Αριθμητική Ανάλυση

Ασκήσεις (όχι για παράδοση)

1. Επαναληπτικές μέθοδοι

1. Θεωρούμε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\det(A) \neq 0$ $b \in \mathbb{R}$, και το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα $Ax = b$. Επίσης θεωρούμε μια διάσπαση του A σε $A = P - N$, με P αντιστρέψιμο και το επαναληπτικό σχήμα
$$Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \quad k \geq 0, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$
Αν $\|\cdot\|$, μια φυσική νόρμα πινάκων και $\|A^{-1}N\| < 1/2$ να δειχθεί ότι $x^{(k)} \to x$, $k \to \infty$
2. Για την λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$, με
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
θεωρούμε την ακόλουθη επαναληπτική μέθοδο
$$x^{(k+1)} = B(\theta)x^{(k)} + g(\theta), \quad k \geq 0,$$
με $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ δοσμένο και $\theta \in \mathbb{R}$. Αν
$$B(\theta) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{bmatrix}, \quad g(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix}$$
   (α΄) Δείξτε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, αν $x \in \mathbb{R}$ η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ τότε
   $$x = B(\theta)x + g(\theta).$$
   (β΄) Βρείτε για ποιες τιμές του θ η μέθοδος συγκλίνει καθώς και τη βέλτιστη τιμή θ για την οποία έχουμε την ταχύτερη σύγκλιση.
3. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$
Δείξτε ότι για $1 \leq 2\alpha < 2$ η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει, ενώ η Jacobi αποκλίνει.

4. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι αντίστοιχες μέθοδοι Jacobi Gauss–Seidel.
5. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι αντίστοιχες μέθοδοι Jacobi Gauss–Seidel.
6. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι αντίστοιχες μέθοδοι Jacobi Gauss–Seidel.
7. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και } b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι αντίστοιχες μέθοδοι Jacobi και Gauss–Seidel και να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις καθε μιας με αρχικό διάνυσμα $x^(0) = (1, 1, 1)^T$.
8. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε
(α΄) Η αντίστοιχη μέθοδος Jacobi να συγκλίνει, και
(β΄) Η αντίστοιχη μέθοδος Gauss-Seidel να συγκλίνει
9. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$
Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η αντίστοιχη μέθοδος Jacobi να συγκλίνει.

10. (α΄) Να αποδειχθεί ότι ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Gauss-Seidel έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή ίση με το μηδέν
    (β΄) Να αποδειχθεί ότι αν ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Gauss-Seidel έχει μια ιδιοτιμή ίση με τη μονάδα, τότε ο αρχικός πίνακας A του γραμμικού συστήματος είναι μή αντιστρέψιμος.
11. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$
Να αποδειχθεί ότι η μέθοδος Jacobi αποκλίνει
12. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss–Seidel
13. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss–Seidel
14. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss–Seidel
15. Δείξτε ότι δύο διαδοχικά υπόλοιπα της μεθόδου απότομης καθόδου για τη λύση του $Ax = b$ είναι ορθογώνια, δηλαδή $(r_k, r_{k+1}) = 0$, $k \geq 0$. Επίσης ότι τα διανύσματα $x_{k+1} - x_k, x_k - x_{k-1}$ είναι ορθογώνια.

2. Μη-γραμμικές

1. Αποδείξτε ότι αν $f(x_*) = f'(x_*) = 0$ και $f''(x_*) \neq 0$, τότε η μέθοδος των Newton–Raphson συγκλίνει γραμμικά με $\lim_{k\to\infty} e_{k+1}/e_k = 1/2$.
2. Ποιά είναι η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου των Newton-Raphson για τη λύση της εξίσωσης $x^3 = 0$; Για την εξίσωση $x + x^4 = 0$;
3. Εκτελέστε μερικά βήματα της μεθόδου του Newton για τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$ με $x_0 = 2$. Σε ποιά ρίζα φαίνεται να συγκλίνει η μέθοδος του Newton; Τι συμβαίνει αν $x_0 = 1$;
4. Βρείτε την ταχύτητα σύγκλισης της ακολουθίας $x_k = 1 + (0.9)^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Είναι η σύγκλιση γραμμική;

5. Ποιά είναι η ταχύτητα σύγκλισης της ακολουθίας $x_k = 1 + 1/k!$, $k = 0, 1, \ldots$;
6. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Newton για να υπολογίσετε τον αριθμό $1/a$, για δεδομένο $a > 0$. Εκτελέστε μερικά βήματα της μεθόδου για $a = 9$, ξεκινώντας με $x_0 = 0.1$. Ποιά βλέπετε να είναι η ταχύτητα σύγκλισης; Υπόδειξη: Σκεφτείτε τη συνάρτηση $f(x) = ax - 1$.
7. Υλοποιήστε τη μέθοδο του Newton σε ένα υπολογισικό σύστημα που εκτελεί αριθμητική διπλής ακρίβειας και δοκιμάστε το πρόγραμμά σας στις παρακάτω συναρτήσεις με τις δεδομένες αρχικές τιμές:
   (α΄) $f(x) = \sin x - \cos x$, με $x_0 = 1$
   (β΄) $f(x) = \sin x - \cos 2x$, με $x_0 = 1$
   (γ΄) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$, με $x_0 = 2$
8. Βρείτε (υπολογιστικά) μια αρχική τιμή x_0 για την οποία η μέθοδος του Newton για τη συνάρτηση $f(x) = \arctan x$ παράγει την ακολουθία προσεγγίσεων $x_1 = -x_0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = -x_0, \ldots$.
9. Έστω $f(x) = (x-3)^3$ για $x \in [1, 5]$. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Newton με αρχική τιμή $x_0 = 4$ για να προσεγγίσετε την προφανή ρίζα $\xi = 3$. Δείξτε ότι η σύγκλιση είναι γραμμική.
10. Βρείτε μια προσέγγιση του $\sqrt{a}$, $a > 0$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Newton. Δείξτε ότι συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 > 0$.
11. Για $a > 0$ και δεδομένες αρχικές τιμές x_0, x_1 ορίζουμε την ακολουθία

$$x_{k+1} = \frac{a + x_{k-1}x_k}{x_{k-1} + x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

    Χρησιμοποιήστε τη μέθοδος της τέμνουσας για να δείξετε ότι η ακολυθία αυτή συγκλίνει στο $\sqrt{a}$.
12. Έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$ με $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε μια συνάρτηση με τις συγκεκριμένες ιδιότητες η οποία δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η f έχει μια ρίζα ξ, τότε αυτή είναι μοναδική. Τέλος, δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ η μέθοδος του Newton συγκλίνει και η σύγκλιση είναι τετραγωνική.
13. Υποθέστε ότι η f' είναι μονότονη και δεν αλλάζει πρόσημο. Δείξτε ότι η ακολουθία της μεθόδου του Newton για την προσέγγιση της ρίζας ξ είναι είτε μονότονα φθίνουσα, δηλαδή $\xi < x_{k+1} < x_k$, είτε μονότονα αύξουσα, δηλαδή $x_k < x_{k+1} < \xi$.
14. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & \text{αν } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{αν } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

    Δείξτε ότι στο $(0, 0)$ υπάρχουν οι $f_{x_1}(0, 0)$ και $f_{x_2}(0, 0)$ όμως η f δεν είναι Gâteaux ή Fréchet παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$

15. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4} & \text{αν } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{αν } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Δείξτε ότι στο $(0,0)$ δεν είναι Fréchet παραγωγίσιμη.

16. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_2 e^{-x_1^{-2}} \frac{1}{x_2^2 + e^{-2x_1^{-2}}} & \text{αν } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{αν } x_1 = 0, \end{cases}$$

Δείξτε ότι στο $(0,0)$ δεν είναι Fréchet παραγωγίσιμη.

3. Διαφορικές Εξισώσεις

1. Θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

με την προφανή μοναδική λύση $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, η οποία ικανοποιεί τον νόμο διατήρησης

$$x^2(t) + y^2(t) = 1, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Θεωρήστε τη μέθοδο του Euler για το σύστημα (1) με σταθερό $h > 0$. Δείξτε ότι *δεν* ικανοποιεί το διακριτό ανάλογο της (2), δηλαδή ότ $(x^n)^2 + (y^n)^2 \neq 1$ αν $n > 1$. Μάλιστα, δείξτε ότι, για σταθερό h, $\lim_{n\to\infty}[(x^n)^2 + (y^n)^2] = \infty$.

2. Εξετάστε αν υπάρχει διακριτό ανάλογο της (2) για την προσεγγιστική λύση του συστήματος (1) με τη μέθοδο

$$\begin{cases} x^{n+1} - x^n = -hy^n, \quad n \geq 0, \\ y^{n+1} - y^n = hx^{n+1}, \quad n \geq 0, \\ x^0 = 1, \ y^0 = 0. \end{cases}$$

3. Εξετάστε αν υπάρχει διακριτό ανάλογο της (2) για την προσεγγιστική λύση του συστήματος (1) με την *πεπλεγμένη μέθοδο του Euler*

$$\begin{cases} x^{n+1} - x^n = -hy^{n+1}, \quad n \geq 0, \\ y^{n+1} - y^n = hx^{n+1}, \quad n \geq 0, \\ x^0 = 1, \ y^0 = 0. \end{cases}$$

4. Εξετάστε αν υπάρχει διακριτό ανάλογο της (2) για την προσεγγιστική λύση του συστήματος (1) με τη *μέθοδο του τραπεζίου*
$$\begin{cases} x^{n+1} - x^n = -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}), \quad n \geq 0, \\ y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}), \quad n \geq 0, \\ x^0 = 1,\ y^0 = 0. \end{cases}$$
5. Έστω $\sigma(z) = z^2$. Βρείτε πολυώνυμο $p(z)$ δευτέρου βαθμού έτσι ώστε η αντίστοιχη πολυβηματική μέθοδος να έχει τάξη ακρίβειας 2. Είναι ευσταθής;
6. Έστω $\sigma(z) = z^2$. Βρείτε πολυώνυμο $p(z)$ τρίτου βαθμού έτσι ώστε η αντίστοιχη πολυβηματική μέθοδος να έχει τάξη ακρίβειας 3. Είναι ευσταθής;
7. Έστω $p(z) = z^4 - 1$. Βρείτε πολυώνυμο $\sigma(z)$ τέταρτου βαθμού έτσι ώστε η αντίστοιχη πολυβηματική μέθοδος να έχει μέγιστη τάξη ακρίβειας. Ποιά είναι η τάξη ακρίβειας;
8. Ποιές μεθόδους περιγράφουν τα μητρώα

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$