Αριθμητική Ανάλυση

Εργαστηριακή Άσκηση 2

Παράδοση: 17/1/2022

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε άμεσες και πεπλεγμένες μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου και άλλες.

Αν η Δ.Ε. είναι 2ης τάξεως π.χ.

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t),$$

τότε μπορούμε να τη διατυπώσουμε ως ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξεως και προσεγγίσουμε τη λύση της χρησιμοποιώντας μεθόδους που μελετήσαμε για πρώτης τάξεως διαφορικές εξισώσεις.

Θεωρούμε τη παρακάτω διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως, η οποία περιγράφει τη κίνηση ενός εκρεμούς με βάρος m που κρέμεται από μια ράβδο μήκους l,

$$ml\frac{d^2\theta(t)}{dt} = -mg\sin(\theta(t)),$$

όπου $\theta \in (0, \pi/2)$ συμβολίζουμε τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κάθετο από το σημείο στήριξης και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα μοναδικά χρειαζόμαστε την αρχική μετατόπιση $\theta(0)$ και την αρχική ταχύτητα $\theta'(0)$. Αν θεωρήσουμε ότι

$$x(t) = \theta(t) \text{ και } y(t) = \theta'(t), \quad t \geq 0$$

τότε οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \quad t \geq 0 \\ y'(t) &= -\frac{g}{l}\sin(x(t)), \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

και $x(0) = \theta(0), y(0) = \theta'(0)$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που η γωνία $\theta(t)$ είναι μικρή τότε $\sin\theta$ περίπου ίση θ και η διαφορική εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$ml\frac{d^2\theta(t)}{dt} = -mg\theta(t), \quad t \geq 0.$$

Σε αυτή τη περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς τη περίοδο της κίνησης ότι είναι $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Ερώτημα 1. Θεωρήστε την άμεση μέθοδο του Euler για τη λύση του παραπάνω προβλήματος (1). Θεωρήστε ότι το εκρεμές έχει μήκος $l = 1$, η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10$, αρχικά έχει μετατοπιστεί κατά 5 μοίρες και το αφήνουμε να κινηθεί (η αρχική ταχύτητα είναι 0). Βρείτε τη μετατόπιση του από τον κάθετο άξονα για το χρονικό σημείο $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, αν θεωρείστε έναν διαμερισμό με $N = 100$. Δημιουργήστε το γράφημα της προσεγγιστικής λύσης $\theta(t)$. Επανέρχεται το σώμα στην αρχική θέση για $t = T$; Αν $Tmax$ είναι ο χρόνος που ξαναέχει την μέγιστη απομάκρυνση, ποιά είναι η διαφορά $|\theta(0) - \theta(Tmax)|$. Επαναλάβετε για διαμερισμους με $N = 200, 400, 800$. (Η 1 μοίρα είναι ίση με $\dfrac{\pi}{180}$.)

Ερώτημα 2. Επαναλάβετε το Ερώτημα 1 για τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο του τραπεζίου. (αρ. επαναλήψεων της επαναληπτικής μεθόδου που θα θεωρήσετε $NMAX = 50$ και ακρίβεια $tol = 10^{-10}$)

Ερώτημα 3. Επαναλάβετε τα Ερωτήματα 1 και 2, με $\theta(0)$ τώρα 60 μοίρες. Η περίοδος τώρα δεν θα δίνεται από τον τύπο $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Θεωρήστε το χρονικό διάστημα $[0, 2.5T]$ και βρείτε για ποιο περίπου χρόνο επιστρέφει στην αρχική θέση $\theta(0)$. Αυτός ο χρόνος θα είναι ο $Tmax$. Ποιό είναι το σφάλμα $|\theta(0) - \theta(Tmax)|$, για $= 100, 200, 400, 800$. Κατασκευάστε τον αντίστοιχο πίνακα αποτελεσμάτων, όπου θεωρήστε τα σφάλματα $|\theta(0) - \theta(Tmax)|$ και $|\theta'(0) - \theta'(Tmax)|$ (Παρατήρηση: Θα θεωρήσετε μεγαλύτερο χρόνο από ότι πριν, γιατί ο χρόνος της περιόδου θα είναι μεγαλύτερος από $T = 2\pi\sqrt{l/g}$).

Για το ερώτημα 1 δημιουργείστε ένα πίνακα αποτελεσμάτων της παρακάτω μορφής. Για τα υπόλοιπα ερωτήματα φτιάξτε αντίστοιχους πίνακες

Πίνακας 1. Μέθοδος: Άμεση Euler, $\theta(0) = 5$ μοίρες

N	Σφάλμα $\lvert\theta(0) - \theta(T_{max})\rvert$	Σφάλμα $\lvert\theta'(0) - \theta'(T_{max})\rvert$
100		
200		
400		
800		