

Αριθμητική Ανάλυση

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Παράδοση: 8/11/2021

1. Θεωρούμε $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $\det(A) \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, και το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα $Ax = b$. Επίσης θεωρούμε μια διάσπαση του A σε $A = P - N$, με P αντιστρέψιμο και το επαναληπτικό σχήμα

$$Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \quad k \geq 0, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

Αν $\|\cdot\|$, μια φυσική νόρμα πινάκων και $\|A^{-1}N\| < 1/2$ να δειχθεί ότι $x^{(k)} \rightarrow x$, $k \rightarrow \infty$

2. Για την λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

θεωρούμε την ακόλουθη επαναληπτική μέθοδο

$$x^{(k+1)} = B(\theta)x^{(k)} + g(\theta), \quad k \geq 0,$$

με $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ δοσμένο και $\theta \in \mathbb{R}$. Αν

$$B(\theta) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{bmatrix}, \quad g(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix}$$

- (i.) Δείξτε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, αν $x \in \mathbb{R}$ η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ τότε

$$x = B(\theta)x + g(\theta).$$

- (ii.) Βρείτε για ποιες τιμές του θ η μέθοδος συγκλίνει καθώς και τη βέλτιστη τιμή θ για την οποία έχουμε την ταχύτερη σύγκλιση.

3. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι για $1 \leq 2\alpha < 2$ η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει, ενώ η Jacobi αποκλίνει.