Αριθμητική επίλυση Δ.Ε.

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t)=f(t,y(t)),\quad t\in[a,b],\quad y(0)=y_0$$

θεωρήσαμε άμεσες μεθόδους όπως του Euler αλλά και πεπλεγμένες μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$, στα σημεία $t_n=a+nh, n=0,\dots,N$, με βήμα $h=\dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n), n=0,\dots,N$.

Άμεση Euler

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n),\quad n=0,\dots,N-1.$$

Πεπλεγμένη Euler

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},y_{n+1}),\quad n=0,\dots,N-1.$$

Μέθοδος του τραπεζίου

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(t_{n+1},y_{n+1})+f(t_n,y_n)),\quad n=0,\dots,N-1.$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε την προσέγγιση αν θεωρήσουμε μια πεπλεγμένη μέθοδο θα χρειαστεί να βρούμε τη ρίζα μιας μη-γραμμικής συνάρτησης σε κάθε βήμα. Αν όμως η συνάρτηση f είναι γραμμική ως προς y, π.χ. $f(t,y)=g(t)y$, τότε οι παραπάνω πεπλεγμένες μέθοδοι υλοποιούνται εύκολα, π.χ. **Πεπλεγμένη Euler**

$$y_{n+1}=\frac{1}{1-hg(t_{n+1})}y_n,\quad n=0,\dots,N-1.$$

η **Μέθοδος του τραπεζίου**

$$y_{n+1}=\frac{1+h\dfrac{g(t_n)}{2}}{1-h\dfrac{g(t_{n+1})}{2}}y_n,\quad n=0,\dots,N-1.$$

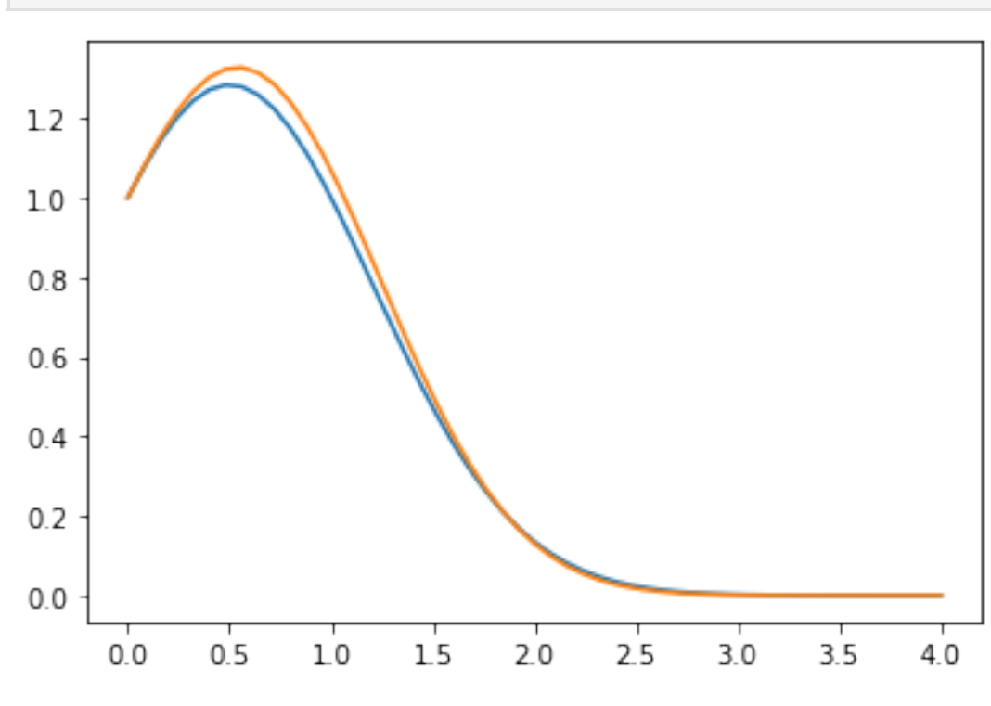
Παράδειγμα 1: Έστω $y(t)=e^{0.25-(t-0.5)^2}$, στο $[0,4]$ η οποία είναι λύση στο

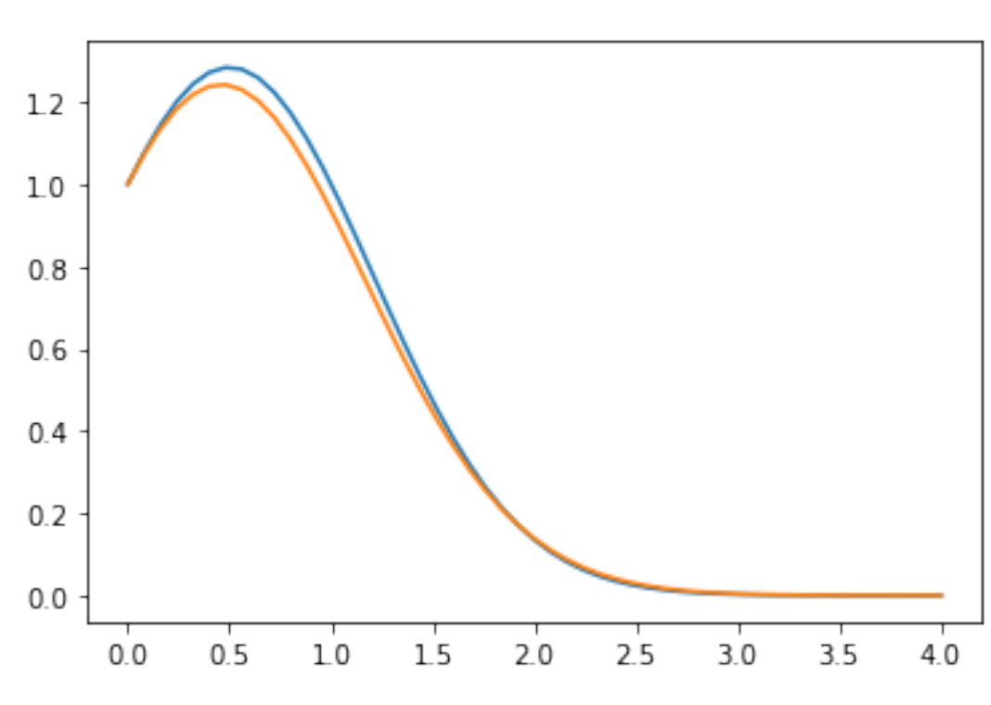
$$y'(t)=(1-2t)y(t),\quad t\in[0,4],\quad y(0)=1.$$

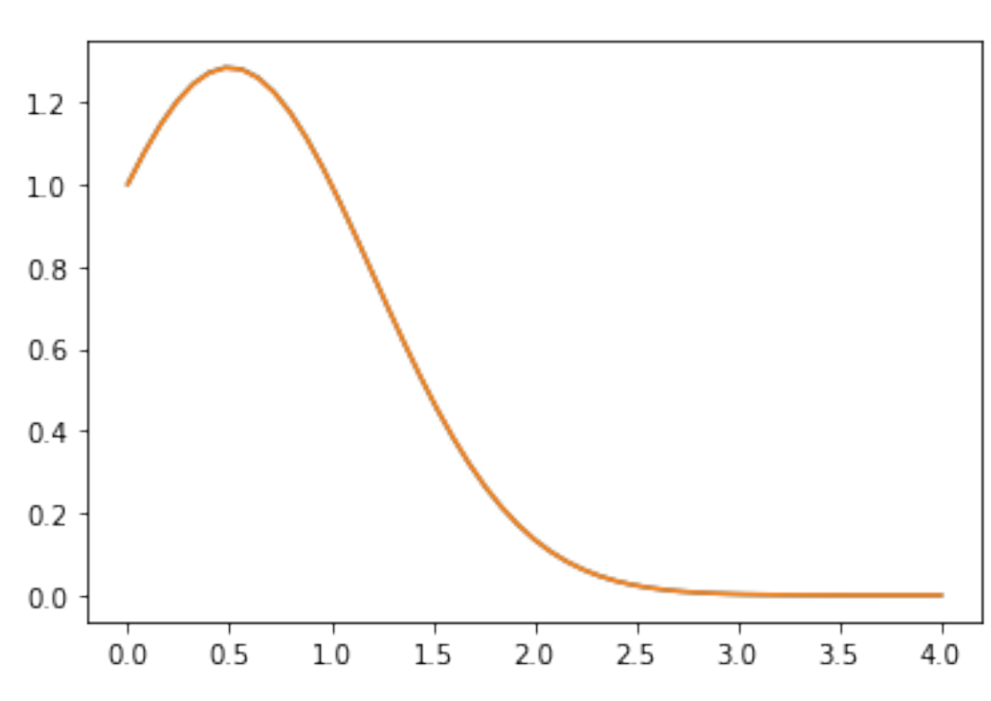
Θεωρείστε την άμεση μέθοδο του Euler, την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο τραπεζίου. Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,4]$ σε $N+1$ σημεία. Για $N=50$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνουν οι τρεις μέθοδοι, δημιουργείστε τις γραφικές παράστασεις της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα $[0,4]$. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N}|y_n-y(t_n)|$. Για $N=100,200,300,400,500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για κάθε μια από τις τρεις μεθόδους

In [1]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def y_exact(t):
    s=np.exp(0.25-(t-0.5)**2)
    return s

def f(t,y):
    s=(1-2*t)*y
    return s

def g(t):
    s=(1-2*t)
    return s



####Euler
N=50
t=np.linspace(0,4,N+1)
h=t[1]-t[0]

y=np.zeros(N+1)
y[0]=1

for i in range(N):
    y[i+1]=y[i]+h*f(t[i],y[i])


plt.plot(t,y_exact(t),t,y)
plt.show()
#e4=max(abs(y_exact(t)-y))
#print(e4)


##### Πεπλεγμένη Euler
for i in range(N):

    y[i+1]=y[i]/(1-h*g(t[i+1]))

e=max(abs(y_exact(t)-y))
plt.plot(t,y_exact(t),t,y)
plt.show()


## Τραπεζίου
for i in range(N):

    y[i+1]=y[i]*(1+h*g(t[i])/2)/(1-h*g(t[i+1])/2)

e=max(abs(y_exact(t)-y))
plt.plot(t,y_exact(t),t,y)
plt.show()

###########

err=np.zeros(5)  #array για τα σφάλματα
N=[100,200,300,400,500]  #διαμερίσεις
N_len=len(N) #μήκος N
for j in range(N_len):

    y=np.zeros(N[j]+1)
    y[0]=1

    t=np.linspace(0,4,N[j]+1)
    h=t[1]-t[0]

    for i in range(N[j]):
      y[i+1]=y[i]+h*f(t[i],y[i])

    err[j]=max(abs(y_exact(t)-y)) #σφάλμα
    print('Μέγιστο σφάλμα για N=',N[j],':',err[j])

print('Πειραματική ταξη σύγκλισης μεθόδου Euler')
for i in range(N_len-1):
    p=np.log(err[i+1]/err[i])/np.log(N[i]/N[i+1])
    print(p)


### Πεπλεγμένη Euler
err=np.zeros(5)  #array για τα σφάλματα
N=[100,200,300,400,500]  #διαμερίσεις
N_len=len(N) #μήκος N
for j in range(N_len):

    y=np.zeros(N[j]+1)
    y[0]=1

    t=np.linspace(0,4,N[j]+1)
    h=t[1]-t[0]

    for i in range(N[j]):
      y[i+1]=y[i]/(1-h*g(t[i+1]))

    err[j]=max(abs(y_exact(t)-y)) #σφάλμα
    print('Μέγιστο σφάλμα για N=',N[j],':',err[j])

print('Πειραματική ταξη σύγκλισης μεθόδου Πεπλεγμένη Euler')
for i in range(N_len-1):
    p=np.log(err[i+1]/err[i])/np.log(N[i]/N[i+1])
    print(p)

### Τραπεζίου
err=np.zeros(5)  #array για τα σφάλματα
N=[100,200,300,400,500]  #διαμερίσεις
N_len=len(N) #μήκος N
for j in range(N_len):

    y=np.zeros(N[j]+1)
    y[0]=1

    t=np.linspace(0,4,N[j]+1)
    h=t[1]-t[0]

    for i in range(N[j]):
      y[i+1]=y[i]*(1+h*g(t[i])/2)/(1-h*g(t[i+1])/2)

    err[j]=max(abs(y_exact(t)-y)) #σφάλμα
    print('Μέγιστο σφάλμα για N=',N[j],':',err[j])

print('Πειραματική ταξη σύγκλισης μεθόδου Τραπεζίου')
for i in range(N_len-1):
    p=np.log(err[i+1]/err[i])/np.log(N[i]/N[i+1])
    print(p)
```







```
Μέγιστο σφάλμα για N= 100 : 0.034336411250643684
Μέγιστο σφάλμα για N= 200 : 0.01705849284890526
Μέγιστο σφάλμα για N= 300 : 0.011347840786325891
Μέγιστο σφάλμα για N= 400 : 0.008501683420745643
Μέγιστο σφάλμα για N= 500 : 0.006796928524881007
Πειραματική ταξη σύγκλισης μεθόδου Euler
1.009249073246151
1.0053163616951728
1.0037583881814047
1.002912113953019
Μέγιστο σφάλμα για N= 100 : 0.03345077565804466
Μέγιστο σφάλμα για N= 200 : 0.016837019545659082
Μέγιστο σφάλμα για N= 300 : 0.01124966549226869
Μέγιστο σφάλμα για N= 400 : 0.008446801039597274
Μέγιστο σφάλμα για N= 500 : 0.0067619350308429915
Πειραματική ταξη σύγκλισης μεθόδου Πεπλεγμένη Euler
0.9904028864140126
0.994516184744095
0.9960669333679791
0.9970205140387308
Μέγιστο σφάλμα για N= 100 : 0.00023478955730626971
Μέγιστο σφάλμα για N= 200 : 5.884425177127284e-05
Μέγιστο σφάλμα για N= 300 : 2.6148473388110105e-05
Μέγιστο σφάλμα για N= 400 : 1.4712359181379142e-05
Μέγιστο σφάλμα για N= 500 : 9.415201378093485e-06
Πειραματική ταξη σύγκλισης μεθόδου Τραπεζίου
1.9963948464740422
2.000426983764215
1.9990919270159062
2.0003372161207764
```

Μη γραμμική f ως προς y

Σε αυτή την περίπτωση για να υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας μια πεπλεγμένη μέθοδο πρέπει να βρούμε τη λύση μιας μη γραμμικής εξίσωσης σε κάθε βήμα. Μια μέθοδος είναι π.χ. η μέθοδος του σταθερού σημείου.

Μέθοδος σταθερού σημείου

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης $x^\star=g(x^\star)$, για x_0 δοσμένο δημιουργούμε την ακολουθία x_k

$$x_{k+1}=g(x_k), n=0,\dots$$

Αν x_k συγκλίνει τότε $x_k\to x^\star$. Επειδή δεν μπορούμε να βρούμε ακριβώς το $x^\star$ αλλά μια προσέγγιση, πρέπει ο αλγόριθμος να σταματά μετά από κάποια βήματα. Ένα κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου είναι να θέσουμε ότι η διαφορά δυο συνεχόμενων προσεγγίσεων x_k να γίνει μικρότερη από έναν προκαθορισμένο αριθμό TOL. Ετσι τερματίζουμε την επαναλαληπτική διαδικασια και δεχομαστε ως προσέγγιση της $x^\star$ το x_k όταν $|x_k-x_{k-1}|\le TOL$. Επειδή μπορεί να δημιουργηθούν και άλλα σφάλματα και το προηγούμενο κριτήριο να μην ικανοποιείτε ποτέ, θέτουμε και για ασφάλεια ένα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $Nmax$. Δηλαδή δεχόμαστε ως $x^\star$ είτε το x_k που πρώτη φορά ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού ή το x_{Nmax}.

Παράδειγμα(για την εύρεση ενός σταθερού σημείου): Έστω $g(t)=\cos(t)$, στο $[0,1]$. Θέλουμε να βρούμε το σημείο $x^\star\in[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$x^\star=\cos(x^\star).$$

Φτιάξτε μια επαναληπτική διαδικασία ώστε να προσεγγίσετε το $x^\star$, ξεκινώντας από $x_0=1$. Για κριτήρια τερματισμού, θέσετε μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $Nmax=500$ και $TOL=10^{-8}$.

In [2]:

```python
def g(x):
    s=np.cos(x)
    return s

x0=1 #αρχική προσέγγιση

tol=1.e-8
Nmax=500
k=0

err=1. #θετουμε αρχικά το σφάλμα ίσον με 1 για να ξεκινήσει η διαδικασία

while (err>tol) and (k<=Nmax):
    x=g(x0)  # επόμενη προσέγγιση
    err=abs(x-x0) #σφάλμα

    k=k+1 # αυξάνουμε τον μετρητή βημάτων
    x0=x  # θέτουμε τη νέα προσέγγιση ως την παλιά για το επόμενο βήμα


print('Η προσεγγιση του σταθερου σημείου είναι:',x)
print('Αριθμός βημάτων:',k)
```

```
Η προσεγγιση του σταθερου σημείου είναι: 0.7390851366465718
Αριθμός βημάτων: 46
```

Πεπλεγμένη Euler

Μια πεπλεγμένη μέθοδος είναι η **πεπλεγμένη Euler**

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},y_{n+1}),\quad n=0,\dots,N-1.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή y_{n+1} χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η f είναι μη γραμμική ως προς y) μια μη γραμμική εξίσωση. Ένας τρόπος είναι χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία όπως στον υπολογισμό του σταθερού σημείου. Έτσι, σε κάθε βήμα του αλγορίθμου της πεπλεγμένης Euler, για τον υπολογισμό δηλαδή του y_{n+1} θέτουμε

$$g(s)=y_n+hf(t_{n+1},s),$$

και αναζητούμε $s^\star$ τέτοιο ώστε

$$s^\star=g(s^\star).$$

Επειδή μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το $s^\star$, την προσέγγιση s_k που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία του σταθερού σημείου, θα θέσουμε ως y_{n+1}, δηλαδή θεωρούμε την ακολουθία

$$s_{k+1}=g(s_k), k=0,\dots,$$

για δοσμένο tol, υπολογίζουμε το s_k τέτοιο ώστε $|s_k-s_{k-1}|\le tol$ και θέτουμε

$$y_{n+1}=s_k$$

και προχωράμε για την επόμενη προσέγγιση της μεθόδου πεπεπλεγμένης Euler.

</p>

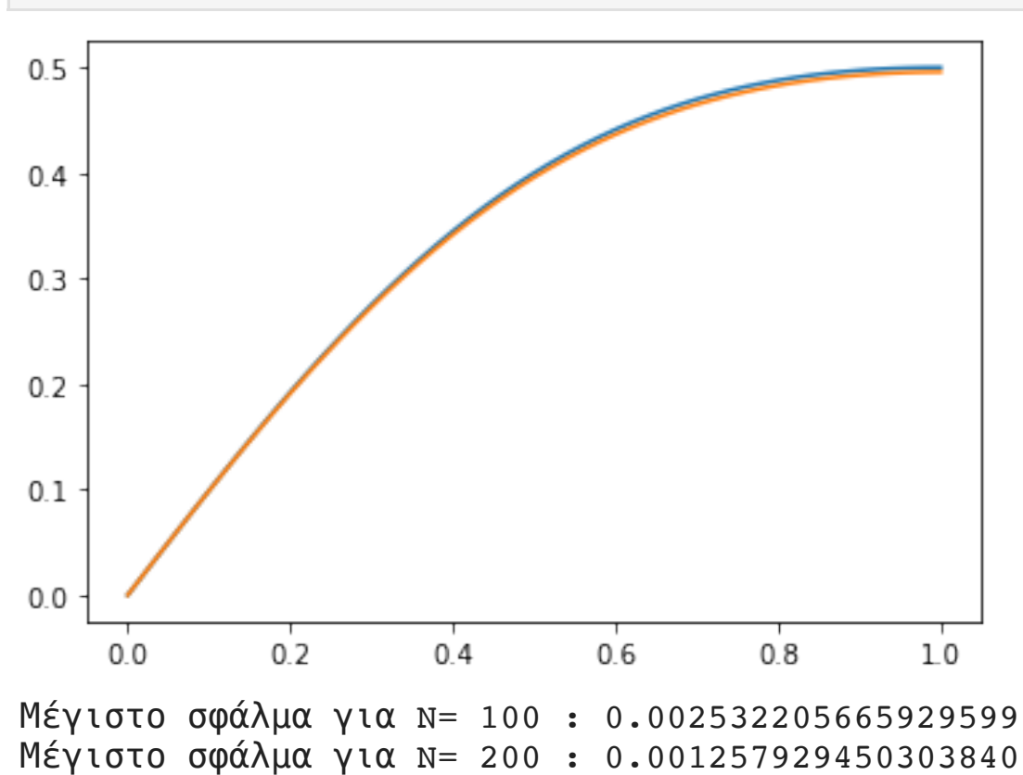
Παράδειγμα: θεωρείστε την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler για τον υπολογισμό της λύσης του προβλήματος

$$y'(t)=\frac{1}{1+t^2}-2(y(t))^2,\quad t\in[0,1],\quad y(0)=0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N}|y_n-y(t_n)|$. Για $N=100,200,300,400,500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για την πεπλεγμένη μεθόδο του Euler. Θεωρείστε για κάθε βήμα, μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $Nmax=500$ και $TOL=10^{-8}$

In [4]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def y_exact(t):
    s=t/(1+t**2)
    return s

def f(t,y):
    s=1/(1+t**2)-2*y**2
    return s

def g(t,yn,x):
    s=yn+h*f(t,x)
    return s



#### Πεπλεγμένη Euler (Μη γραμμική f ως προς y)
N=50
t=np.linspace(0,1,N+1)
h=t[1]-t[0]

y=np.zeros(N+1)
y[0]=0

tol=1.e-3
Nmax=500

for i in range(N):

    x0=y[1] #αρχική προσέγγιση στο i-βημα
    k=0

    err=1. #θετουμε αρχικά το σφάλμα ίσον με 1 για να ξεκινήσει η διαδικασία

    while (err>tol) and (k<=Nmax):
        x=g(t[i+1],y[i],x0)  # επόμενη προσέγγιση
        err=abs(x-x0) #σφάλμα

        k=k+1 # αυξάνουμε τον μετρητή βημάτων
        x0=x;
    y[i+1]=x  #τελειώνει η επαναληψη σταθερου σημειου και θέτουμε τη προσεγγιση που βρηκαμε
    ###########   ως την προσεγγιση της λύσης στο σημείο t[i+1]


plt.plot(t,y_exact(t),t,y)
plt.show()


err_y=np.zeros(5)  #array για τα σφάλματα
N=[100,200,300,400,500]  #διαμερίσεις
N_len=len(N) #μήκος N

tol=1.e-3
Nmax=500

for j in range(N_len):

    y=np.zeros(N[j]+1)
    y[0]=0

    t=np.linspace(0,1,N[j]+1)
    h=t[1]-t[0]

    for i in range(N[j]):
      x0=y[i] #αρχική προσέγγιση στο i-βημα
      k=0

      err=1. #θετουμε αρχικά το σφάλμα ίσον με 1 για να ξεκινήσει η διαδικασία

      while (err>tol) and (k<=Nmax):
        x=g(t[i+1],y[i],x0)  # επόμενη προσέγγιση
        err=abs(x-x0) #σφάλμα

        k=k+1 # αυξάνουμε τον μετρητή βημάτων
        x0=x

      y[i+1]=x  #τελειώνει η επαναληψη σταθερου σημειου και θέτουμε τη προσεγγιση που βρηκαμε
    ###########   ως την προσεγγιση της λύσης στο σημείο t[i+1]

    err_y[j]=max(abs(y_exact(t)-y)) #σφάλμα
    print('Μέγιστο σφάλμα για N=',N[j],':',err_y[j])

print('Πειραματική ταξη σύγκλισης μεθόδου Πεπλεγμένη Euler')
for i in range(N_len-1):
    p=np.log(err_y[i+1]/err_y[i])/np.log(N[i]/N[i+1])
    print(p)
```



```
Μέγιστο σφάλμα για N= 100 : 0.002532205665929599
Μέγιστο σφάλμα για N= 200 : 0.0012579294503038407
Μέγιστο σφάλμα για N= 300 : 0.0008113096545923071
Μέγιστο σφάλμα για N= 400 : 0.0005648079805526951
Μέγιστο σφάλμα για N= 500 : 0.0004013718057396254
Πειραματική ταξη σύγκλισης μεθόδου Πεπλεγμένη Euler
1.0093435729225608
1.0816530118055891
1.2589035543350107
1.530842454811711
```

Παράδειγμα: Επαναλάβετε το πρόβλημα για τη μέθοδο του τραπεζίου.

In [ ]: