

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΣ 3
ΜΑΘ 231 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΑΝΑΛΥΣΗ
ΘΕΜΑΤΑ Β

Τα Θέματα 1 και 2 αποτελούν την Πρόοδο 3.
Τα Θέματα 1 έως και 5 αποτελούν το Τελικό Διαγώνισμα.

Όσοι επιθυμούν να βαθμολογηθούν για την 3η πρόοδο πρέπει να γράψουν τα θέματα 1 και 2 και να παραδώσουν την κόλλα τους σε 1 ώρα.
Όσοι επιθυμούν να βαθμολογηθούν μόνο με βάση το τελικό διαγώνισμα πρέπει να γράψουν τα θέματα 1 έως 5 και να παραδώσουν την κόλλα τους σε 2 ώρες και 30 λεπτά.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε ότι υπάρχουν βάρη w_1, w_2, w_3 , τέτοια ώστε ο τύπος ολοκλήρωσης

$$Q(f) = w_1 f(0) + w_2 f(1) + w_3 f(2), \quad f \in C[0, 1],$$

να υπολογίζει ακριβώς στο $[0, 2]$ το $\int_0^2 x f(x) dx$, για f πολυώνυμο μέχρι και δεύτερου βαθμού, δηλαδή

$$\int_0^2 x f(x) dx - Q(f) = 0, \quad \forall f \in \mathbb{P}_2.$$

2. Η συνάρτηση f ποιές ιδιότητες μιας φυσικής κυβικής spline έχει και ποιές δεν έχει;

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) + (x+1)^3, & x \in [-1, 0] \\ 4 - (x-1) - (x-1)^3, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

3. Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n και η παραγόμενη από αυτήν νόρμα στον $\mathbb{R}^{n \times n}$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $\kappa(A)$ ο δείκτης κατάστασης του A ως προς $\|\cdot\|$. Αν $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος πίνακας, αποδείξτε ότι

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - B\|}{\|A\|}$$

4. Αν οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχουν αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο τότε οι $A^2, A^T, A + B$, έχουν αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο; Αν ναι δικαιολογήστε την απάντησή σας, αν όχι, δώστε παράδειγμα.
5. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = xe^{x+3} + 3 = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 \in (-1, 0)$ και $\rho_2 = -3$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $x_n, n \geq 0$, που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$, συγκλίνει στην ρ_1 για κάθε $x_0 > -1$. Στη συνέχεια θεωρήστε τη μέθοδο σταθερού σημείου με $\phi(x) = -3e^{-(x+3)}$. Δείξτε ότι το σταθερό σημείο της ϕ αποτελεί και ρίζα της f . Βρείτε ένα διάστημα γύρω από τη ρίζα ρ_1 , για το οποίο η μέθοδος του σταθερού σημείου να συγκλίνει.

Ηράκλειο, 27 Ιουνίου 2013.

Καλή επιτυχία.