)|^2} & d_-(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_+(z) & \frac{-r^*(z)d_+(z)e^{2i\theta}}{1-|r(z)|^2} \\ 0 & d_+^{-1}(z) \end{pmatrix} \; for \; z < z_0.$$

where d is a function analytic and bounded in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, z_0]$ such that

$$d_+(z) = d_-(z)(1-|r(z)|^2) \qquad \text{for } -\infty < z \le z_0,$$

$$d_+(z) = d_-(z) \qquad \text{for } z > z_0$$

$$d \to 1 \quad \text{as } z \to \infty.$$

Thus

$$d(z) = exp[\int_{-\infty}^{z_0} \frac{log(1-|r(s)|^2)}{2\pi i(s-z)} ds].$$

The above factorizations suggest the following transformation. Consider an infinite cross centered at ξ_0 such that all four branches of the cross, denoted counterclockwise starting at $arg z = 0$ by $C_1, C_2, C_3, C_4,$. The angles between the four half-lines are not important, as long as they lie in the appropriate quadrants. Let

D_1 be the region between C_4 and C_1, D_2 be the region between C_1 and C_2, D_3 be the region between C_2 and C_3, and D_4 be the region between C_3 and C_4.

Note that $Re(\theta) < 0$ when $z \in D_1 \cup D_3$ and $Re(\theta) > 0$ when $z \in D_2 \cup D_4$.

Define a new matrix M by

$$M = Q, \ \ z \in D_2 \cup D_4,$$

$$M = \begin{pmatrix} d^{-1} & \frac{r^* d e^{2i\theta}}{1-|r|^2} \\ 0 & d \end{pmatrix} Q, \ \ z \in D_3 \cap \{Imz > 0\},$$

$$M = Q \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ \frac{r d^{-1} e^{-2i\theta}}{1-|r|^2} & d \end{pmatrix}, \ \ z \in D_3 \cap \{Imz < 0\},$$

$$M = Q \begin{pmatrix} 1 & -r^* e^{-2i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z \in D_1 \cap \{Imz < 0\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -re^{2i\theta} & 1 \end{pmatrix} Q, z \in D_1 \cap \{Imz > 0\}.$$

Here we have assumed that $r, r^*, \frac{r}{1-|r|^2}, \frac{r^*}{1-|r|^2}$ admit analytic continuations in the appropriate domains. This is not generally true but this obstacle can be overcome by approximations of these functions by analytic functions (see [BC], [DZ]).

It is immediate seen that there is no jump for M across the real axis. The jumps across the four halflines of the cross are

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ re^{2i\theta} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & \frac{-r^* d e^{2i\theta}}{1-|r|^2} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ \frac{r d^{-1} e^{-2i\theta}}{1-|r|^2} & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -r^* e^{-2i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in counterclockwise order starting at the first quadrant. It is easy to see that the off-diagonal terms are *exponentially small* away from the center of the cross. So, they can be neglected asymptotically!

REMARK. We are implicitly assuming that neglecting small errors in the jump matrix implies only small fluctuations in the solution of the Riemann-Hilbert problem near infinity (which is all we need). This is not trivial. The proof requires perturbation of formula (***) as in section 5. More precisely, in general, suppose that one has two Riemann-Hilbert problems for m and n on the same contour S, with jumps J_m, J_n resepctively and assume that factorizations exist as in section 4. Assume that the corresponding w_m and w_n are such that the differences

$||w_m - w_n||_{2,\infty}$ are uniformly (in x, t) small. Then from formula (***) we easily see that the difference $m - n$ is uniformly small near infinity. *This* argument justifies deletion of the contour away from z_0.

After deletion, one ends up with a Riemann-Hilbert problem that is essentially defined on a small cross centered at z_0. By this we mean that, apart from a small cross centered at z_0, the jumps are diagonal everywhere. Now a diagonal jump can be always removed by multiplication to a diagonal matrix (it is essentially decoupled into two scalar problems). In this sense, the dominating contribution to the solution of the Riemann-Hilbert problem comes from a small neighborhood of the stationary phase point. The Riemann-Hilbert problem can be solved explicitly via parabolic cylinder functions and the asymptotics for the Riemann-Hilbert problems are recovered!

More specifically, the last step is a rescaling $\xi = z_0 + z(tz_0)^{-1/2}$. The Riemann-Hilbert problem is then deformed to a new problem on an infinite cross, which can be explictly solved. In fact, after deforming the components of the cross back to the real line, it is equivalent to the following problem on the real line.

$$H_+(\xi) = H_-(\xi) exp(-i\xi^2\sigma_3) \begin{pmatrix} 1 - |r(z_0)|^2 & -r^*(z_0) \\ r(z_0) & 1 \end{pmatrix} exp(i\xi^2\sigma_3),$$
$$H(\xi) \sim \xi^{i\nu\sigma_3}, \ as \ \xi \to \infty.$$

where $\nu = -\frac{1}{2\pi} log(1 - |r(z_0)|^2)$ and $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (a Pauli matrix).

The last "local" Riemann-Hilbert problem above can be solved explicitly, since (after conjugating) the jump is constant ([IN]). Indeed, setting $Y(\xi) = H(\xi) exp(-i\xi^2\sigma_3)$ we have

$$Y_+(\xi) = Y_-(\xi) \begin{pmatrix} 1 - |r(z_0)|^2 & -r^*(z_0) \\ r(z_0) & 1 \end{pmatrix},$$
$$Y(\xi) \sim \xi^{i\nu\sigma_3} exp(-i\xi^2\sigma_3), \ as \ \xi \to \infty$$

and by differentiating the above jump relation we get

$$(\frac{dY}{d\xi})_+(\xi) = (\frac{dY}{d\xi})_-(\xi) \begin{pmatrix} 1 - |r(z_0)|^2 & -r^*(z_0) \\ r(z_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Of course $\frac{dY}{d\xi}$ does not have the same asymptotics at ∞. Indeed

$\frac{dY}{d\xi} \sim -i\xi^2\sigma_3\xi^{i\nu\sigma_3}exp(-i\xi^2\sigma_3)$. Thus $\frac{dY}{d\xi} = -i\xi^2\sigma_3 Y(\xi)$, by a Liouville-type argument (checking that $[\frac{dY}{d\xi}]^{-1}(-i\xi^2\sigma_3 Y(\xi))$ has no jump and is I at infinity).

This is a linear ODE which decouples into two scalar linear ODEs. We end up with the so-called parabolic cylinder equation that can be solved explicitly in terms of parabolic cylinder functions. We thus recover Y and hence H.

By tracing back the definitions we recover M, Q etc. and finally the long time asymptotics for our original problem (1).

We end up with the following

THEOREM. Let M be any positive constant. In the region $|n/t| < M$ we have the following uniform asymptotics for the solution of the defocusing NLS equation.

(8)

$$u(x,t) = u_l(x,t) + o(t^{-1/2}),\ where\ u_l(x,t) = [\frac{1}{2t}]^{1/2}a(z_0)e^{i\frac{x^2}{4t}-i\nu logt},$$

$$z_0 = -\frac{x}{4t},\ \nu = -\frac{1}{2\pi}log(1-|r(z_0)|^2),\ |a(z_0)|^2 = -\frac{1}{4\pi}log(1-|r(z_0)|^2),$$

$$arga(z_0) = -3\nu log2 - \frac{\pi}{4} + arg\Gamma(i\nu) - argr(z_0) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{z_0} log|z-z_0|dlog(1-|r(z_0)|^2).$$

REMARKS. 1. By focusing near the stationary phase point we end up with a constant jump problem (moreless; there are also some exponentials of quadratic terms that can be factored away). This is analogous to the linear case of section 6, where by focusing near the stationary phase point we ended up with an integral where one factor of the integrand is constant and another factor is the exponential of a quadratic and hence explicitly computable.

2. Note that the asymptotics (8) for the defocusing NLS equation express decaying oscillations of order $[\frac{1}{t}]^{1/2}$. Compare with the formula (7) arising from the linear stationary phase method. Note also the existence of a $logt$ term in (8) which is not in (7).

3. If we apply the linear stationary phase method on the (small r) formula (6) we will arrive at a formula similar to (8) but without the $logt$ term. The phase correction term $logt$ is a nonlinear phenomenon.

8. REFERENCES

For scalar Riemann-Hilbert problems:

[G] Gakhov, Boundary Value Problems, Pergamon Press 1966.

For the stationary phase method:

[E] A. Erdélyi, Asymptotic Expansions, Dover 1956.

For the complete rigorous treatment of the inverse scattering problem as a Riemann-Hilbert problem:

[BC] R.Beals, R.Coifman, Scattering and Inverse Scattering for First Order Systems, Communications in Pure and Applied Mathematics, v.37, pp.39-90, 1984.

[BDZ] R.Beals, P.Deift, X.Zhou, Inverse Scattering on the Line, Important Developments in Soliton Theory, 1980-1990, ed. by A.Fokas and V.E.Zakharov, Springer-Verlag, 1993.

[Z] X.Zhou, Direct and Inverse Scattering Transforms with Arbitrary Spectral Dependence, Communications of Pure and Applied Mathematics, v.42, pp.895-938, 1989.

For the first applications of Riemann-Hilbert problems to long time asymptotics for soliton equations:

[IN] A.R.Its, V.Novokshenov, The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painleve Equations, Lecture Notes in Math., v.1191, Springer 1986.

For the first rigorous exposition of the Riemann-Hilbert deformation method (and the nonlinear analogue of the stationary phase method):

[DZ] P.Deift, X.Zhou, A Steepest Descent Method for Oscillatory Riemann-Hilbert Problems, Annals of Mathematics, v.137 pp.295-368, 1993.

For the first application to a discrete lattice:

[K1] S. Kamvissis, Long Time Behavior of the Doubly Infinite Toda Lattice Under Initial Data Decaying at Infinity, Communications in Mathematical Physics, v.153, n.3, 1993.

For Random Matrices, Fredholm Determinants and Integrable Operators:

[DIZ] P.Deift, A.R.Its, X.Zhou, A Riemann-Hilbert Approach to Asymptotic

Problems Arising in the Theory of Random Matrix Models and also in the Theory of Integrable Statistical Mechanics, Annals of Mathematics, v.146, n.1, 1997, pp.149-235.

An important extension of the original method applied to zero dispersion limits:

[DVZ] P.Deift, S.Venakides, X.Zhou, New Results in Small Dispersion KdV by an Extension of the Steepest Descent Method for Riemann-Hilbert Problems, IMRN, n.6, 1997, pp.286-299.

The above is making use of the following seminal work on zero dispersion limits:

[LL] P. D. Lax, C. D. Levermore, The Small Dispersion Limit of the KdV Equation, I , Communications in Pure and Applied Mathematics, v. 36, 1983, pp. 253-290.

For the first application involving non-self-adjoint problems:

[K2] S.Kamvissis, Long Time Behavior for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation with Real Spectral Singularities, Communications in Mathematical Physics, v.180, n.2, 1996, pp.325-343.

The most general exposition of the Riemann-Hilbert deformation method (and the nonlinear analogue of the steepest descent method):

[KMM] S.Kamvissis, K.McLaughlin, P.Miller, Semiclassical Soliton Ensembles for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation, Annals of Mathematics Studies, v.154, Princeton University Press, 2003.

For the analysis of the maximin non-convex variational problem of electrostatic type:

[KR] S.Kamvissis, E.Rakhmanov, Existence and Regularity for an Energy Maximization Problem in Two Dimensions, Journal of Mathematical Physics, v.46, n.8, 2005.

For applications to orthogonal polynomials:

[DKMVZ] P.Deift, T.Kriecherbauer, K.McLaughlin, S.Venakides, X.Zhou, Uniform Asymptotics for Orthogonal Polynomials, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Berlin, 1998), Doc. Math. 1998, Extra Vol.

III, pp.491–501.

For the first (very celebrated) application to a combinatorics problem:

[BDJ] J.Baik, P.Deift, K.Johansson, On the Distribution of the Length of the Longest Increasing Subsequence of Random Permutations. J. Amer. Math. Soc. v.12, no. 4, 1999, pp.1119–1178.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII. ΑΥΣΤΗΡΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΣΤΑΣΙΜΗΣ ΦΑΣΗΣ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ WHITHAM

1. Θεωρημα Στασιμης Φασης.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Εστω $g \in C^N[a,b]$ (δηλαδη με N συνεχεις παραγωγους στο $[a,b]$) και h παραγωγισιμη στο $[a,b]$ με $h'(t) = (t-a)^{\rho-1}(b-t)^{\sigma-1}h_1(t)$, οπου $\rho, \sigma \geq 1$, $h_1 > 0$ και $h_1 \in C^N[a,b]$. Τοτε

$$f(x) = \int_a^b g(t)e^{ixh(t)}dt = B(x) - A(x), \tag{1}$$

οπου $A(x) \sim A_N(x)$ και $B(x) \sim B_N(x)$ οταν $N \to \infty$, με

$$A_N(x) = -\Sigma_{n=0}^{N-1}\frac{k^{(n)}(0)}{n!\rho}\Gamma(\frac{n+1}{\rho})exp(\pi i\frac{n+1}{2\rho})x^{\frac{-n+1}{\rho}}e^{ixh(a)}. \tag{2}$$

Πιο συγκεκριμενα

$$|A(x) - A_N(x)| \leq \frac{1}{(N-1)!}\Gamma(\frac{N}{\rho})x^{\frac{-N}{\rho}}\int_0^{u_1}|\frac{d^N(\nu_1 k)}{du^n}|du. \tag{3}$$

Εδω $k(u) = g(t)\frac{dt}{du}$ οπου η u οριζεται μεσω της $u^\rho = h(t) - h(a)$ και τελος $\nu_1(u) = \nu(t)$ οπου η συναρτηση ν ειναι τετοια ωστε $\nu \in C^\infty[a,b]$ και $\nu = 1$ για $t \in [a, a+\eta]$, $\nu = 0$ για $t \in [b-\eta, b]$ με $a + \eta < \frac{b+a}{2} < b - \eta < b$. Παρομοια

$$B_N(x) = -\Sigma_{n=0}^{N-1}\frac{l^{(n)}(0)}{n!\sigma}\Gamma(\frac{n+1}{\sigma})exp(\pi i\frac{n+1}{2\sigma})x^{\frac{-n+1}{\sigma}}e^{ixh(b)} \tag{4}$$

με

$$|B(x) - B_N(x)| \leq \frac{1}{(N-1)!}\Gamma(\frac{N}{\sigma})x^{\frac{-N}{\sigma}}\int_0^{v_1}|\frac{d^N(\mu_1 v_1 l)}{dv^n}|dv \tag{5}$$

και τους αναλογους ορισμους για τις l, v, v_1, μ_1.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η περιπτωση μονου σημειου στασιμης φασης στο a αντιστοιχει στην τιμη $\rho = 2$. Μεγαλυτερες ακεραιες τιμες του ρ αντιστοιχουν σε πολλαπλα σημεια στασιμης φασης. Οι A_N και B_N δινουν τους πρωτους N ορους της πληρους ασυμπτωτικης σειρας της f σε δυναμεις του $1/x$ οταν το $x \to \infty$.

Εν γενει, οταν εχουμε πολλα διαφορετικα σημεια στασιμης φασης, πρεπει να σπασουμε το ολοκληρωμα σε ολοκληρωματα της παραπανω μορφης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εχουμε

$$f(x) = \int_a^b g(t)e^{ixh(t)}dt = \int_a^b \nu(t)g(t)e^{ixh(t)}dt + \int_a^b (1-\nu(t))g(t)e^{ixh(t)}dt = B(x) - A(x) \tag{6}$$

οπου

$$A(x) = -\int_a^{b-\eta} \nu(t)g(t)e^{ixh(t)}dt, \quad B(x) = \int_{a+\eta}^b (1-\nu(t))g(t)e^{ixh(t)}dt. \tag{7}$$

Αλλαζοντας μεταβλητες $u^\rho = h(t) - h(a)$ και γραφοντας $u_1^\rho = h(b-\eta) - h(a)$, εχουμε

$$u^\rho = h(t) - h(a) = \int_a^t h'(s)ds = \int_a^t (s-a)^{\rho-1}(b-s)^{\sigma-1}h_1(s)ds. \tag{8}$$

Εστω $s \in [a,t]$. Αλλαζοντας μεταβλητη $s = a + (t-a)y, \quad 0 \le y \le 1$, εχουμε

$$u^\rho = (t-a)^\rho \int_0^1 y^{\rho-1}(b-a-(t-a)y)^{\sigma-1}h_1(a+(t-a)y)dy. \tag{9}$$

Το ολοκληρωμα παραπανω ειναι συναρτηση C^{N+1}, αυξουσα ως προς t, που απεικονιζει το $[a, b-\eta]$ στο $[0, u_1]$ με αντιστροφη συναρτηση επισης C^{N+1}.

Θετοντας $\nu_1(u) = \nu(t)$ εχουμε $k(u) = g(t)\frac{dt}{du}$ και προφανως η k ειναι $C^N[0, u_1]$.

Ολοκληρωνοντας κατα μερη

$$A(x) = exp(ixh(a)) \int_0^{u_1} \nu_1(u)k(u)exp(ixu^\rho)du = exp(ixh(a)) \int_0^{u_1} \nu_1(u)k(u)\phi'_{-1}(u)du = \tag{10}$$

$$= exp(ixh(a)) - exp(ixh(a)) \int_0^{u_1} \frac{d(\nu_1(u)k(u))}{du}\phi_{-1}(u)du, \tag{11}$$

με $\phi_{-1}(u_1) = \int_{u_1}^\infty exp(ixz^\rho)dz$. Επαναλαμβανοντας N φορες, καταληγουμε $A = A_N + R_N$ οπου

$$A_N(x) = -\Sigma_{n=0}^{N-1}(-1)^n k^{(n)}(0)\phi_{-(n+1)}(0)e^{ixh(a)} \tag{12}$$

και

$$\phi_{-(n+1)}(u) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\int_{u_1}^\infty (z-u)^n exp(ixz^\rho)dz \tag{13}$$

και

$$R_N(x) = (-1)^{N+1}e^{ixh(a)} \int_0^{u_1} \phi_{-N}(u)\frac{d^N(\nu_1(u)k(u))}{du^N}du. \tag{14}$$

Η καμπυλη ολοκληρωσης στο (13) ειναι η ακτινα $arg(z-u) = \frac{\pi}{2\rho}$.

Τωρα

$$\phi_{-(n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \int_0^\infty (z)^n exp(ixz^\rho) dz. \tag{15}$$

Υστερα απο λιγους ευκολους υπολογισμους, καταληγουμε

$$\phi_{-(n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n!\rho} \Gamma(\frac{n+1}{\rho}) exp(\pi i \frac{n+1}{2\rho}) x^{\frac{-n+1}{\rho}} \tag{16}$$

οπου

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty exp(-x) x^z dx \tag{17}$$

ειναι η γνωστη μας συναρτηση Γαμμα.

Χρειαζομαστε τωρα ενα ομοιομορφο φραγμα για την ϕ_{-N}. Εν γενει θα δειξουμε οτι

$$|\phi_{-(n+1)}(u)| \leq \frac{1}{n!} \Gamma(\frac{n+1}{\rho})) x^{\frac{-n+1}{\rho}} \tag{18}$$

αρα

$$|\phi_{-N}(u)| \leq \frac{1}{(N-1)!} \Gamma(\frac{N}{\rho})) x^{\frac{-N}{\rho}}. \tag{19}$$

Παρατηρουμε πρωτα οτι

$$|exp(ixz^\rho)| \leq e^{-x|z-u|^\rho}. \tag{20}$$

[Οντως εχουμε

$$ixz^\rho + x|z-u|^\rho = i\rho x \int_0^u [\zeta + |z-u| exp(\pi i/2\rho)]^{\rho-1} d\zeta. \tag{21}$$

Ομως το πραγματικο μερος του $i\rho x \int_0^u [\zeta + |z-u| exp(\pi i/2\rho)]^{\rho-1} d\zeta$ ειναι προφανως αρνητικο. Αρα

$exp[ixz^\rho + x|z-u|^\rho] = exp[i\rho x \int_0^u [\zeta + |z-u| exp(\pi i/2\rho)]^{\rho-1} d\zeta] < 1$. ΟΕΔ.]

Απο τον ορισμο της $\phi_{-(n+1)}(u)$ εχουμε

$|\phi_{-(n+1)}(u)| \leq \frac{1}{n!} \int_u^\infty |z-u|^n e^{-x|z-u|^\rho} d|z-u| = \frac{1}{n!} \int_o^\infty |w|^n e^{-x|w|^\rho} d|w|$ και η (18) επεται ευκολα.

Απο την (19) και μεσω της (14) καταληγουμε στο απαιτουμενο φραγμα (3) για το υπολοιπο $R_N = A - A_N$. Παρομοια καταληγουμε στο φραγμα (5) για την $B - B_N$. ΟΕΔ.

2. Εξισωσεις Whitham.

Απο την προηγουμενη παραγραφο ξερουμε οτι η ασυμπτωτικη εκφραση του ολοκληρωματος

$$f(t) = \int_a^b g(k)e^{ith(k)}dk, \tag{22}$$

ειναι

$$f(t) \sim [\frac{2\pi}{t|h"(k_0)|}]^{1/2} g(k_0)e^{ith(k_0)+i\frac{\pi}{4}sgnh"(k_0)}, \tag{23}$$

οπου k_0 ειναι το μοναδικο (και μονο) σημειο στασιμης φασης στο (a, b).

Γραφοντας $h(k) = -W(k) + k\frac{x}{t}$ και ολοκληρωνοντας σε ολοκληρη την ευθεια, εχουμε

$$\phi(x,t) = \int_R g(k)e^{ikx-iW(k)t}dk = \Sigma_j g(k_j) \sim [\frac{2\pi}{t|W"(k_j)|}]^{1/2} g(k_j)e^{ikx-iW(k_j)t-i\frac{\pi}{4}sgnW"(k_j)}, \tag{24}$$

αθροιζοντας για ολα τα σημεια στασιμης φασης k_j. Με αλλα λογια μια συνθεση απλων ημιτονοειδων κυματων συμπεριφερεται ως πεπερασμενο αθροισμα κυματων με φθινον (κατα $t^{-1/2}$) πλατος $[\frac{2\pi}{t|W"(k_j)|}]^{1/2} g(k_j)e^{-i\frac{\pi}{4}sgnW"(k_j)}$ και συχνοτητα $W(k_j)$. Εχουμε αθροισμα απλων κυματων με αργα μεταβαλλομενα πλατος και συχνοτητα (modulated waves).

Παρατηρουμε οτι αν θεωρησουμε την th ως συναρτηση των x, t, δηλαδη

$$\theta(x,t) = -W(k)t + kx, \tag{25}$$

τοτε

$$\theta_x(x,t) = (x - W'(k)t)k_x + k, \quad \theta_x(x,t) = -W(k) + (x - W'(k)t)k_t. \tag{26}$$

Αν το k ειναι σημειο στασιμης φασης, τοτε $W'(k) = x/t$ αρα

$$\theta_x(x,t) = k, \quad \theta_x(x,t) = -W(k). \tag{27}$$

Αυτη ειναι μια απο τις εξισωσεις Whitham. [Θα συναντησουμε αργοτερα το (πληρες) συστημα Whitham που περιγραφει την αργη εξελιξη του μηκους κυματος και της συχνοτητας των κυματων "modulated".]

Παρατηρουμε οτι ο κυματικος αριθμος k, ο οποιος αρχικα οριστηκε σαν η συγκεκριμενη τιμη του κυματικου αριθμου k στη συνθεση (24) ειναι και ο κυματικος αριθμος του μη ομοιομορφα ταλαντουμενου κυματος. Παρομοια και η συχνοτητα W. Αρα η σχεση διασπορας που δινει τη συχνοτητα ως $W(k)$ διατηρειται και στο μη ομοιομορφο κυμα. Αυτο οφειλεται στο οτι η ανομοιομορφια ειναι αρκετα μικρη.

Η ποσοτητα $W'(k)$ ειναι η ομαδικη ταχυτητα του κυματος. Συμπεραινουμε λοιπον οτι οι κυματικοι αριθμοι μεταδιδονται με την αντιστοιχη ομαδικη ταχυτητα. Κυμα αριθμου k_0 μετακινειται κατα $W'(k_0)t$ σε χρονο t.

Η φαση θ μεταδιδεται κατα την εξισωση $\theta_x \frac{dx}{dt} + \theta_t = 0$. Αρα $\frac{dx}{dt} = \frac{-\theta_t}{\theta_x} = \frac{W}{k}$, δηλαδη η ταχυτητα φασης ειναι και παλι $\frac{W}{k}$ οπου ομως η εννοια των $k, W(k)$ εχει αλλαξει. Τα $k, W(k)$ ειναι τωρα συναρτησεις των x, t.

Η δευτερη εξισωση Whitham αφορα το πλατος της ταλαντωσης a:

$$(a^2)_t + (W'(k)a^2)_x = 0. \tag{28}$$

Φυσικα η παραπανω επαληθευεται ευκολα, αλλα η λογικη που οδηγει σε αυτην ερχεται απο την αρχη διατηρησης της ενεργειας αναμεσα σε δυο ευθειες $x/t = c_1$ και $x/t = c_2$ που αντιστοιχουν σε διαφορετικες ομαδικες ταχυτητες.

Στην γραμμικη περιπτωση οι δυο εξισωσεις Whitham ειναι απεμπλεγμενες. Στην μη γραμμικη περιπτωση ομως η W εξαρταται απο το a. Γραφοντας

$$W(k) = W_0(k) + W_2(k)a^2 + ... \tag{29}$$

για μικρα πλατη a η πρωτη εξισωση Whitham γινεται (κατα προσεγγιση)

$$k_t + (W_0'(k) + W_2'(k)a^2)k_x + W_2(k)(a^2)_x = 0. \tag{30}$$

Αγνοωντας τον ορο $W_2'(k)a^2$ και σκεπτομενοι ομοια για τη δευτερη εξισωση Whitham καταληγουμε τελικα στο συστημα

$$k_t + W_0'(k)k_x + W_2(k)(a^2)_x = 0 \tag{31}$$

και

$$(a^2)_t + W_0'(k)(a^2)_x + W_0"(k)a^2 k_x = 0. \tag{32}$$

Αυτες ειναι οι εξισωσεις Whitham στην μη γραμμικη περιπτωση (π.χ. KdV, NLS).

Οι εξισωσεις Whitham ειναι υπερβολικες για την περιπτωση KdV (με πραγματικα δεδομενα) και για την NLS (περιπτωση αφεστιασης). Αντιθετα ειναι ελλειπτικες για την NLS (περιπτωση εστιασης). Εν γενει οι εξισωσεις Whitham δεν εχουν λυση για μεγαλους χρονους. Στην υπερβολικη περιπτωση π.χ. μπορει να εχουμε shocks. Στην ελλειπτικη περιπτωση εχουν παρατηρηθει κλαδικες ιδιομορφιες. Συνηθως, σε τετοιες περιπτωσεις, σε χρονους αμεσως μετα την ιδιομορφια, πρεπει να θεωρησουμε κυματα "modulated" ΠΟΛΛΩΝ ΦΑΣΕΩΝ. Οι κυματικοι αριθμοι και οι συχνοτητες περιγραφονται και παλι απο καποιο συστημα Whitham, αλλα βεβαιως μεγαλυτερης διαστασης. Ειναι ενδιαφερον οτι το γενικοτερο συστημα Whitham επιδεχεται ερμηνεια μεσο της θεωριας διαφορικων σε επιφανειες Riemann αργα μεταβαλλομενων κλαδικων σημειων!

Φυσικα, η παραπανω αναπτυξη ειναι καθε αλλο παρα αυστηρη μαθηματικα. Για αυστηρες αποδειξεις στην περιπτωση KdV παραπεμπουμε στα αρθρα [LL] και για την NLS (περιπτωση εστιασης) στο [KMM]. Πιο συγκεριμενα στα [LL] εξεταζεται το εξης προβλημα:

$$u_t + uu_x + h^2 u_{xxx} = 0 \tag{33}$$

για πραγματικα αρχικα δεδομενα φθινοντα στο απειρο και στο [KMM] εξεταζεται το προβλημα:

$$ihu_t + \frac{h^2}{2}u_{xx} + |u^2|u = 0, \tag{34}$$

με επισης φθινοντα δεδομενα, αλλα οπου η $u(x,t)$ ειναι μιγαδικη. Οταν το $h \to 0$ οι λυσεις των παραπανω συμπεριφερονται ως εξης:

Σε μια υποπεριοχη του $x, t \geq 0$ παρατηρει κανεις μια ομαλοτητα των λυσεων οταν $h \to 0$. Υπαρχει ισχυρο οριο της $u(x,t)$, οταν $h \to 0$. Εξω απο την υποπεριοχη αυτη της ομαλοτητας παρατηρουμε βιαιες ταλαντωσεις, αργα μεταβαλλομενου αλλα φραγμενου πλατους και αργα μεταβαλλομενης συγνοτητας ταξεως $O(1/h)$. Οι ταλαντωσεις αυτες περιγραφονται απο τις εξισωσεις Whitham!

Παρατηρουμε τελος οτι εξισωσεις Whitham που προερχονται απο ολοκληρωσιμα συστηματα ειναι επιλυσιμες! Βλεπε π.χ. [DVZ] για την περιπτωση KdV και [KMM] για την NLS (περιπτωση εστιασης). Ομως φαινεται οτι η θεωρια Whitham εχει και μη ολοκληρωσιμες εφαρμογες.

REFERENCES

[A] V.Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, New York-Heidelberg, 1978.

[DZ] P. Deift, X.Zhou, A Steepest Descent Method for Oscillatory Riemann-Hilbert Problems, Annals of Mathematics, v.137, n.2, 1993, pp.295-368.

[DJ] P.G.Drazin, R.S.Johnson, Solitons : An Introduction, Cambridge 1989.

[GL] I.M.Gelfand, B.Levitan, On the determination of a differential equation from its spectral function, Izv.Akad.Nauk SSSR Ser.Mat.,v.15, 1951, pp.309-366; English transalation in AMS Transl., v.1, pp.253-304.

[FT] L.Faddeev, L.Takhtajan, Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons, Springer-Verlag, 1987.

[FPU] E.Fermi, J.Pasta, S.Ulam: Los Alamos Report LA-1940 (1955); Collected Papers of Enrico Fermi, University of Chicago Press, 1965, v.II p.978.

[K1] S. Kamvissis, Long Time Behavior of the Doubly Infinite Toda Lattice Under Initial Data Decaying at Infinity, Communications in Mathematical Physics, v.153, n.3, 1993.

[K2] S.Kamvissis, Long Time Behavior for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation with Real Spectral Singularities, Communications in Mathematical Physics, v.180, n.2, 1996, pp.325-343.

[KMM] S.Kamvissis, K.McLaughlin, P.Miller, Semiclassical Soliton Ensembles for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation, Annals of Mathematics Studies v.154, Princeton University Press, 2003.

[KZ] N.J.Zabusky, M.Kruskal, Phys.Rev.Lett. v.15, 1965, pp.240-243.

[L] P.D.Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Communications in Pure and Applied Mathematics, v.21, 1968, pp.467-490.

[N] A.Newell, Solitons in Mathematics and Physics, SIAM Philadelphia, 1985.

[NMPZ] S.Novikov, S.V.Manakov, L.P.Pitaevskii, V.E.Zakharov, Theory of Solitons, Consultants Bureau (Plenum Publishing Company), 1984.

[RS] M.Reed, B.Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press, 1978.

[S] E.M.Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton 1970.

[Sp] G.Springer, Introduction to Riemann Surfaces, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1957.

[Sy] W.Symes, The QR algorithm and scattering for the finite nonperiodic Toda lattice, Phys. D, v.4, no. 2, 1981/1982, pp. 275–280.

[SW] G.Schneider, C.Wayne, The Long-wave Limit for the Water Wave Problem. I. The Case of Zero Surface Tension, Comm. Pure Appl. Math. v.53, n.12, 2000, pp.1475-1535; G.Schneider, C.Wayne, The Rigorous Approximation of Long-Wavelength Capillary-Gravity Waves, Arch. Ration. Mech. Anal. v.162, n.3, 2002, pp.247-285.

[T] M.Toda, Theory of Nonlinear Lattices, Springer 1981.

[Te] G. Teschl, Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices, Math. Surv. and Mon. v. 72, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2000.

[W] G.B.Whitham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley 1974.

[Z] X.Zhou, L^2-Sobolev space bijectivity of the scattering and inverse scattering transforms, Comm. Pure Appl. Math. v.51, no. 7, 1998, pp.697–731; Strong regularizing effect of integrable systems, Comm. Partial Differential Equations, v.22, no. 3-4, 1997, pp.503–526.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΡΓΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΠΛΑΤΟΥΣ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ WHITHAM

1. Γραμμικες εξισωσεις

Θυμιζουμε οτι η ασυμπτωτικη εκφραση του ολοκληρωματος

$$f(t) = \int_a^b g(k)e^{ith(k)}dk, \tag{1}$$

ειναι

$$f(t) \sim [\frac{2\pi}{t|h"(k_0)|}]^{1/2} g(k_0)e^{ith(k_0)+i\frac{\pi}{4}sgnh"(k_0)}, \tag{2}$$

οπου k_0 ειναι το μοναδικο σημειο στασιμης φασης στο (a,b).

Γραφοντας $h(k) = -W(k) + k\frac{x}{t}$ και ολοκληρωνοντας σε ολοκληρη την ευθεια, εχουμε

$$\phi(x,t) = \int_R g(k)e^{ikx-iW(k)t}dk = \Sigma_j g(k_j) \sim [\frac{2\pi}{t|W"(k_j)|}]^{1/2} g(k_j)e^{ikx-iW(k_j)t-i\frac{\pi}{4}sgnW"(k_j)}, \tag{3}$$

αθροιζοντας για ολα τα σημεια στασιμης φασης k_j. Με αλλα λογια μια (συνεχης) συνθεση απλων ημιτονοειδων κυματων συμπεριφερεται ως πεπερασμενο αθροισμα κυματων με φθινον (κατα $t^{-1/2}$) πλατος $[\frac{2\pi}{t|W"(k_j)|}]^{1/2} g(k_j)e^{-i\frac{\pi}{4}sgnW"(k_j)}$ και συχνοτητα $W(k_j)$. Εχουμε αθροισμα απλων κυματων με αργα μεταβαλλομενα πλατος και συχνοτητα (modulated waves).

Παρατηρουμε οτι αν θεωρησουμε την th ως συναρτηση των x,t, δηλαδη

$$\theta(x,t) = -W(k)t + kx, \tag{4}$$

τοτε

$$\theta_x(x,t) = (x - W'(k)t)k_x + k, \quad \theta_x(x,t) = -W(k) + (x - W'(k)t)k_t. \tag{5}$$

Αν το k ειναι σημειο στασιμης φασης, τοτε $W'(k) = x/t$ αρα

$$\theta_x(x,t) = k, \quad \theta_x(x,t) = -W(k). \tag{6}$$

Αυτη ειναι μια απο τις εξισωσεις Whitham. [Θα συναντησουμε αργοτερα το (πληρες) συστημα Whitham που περιγραφει την αργη εξελιξη του μηκους κυματος και της συχνοτητας των κυματων "modulated".]

Παρατηρουμε οτι ο κυματικος αριθμος k, ο οποιος αρχικα οριστηκε σαν η συγκεκριμενη τιμη του κυματικου αριθμου k στη συνθεση (3) ειναι και ο κυματικος αριθμος του μη ομοιομορφα ταλαντουμενου κυματος. Παρομοια και η συχνοτητα W. Αρα η σχεση διασπορας που δινει τη συχνοτητα ως $W(k)$ διατηρειται και στο μη ομοιομορφο κυμα. Αυτο οφειλεται στο οτι η ανομοιομορφια ειναι αρκετα μικρη.

Η ποσοτητα $W'(k)$ ειναι η ομαδικη ταχυτητα του κυματος. Συμπεραινουμε λοιπον οτι οι κυματικοι αριθμοι μεταδιδονται με την αντιστοιχη ομαδικη ταχυτητα. Κυμα αριθμου k_0 μετακινειται κατα $W'(k_0)t$ σε χρονο t.

Η φαση θ μεταδιδεται κατα την εξισωση $\theta_x \frac{dx}{dt} + \theta_t = 0$. Αρα $\frac{dx}{dt} = \frac{-\theta_t}{\theta_x} = \frac{W}{k}$, δηλαδη η ταχυτητα φασης ειναι και παλι $\frac{W}{k}$ οπου ομως η εννοια των $k, W(k)$ εχει αλλαξει. Τα $k, W(k)$ ειναι τωρα συναρτησεις των x, t.

Η δευτερη εξισωση Whitham αφορα το πλατος της ταλαντωσης a:

$$(a^2)_t + (W'(k)a^2)_x = 0. \tag{7}$$

Φυσικα η παραπανω επαληθευεται ευκολα, αλλα η λογικη που οδηγει σε αυτην ερχεται απο την αρχη διατηρησης της ενεργειας αναμεσα σε δυο ευθειες $n/t = c_1$ και $n/t = c_2$ που αντιστοιχουν σε διαφορετικες ομαδικες ταχυτητες.

Στην γραμμικη περιπτωση οι δυο εξισωσεις Whitham ειναι απεμπλεγμενες. Στην μη γραμμικη περιπτωση ομως η W εξαρταται απο το a. Γραφοντας

$$W(k) = W_0(k) + W_2(k)a^2 + ... \tag{8}$$

για μικρα πλατη a η πρωτη εξισωση Whitham γινεται (κατα προσεγγιση)

$$k_t + (W_0'(k) + W_2'(k)a^2)k_x + W_2(k)(a^2)_x = 0. \tag{9}$$

Αγνοωντας τον ορο $W_2'(k)a^2$ και σκεπτομενοι ομοια για τη δευτερη εξισωση Whitham καταληγουμε τελικα στο συστημα

$$k_t + W_0'(k)k_x + W_2(k)(a^2)_x = 0 \tag{10}$$

και

$$(a^2)_t + W_0'(k)(a^2)_x + W_0"(k)a^2k_x = 0. \tag{11}$$

Αυτες ειναι οι εξισωσεις Whitham στην μη γραμμικη περιπτωση (π.χ. KdV, NLS).