Σημειώσεις μαθήματος ΜΕΜ 106

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2020

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 1

Μήκος και ορθογωνιότητα

1.1 Μήκος διανύσματος στον $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε το $x = (x_1,\, x_2)$ ως το διάνυσμα συντεταγμένων του διανύσματος $\overrightarrow{OX}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς στο E^2. Ορίζουμε το μήκος $||x||$ ενός διανύσματος $x = (x_1,\, x_2)$ να είναι ίσο με το μήκος του γεωμετρικού διανύσματος $\overrightarrow{OX}$. Αφού οι άξονες του συστήματος αναφοράς είναι κάθετοι μεταξύ τους, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$||x||^2 = x_1^2 + x_2^2\,.$$

Ανάλογα, για το μήκος ενός διανύσματος στο χώρο E^3, με διάνυσμα συντεταγμένων $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα 2 φορές: εάν $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ και $u = (x_1,\, x_2,\, 0)$

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= ||u||^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\,. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του ανάστροφου, αυτό γράφεται

$$||x||^2 = x^T\, x\,.$$

Κατ' αναλογία, ορίζουμε το μήκος $||x||$ ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ &= x^T\, x\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1 Το μήκος του διανύσματος $x = (1,\, 2,\, -3)$ είναι $\sqrt{14}$:

$$\|x\|^2 = x^T x = [1\ 2\ -3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 1^2 + 2^2 + (-3)^2 = 14\,.$$

1.2 Ορθογώνια διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

Εκτός από τα μήκη, θέλουμε να ορίσουμε και γωνίες μεταξύ διανυσμάτων. Αργότερα θα μιλήσουμε για όλες τις γωνίες, αλλά προς το παρόν μας ενδιαφέρουν οι **ορθές γωνίες**. Πότε είναι δύο διανύσματα $x\,, y$ **ορθογώνια**;

Το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει και αντίστροφα: ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο **μόνον** όταν το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των 2 πλευρών. Μπορούμε να εργαστούμε στο $\mathbb{R}^n$, αλλά στην πραγματικότητα οι μετρήσεις θα είναι μέσα στο επίπεδο που περιέχει το τρίγωνο, δηλαδή μέσα στο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα x και y. Η γωνία $\angle(x,\, y)$ είναι ορθή εάν και μόνον εάν

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x - y||^2\,,$$

ή

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\,,$$

δηλαδή εάν και μόνον εάν

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0$$

ή

$$x^T y = 0\,.$$

Η ποσότητα $x^T y$ γενικεύει στους χώρους $\mathbb{R}^n$ το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που γνωρίζουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία.

Ορισμός 1.1. Δύο διανύσματα $x,\, y$ του $\mathbb{R}^n$ λέγονται **ορθογώνια** εάν το εσωτερικό τους γινόμενο $x^T y$ είναι 0.

Παράδειγμα 1.2 Το διάνυσμα $x = (2,\, 2,\, -1)$ είναι ορθογώνιο στο $y = (-1,\, 2,\, 2)$:

$$x^T y = [2\ 2\ -1]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα διάνυσμα είναι ορθογώνιο στον εαυτό του μόνον εάν έχει μηδενικό μήκος: $x^T x = 0$. Το μοναδικό τέτοιο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ είναι το 0.

Πρόταση 1.1 *Εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$ είναι μη μηδενικά και ορθογώνια μεταξύ τους, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός $c_1v_1 + \cdots + c_kv_k = 0$. Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με το v_1:

$$v_1^T(c_1v_1 + \cdots + c_kv_k) = v_1^T 0 = 0$$

Αλλά $v_1^T v_i = 0$ για κάθε $i \neq 1$, άρα έχουμε

$$v_1^T c_1 v_1 = c_1 ||v_1||^2 = 0$$

και εφόσον $||v_1|| \neq 0$, έχουμε $c_1 = 0$.

Παρόμοια, $c_i = 0$ για κάθε i, και συμπεραίνουμε οτι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

□

Είναι προφανές οτι δεν ισχύει το αντίστροφο: δυο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα δεν είναι υποχρεωτικά ορθογώνια.

Δραστηριότητα 1.1 Βρείτε τα μήκη και το εσωτερικό γινόμενο των $x = (1, 4, 0, 2)$ και $y = (2, -2, 1, 3)$.

Δραστηριότητα 1.2 Ποία ζεύγη από τα διανύσματα u_1, u_2, u_3, u_4 είναι ορθογώνια;

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.3 Ορθογώνιοι υπόχωροι στον $\mathbb{R}^n$

Στον $\mathbb{R}^3$, μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο όταν σχηματίζει ορθή γωνία με κάθε ευθεία του επιπέδου που την τέμνει.

Ανάλογα, δύο υπόχωροι V και W του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι **ορθογώνιοι** όταν **κάθε** διάνυσμα του V είναι ορθογώνιο σε **κάθε** διάνυσμα του W.

Παρατηρούμε οτι δύο επίπεδα W_1 και W_2 στο $\mathbb{R}^3$ που σχηματίζουν ορθή δίεδρη γωνία **δεν** ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη. Πράγματι, ας θεωρήσουμε μία βάση από δύο ορθογώνια διανύσματα σε κάθε επίπεδο, u_1, v_1 στο W_1, u_2, v_2 στο W_2. Εάν τα W_1 και W_2 ήταν ορθογώνια, τότε θα είχαμε 4 διανύσματα u_1, v_1, u_2, v_2 ορθογώνια μεταξύ τους. Από την Πρόταση 1.1 αυτά θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα. Αλλά στον $\mathbb{R}^3$ δεν υπάρχουν 4 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Θα συμβολίζουμε την ορθογωνιότητα δύο γραμμικών υπόχωρων U και V του $\mathbb{R}^n$ με $U \perp V$.

Παράδειγμα 1.3 Στο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε το επίπεδο V που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ και $v_2 = (1, 1, 0, 0)$. Το διάνυσμα $w = (0, 0, 4, 5)$ είναι ορθογώνιο προς τα v_1 και v_2. Συνεπώς η ευθεία W που παράγεται από το w είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ορθογώνιος προς τον V. Αλλά μέσα στο $\mathbb{R}^4$ υπάρχει χώρος για ακόμη έναν υπόχωρο ορθογώνιο στους V και W: το διάνυσμα $z = (0, 0, 5, -4)$ είναι ορθογώνιο προς τα v_1, v_2 και w. Η ευθεία U που παράγεται από το z είναι ορθογώνια προς τους υπόχωρους V και W:

$$U \perp V \, , \, U \perp W \, , \, V \perp W \, .$$

Δραστηριότητα 1.3 Δείξτε οτι οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z, \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ και $V = \langle(1, 1, 0)\rangle$ είναι ορθογώνιοι.

Δραστηριότητα 1.4 Βρείτε a τέτοιο ώστε οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$, $U = \langle(1, 1, a)\rangle$ και $V = \langle(1, a, 2)\rangle$ είναι ορθογώνιοι.

Πρόταση 1.2 *Δίδεται ένας $m \times n$ πίνακας A. Τότε*

α΄. Στο $\mathbb{R}^n$ ο χώρος γραμμών του A είναι ορθογώνιος στο μηδενόχωρο του A:

$$\mathcal{R}(A^T)\perp\mathcal{N}(A)$$

β΄. Στο $\mathbb{R}^m$ ο χώρος στηλών του A είναι ορθογώνιος στον αριστερό μηδενόχωρο του A:

$$\mathcal{R}(A)\perp\mathcal{N}(A^T)\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την πρώτη περίπτωση, αφού η δεύτερη προκύπτει εξετάζοντας τον ανάστροφο πίνακα A^T.

Θεωρούμε ένα $x \in \mathcal{N}(A)$ και ένα $v \in \mathcal{R}(A^T)$, και θέλουμε να δείξουμε οτι $v^T x = 0$.

Έχουμε $Ax = 0$. Εφόσον $v \in \mathcal{R}(A^T)$, το v είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών $r_1, \ldots r_m$ του A,

$$v = z_1 r_1 + \cdots + z_m r_m\,,$$

δηλαδή υπάρχει $z \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $v^T = z^T A$. Έχουμε

$$v^T x == (z^T A)x = z^T(Ax) = z^T 0 = 0\,.$$

□

1.4 Ορθογώνιο συμπλήρωμα

Υπενθυμίζουμε οτι οι διαστάσεις των θεμελιωδών υποχώρων ενός $m\times n$ πίνακα A ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\dim\mathcal{R}(A^T) + \dim\mathcal{N}(A) = n \tag{1.1}$$

$$\dim\mathcal{R}(A) + \dim\mathcal{N}(A^T) = m \tag{1.2}$$

Αυτή η παρατήρηση υποδεικνύει οτι ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος δεν είναι δύο οποιοιδήποτε ορθογώνιοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$: οι δύο υπόχωροι ‘γεμίζουν’ τον $\mathbb{R}^n$. Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά την κατάσταση. Αν W είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ορθογώνια σε όλα τα διανύσματα του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$, η Πρόταση 1.2 λέει οτι $\mathcal{N}(A) \subseteq W$.

Εύκολα όμως βλέπουμε οτι ισχύει και ο αντίθετος εγκλεισμός, $W \subseteq \mathcal{N}(A)$, δηλαδή ο μηδενόχωρος περιέχει κάθε διάνυσμα που είναι ορθογώνιο σε όλα τα διανύσματα του χώρου γραμμών. Πράγματι, εάν $x \in W$ τότε το x είναι ορθογώνιο σε κάθε γραμμή του A και $Ax = 0$. Αυτή η κατάσταση παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον ώστε να της δώσουμε ένα όνομα:

Ορισμός 1.2. Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα του V ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του V στον $\mathbb{R}^n$, και συμβολίζεται $V^\perp$:

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : w^T v = 0 \text{ για κάθε } v \in V\}.$$

Λήμμα 1.3 *Το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε οτι $V^\perp \neq \varnothing$ και οτι για κάθε $w_1, w_2 \in V^\perp$ και $a \in \mathbb{R}$, $aw_1 + w_2 \in V^\perp$. Προφανώς $0 \in V^\perp$, άρα $V^\perp \neq \varnothing$. Εάν για κάθε $v \in V$ ισχύουν $w_1^T v = 0$ και $w_2^T v = 0$, τότε $(aw_1 + w_2)^T v = aw_1^T v + w_2^T v = 0$.

□

Δραστηριότητα 1.5 Δείξτε οτι ο υπόχωρος U της Δραστηριότητας 1.3 είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου V.

Έχουμε δείξει οτι ο μηδενόχωρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών:

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^\perp.$$

Θα δείξουμε οτι και ο χώρος γραμμών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενόχωρου:

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{N}(A)^\perp.$$

Η Πρόταση 1.2 λέει οτι $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{N}(A)^\perp$. Για να δείξουμε τον αντίθετο εγκλεισμό θεωρούμε ένα διάνυσμα z ορθογώνιο στο $\mathcal{N}(A)$. Έστω A' ο πίνακας που προκύπτει από τον A επισυνάπτοντας ως μία επί πλέον γραμμή τη z^T. Ο A' έχει τον ίδιο μηδενόχωρο με τον A, αφού η νέα εξίσωση $z^T x = 0$ ικανοποιείται για κάθε $x \in \mathcal{N}(A)$. Επίσης έχει τον ίδιο αριθμό στηλών, n. Συγκρίνοντας τη σχέση

$$\dim \mathcal{R}(A'^T) + \dim \mathcal{N}(A') = n$$

με την 1.1, και αφού $\mathcal{N}(A') = \mathcal{N}(A)$, συμπεραίνουμε οτι $\dim \mathcal{R}(A'^T) = \dim \mathcal{R}(A^T)$. Αλλά αυτό σημαίνει οτι το διάνυσμα z εξαρτάται γραμμικά από τα διανύσματα μιας βάσης του $\mathcal{R}(A^T)$, δηλαδή οτι ανήκει στο $\mathcal{R}(A^T)$. Δείξαμε οτι κάθε διάνυσμα z του $\mathcal{N}(A)^\perp$ ανήκει στο χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$. Συμπεραίνουμε οτι $\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{N}(A)^\perp$. Έχουμε αποδείξει το πρώτο μέρος του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.4 *Δίδεται ένας $m \times n$ πίνακας A. Τότε*

α΄. Ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στον $\mathbb{R}^n$, και ο χώρος γραμμών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενόχωρου στον $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^\perp \text{ και } \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{N}(A)^\perp .$$

β΄. Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών $\mathcal{R}(A)$ στον $\mathbb{R}^m$, και ο χώρος στηλών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του αριστερού μηδενόχωρου στον $\mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^\perp \text{ και } \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^T)^\perp .$$

γ΄.

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) , \qquad \mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T) .$$

Απόδειξη. Έχουμε αποδείξει το πρώτο μέρος του θεωρήματος. Το δεύτερο μέρος αποδεικνύεται θεωρώντας τον ανάστροφο πίνακα. Για το τρίτο μέρος, αρκεί να δείξουμε οτι κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός διανύσματος του $\mathcal{R}(A^T)$ και ενός διανύσματος του $\mathcal{N}(A)$.

Πρώτα δείχνουμε οτι $\mathcal{R}(A^T) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$. Εάν $x \in \mathcal{R}(A^T) \cap \mathcal{N}(A)$ τότε x είναι ορθογώνιο προς τον εαυτό του, συνεπώς $x = 0$.

Εάν $\{v_1, \ldots, v_r\}$ είναι βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ και $\{w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ βάση του $\mathcal{N}(A)$, τότε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ έχει n στοιχεία. Εάν δείξουμε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε είναι βάση του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε οτι $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + b_1w_1 + \cdots + b_{n-r}w_{n-r}) = 0$. Θέλουμε να δείξουμε οτι τότε όλα τα a_i και b_j είναι 0. Έχουμε

$$a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = y = -(b_1w_1 + \cdots + b_{n-r}w_{n-r}) .$$

Αλλά η αριστερή πλευρά ανήκει στο $\mathcal{R}(A^T)$, η δεξιά πλευρά ανήκει στο $\mathcal{N}(A)$. Άρα το διάνυσμα y ανήκει στην τομή των δύο υποχώρων, και συνεπώς y είναι το μηδενικό διάνυσμα $0 \in \mathbb{R}^n$. Άρα $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = 0$, και αφού $v_1, \ldots, v_r$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλα τα a_i είναι 0. Παρόμοια, $b_1w_1 + \cdots + b_{n-r}w_{n-r} = 0$, και αφού το $w_1, \ldots, w_{n-r}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλα τα b_j είναι 0.

Αφού $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ γράφεται ως άθροισμα ενός στοιχείου του $\mathcal{R}(A^T)$ και ενός στοιχείου του $\mathcal{N}(A)$. Αφού η τομή των δύο υποχώρων είναι $\{0\}$,

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) .$$

□

Παρατηρήστε οτι η απόδειξη δεν δίδει τις συνιστώσες του x στο $\mathcal{R}(A^T)$ και στο $\mathcal{N}(A)$. Αυτό θα το εξετάσουμε σε επόμενη παράγραφο.

Με αυτό το Θεώρημα ολοκληρώνεται η περιγραφή των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων ενός πίνακα, οι οποίοι αποτελούν δύο ζεύγη ορθογωνίων συμπληρωμάτων.

Η ακόλουθη Πρόταση δίδει τις βασικές ιδιότητες του ορθογωνίου συμπληρώματος.

Πρόταση 1.5 *Έστω ένας διανυσματικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$, και W το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, $W = V^{\perp}$. Τότε*

α΄. Η διάσταση του W είναι $\dim W = n - \dim V$, και $V \cap W = \{0\}$.

β΄. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W είναι ο V: εάν $W = V^{\perp}$ τότε $V = W^{\perp}$.

γ΄. Εάν $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι βάση του V και $\{w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ βάση του W, τότε $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.

δ΄. Κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός διανύσματος του V και ενός διανύσματος του W.

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε μια βάση $v_1, \ldots, v_k$ του V και τον πίνακα A που έχει ως γραμμές τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$. Τότε V είναι ο χώρος γραμμών του A, και ο μηδενοχώρος του A είναι ίσος με το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, $\mathcal{N}(A) = W$. Άρα $\dim W = \dim \mathcal{N}(A) = n - k$.

Έστω τώρα διάνυσμα $x \in V \cap W$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Αφού $x \in V$ και $x \in W = V^{\perp}$, το x είναι ορθογώνιο στον εαυτό του, $xx^T = 0$. Δηλαδή $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = 0$ και συνεπώς $x = 0$.

2. Από το Θεώρημα 1.4, το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $W = \mathcal{N}(A)$ είναι ο $\mathcal{R}(A^T) = V$.

3. Το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ έχει n στοιχεία. Εάν δείξουμε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε θα είναι βάση του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε οτι $a_1 v_1 + \cdots + a_k u_k + b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k}) = 0$. Θέλουμε να δείξουμε οτι τότε όλα τα a_i και b_j είναι 0. Έχουμε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k u_k = y = -(b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k}) .$$

Αλλά η αριστερή πλευρά ανήκει στο V, η δεξιά πλευρά ανήκει στο W. Άρα το διάνυσμα y ανήκει στην τομή $V \cap W$, και συνεπώς y είναι το μηδενικό διάνυσμα $0 \in \mathbb{R}^n$. Άρα $a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k = 0$, και αφού $u_1, \ldots, u_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλα τα a_i είναι 0. Παρόμοια, $b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k} = 0$, και αφού το $w_1, \ldots, w_{n-k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλα τα b_j είναι 0.

4. Αφού $\{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\begin{aligned} x &= a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k + b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k} \\ &= x' + x'' \end{aligned}$$

όπου $x' = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k \in V$ και $x'' = b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k} \in W$.

Υποθέτουμε οτι ισχύει επίσης $x = \tilde{x} + \hat{x}$, όπου $\tilde{x} \in V$ και $\hat{x} \in W$. Τότε $x' + x'' = \tilde{x} + \hat{x}$, και συνεπώς $x' - \tilde{x} = \hat{x} - x''$, αλλά η αριστερή πλευρά ανήκει στο V, η δεξιά πλευρά ανήκει στο W, και όπως πιο πάνω, είναι και οι δύο μηδέν. Άρα $x' = \tilde{x}$ και $x'' = \hat{x}$.

□

1.5 Η δράση του πίνακα A.

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την περιγραφή της γραμμικής απεικόνισης T_A που πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ με τον $m \times n$ πίνακα A.

Εάν $x \in \mathcal{N}(A)$, τότε $T_A(x) = 0$.

Εάν το x είναι ορθογώνιο στο μηδενοχώρο, τότε $x \in \mathcal{R}(A^T)$, και $T_A(x) \in \mathcal{R}(A)$. Αλλά το σημαντικό είναι οτι αυτή η απεικόνιση, από το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στο χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πρόταση 1.6 *Για κάθε διάνυσμα $y \in \mathcal{R}(A)$, υπάρχει ένα, και μόνον ένα, διάνυσμα $x \in \mathcal{R}(A^T)$, τέτοιο ώστε $Ax = y$.*

Απόδειξη. Αφού το y ανήκει στο χώρο στηλών, υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Au = y$. Από την Πρόταση 1.5, υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $x \in \mathcal{R}(A^T)$ και $w \in \mathcal{N}(A)$, τέτοια ώστε $u = x + w$. Αλλά $Aw = 0$, άρα $Ax = Au = y$. Εάν υπάρχει άλλο διάνυσμα $x' \in \mathcal{R}(A^T)$ με $Ax' = y$, τότε $x - x' \in \mathcal{N}(A)$. Αλλά αφού $\mathcal{R}(A^T)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος, $x - x' \in \mathcal{R}(A^T)$. Συνεπώς $x - x' = 0$, και έχουμε μοναδικότητα.

□

Εάν $u \in \mathbb{R}^n$ γράφεται ως $u = x + w$, με $x \in \mathcal{R}(A^T)$ και $w \in \mathcal{N}(A)$, ορίζουμε $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}(A^T)$ με $P(u) = x$ και $E : \mathcal{R}(A) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ με $E(y) = y$. Συμβολίζουμε $L : \mathcal{R}(A^T) \longrightarrow \mathcal{R}(A)$ τον ισομορφισμό από το χώρο γραμμών στο χώρο στηλών του A. Τότε η απεικόνιση T_A παραγοντοποιείται ως σύνθεση του επιμορφισμού P, του ισομορφισμού L και του μονομορφισμού E.

$$T_A = E \circ L \circ P\,.$$

Ανακεφαλαιώνουμε την περιγραφή της δράσης του πολλαπλασιασμού με ένα πίνακα.

Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας τάξεως r, και $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η γραμμική απεικόνιση $x \mapsto Ax$, τότε

α΄. Ο χώρος γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, διάστασης r.

β΄. Ο χώρος στηλών $\mathcal{R}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, διάστασης r.

γ΄. Ο μηδενοχώρος $\mathcal{N}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n - r$.

δ΄. Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ διάστασης $m - r$.

ε΄. Ο μηδενοχώρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^\perp$ και $\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A)$.

ϛ′. Ο αριστερός μηδενοχώρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών, $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^\perp$ και $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$.

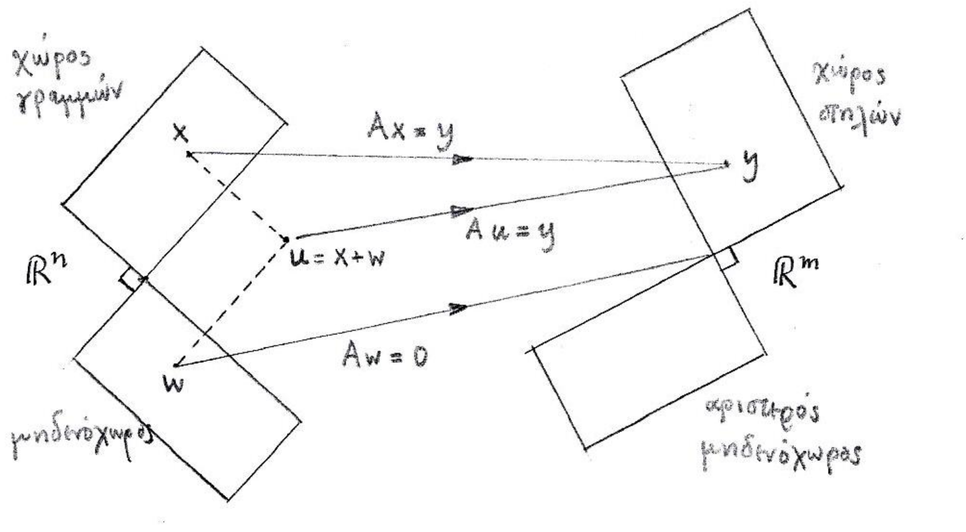
ζ′. Η γραμμική απεικόνιση T_A απεικονίζει το διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A^T)$ του $\mathbb{R}^n$ αμφιμονοσήμαντα στο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A)$ του $\mathbb{R}^m$.

η′. Η γραμμική απεικόνιση T_{A^T} απεικονίζει το διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A)$ του $\mathbb{R}^m$ αμφιμονοσήμαντα στο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A^T)$ του $\mathbb{R}^n$.

ϑ′. Η γραμμική απεικόνιση T_A παραγοντοποιείται ως σύνθεση ενός επιμορφισμού $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}(A^T)$, ενός ισομορφισμού $L : \mathcal{R}(A^T) \longrightarrow \mathcal{R}(A)$ και ενός μονομορφισμού $E : \mathcal{R}(A) \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $T_A = E \circ L \circ P$.

Προσέξτε οτι οι δύο αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις στα ζ′ και η′ δεν είναι υποχρεωτικά αντίστροφες η μία της άλλης.

Αυτή η εικόνα περιγράφεται παραστατικά στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Η δράση του $m \times n$ πίνακα A.

1.6 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1 Βρείτε ένα διάνυσμα x ορθογώνιο στο χώρο γραμμών του A, ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο στηλών, και ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο μηδενοχώρο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.2 Βρείτε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι ορθογώνια στο $(1, 1, 1)$ και στο $(1, -1, 0)$.

Άσκηση 1.3 Δύο ευθείες στο επίπεδο είναι ορθογώνιες όταν το γινόμενο των κλίσεων τους είναι -1. Εφαρμόστε αυτό το κριτήριο στις ευθείες που παράγονται από τα διανύσματα $x = (x_1, x_2)$ και $y = (y_1, y_2)$, οι οποίες έχουν κλίσεις x_2/x_1 και y_2/y_1, για να βρείτε το κριτήριο ορθογωνιότητας των διανυσμάτων, $x^T y = 0$.

Άσκηση 1.4 Πώς γνωρίζουμε οτι η i γραμμή ενός αντιστρέψιμου πίνακα B είναι ορθογώνια στην j στήλη του B^{-1}, εάν $i \neq j$;

Άσκηση 1.5 Δείξτε οτι το διάνυσμα $x - y$ είναι ορθογώνιο στο $x + y$ εάν και μόνον εάν $||x|| = ||y||$. Ποιά ιδιότητα των ρόμβων εκφράζει αυτό το αποτέλεσμα;

Άσκηση 1.6 Βρείτε μία βάση για το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Διαχωρίστε το $x = (3, 3, 3)$ σε μία συνιστώσα στο χώρο γραμμών, και σε μία συνιστώσα στο μηδενοχώρο του A.

Άσκηση 1.7 Θεωρήστε τον υποχώρο S του $\mathbb{R}^4$ που περιέχει όλα τα διανύσματα που ικανοποιούν την $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Βρείτε μία βάση για το χώρο $S^\perp$, που περιέχει όλα τα διανύσματα που είναι ορθογώνια στον S.

Άσκηση 1.8 Για να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του επιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα $(1, 1, 2)$ και $(1, 2, 3)$, θεωρήστε αυτά τα διανύσματα ως γραμμές του πίνακα A, και λύστε την εξίσωση $Ax = 0$. Θυμηθείτε οτι το συμπλήρωμα είναι ολόκληρη ευθεία.

Άσκηση 1.9 Εάν V και W είναι ορθογώνιοι υπόχωροι, δείξτε οτι το μόνο κοινό διάνυσμα είναι το μηδενικό: $V \cap W = \{0\}$.

Άσκηση 1.10 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος γραμμών περιέχει το $(1, 2, 1)$ και ο μηδενοχώρος περιέχει το $(1, -2, 1)$, ή δείξτε οτι δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας.

Άσκηση 1.11 Κατασκευάστε μία ομογενή εξίσωση σε τρείς αγνώστους, της οποίας οι λύσεις είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $(1, 1, 2)$ και $(1, 2, 3)$. Αυτό είναι το αντίστροφο της προηγούμενης άσκησης, αλλά τα δύο προβλήματα είναι ουσιαστικά τα ίδια.

Άσκηση 1.12 Σχεδιάστε στο επίπεδο τους τέσσερεις θεμελιώδεις υπόχωρους των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.13 Σχεδιάστε τους τέσσερεις θεμελιώδεις υπόχωρους του A, και βρείτε τις συνιστώσες του x στο χώρο γραμμών και στο μηδενοχώρο του A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.14 Σε κάθε περίπτωση, κατασκευάστε έναν πίνακα A με τη ζητούμενη ιδιότητα ή εξηγήστε γιατί αυτό δεν είναι δυνατό

α΄. Ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα $(1, 2, -3)$ και $(2, -3, 5)$, και ο μηδενοχώρος περιέχει το $(1, 1, 1)$.

β΄. Ο χώρος γραμμών περιέχει τα $(1, 2, -3)$ και $(2, -3, 5)$ και ο μηδενοχώρος περιέχει το $(1, 1, 1)$.

γ΄. Η εξίσωση $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ έχει λύση, και $A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

δ΄. Το άθροισμα των στηλών είναι το διάνυσμα $(0, 0, 0)$, και το άθροισμα των γραμμών είναι το διάνυσμα $(1, 1, 1)$.

Άσκηση 1.15 Υποθέστε οτι ο υπόχωρος S παράγεται από τα διανύσματα $(1, 2, 2, 3)$ και $(1, 3, 3, 2)$. Βρείτε δύο διανύσματα που παράγουν τον υπόχωρο $S^\perp$. Αυτό ισοδυναμεί με το να λύσετε την εξίσωση $Ax = 0$ για κάποιο πίνακα A. Ποιός είναι ο A;

Άσκηση 1.16 Δείξτε οτι εάν ο υπόχωρος S περιέχεται στον υπόχωρο V, τότε ο $S^\perp$ περιέχει τον $V^\perp$.

Άσκηση 1.17 Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^\perp$ όταν

α΄. S είναι ο μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

β΄. S είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το $(1, 1, 1)$.

γ΄. S είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα $(2, 0, 0)$ και $(0, 0, 3)$.

Άσκηση 1.18 Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα A, χωρίς μηδενικά στοιχεία, του οποίου οι στήλες είναι ανά δύο κάθετες. Υπολογίστε το γινόμενο $A^T A$. Γιατί είναι το γινόμενο διαγώνιος πίνακας;

Άσκηση 1.19 Βρείτε έναν πίνακα που περιέχει το διάνυσμα $u = (1, 2, 3)$ στο χώρο γραμμών και στο χώρο στηλών. Βρείτε έναν άλλο πίνακα που περιέχει το u στο μηδενοχώρο και στο χώρο στηλών. Σε ποιά ζεύγη υποχώρων ενός πίνακα δεν μπορεί να περιέχεται το u;

Άσκηση 1.20 Δείξτε οτι

$$V^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^n \,:\, \forall v \in V,\, w^T v = 0\}$$

είναι πράγματι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή οτι είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, κλειστό ως προς γραμμικούς συνδυασμούς.

Άσκηση 1.21 Δείξτε οτι εάν V είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $W = V^{\perp}$, τότε $W^{\perp} = V$, δηλαδή οτι εάν ο W είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, τότε και ο V είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W.

Άσκηση 1.22 Αποδείξτε οτι η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση εάν και μόνον εάν $y^T b = 0$ για κάθε y που ικανοποιεί $y^T A = 0$.

1.7 Βέλτιστες λύσεις και Προβολές

Επιστρέφουμε ακόμη μία φορά στην εξίσωση $Ax = b$. Έχουμε δει οτι η εξίσωση έχει λύσεις μόνον όταν το διάνυσμα b ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A. Συχνά όμως θέλουμε να βρούμε την *καλύτερη δυνατή* λύση της εξίσωσης, ακόμη και όταν το b δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(A)$. Αυτό συμβαίνει συχνά στην ανάλυση πειραματικών δεδομένων, όπου για να περιορίσουμε την πιθανότητα τυχαίου σφάλματος, παίρνουμε περισσότερες μετρήσεις. Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε ένα σύστημα με αρκετά περισσότερες εξισώσεις παρά αγνώστους, όπου δεν περιμένουμε να υπάρχει ακριβής λύση.

Εάν αντικαταστήσουμε το b με ένα διάνυσμα b' του χώρου στηλών $\mathcal{R}(A)$ τότε η εξίσωση $Ax = b'$ έχει λύση. Μπορούμε να βρούμε μια *βέλτιστη λύση* της εξίσωσης, εάν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα b με το διάνυσμα του χώρου στηλών του A που είναι πλησιέστερο στο b από κάθε άλλο διάνυσμα του χώρου στηλών. Αυτό το διάνυσμα είναι η *ορθογώνια προβολή του b στο χώρο στηλών*.

Εάν συμβολίσουμε p την ορθογώνια προβολή του b στο χώρο στηλών, έχουμε μία νέα εξίσωση

$$A\hat{x} = p.$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης ονομάζονται *βέλτιστες λύσεις ελαχίστων τετραγώνων* της αρχικής εξίσωσης $Ax = b$, (δείτε την Άσκηση 1.7).

Παράδειγμα 1.4 Υποθέτουμε οτι μελετάμε την εξάρτηση μίας ποσότητας b από μία ποσότητα a, και αναμένουμε οτι η b είναι ανάλογη προς την a. Θέλουμε να βρούμε τον σταθερό λόγο λ για τον οποίο

$$b = \lambda a\,.$$

Υποθέτουμε οτι οι πειραματικές μετρήσεις δίδουν τις τιμές b_1 για $a = 2$, b_2 για $a = 3$ και b_3 για $a = 4$. Για να βρούμε το λ θεωρούμε τρείς εξισώσεις με ένα άγνωστο.

$$\begin{aligned} 2x &= b_1 \\ 3x &= b_2 \\ 4x &= b_3\,. \end{aligned}$$

Όμως αυτό το σύστημα έχει λύση μόνο όταν το διάνυσμα (b_1, b_2, b_3) είναι ένα πολλαπλάσιο του $(2, 3, 4)$. Η εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

έχει λύση μόνον όταν το (b_1, b_2, b_3) ανήκει στο χώρο στηλών. Για κάθε τιμή του x ορίζουμε το *σφάλμα*

$$\varepsilon = \|ax - b\| = \sqrt{(2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2}\,,$$

το οποίο μηδενίζεται μόνο όταν x αποτελεί λύση της εξίσωσης 1.3. Στην περίπτωση που η εξίσωση 1.3 δεν έχει λύση, θεωρούμε την *βέλτιστη λύση*, την τιμή του x η οποία κάνει το σφάλμα ε όσο το δυνατόν μικρότερο. Αυτό συμβαίνει όταν το διάνυσμα ax είναι ίσο με την ορθογώνια προβολή του διανύσματος b στο χώρο στηλών, δηλαδή όταν $ax - b$ είναι κάθετο στο a.

> **Δραστηριότητα 1.6** Στο Παράδειγμα 1.4, θέτουμε $b = (4, 6, 9)$. Σχεδιάστε στο επίπεδο τα σημεία με συντεταγμένες $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 9)$. Μπορείτε να σχεδιάσετε μία ευθεία που να περνάει από τα 4 σημεία $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 9)$. Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{d}{dx}(\varepsilon^2)$, και δείξτε οτι μηδενίζεται ακριβώς όταν $ax - b$ είναι κάθετο στο a.

> **Δραστηριότητα 1.7** Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{d}{dx}(\varepsilon^2)$, και δείξτε οτι μηδενίζεται ακριβώς όταν $(ax - b)^T a = 0$, δηλαδή όταν $ax - b$ είναι κάθετο στο a.

Προβολή σε ευθεία

Ας εξετάσουμε πρώτα την προβολή σε μία ευθεία. Θεωρούμε τα διανύσματα a και b στο επίπεδο. Στην ''Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα'' είδαμε (Κεφάλαιο 4) την προβολή του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ στον θ-άξονα, δηλαδή στην ευθεία των διανυσμάτων που είναι συγγραμμικά με το $(\cos\theta, \sin\theta)$. Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε την προβολή ενός σημείου b του $\mathbb{R}^n$ πάνω στην ευθεία των διανυσμάτων που είναι συγγραμμικά με το $a \in \mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα προβολής p χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

α΄. Το p είναι συγγραμμικό με το a, δηλαδή $p = \hat{x}a$ για κάποιο αριθμό $\hat{x} \in \mathbb{R}$.

β΄. Η διαφορά $b - p$ είναι ορθογώνια στο a, δηλαδή $a^T(b - p) = 0$.

Από αυτές τις ιδιότητες λαμβάνουμε την εξίσωση

$$a^T(b - \hat{x}a) = 0$$

την οποία μπορούμε να λύσουμε για να βρούμε το $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \frac{a^T b}{a^T a}.$$

Συνεπώς το διάνυσμα προβολής p είναι

$$p = \hat{x}a = \frac{a^T b}{a^T a} a\,,$$

και η βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$ είναι

$$\hat{x} = \frac{a^T b}{a^T a}\,.$$

Θέλουμε να εκφράσουμε την προβολή ως μία γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ στην ευθεία $V = \{ta : t \in \mathbb{R}\}$, και να βρούμε τον αντίστοιχο πίνακα. Στον προηγούμενο υπολογισμό μπορούμε να αντιστρέψουμε τη διάταξη του διανύσματος a και του αριθμού $\hat{x}$:

$$p = a\hat{x} = a\frac{a^T b}{a^T a} = \frac{1}{a^T a}\, a(a^T b)\,,$$

και να εφαρμόσουμε την προσεταιριστική ιδιότητα:

$$p = \frac{1}{a^T a}\,(aa^T)b\,.$$

Παρατηρήστε οτι $a^T a$ είναι θετικός αριθμός, το τετράγωνο του μήκους του a, ενώ aa^T είναι τετραγωνικός πίνακας.

Τον πίνακα

$$P = \frac{1}{a^T a}\, aa^T$$

ονομάζουμε **πίνακα προβολής**. Για να προβάλουμε το διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^n$ στην ευθεία που ορίζει το διάνυσμα a, αρκεί να το πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα P.

Παράδειγμα 1.5 Συνεχίζουμε το Παράδειγμα 1.4, με $b = (4, 6, 9)$, δηλαδή θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Αυτό δεν έχει λύση, αφού το διάνυσμα (4, 6, 9) δεν ανήκει στο χώρο που παράγει το (2, 3, 4). Η βέλτιστη λύση είναι $\hat{x}$, τέτοια ώστε

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \hat{x} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = 0\,,$$

δηλαδή

$$\hat{x} = \frac{(2,\,3,\,4)\cdot(4,\,6,\,9)}{2^2+3^2+4^2} = \frac{62}{29}\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι η βέλτιστη τιμή για το λ που προκύπτει από τα 3 σημεία (2, 4), (3, 6) και (4, 9) είναι $\lambda = \frac{62}{29}$.

Προβολή σε υπόχωρο

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα σε περισσότερες διαστάσεις. Θέλουμε να προβάλουμε το διάνυσμα b σε ένα υπόχωρο V διάστασης k μέσα στον $\mathbb{R}^m$. Μπορούμε για ευκολία να υποθέσουμε οτι $k=2$ και $m=3$, χωρίς ουσιαστική διαφορά στη διαδικασία. Θεωρούμε λοιπόν δύο διανύσματα a_1 και a_2 του $\mathbb{R}^3$, τα οποία αποτελούν βάση του V, και τον $m\times k$ πίνακα A με στήλες τα διανύσματα a_i, έτσι ώστε $V=\mathcal{R}(A)$. Αφού η προβολή p βρίσκεται στο χώρο στηλών του A, έχουμε

$$p = A\hat{x}$$

για κάποιο $\hat{x}\in\mathbb{R}^k$. Αφού η προβολή είναι ορθογώνια, το διάνυσμα $b - A\hat{x}$ είναι ορθογώνιο στο χώρο στηλών του A, και από το Θεώρημα 1.4 ανήκει στον αριστερό μηδενοχώρο του A:

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0\,.$$

Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$A^TA\hat{x} = A^Tb\,, \tag{1.4}$$

για τη βέλτιστη λύση $\hat{x}$, η οποία έχει μοναδική λύση για κάθε $b\in\mathbb{R}^m$ όταν A^TA είναι μη ιδιόμορφος πίνακας.

Παράδειγμα 1.6 Συνεχίζουμε το Παράδειγμα 1.4, με $b=(4,\,6,\,9)$, αλλά τώρα υποθέτουμε οτι η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων a και b είναι

$$b = \lambda a + \mu\,.$$

Με τα ίδια δεδομένα, (2, 4), (3, 6) και (4, 9), έχουμε τρείς εξισώσεις με δύο αγνώστους για να βρούμε τα λ και μ:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 6 \\ 4x_1 & + & x_2 & = & 9\,, \end{array}$$

τις οποίες γράφουμε ως ένα σύστημα

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα (4, 6, 9) δεν ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A, και το σύστημα δεν έχει λύση. Το σφάλμα $\varepsilon = \|b - Ax\|$ ελαχιστοποιήται για την τιμή $\hat{x}$ του $x = (x_1, x_2)$ για την οποία το διάνυσμα $b - A\hat{x}$ είναι ορθογώνιο στο χώρο στηλών του A. Έτσι έχουμε την εξίσωση *ελαχίστων τετραγώνων*:

$$A^T(b - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 29 & 9 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 19 \end{bmatrix},$$

η οποία έχει μοναδική λύση

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -9 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 62 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{6} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}.$$

Άρα η βέλτιστη ευθεία που καθορίζεται από τα σημεία (2, 4), (3, 6) και (4, 9) έχει εξίσωση

$$6b = 15a + 7.$$

Στην γενική περίπτωση, που ο πίνακας A έχει περισσότερες από 2 στήλες, θα ήταν πιο οικονομικό να λύσουμε την εξίσωση 1.4 με απαλοιφή Gauss παρά να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα.

Εάν ο πίνακας A^TA είναι αντιστρέψιμος, μπορούμε να υπολογίσουμε την προβολή p από την 1.4. Η προβολή του b στον υπόχωρο $V = \mathcal{R}(A)$ είναι

$$p = A\hat{x} = A(A^TA)^{-1}A^Tb.$$

Ο πίνακας προβολής που όταν τον πολλαπλασιάσουμε με το b δίδει την προβολή p, είναι

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T.$$

Σε αυτή την έκφραση, A είναι $m \times k$ πίνακας, οπότε A^TA είναι τετραγωνικός $k \times k$ πίνακας, και P είναι $m \times m$ πίνακας.

Προσέξτε οτι σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να αλλάξουμε τη διάταξη των παραγόντων, αφού αυτοί οι πίνακες δεν μετατίθενται. Επίσης, αφού A δεν είναι τετραγωνικός πίνακας, δεν μπορούμε να γράψουμε τον αντίστροφο $(A^TA)^{-1}$ ως γινόμενο αντιστρόφων πινάκων. Αν συγκρίνουμε με την περίπτωση της προβολής σε ευθεία, όπου $k = 1$, βλέπουμε οτι ο $m \times 1$ πίνακας A είναι το διάνυσμα a, και ο αντιστρέψιμος $k \times k$ πίνακας $A^T A$ είναι ο θετικός αριθμός $a^T a$, με αντίστροφο $\frac{1}{a^T a}$. Αυτός μετατίθεται με τον πίνακα A, και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$a(a^T a)^{-1} a^T = \frac{1}{a^T a}\, a a^T .$$

Θα δείξουμε οτι η υπόθεση πως $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος ικανοποιείται πάντα όταν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όπως στην περίπτωση που αποτελούν βάση του υπόχωρου V.

Λήμμα 1.7 *Ο πίνακας $A^T A$ έχει τον ίδιο μηδενόχωρο με τον A.*

Απόδειξη. Είναι προφανές οτι εάν $Ax = 0$ τότε $A^T Ax = 0$, δηλαδή οτι $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^T A)$.

Για να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό θεωρούμε x τέτοιο ώστε $A^T Ax = 0$, οπότε

$$x^T (A^T Ax) = 0.$$

Αλλά $x^T (A^T Ax) = (x^T A^T)Ax = (Ax)^T Ax = ||Ax||^2$.

Άρα το διάνυσμα Ax έχει μηδενικό μήκος, και συνεπώς $Ax = 0$, δηλαδή $x \in \mathcal{N}(A)$.

□

Συγκεντρώνουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε μία Πρόταση.

Πρόταση 1.8 *Εάν A είναι $m \times k$ πίνακας με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, τότε*

α΄. Ο πίνακας $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος.

β΄. Η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^m$ στο χώρο στηλών του πίνακα A είναι

$$P(w) = A(A^T A)^{-1} A^T w\,.$$

γ΄. Η βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$, είναι η λύση της εξίσωσης

$$A^T A\hat{x} = A^T b\,.$$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των πινάκων ορθογώνιας προβολής σε υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$.

Πρόταση 1.9 *Ένας $m \times m$ πίνακας P είναι πίνακας προβολής σε ένα υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ εάν και μόνον εάν P είναι συμμετρικός και $P^2 = P$.*

Απόδειξη. Έστω V ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα μίας βάσης του V. Τότε ο πίνακας προβολής στον υπόχωρο V είναι ο $P = A(A^T A)^{-1} A^T$. Εύκολα ελέγχουμε οτι $P^2 = P$,

$$\begin{aligned} P^2 &= A(A^T A)^{-1} A^T A(A^T A)^{-1} A^T \\ &= A(A^T A)^{-1} A^T \end{aligned}$$

$$= \quad P.$$

Ο ανάστροφος του P είναι ο πίνακας

$$\begin{aligned} P^T &= (A(A^TA)^{-1}A^T)^T \\ &= (A^T)^T \left((A^TA)^{-1}\right)^T A^T \\ &= A\left((A^TA)^T\right)^{-1} A^T \\ &= A(AA^T)^{-1}A^T \\ &= P \end{aligned}$$

Αντιστρόφως, εάν ο $m \times m$ πίνακας P ικανοποιεί τις σχέσεις $P^2 = P$ και $P = P^T$, θα δείξουμε οτι P είναι ο πίνακας προβολής στο χώρο στηλών του. Προφανώς, για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$, Pb ανήκει στο χώρο στηλών του P. Για να δείξουμε οτι Pb είναι η προβολή του b στον υπόχωρο $V = \mathcal{R}(P)$ αρκεί να δείξουμε οτι $b - Pb$ είναι ορθογώνιο στον V.

Έστω v διάνυσμα του V. Τότε v είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του P, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $v = Pc$, και έχουμε

$$\begin{aligned} (b - Pb)^Tv &= (b - Pb)^TPc \\ &= (b^T - b^TP^T)Pc \\ &= b^T(I - P^T)Pc \\ &= b^T(P - P^TP)c. \end{aligned}$$

Αλλά $P^T = P$ και $P^2 = P$, άρα $P - P^TP = P - P = 0$.

□

1.8 Ασκήσεις

Άσκηση 1.23 Βρείτε την προβολή του διανύσματος (7, 4) πάνω στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα (1, 2).

Άσκηση 1.24 Βρείτε τον πίνακα προβολής που αντιστοιχεί στην προβολή των διανυσμάτων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ πάνω στην ευθεία $3x - 2y = 0$.

Άσκηση 1.25 Βρείτε τον πίνακα προβολής P_1 στην ευθεία με διεύθυνση $a = (1, 3)$, καθώς και τον πίνακα προβολής P_2 στην ευθεία που είναι κάθετη στο a. Υπολογίστε τους πίνακες $P_1 + P_2$ και P_1P_2. Εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 1.26 Στον χώρο $\mathbb{R}^n$, ποιά γωνία σχηματίζει το διάνυσμα $(1, 1, \ldots, 1)$ με τους άξονες συντεταγμένων; Βρείτε τον πίνακα προβολής σε αυτό το διάνυσμα.

Άσκηση 1.27 Ποιό πολλαπλάσιο του $a = (1, 1, 1)$ είναι πλησιέστερο στο σημείο $b = (2, 4, 4)$; Βρείτε επίσης το σημείο στην ευθεία με διεύθυνση b που είναι πλησιέστερο στο a.

Άσκηση 1.28 Δείξτε οτι ο πίνακας προβολής $P = \frac{1}{a^T a}\, aa^T$ είναι συμμετρικός και ικανοποιεί τη σχέση $P^2 = P$.

Άσκηση 1.29 Ποιος πίνακας P προβάλει κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ στην ευθεία όπου τέμνονται τα επίπεδα $x + y + t = 0$ και $x - t = 0$;

Άσκηση 1.30 Για τα ακόλουθα διανύσματα, σχεδιάστε στο καρτεσιανό επίπεδο την προβολή του b στο a, και στη συνέχεια υπολογίστε την προβολή, από την έκφραση $p = \hat{x}a$:

α'. $b = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{bmatrix}$ και $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

β'. $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 1.31 Υπολογίστε την προβολή του b στην ευθεία με διεύθυνση a, και ελέγξτε οτι το διανυσματικό σφάλμα $e = b - p$ είναι ορθογώνιο στο a:

α'. $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

β'. $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $a = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 1.32 Έστω a διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και έστω P ο πίνακας προβολής του a. Δείξτε οτι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του P ισούται με 1.

Άσκηση 1.33 Έστω $a = (1, 2, -1, 3)$.

α'. Βρείτε τον πίνακα προβολής P στο διάνυσμα a.

β'. Βρείτε μια βάση του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(P)$.

γ'. Βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα v του $\mathbb{R}^4$ του οποίου η προβολή στο a να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Άσκηση 1.34 Βρείτε τη βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, και υπολογίστε την προβολή $p = A\hat{x}$, εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε οτι το διανυσματικό σφάλμα $e = b - p$ είναι ορθογώνιο στις στήλες του A.

Άσκηση 1.35 Υπολογίστε το τετράγωνο του σφάλματος $\varepsilon^2 = ||Ax - b||^2$, και βρείτε τις μερικές παραγώγους του ε^2 ως προς u και v, εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Θέσατε τις παραγώγους ίσες με μηδέν, και συγκρίνετε με τις εξισώσεις $A^T A\hat{x} = A^T b$, για να δείξετε οτι ο λογισμός και η γεωμετρία καταλήγουν στις ίδιες εξισώσεις. Υπολογίστε το $\hat{x}$ και την προβολή $p = A\hat{x}$. Γιατί είναι $p = b$;

Άσκηση 1.36 Βρείτε την προβολή του $b = (4, 3, 1, 0)$ πάνω στο χώρο στηλών του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.37 Βρείτε την βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων $\hat{x}$, του συστήματος εξισώσεων $3x = 10$ και $4x = 5$. Ποιο είναι το τετράγωνο του σφάλματος ε^2 που ελαχιστοποιείται; Επαληθεύστε οτι το διανυσματικό σφάλμα $e = (10 - 3\hat{x}, 5 - 4\hat{x})$ είναι ορθογώνιο στη στήλη $(3, 4)$.

Άσκηση 1.38 Βρείτε την προβολή του b στο χώρο στηλών του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Διαχωρήστε το b σε άθροισμα $p + q$, με p στο χώρο στηλών του A και q ορθογώνιο προς αυτόν. Σε ποιό θεμελιώδη υπόχωρο του A βρίσκεται το διάνυσμα q;

Άσκηση 1.39 Δείξτε οτι εάν ο πίνακας P ικανοποιεί τη σχέση $P = P^T P$, τότε P είναι πίνακας προβολής. Είναι ο μηδενικός πίνακας $P = 0$ πίνακας προβολής, και σε ποιο υπόχωρο;

Άσκηση 1.40 Τα διανύσματα $a_1 = (1, 1, 0)$ και $a_2 = (1, 1, 1)$ παράγουν ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$. Βρείτε τον πίνακα προβολής στο επίπεδο, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα b το οποίο προβάλεται στο 0.

Άσκηση 1.41 Εάν V είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα $(1, 1, 0, 1)$ και $(0, 0, 1, 0)$ βρείτε

α'. μία βάση για το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$.

β'. τον πίνακα προβολής P στο V.

γ'. το διάνυσμα στο V το οποίο είναι πλησιέστερο προς το $(0, 1, 0, -1) \in V^\perp$

Άσκηση 1.42 Εάν P είναι η προβολή στο χώρο στηλών του πίνακα A, ποιά είναι η προβολή στον αριστερό μηδενοχώρο του A;

Άσκηση 1.43 Εάν $P_\sigma = A(A^T A)^{-1} A^T$ είναι ο πίνακας προβολής στο χώρο στηλών του A, ποιός είναι ο πίνακας προβολής P_γ στο χώρο γραμμών του A;

Άσκηση 1.44 Θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$(1, 2, 0, 3), \quad (2, 1, 1, 2) \quad (-1, 4, -2, 5)$$

α'. Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ του V.

β'. Γράψτε το διάνυσμα $x = (-4, 15, 7, 8)$ ως άθροισμα $x = v + w$, όπου $v \in V$ και $w \in V^\perp$.

1.9 Ορθογώνιοι πίνακες

Θεωρούμε ένα διανυσματικό υπόχωρο $V \subseteq \mathbb{R}^n$ διάστασης $\dim V = k$, και μία βάση $v_1, \ldots, v_k$ του V. Τότε κάθε διάνυσμα $u \in V$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k.$$

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων u και $w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_k v_k$ είναι

$$\begin{aligned} u^T w &= (a_1 v_1^T + \cdots a_k v_k^T)(b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i b_j v_i^T v_j. \end{aligned}$$

Εάν υποθέσουμε οτι τα διανύσματα της βάσης είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή οτι $v_i^T v_j = 0$ εάν $i \neq j$, το εσωτερικό γινόμενο $u^T w$ γίνεται

$$\begin{aligned} u^T w &= \sum_{i=1}^{k} a_i b_i v_i^T v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i b_i ||v_i||^2. \end{aligned}$$

Είναι φανερό οτι μία βάση από ορθογώνια διανύσματα μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά τους υπολογισμούς. Σε μία τέτοια βάση, μόνο μία ακόμη βελτίωση μπορούμε να κάνουμε: το μήκος κάθε διανύσματος της βάσης να είναι $||v_i||^2 = 1$. Τότε το εσωτερικό γινόμενο των u και w λαμβάνει την απλούστερη δυνατή μορφή:

$$u^T w = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$$

Μία τέτοια βέλτιστη βάση την ονομάζουμε *ορθοκανονική*.

Ορισμός 1.3. Τα διανύσματα $q_1, q_2, \ldots, q_k$ είναι **ορθοκανονικά** εάν

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ \\ 1 & \text{εάν} \quad i = j \end{cases}$$

Μία βάση που αποτελείται από ορθοκανονικά διανύσματα ονομάζεται **ορθοκανονική βάση**. Ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου οι στήλες είναι ορθοκανονικά διανύσματα ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Προσέξτε οτι ο όρος ορθογώνιος χρησιμοποιείται μόνο για τετραγωνικούς πίνακες. Ένας μη τετραγωνικός πίνακας με ορθοκανονικές στήλες δεν ονομάζεται ορθογώνιος.

Δραστηριότητα 1.8 Δείξτε οτι εάν $q_1, \ldots, q_k$ είναι μία ορθοκανονική βάση του V, τότε οι συντεταγμένες $a_1, \ldots, a_k$ του διανύσματος $u = a_1 q_1 + \cdots + a_k q_k$ είναι $a_i = q_i^T u$.

Το σημαντικότερο παράδειγμα ορθοκανονικής βάσης είναι η κανονική βάση $e_1, \ldots, e_n$ του $\mathbb{R}^n$. Ο ορθογώνιος πίνακας που έχει αυτά τα διανύσματα ως στήλες, με τη διάταξη $e_1, \ldots, e_n$ είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας $\mathbf{I}$. Οι ίδιες στήλες με διαφορετική διάταξη δίδουν τους πίνακες μετάθεσης, οι οποίοι είναι επίσης ορθογώνιοι πίνακες.

Πρόταση 1.10 *Εάν ο $m \times n$ πίνακας M έχει ορθοκανονικές στήλες τότε $M^T M = \mathbf{I}_n$. Ειδικότερα, εάν Q είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε ο ανάστροφος πίνακας είναι και αντίστροφος,*

$$Q^T = Q^{-1}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^m$ είναι οι στήλες του M. Τότε $M^T M$ είναι ο

$n \times n$ πίνακας με στοιχείο στη θέση (i, j) το $q_i^T q_j$. Αλλά

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ 1 & \text{εάν} \quad i = j\,. \end{cases}$$

Συνεπώς $M^T M$ είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας και M^T είναι αριστερό αντίστροφο του M.

Εάν ο πίνακας είναι τετραγωνικός και έχει αριστερό αντίστροφο, γνωρίζουμε οτι είναι αντιστρέψιμος. Άρα Q^T είναι ο αντίστροφος πίνακας.

□

Παράδειγμα 1.7 Ο πίνακας περιστροφής $Q = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος. Ο Q περιστρέφει κατά γωνία ϑ, ενώ ο ανάστροφος $Q^T = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ περιστρέφει κατά γωνία $-\vartheta$. Οι στήλες είναι ορθογώνιες, και αφού $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$, έχουν μήκος 1.

Παράδειγμα 1.8 Όπως αναφέραμε προηγουμένως, κάθε πίνακας μετάθεσης είναι ορθογώνιος. Ειδικότερα ο πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

που παριστάνει την ανάκλαση στον άξονα $x = y$. Γεωμετρικά, κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι σύνθεση μίας περιστροφής και μίας ανάκλασης.

Οι ορθογώνιοι πίνακες έχουν ακόμα μία σημαντική ιδιότητα:

Πρόταση 1.11 *Ο πολλαπλασιασμός με ένα ορθογώνιο πίνακα Q αφήνει το μήκος αμετάβλητο: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$||Qx|| = ||x||.$$

Γενικότερα, πολλαπλασιασμός με ορθογώνιο πίνακα αφήνει το εσωτερικό γινόμενο αμετάβλητο: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$(Qx)^T(Qy) = x^T y.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε οτι $(Qx)^T = x^T Q^T$. Αλλά $Q^T Q = \mathbf{I}$ και έχουμε:

$$(Qx)^T(Qy) = x^T Q^T Q y = x^T \mathbf{I} y = x^T y.$$

□

Εάν ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος, τότε $Q^T = Q^{-1}$, και συνεπώς $QQ^T = \mathbf{I}$. Αυτό σημαίνει οτι *οι γραμμές ενός ορθογώνιου πίνακα είναι επίσης ορθοκανονικά διανύσματα.*

1.10 Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt

Θα δείξουμε οτι εάν $v_1, \ldots, v_k$ είναι οποιαδήποτε βάση του υποχώρου $V \subseteq \mathbb{R}^m$, μπορούμε να κατασκευάσουμε από την $v_1, \ldots, v_k$ μία ορθοκανονική βάση $q_1, \ldots, q_k$, τέτοια ώστε για κάθε $j = 1, \ldots, k$, τα διανύσματα $q_1, \ldots, q_j$ παράγουν τον ίδιο υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_j$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt**. Θα την περιγράψουμε στην περίπτωση τριών διανυσμάτων v_1, v_2, v_3. Υποθέτουμε οτι τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αρχικά θα τα αντικαταστήσουμε με τρία ορθογώνια διανύσματα w_1, w_2, w_3. Στη συνέχεια, διαιρούμε κάθε διάνυσμα w_i με το μήκος του και έχουμε τα ορθοκανονικά διανύσματα q_1, q_2, q_3.

> **Δραστηριότητα 1.9** Εάν v_1 και v_2 είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο $v_2 - xv_1$ είναι ορθογώνιο στο v_1.

Θέτουμε $w_1 = v_1$. Θέλουμε w_2 ορθογώνιο στο w_1 και τέτοιο ώστε τα w_1 και w_2 να παράγουν τον ίδιο υπόχωρο που παράγουν τα v_1 και v_2. Αφαιρούμε από το v_2 την προβολή του στην ευθεία που παράγεται από το w_1.

$$w_2 = v_2 - \frac{w_1^T v_2}{w_1^T w_1} w_1 \,.$$

Ελέγχουμε οτι w_1 και w_2 είναι ορθογώνια:

$$\begin{aligned} w_1^T w_2 &= w_1^T v_2 - \frac{w_1^T v_2}{w_1^T w_1} w_1^T w_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Το v_3 δεν περιέχεται στο επίπεδο που παράγουν τα w_1, w_2, αφού υποθέσαμε οτι τα v_1, v_2 και v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Για να βρούμε το w_3 θα αφαιρέσουμε την προβολή του v_3 στο επίπεδο που παράγουν τα v_1 και v_2. Έστω A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα w_1 και w_2. Τότε

$$A^T A = \begin{bmatrix} w_1^T w_1 & 0 \\ 0 & w_2^T w_2 \end{bmatrix}$$

και, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των μπλοκ, $A = [w_1\, w_2]$, η προβολή του v_3 στον υπόχωρο που παράγεται από τα w_1 και w_2 είναι

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T v_3 &= [w_1\, w_2] \begin{bmatrix} w_1^T w_1 & 0 \\ & \\ 0 & w_2^T w_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{bmatrix} v_3 \\ &= \frac{w_1}{w_1^T w_1} w_1^T v_3 + \frac{w_2}{w_2^T w_2} w_2^T v_3 \\ &= \frac{w_1^T v_3}{w_1^T w_1} w_1 + \frac{w_2^T v_3}{w_2^T w_2} w_2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι, επειδή τα διανύσματα w_1 και w_2 είναι ορθογώνια, η προβολή στο επίπεδο που παράγουν τα w_1 και w_2 είναι το άθροισμα των προβολών στις ευθείες των w_1 και w_2. Καταλήγουμε πως

$$w_3 = v_3 - \frac{w_1^T v_3}{||w_1||^2} w_1 - \frac{w_2^T v_3}{||w_2||^2} w_2.$$

Τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 είναι τώρα ορθογώνια. Για να βρούμε την ορθοκανονική βάση του V αρκεί να διαιρέσουμε κάθε διάνυσμα με το μήκος του,

$$q_1 = \frac{w_1}{||w_1||}, \quad q_2 = \frac{w_2}{||w_2||}, \quad q_3 = \frac{w_3}{||w_3||} .$$

Παράδειγμα 1.9 Θεωρούμε τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3/2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad q_3 = \frac{3}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

Όπως περιγράψαμε τη διαδικασία της απαλοιφής Gauss μέσω της παραγοντοποίησης $A = LU$, μπορούμε να περιγράψουμε και την ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt μέσω μίας παραγοντοποίησης του πίνακα A ο οποίος έχει ως στήλες τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$:

$$A = QR,$$

όπου Q είναι ο πίνακας με ορθοκανονικές στήλες $q_1, q_2, \ldots, q_k$, και R είναι ο πίνακας που αντιστρέφει τη διαδικασία Gram-Schmidt. Αφού τα $q_1, \ldots, q_k$ είναι ορθογώνια και $v_j \in$

$\langle q_1, \ldots, q_j \rangle$,

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}q_1 = (q_1^T v_1)q_1 \\ v_2 &= c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = (q_1^T v_2)q_1 + (q_2^T v_2)q_2 \\ \cdots &= \cdots \\ v_k &= c_{1k}q_1 + \cdots + c_{kk}q_k = (q_1^T v_k)q_1 + \cdots + (q_k^T v_k)q_k \,. \end{aligned}$$

Βλέπουμε οτι εάν A είναι $m \times k$ πίνακας, R είναι ο άνω τριγωνικός $k \times k$ πίνακας με στοιχείο στη θέση i, j

$$R_{ij} = q_i^T v_j \quad \text{για } j \geq i \,.$$

Έχουμε αποδείξει την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.12 *Κάθε $m \times k$ πίνακας A με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή*

$$A = QR \,,$$

όπου ο Q είναι $m \times k$ πίνακας με ορθοκανονικές στήλες, και ο R είναι $k \times k$ άνω τριγωνικός και αντιστρέψιμος. Εάν $m = k$, τότε Q είναι ορθογώνιος πίνακας.

Παράδειγμα 1.10 Στο Παράδειγμα 1.9, εφαρμόσαμε τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης στα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα v_1, v_2, v_3 για να βρούμε τα ορθοκανονικά διανύσματα q_1, q_2, q_3. Αντιστρέφοντας αυτή τη διαδικασία έχουμε

$$v_1 = \sqrt{2}q_1 \,, \quad v_2 = \frac{1}{sqrt2}q_1 + \frac{3}{\sqrt{6}}q_2 \,, \quad v_3 = \sqrt{2}q_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}q_2 + \frac{7}{\sqrt{21}}q_3 \,.$$

Συνεπώς ο πίνακας A που έχει ως στήλες τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 παραγοντοποιείται ως $A = QR$, όπου Q είναι ο πίνακας που έχει ως στήλες τα διανύσματα q_1, q_2, q_3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{7}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} .$$

Η παραγοντοποίηση $A = QR$ απλοποιεί το πρόβλημα εύρεσης βέλτιστης λύσης ελαχίστων τετραγώνων. Η εξίσωση

$$A^T A\hat{x} = A^T b$$

γίνεται

$$R^T Q^T QR\hat{x} = R^T Q^T b.$$

Αφού $Q^T Q = I$ και R^T είναι αντιστρέψιμος, έχουμε

$$R\hat{x} = Q^T b$$

και αφού R είναι άνω τριγωνικός, το διάνυσμα $\hat{x}$ υπολογίζεται με ανάδρομη αντικατάσταση.

1.11 Ασκήσεις

Άσκηση 1.45 Εάν u είναι μοναδιαίο διάνυσμα, δείξτε οτι $Q = I - 2uu^T$ είναι συμμετρικός ορθογώνιος πίνακας. (Είναι μία ανάκλαση, και ονομάζεται μετασχηματισμός Householder). Υπολογίστε τον Q όταν $u^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Άσκηση 1.46 Θεωρούμε οτι οι στήλες του $n \times n$ πίνακα A είναι οι $n \times 1$ πίνακες $C_1, C_2, \ldots, C_n$, και οι γραμμές του $n \times n$ πίνακα B είναι οι $1 \times n$ πίνακες $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, το γινόμενο $C_i R_i$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Εκφράστε το γινόμενο AB ως άθροισμα τέτοιων πινάκων.

Άσκηση 1.47 Δείξτε οτι εάν A είναι $m \times k$ πίνακας με ορθογώνιες στήλες $w_1, \ldots, w_k$, τότε η προβολή P στο διανυσματικό υπόχωρο $\langle w_1, \ldots, w_k \rangle$ είναι το άθροισμα των προβολών P_i στους μονοδιάστατους υπόχωρους $\langle w_i \rangle$, για $i = 1, \ldots, k$.

Άσκηση 1.48 Προβάλετε το διάνυσμα $b = (1, 2)$ σε δύο μή ορθογώνια διανύσματα, $a_1 = (1, 0)$ και $a_2 = (1, 1)$. Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των δύο προβολών δεν είναι ίσο προς το b.

Άσκηση 1.49 Δείξτε οτι ένας άνω τριγωνικός ορθογώνιος πίνακας πρέπει να είναι διαγώνιος.

Άσκηση 1.50 Από τα μη ορθογώνια διανύσματα v_1, v_2, v_3, βρείτε ορθογώνια διανύσματα q_1, q_2, q_3.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.51 Ποιά είναι τα δυνατά διανύσματα v_1 και v_2, που δίνουν μετά από ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt τα διανύσματα q_1 και q_2.

Άσκηση 1.52 Ποιό πολλαπλάσιο του $a_1 = (1, 1)$ πρέπει να αφαιρεθεί από το $a_2 = (4, 0)$, ώστε το αποτέλεσμα να είναι ορθογώνιο προς το a_1. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ σε γινόμενο QR όπου Q είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 1.53 Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στα διανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και εκφράστε το αποτέλεσμα στη μορφή $A = QR$.

Άσκηση 1.54 Εάν $A = QR$, όπου οι στήλες του Q είναι ορθογώνια διανύσματα, βρείτε έναν απλό τύπο για τον πίνακα προβολής στο χώρο στηλών του A.

Άσκηση 1.55 Βρείτε τρία ορθοκανονικά διανύσματα q_1, q_2, $q_3 \in \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε τα q_1, q_2 να παράγουν το χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ποιός θεμελιώδης υπόχωρος του A περιέχει το διάνυσμα q_3; Βρείτε τη βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, όταν $b^T = [1\,2\,7]$.

Άσκηση 1.56 Με τον πίνακα A της Άσκησης 1.55, και το διάνυσμα $b = [1\,1\,1]^T$, χρησιμοποιήστε την παραγοντοποίηση $A = QR$ για να λύσετε το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $Ax = b$.

Άσκηση 1.57 Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στα διανύσματα $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$ και $(1, 0, -1)$ για να βρείτε ορθοκανονική βάση του επιπέδου $x_1+x_2+x_3 = 0$. Πόσα μή μηδενικά διανύσματα προκύπτουν από τη διαδικασία Gram-Schmidt;

Άσκηση 1.58 Βρείτε ορθογώνια διανύσματα w_1, w_2, w_3 από τα διανύσματα

$$v_1 = (1, -1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, -1, 0),\ v_3 = (0, 0, 1, -1).$$

Τα v_1, v_2, v_3 αποτελούν βάση του υποχώρου που είναι ορθογώνιος στο $(1, 1, 1, 1)$.

Κεφάλαιο 2

Ορίζουσες

2.1 Χαρακτηριστικές ιδιότητες της Ορίζουσας

Γνωρίζουμε την ορίζουσα πινάκων 2×2 : εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$$

Για ένα γενικό 2×2 πίνακα, η ορίζουσα είναι :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Εύκολα ελέγχουμε ορισμένες ιδιότητες των οριζουσών 2×2 πινάκων.

(α′) Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(β′) Το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει όταν εναλλάσσουμε τις γραμμές του πίνακα:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} &= cb - da \\ &= -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(γ′) Η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα :

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = (a + a')d - (b + b')c$$

$$\begin{aligned} &= (ad-bc)+(a'd-b'c) \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} &= tad - tbc \\ &= t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Από τα (β′) και (γ′) συμπεραίνουμε οτι η ορίζουσα επίσης εξαρτάται γραμμικά από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} c+c' & d+d' \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c' & d' \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Για να επεκτείνουμε την έννοια της ορίζουσας σε $n \times n$ πίνακες, θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις ιδιότητες. Θα δείξουμε οτι αυτές οι τρεις ιδιότητες χαρακτηρίζουν με μοναδικό τρόπο την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα.

Ορισμός 2.1. Ορίζουσα ονομάζεται μία συνάρτηση στο σύνολο $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ των $n\times n$ πινάκων με συνιστώσες πραγματικούς αριθμούς,

$$\det : \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,,$$

η οποία συμβολίζεται $\det A$ ή $|A|$, και ικανοποιεί τις ιδιότητες :
(α′) *Η ορίζουσα του $n\times n$ ταυτοτικού πίνακα είναι 1,*

$$\det \mathbf{I}_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(β′) *Εάν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε*

$$\det B = -\det A\,.$$

(γ′) *Η* $\det$ *εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & \dots & a_{1n}+a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

και

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Προσέξτε οτι δεν ισχύουν οι ισότητες $\det(A+B) = \det A + \det B$ και $\det(tA) = t\det A$, παρά μόνον όταν $n=1$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (β′) και (γ′), βλέπουμε οτι η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από οποιαδήποτε γραμμή του πίνακα.

Δραστηριότητα 2.1 Τι σημαίνει ‘‘η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από τη δεύτερη γραμμή’’ για τον ακόλουθο πίνακα;

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+l & 2e+m & 2f+n \\ g & h & k \end{bmatrix}.$$

Δραστηριότητα 2.2 Δίδεται ο 3×3 πίνακας A, με $\det A = 5$. Βρείτε την ορίζουσα $\det(2A)$.

Από αυτές τις τρεις ιδιότητες θα συμπεράνουμε διάφορες άλλες ιδιότητες των οριζουσών, που θα μας επιτρέψουν να δείξουμε οτι υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες.

(δ′) *Εάν δύο γραμμές του πίνακα A είναι ίσες, τότε* $\det A = 0$.

Πράγματι εάν εναλλάξουμε τις δύο ίσες γραμμές, ο πίνακας δεν αλλάζει, αλλά από το (β′), η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Άρα $\det A = -\det A$ και συνεπώς $\det A = 0$.

(ε′) *Οταν αφαιρούμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη, η ορίζουσα του πίνακα δεν αλλάζει.*

> **Δραστηριότητα 2.3** Ελέγξατε το (ε′) στον πίνακα
> $$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τον πίνακα B, του οποίου οι γραμμές είναι ίσες με αυτές του πίνακα A, εκτός απο τη γραμμή i, από την οποία έχουμε αφαιρέσει τη γραμμή j πολλαπλασιασμένη επί λ, για $j \neq i$. Θεωρούμε και τον πίνακα C, του οποίου οι γραμμές είναι ίσες με αυτές του πίνακα A, εκτός απο τη γραμμή i, η οποία είναι ίση με τη γραμμή j του πίνακα A. Τότε, από το (γ′), $\det B = \det A - \lambda \det C$. Αλλά από το (δ′), $\det C = 0$. Συνεπώς $\det B = \det A$.

> **Δραστηριότητα 2.4** Διατυπώστε το (ε′) με το συμβολισμό (a_{ij}). Συγκεκριμένα, γράψτε τις συνιστώσες b_{kl} της k-γραμμής του B, και c_{kl} της k-γραμμής του C, για $k = i$ και για $k \neq i$.

Λήμμα 2.1 *Εάν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A μέσω διαδικασίας απαλοιφής Gauss στην οποία περιλαμβάνονται k εναλλαγές γραμμών, τότε* $\det B = (-1)^k \det A$.

Πράγματι, από το (ε′) η αφαίρεση πολλαπλασίου μίας γραμμής από μία άλλη δεν αλλάζει την ορίζουσα. Από το (β′) κάθε εναλλαγή δύο γραμμών πολλαπλασιάζει την ορίζουσα με -1.

(ϛ′) *Εάν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή, τότε* $\det A = 0$, όπως αποδεικνύεται εύκολα από τα (δ′) και (ε′).

> **Δραστηριότητα 2.5** Δείξτε οτι εάν μία γραμμή του πίνακα A είναι πολλαπλάσιο μίας άλλης γραμμής, τότε $\det A = 0$.

(ζ′) *Εάν D είναι διαγώνιος πίνακας*

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix},$$

τότε $\det D = d_1\, d_2 \ldots d_n$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix} &= d_1 \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix} \\
&= \cdots \\
&= d_1\, d_2 \ldots d_n \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

(η′) *Εάν ο A είναι τριγωνικός, τότε η ορίζουσα είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.*

Εάν a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} είναι τα στοιχεία της διαγωνίου, και $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \neq 0$, τότε αφαιρώντας πολλαπλάσια μίας γραμμής απο μία άλλη, μπορούμε να φέρουμε τον πίνακα σε διαγώνια μορφή με τα a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} στη διαγώνιο. Αν ο A είναι κάτω τριγωνικός, αρχίζουμε με την πρώτη γραμμή, για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης κάτω από το a_{11}. Αν ο A είναι άνω τριγωνικός, αρχίζουμε με την τελευταία γραμμή, για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της τελευταίας στήλης πάνω από το a_{nn}. Άρα $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Εάν κάποιο απο τα $a_{i\,i}$ είναι μηδέν, τότε η απαλοιφή Gauss δίδει ένα πίνακα με μία μηδενική γραμμή. Άρα πάλι $\det A = 0$.

2.2 Πίνακες Μετάθεσης

Μία μετάθεση n στοιχείων είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση σ από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ στον εαυτό του. Για τις μεταθέσεις μικρών συνόλων χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Έτσι, $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}$ συμβολίζει τη μετάθεση που απεικονίζει το 1 στο 4, το 2 στο 2, το 3 στο 1 και το 4 στο 3. Ένας άλλος εύχρηστος τρόπος να συμβολίζουμε μεταθέσεις είναι με πίνακες. Η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}$ αντιστοιχεί στον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ αφού } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 2.2. Ένας $n \times n$ **πίνακας μετάθεσης** είναι ένας $n \times n$ πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι ακριβώς οι γραμμές του ταυτοτικού πίνακα $\mathbf{I}_n$, τοποθετημένες σε μία οποιαδήποτε διάταξη.

Παράδειγμα 2.1 Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι οι 6 πίνακες μετάθεσης 3 στοιχείων, που προκύπτουν από όλες τις διαφορετικές διατάξεις των 3 γραμμών του πίνακα $\mathbf{I}_3$.

Υπενθυμίζουμε οτι ένας $n \times n$ **πίνακας εναλλαγής** $P_{i\,j}$, για $i \neq j$, είναι ο πίνακας που έχει όλες τις γραμμές ίσες με τις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα $\mathbf{I}_n$, εκτός από τις γραμμές i και j που έχουν εναλλαγεί. Οι συνιστώσες του πίνακα $P_{i\,j}$ είναι $p_{i\,i} = p_{j\,j} = 0$, $p_{i\,j} = p_{j\,i} = 1$ και $pk\,\ell = \delta_{k\,\ell}$ όταν $k \neq i,\, j$ και $\ell \neq i,\, j$.

Λήμμα 2.2 *Ένας $n \times n$ πίνακας P είναι πίνακας μετάθεσης εάν και μόνον εάν είναι γινόμενο πινάκων εναλλαγής.*

Απόδειξη. Ο πολλαπλασιαμός ενός πίνακα A με έναν πίνακα εναλλαγής $P_{i\,j}$ από τα αριστερά εναλλάσσει τις γραμμές i και j του A. Συνεπώς ο πολλαπλασιασμός του $\mathbf{I}_n$ από τα αριστερά με πίνακες εναλλαγής, οδηγεί σε μία αναδιάταξη των γραμμών του ταυτοτικού πίνακα.

Αντίστροφα, θέλουμε να δείξουμε οτι ένας πίνακας μετάθεσης P είναι γινόμενο πινάκων εναλλαγής. Θεωρούμε την πρώτη στήλη του πίνακα P στην οποία η συνιστώσα στη διαγώνιο δεν είναι 1. Δηλαδή τη στήλη j για την οποία $p_{j\,j} = 0$ και $p_{i\,i} = 1$ για $1 \leq i < j$. Υποθέτουμε οτι η μη μηδενική συνιστώσα στη στήλη j βρίσκεται στη θέση $(i_j,\, j)$. Πολλαπλασιάζουμε τον P από τα αριστερά με τον πίνακα εναλλαγής $P_{i_j\,j}$. Στο γινόμενο $P_{i_j\,j}P$ η συνιστώσα στη θέση $(j,\, j)$ είναι 1.

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε έναν πίνακα με όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο ίσα με 1, δηλαδή στον ταυτοτικό πίνακα. Έχουμε $\mathbf{I}_n = P_{i_{j'}\,j'} \cdots P_{i_j\,j}P$, συνεπώς

$$P = P_{i_j\,j} \cdots P_{i_{j'}\,j'}\,.$$

□

Η παράσταση του πίνακα μετάθεσης ως γινόμενο πινάκων εναλλαγής δεν είναι μοναδική, για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Όμως θα δείξουμε οτι εάν ένας πίνακας μετάθεσης είναι γινόμενο περιττού πλήθους πινάκων εναλλαγής, τότε δεν είναι γινόμενο άρτιου πλήθους πινάκων εναλλαγής.

Λήμμα 2.3 *Εάν ο πίνακας μετάθεσης P είναι το γινόμενο k πινάκων εναλλαγής, τότε ο αριθμός $(-1)^k$ εξαρτάται μόνον από τον πίνακα P, και όχι από τη συγκεκριμένη παράσταση ως γινόμενο πινάκων εναλλαγής.*
Στο σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων μετάθεσης, είναι καλά ορισμένη η συνάρτηση

$$\mathrm{sign}(P) = (-1)^k .$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν $n \times n$ πίνακα μετάθεσης P. Για κάθε $j = 2, \ldots, n$ ορίζουμε τον αριθμό N_j να είναι το πλήθος των μη μηδενικών συνιστωσών του P που βρίσκονται κάτω και αριστερά από τη μη μηδενική συνιστώσα στη στήλη j, δηλαδή $N_j = \mathrm{card}\{\ell \in \mathbb{N} : 1 \leq \ell < j \text{ και } i_\ell > i_j\}$. Θέτουμε $N_P = \sum_{j=2}^{n} N_j$. Παρατηρούμε οτι για τον ταυτοτικό πίνακα $N_{\mathbf{I}_n} = 0$.

Για παράδειγμα, εάν $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $i_1 = 3$, $i_2 = 2$, $i_3 = 1$. Συνεπώς $N_2 = 1, N_3 = 2$ και $N_P = 3$.

Θα δείξουμε οτι κάθε εναλλαγή γραμμών μεταβάλει τον αριθμό N_P κατά έναν περιττό αριθμό, δηλαδή οτι $N_P - N_{P_{ij}P}$ είναι περιττός.

Υποθέτωντας αυτό το αποτέλεσμα, θεωρούμε οτι P είναι γινόμενο k πινάκων εναλλαγής $P = P_{i_k j_k} \cdots P_{i_1 j_1} \mathbf{I}_n$. Θέτουμε $P_\ell = P_{i_\ell j_\ell} \cdots P_{i_1 j_1} \mathbf{I}_n$. Τότε $P_{\ell+1} = P_{i_{\ell+1} j_{\ell+1}} P_\ell$ και $N_{P_{\ell+1}} = N_{P_\ell} + m_{\ell+1}$ για κάποιο περιττό αριθμό $m_{\ell+1}$. Συμπεραίνουμε οτι $N_P = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$. Αφού όλοι οι αριθμοί m_ℓ είναι περιττοί, εάν N_P είναι περιττός, τότε k είναι περιττός, ενώ εάν N_P είναι άρτιος, k είναι άρτιος. Αφού N_P εξαρτάται μόνον από τον πίνακα P, το ίδιο ισχύει για τον αριθμό $(-1)^k$.

Απομένει να δείξουμε οτι για κάθε εναλλαγή γραμμών P_{ij}, $N_P - N_{P_{ij}P}$ είναι περιττός. Πρώτα θεωρούμε μία εναλλαγή δύο διαδοχικών γραμμών, $P_{i\,i+1}$. Εάν η μη μηδενική συνιστώσα της γραμμής $i+1$ βρίσκεται στα αριστερά της μη μηδενικής συνιστώσας της γραμμής i, τότε $N_{P_{i\,i+1}P} = N_P - 1$. Ενώ εάν η μη μηδενική συνιστώσα της γραμμής $i+1$ βρίσκεται στα δεξιά της μη μηδενικής συνιστώσας της γραμμής i, τότε $N_{P_{i\,i+1}\,P} = N_P + 1$. Για παράδειγμα,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$N_Q = 2 \qquad N_{Q'} = 3 \qquad N_{Q''} = 1\,.$$

Τώρα θεωρούμε μία γενική εναλλαγή $P_{i\,j}$ και υποθέτουμε οτι $j = i + \ell$. Κάνοντας ℓ εναλλαγές σε διαδοχικές γραμμές, $P_{i\,i+1}$, $P_{i+1\,i+2}$, $\ldots$, $P_{i+\ell-1\,i+\ell}$ φέρνουμε τη γραμμή i του πίνακα P στη θέση $i + \ell$, ενώ διατηρούμε τη διάταξη των υπολοίπων γραμμών. Στη συνέχεια κάνουμε τις $\ell - 1$ εναλλαγές σε διαδοχικές γραμμές, $P_{i+\ell-2\,i+\ell-1}$, $\ldots$, $P_{i\,i+1}$, που φέρνουν τη γραμμή $i + \ell$ του πίνακα P στη θέση i ενώ διατηρούν τη διάταξη των υπολοίπων γραμμών.

Συνολικά κάναμε $2\ell - 1$ εναλλαγές σε διαδοχικές γραμμές, κάθε μία από τις οποίες προσθέτει ± 1 στον αριθμό N_P. Συμπεραίνουμε οτι η εναλλαγή $P_{i\,j}$ αλλάζει τον αριθμό N_P κατά έναν περιττό αριθμό. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

2.3 Μοναδικότητα της ορίζουσας

Τώρα μπορούμε να δείξουμε οτι υπάρχει μοναδική συνάρτηση στο σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων, η οποία να ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′) και (γ′). Έτσι η ορίζουσα είναι *καλά ορισμένη*.

Θεώρημα 2.4 *Εάν A είναι $n \times n$ πίνακας και $A = PLU$, όπου P είναι πίνακας μετάθεσης, L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο και U είναι άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία u_{11}, $\ldots$, u_{nn} στη διαγώνιο, τότε η μοναδική συνάρτηση $\det : \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′) και (γ′) είναι η*

$$\det A = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn} \mathrm{sign} P\,.$$

Απόδειξη. Από την ιδιότητα (η′), η ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα U είναι $u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$. Ο πολλαπλασιασμός με τον κάτω τριγωνικό πίνακα L προσθέτει πολλαπλάσια μίας γραμμής του U σε μία άλλη. Από το (ε′), $\det LU = \det U$. Τέλος ο πολλαπλασιασμός με P αντιστοιχεί σε εναλλαγές των γραμμών του LU, και πολλαπλασιάζει την ορίζουσα με $\mathrm{sign}P$. Άρα μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′) και (γ′) πρέπει να έχει την τιμή $u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}\mathrm{sign}P$ στον πίνακα PLU. Για να είναι αυτή η τιμή καλά ορισμένη ως συνάρτηση του πίνακα A, πρέπει να δείξουμε οτι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη παραγοντοποίηση του A. Δηλαδή οτι εάν $P_1L_1U_1 = P_2L_2U_2$, τότε το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του U_1 και το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του U_2 διαφέρουν μόνον κατά το πρόσημο $\mathrm{sign}P_1\mathrm{sign}P_2$. Αυτό δεν θα το αποδείξουμε γενικά, αλλά θα το δούμε σε ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A = P_1 L_1 U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

και

$$A = P_2 L_2 U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Για τον πίνακα μετάθεσης P_1 έχουμε $\text{sign}P_1 = 1$, ενώ για τον P_2, $\text{sign}P_2 = -1$. Άρα από την πρώτη παραγοντοποίηση έχουμε $\det A = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{7}{6} = 7$ ενώ από τη δεύτερη $\det A = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-7) = 7$.

□

Δραστηριότητα 2.6 Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss (χωρίς εναλλαγές) στους πίνακες $P_1^T A$ και $P_2^T A$, για να επαληθεύσετε οτι παραγοντοποιούνται ως $L_1 U_1$ και $L_2 U_2$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.5 *Η ορίζουσα* $\det A$ *είναι μηδέν εάν και μόνον εάν ο πίνακας* A *είναι ιδιόμορφος.*

Απόδειξη. Εάν ο A είναι ιδιόμορφος, τότε η απαλοιφή οδηγεί σε πίνακα με μία μηδενική γραμμή, άρα $\det A = 0$.

Αντίστροφα, εάν A δεν είναι ιδιόμορφος, η απαλοιφή οδηγεί σε άνω τριγωνικό πίνακα με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο, και $\det A = \pm d_1\, d_2 \cdots d_n \neq 0$.

□

Θεώρημα 2.6 *Εάν* A, B *είναι* $n \times n$ *πίνακες,*

$$\det(AB) = \det A \,\det B.$$

Δραστηριότητα 2.7 Ελέγξτε την ιδιότητα $\det(AB) = \det A \det B$ υπολογίζοντας τις ορίζουσες των πινάκων $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ και AB.

Απόδειξη. Εάν ένας από τους πίνακες A, B είναι ιδιόμορφος, τότε το γινόμενο είναι επίσης ιδιόμορφο και $\det(AB) = 0 = \det A \,\det B$.

Υποθέτουμε οτι B δεν είναι ιδιόμορφος, και για κάθε μη ιδιόμορφο $n\times n$ πίνακα A ορίζουμε

$$d(A) = \frac{\det(AB)}{\det B}\,.$$

Θα δείξουμε οτι $d(A)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′), (γ′), και συνεπώς ορίζει μία συνάρτηση η οποία, εάν επεκταθεί με την τιμή 0 για ιδιόμορφους πίνακες, είναι ίση με την ορίζουσα.

Η ιδιότητα (α′): εάν $A = I$,

$$d(I) = \frac{\det IB}{\det B} = \frac{\det B}{\det B} = 1.$$

Η ιδιότητα (β′): εάν εναλλάξουμε δύο γραμμές του A, εναλλάσσονται οι αντίστοιχες γραμμές του AB. Άρα αλλάζει το πρόσημο του $\det AB$, και συνεπώς το πρόσημο του $d(A)$.

Η ιδιότητα (γ′): θεωρούμε πίνακες $C = (c_{ij})$ και $D = (d_{ij})$ τέτοιους ώστε για $j = 1, \ldots, n$,

$$a_{1j} = sc_{1j} + d_{1j}$$

και για $i > 1$

$$a_{ij} = c_{ij} = d_{ij}.$$

Τότε η πρώτη γραμμή του AB είναι

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, b_{kj} = s \sum_{k=1}^{n} c_{1k}\, b_{kj} + \sum d_{1k}\, b_{kj}$$

και ισχύει $\det AB = s\,\det CB + \det DB$, και συνεπώς $d(A) = s\,d(C) + d(D)$. Άρα η $d(A)$ εξαρτάται γραμμικά απο την πρώτη γραμμή του A.

$\square$

Δραστηριότητα 2.8 Δίδεται ο $n \times n$ πίνακας A, με $\det A = -3$. Βρείτε την ορίζουσα $\det A^2$.

Θεώρημα 2.7 *Η ορίζουσα του αναστρόφου του πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του A,*

$$\det(A^T) = \det A\,.$$

Απόδειξη. Ο πίνακας A είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν ο ανάστροφος A^T είναι ιδιόμορφος. Άρα σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\det A = 0 = \det A^T\,.$$

Εάν ο A δεν είναι ιδιόμορφος, τότε υπάρχει πίνακας μετάθεσης P για τον οποίο PA έχει μοναδική παραγοντοποίηση

$$PA = LDU\,, \tag{2.1}$$

με L κάτωτριγωνικό με 1 στη διαγώνιο, D διαγώνιο πίνακα και U άνω τριγωνικό με 1 στη διαγώνιο. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.6 και έχουμε

$$\det P \det A = \det L \det D \det U\,.$$

Αναστρέφοντας την 2.1, έχουμε

$$A^T P^T = U^T D^T L^T \,,$$

και συνεπώς

$$\det A^T \det P^T = \det U^T \det D^T \det L^T \,.$$

Αλλά οι πίνακες L, U, U^T και L^T είναι τριγωνικοί πίνακες με ένα στη διαγώνιο. Άρα οι ορίζουσές τους είναι ίσες με 1. Επίσης, για το διαγώνιο πίνακα D έχουμε $D^T = D$. Άρα το μόνο που μένει να δείξουμε είναι οτι $\det P^T = \det P$. Αλλά ο πίνακας P προκύπτει με εναλλαγές γραμμών από τον ταυτοτικό πίνακα I. Συνεπώς $\det P = \pm 1$. Επίσης, $PP^T = I$, και συνεπώς $\det P \det P^T = 1$. Συμπεραίνουμε οτι $\det P = \det P^T$. Έχουμε δείξει οτι

$$\det A = \det P^T \det L \det D \det U = \det P \det L^T \det D^T \det U^T = \det A^T \,.$$

□

Το Θεώρημα 2.7 αμέσως διπλασιάζει τον κατάλογο των ιδιοτήτων των οριζουσών: για κάθε ιδιότητα για τις γραμμές ενός πίνακα, ισχύει και η αντίστοιχη ιδιότητα για τις στήλες του πίνακα.

2.4 Ασκήσεις

Άσκηση 2.1 Εάν ένας 4×4 πίνακας A έχει ορίζουσα $\det A = \frac{1}{2}$, βρείτε τις ορίζουσες $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$ και $\det(A^{-1})$.

Άσκηση 2.2 Εάν ένας 3×3 πίνακας B έχει ορίζουσα $\det B = -1$, βρείτε τις ορίζουσες $\det(\frac{1}{2}B)$, $\det(-B)$, $\det(B^2)$ και $\det(B^{-1})$.

Άσκηση 2.3 Χρησιμοποιήστε απαλοιφή για να φέρετε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

σε άνω τριγωνική μορφή και να υπολογίσετε την ορίζουσα τους.
Εναλλάξτε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή του πίνακα B, και επαναλάβετε τη διαδικασία.

Άσκηση 2.4 Καταμετρήστε τις εναλλαγές γραμμών για να βρείτε τις ορίζουσες

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.5 Για κάθε n, πόσες εναλλαγές γραμμών απαιτούνται για να φέρουν τις γραμμές του πίνακα A στην αντίθετη διάταξη PA;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad PA = \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα P.

Άσκηση 2.6 Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς· Δώστε αιτιολόγηση εάν είναι αληθείς, και αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδείς.

α′. Εάν οι πίνακες A και B είναι ίσοι, εκτός από το στοιχείο στη θέση $(1, 1)$, όπου $b_{11} = 2a_{11}$, τότε $\det B = 2\det A$.

β′. Η ορίζουσα είναι το γινόμενο των οδηγών.

γ′. Εάν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και B ιδιόμορφος, τότε $A+B$ είναι αντιστρέψιμος.

δ′. Εάν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και B ιδιόμορφος, τότε AB είναι ιδιόμορφος.

ε′. Η ορίζουσα του πίνακα $AB - BA$ είναι μηδέν.

Άσκηση 2.7 Βρείτε τις ορίζουσες των

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Για ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας $A - \lambda I$ ιδιόμορφος;

Άσκηση 2.8 Δείξτε οτι εάν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του A είναι 0 τότε $\det A = 0$. Εάν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του A είναι 1, τότε $\det(A - I) = 0$. Δείξτε με ένα παράδειγμα οτι αυτό δεν σημαίνει οτι $\det A = 1$.

Άσκηση 2.9 Υπενθυμίζουμε οτι αντισυμμετρικός ονομάζεται ένας πίνακας K εάν $K^T = -K$, όπως ο

$$K = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

α΄. Εάν ο K είναι 3×3, δείξτε οτι $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Συμπεράνετε οτι η ορίζουσα ενός 3×3 αντισυμμετρικού πίνακα είναι 0.

β΄. Βρείτε ένα παράδειγμα αντισυμμετρικού 4×4 πίνακα, με ορίζουσα $\det K \neq 0$.

Άσκηση 2.10 Δείξτε οτι εάν Q είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε $\det Q = \pm 1$.

Άσκηση 2.11 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα A με απαλοιφή, και κατόπιν βρείτε τις ορίζουσες των πινάκων B, C, AB, $A^T A$ και C^T.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.12 Επαληθεύστε οτι η 3×3 ορίζουσα Vandermonde είναι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Άσκηση 2.13 Εάν ο $n \times n$ πίνακας A έχει στοιχεία $a_{ij} = ij$, δείξτε οτι $\det A = 0$, εκτός εάν $A = [1]$.

Άσκηση 2.14 Χρησιμοποιήστε απαλοιφή για να υπολογίσετε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 2.15 Εάν ο $n \times n$ πίνακας A έχει στοιχεία $a_{ij} = i + j$, δείξτε οτι $\det A = 0$, εκτός εάν $n = 1$ ή 2.

Άσκηση 2.16 Φέρτε τους πίνακες σε άνω τριγωνική μορφή και υπολογίστε την ορίζουσα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.17 Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να φέρετε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

σε τριγωνική μορφή και να υπολογίσετε την ορίζουσα.
(Καταγράψετε τυχόν εναλλαγές γραμμών για να προσδιορίσετε το πρόσημο.)

Άσκηση 2.18 Εάν γνωρίζετε οτι η ορίζουσα του A είναι 6, βρείτε την ορίζουσα του B, όπου οι γραμμές του A είναι a_1, a_2, a_3 και οι γραμμές του B είναι $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_1$.

Άσκηση 2.19 Πως συνδέονται οι $\det(2A)$, $\det(-A)$ και $\det(A^2)$ με την $\det A$, όταν A είναι πίνακας n επί n;

Άσκηση 2.20 Προσδιορίστε εάν οι ακόλουθες μεταθέσεις είναι άρτιες ή περιττές

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,1\,4\,2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix} .$$

Γράψτε τους 4×4 πίνακες που τις παριστάνουν, και υπολογίστε τις ορίζουσες.

Άσκηση 2.21 Υπολογίστε τις ορίζουσες

α΄. Του πίνακα τάξεως 1, $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

β΄. Του άνω τριγωνικού πίνακα $U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

γ΄. Του πίνακα κάτω τριγωνικού πίνακα U^T.

δ΄. Του πίνακα U^{-1}.

ε΄. Του πίνακα $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$, που προκύπτει από εναλλαγές γραμμών.

Άσκηση 2.22 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix} a-mc & b-md \\ c-la & d-lb \end{bmatrix}$ χρησιμοποιώντας τη γραμμική εξάρτηση της ορίζουσας σε κάθε γραμμή.

Άσκηση 2.23 Εάν $B = M^{-1}AM$, γιατί ισχύει $\det B = \det A$; Δείξτε επίσης οτι $\det A^{-1}B = 1$.

Υπολογισμός της Ορίζουσας

Γνωρίζουμε οτι κάθε μη ιδιόμορφος $n \times n$ πίνακας παραγοντοποιείται στη μορφή

$$A = P^{-1}\, L\, D\, U' ,$$

όπου P είναι πίνακας μετάθεσης, L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος πίνακας με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και U' είναι άνω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο.

Από τα προηγούμενα έχουμε $\det P = \pm 1$, $\det L = \det U' = 1$ και $\det D$ ισούται με το γινόμενο των οδηγών. Άρα

$$\begin{aligned} \det A &= \det P^{-1} \det L \det D \det U' \\ &= \pm \text{ (γινόμενο των οδηγών)} . \end{aligned}$$

Αυτός είναι ο πρακτικότερος τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας: χρησιμοποιούμε απαλοιφή για να φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή, η ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των οδηγών πολλαπλασιασμένο με $(-1)^k$, όπου k είναι ο αριθμός των εναλλαγών γραμμών που χρησιμοποιήσαμε στην απαλοιφή.

2.5 Ο τύπος για την ορίζουσα

Από θεωρητική άποψη θα θέλαμε να γνωρίζουμε τον τρόπο εξάρτησης της ορίζουσας από κάθε συνιστώσα του πίνακα, δηλαδή έναν τύπο για την ορίζουσα ανάλογο με το $\det A = ad - bc$ για 2×2 πίνακες. Ας δούμε πώς μπορούμε να αποδείξουμε αυτόν τον τύπο απο τις ιδιότητες της ορίζουσας:

Η πρώτη γραμμή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $[a\, b] = [a\, 0] + [0\, b]$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \\ &= 0 + ad + (-bc) + 0 \end{aligned}$$

Αν εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία σε έναν $n \times n$ πίνακα, έχουμε, για την πρώτη γραμμή:

$$[a_{11}\ \ldots\ a_{1n}] = [a_{11}\,0\ \ldots\ 0] + [0\,a_{12}\,0\ \ldots\ 0] + \cdots + [0\ \ldots\ 0\,a_{1n}]$$

άρα η ορίζουσα του πίνακα ισούται με το άθροισμα των οριζουσών n πινάκων, ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή. Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία για τη δεύτερη γραμμή, και έχουμε το άθροισμα των οριζουσών n^2 πινάκων, ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μία από τις δύο πρώτες γραμμές. Επαναλαμβάνουμε για όλες τις γραμμές του πίνακα, και καταλήγουμε με το άθροισμα των οριζουσών n^n πινάκων, ο κάθε ένα από τους οποίους έχει σε κάθε γραμμή μόνον ένα στοιχείο που μπορεί να μην είναι ίσο με 0. Υποθέτουμε οτι στην i γραμμή το στοιχείο που μπορεί να μην είναι 0 βρίσκεται στη j_i στήλη, είναι δηλαδή το στοιχείο a_{ij_i} .

Εξετάζουμε έναν από αυτούς τους n^n πίνακες. Έχει το πολύ n μη μηδενικά στοιχεία. Εάν δύο απο τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην ίδια στήλη, τότε υπάρχει μία στήλη που περιέχει μόνο μηδέν, και συνεπώς η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν. Συμπεραίνουμε οτι η ορίζουσα του πίνακα δεν μηδενίζεται μόνον όταν η αντιστοιχία $i \mapsto j_i$ δεν απεικονίζει δύο διαφορετικά i στο ίδιο j, δηλαδή εάν είναι μετάθεση του συνόλου $\{1, \ldots, n\}$. Γνωρίζουμε οτι υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις, και συνεπώς μόνο $n!$ απο τις n^n ορίζουσες μπορεί να μην είναι ίσες με μηδέν.

Ας εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία σε ένα 3×3 πίνακα. Για το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ υπάρχουν $3! = 6$ μεταθέσεις, τρεις άρτιες

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

και τρεις περιττές

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα εκφράζεται ως άθροισμα 6 οριζουσών,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

Για κάθε μετάθεση $\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, P_σ είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού 3×3 πίνακα $\mathbf{I}$. Τότε $\det P_\sigma$ είναι 1 εάν η μετάθεση είναι άρτια και -1 εάν η μετάθεση είναι περιττή. Ο όρος $a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}a_{3\,\sigma(3)}$

πολλαπλασιάζεται με $\det P_\sigma$. Έτσι ο τύπος για μία 3×3 ορίζουσα εκφράζεται ως άθροισμα, πάνω από το σύνολο όλων των μεταθέσεων 3 στοιχείων,

$$\det A = \sum_\sigma a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}a_{3\,\sigma(3)}\ \det(P_\sigma)\,.$$

Η προηγούμενη ανάλυση γενικεύεται σε $n\times n$ πίνακες, και δίδει τον ακόλουθο τύπο για την ορίζουσα ενός $n\times n$ πίνακα.

Θεώρημα 2.8 *Εάν $A=(a_{ij})$ είναι $n\times n$ πίνακας,*

$$\det A = \sum_\sigma a_{1\,\sigma(1)}\dots a_{n\,\sigma(n)}\ \det(P_\sigma) \tag{2.2}$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω από το σύνολο όλων των μεταθέσεων n στοιχείων, και P_σ είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα.

Παράδειγμα 2.2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{bmatrix}.$$

Εάν $\sigma(1)=1$, ο όρος περιλαμβάνει τη συνιστώσα a_{11}, και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες a_{13} και a_{31} που βρίσκονται στην •δια γραμμή ή την ίδια στήλη με την a_{11}. Τότε η μόνη μετάθεση που δίδει μη μηδενικό όρο είναι η ταυτοτική, που δίδει τον όρο $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

Εάν $\sigma(1)=3$, ο όρος περιλαμβάνει τη συνιστώσα a_{13}, και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες a_{11} και a_{33}. Η μόνη μετάθεση που δίδει μη μηδενικό όρο είναι η $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$, που δίδει τον όρο $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$. Αυτή η μετάθεση είναι μία εναλλαγή, άρα εμφανίζεται με πρόσημο -1. Η ορίζουσα είναι $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$.

2.6 Ανάπτυγμα της ορίζουσας

Παράδειγμα 2.3 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 17 & 3 & 0\\ 5 & 17 & 19 & 11\\ 7 & 17 & 0 & 13\end{bmatrix}.$$

Για να γράψουμε συστηματικά όλους τους όρους στον τύπο 2.2 για την ορίζουσα του A, ξεκινάμε με τους όρους που περιέχουν το 2 από την πρώτη γραμμή. Αυτοί οι όροι δεν περιέχουν καμμία άλλη συνιστώσα από την πρώτη γραμμή ή από την πρώτη στήλη. Άρα οι υπόλοιποι παράγοντες αυτών των όρων προέρχονται από τις συνιστώσες του 3×3 πίνακα $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ένας από κάθε γραμμή και κάθε στήλη. Η ορίζουσα του B έχει μόνο δύο μη μηδενικούς όρους, τους $-3 \cdot 5 \cdot 13 + 3 \cdot 7 \cdot 11$. Η ορίζουσα του A έχει επίσης μόνο δύο μη μηδενικους όρους, τους $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ και των οριζουσών των $(n-1) \times (n-1)$ πινάκων που προκύπτουν από τον A όταν διαγράψουμε μία γραμμή και μία στήλη. Ειδικότερα θα εξετάσουμε πώς καθορίζονται τα πρόσημα αυτών των οριζουσών μέσα στην παράσταση για την $\det A$.

Θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός 4×4 πίνακα, πριν δούμε το αποτέλεσμα για $n \times n$ πίνακα. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Γνωρίζουμε οτι $\det A$ είναι το άθροισμα 24 όρων, ένα για κάθε μετάθεση σ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$. Θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (2.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{11}. Βγάζουμε το a_{11} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{11} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{11}\, a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)}\ \det P_\sigma = a_{11} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)}\ \det P_\sigma \right) = a_{11} C_{11}\,.$$

Στο άθροισμα C_{11} εμφανίζονται μόνο συνιστώσες του πίνακα που δεν βρίσκονται στην πρώτη γραμμή ή στην πρώτη στήλη. Συμβολίζουμε A_{11} τον πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \times & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \times & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Οι μεταθέσεις του $\{1, 2, 3, 4\}$ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$, αντιστοιχούν σε μεταθέσεις του $\{2, 3, 4\}$. Συμβολίζουμε σ' τη μετάθεση του $\{2, 3, 4\}$ που αντιστοιχεί στη μετάθεση σ του $\{1, 2, 3, 4\}$. Παρατηρούμε οτι αφού $\sigma(1) = 1$, οι εναλλαγές που συνθέτουν τη σ' είναι όσες και οι εναλλαγές που συνθέτουν τη σ. Συνεπώς $\det P_{\sigma'} = \det P_\sigma$. Συμπεραίνουμε οτι το άθροισμα C_{11} είναι ακριβώς η ορίζουσα του A_{11}.

$$C_{11} \quad = \sum_{\substack{\sigma \text{ μετάθεση του } \{1,\,2,\,3,\,4\} \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)}\ \det P_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma' \text{ μετάθεση του } \{2,\,3,\,4\}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)}\, \det P'_\sigma$$

$$= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} .$$

Τώρα θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 2$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (2.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{12}. Βγάζουμε το a_{12} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{12} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{12}\, a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)}\, \det P_\sigma = a_{12} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)}\, \det P_\sigma \right) = a_{12}\, C_{12}.$$

Στο άθροισμα C_{12} εμφανίζονται μόνο συνιστώσες του πίνακα που δεν βρίσκονται στην πρώτη γραμμή ή στη δεύτερη στήλη. Συμβολίζουμε A_{12} τον πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ a_{21} & \times & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \times & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \times & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} .$$

Κάθε μετάθεση σ του $\{1,\,2,\,3,\,4\}$ για την οποία $\sigma(1) = 2$, αντιστοιχεί σε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\rho : \{2,\,3,\,4\} \longrightarrow \{1,\,3,\,4\}$. Άρα το άθροισμα C_{12} περιέχει όλους τους όρους της ορίζουσας του A_{12}, αλλά ενδεχομένως με διαφορετικό πρόσημο, αφού η ρ μπορεί να συντίθεται από διαφορετικό αριθμό εναλλαγών απ' οτι η σ.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τα αθροίσματα C_{13} και C_{14},

$$\begin{aligned} C_{13} &= \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=3}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)}\, \det P_\sigma \,, \\ C_{14} &= \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=4}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)}\, \det P_\sigma \,. \end{aligned}$$

και να εξετάσουμε τη σχέση τους με τις ορίζουσες των πινάκων A_{13} και A_{14}, που προκύπτουν από τον A όταν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την τρίτη ή την τέταρτη στήλη. Τότε το *ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα Aως προς την πρώτη γραμμή* είναι

$$\det A = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13} + a_{14}\, C_{14} \,.$$

Για να κατανοήσουμε τη σχέση μεταξύ των αθροισμάτων C_{1j} και των πινάκων A_{1j}) εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Για $j = 1,\,2,\,3,\,4$ θεωρούμε τις αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

$$\tau_j = \{1,\,2,\,3\} \longrightarrow \{1,\,2,\,3,\,\} \setminus \{j\}$$

που διατηρούν τη διάταξη των φυσικών αριθμών.

Για κάθε μετάθεση σ του $\{1, 2, 3, 4\}$, και κάθε $i = 1, 2, 4, 4$, ορίζεται μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\rho : \{2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{\sigma(1)\}$. Θα αντιστοιχίσουμε την ρ σε μία μετάθεση του σ_1 του συνόλου $\{1, 2, 3\}$. Ορίζουμε τη σ_1 ως τη σύνθεση $\sigma_i = \tau_{\sigma(1)}^{-1} \circ \sigma \circ \tau_1$:

$$\{1, 2, 3\} \xrightarrow{\tau_i} \{2, 3, 4\} \xrightarrow{\sigma} \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{\sigma(1)\} \xrightarrow{\tau_{\sigma(1)}^{-1}} \{1, 2, 3\}\,.$$

Για παράδειγμα τ_2 είναι η απεικόνιση $\tau_2 : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 3, 4\}$ για την οποία

$$\tau_2(1) = 1,\ \tau_2(2) = 3,\ \tau_2(3) = 4\,.$$

Εάν σ είναι η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $\sigma_1 = \tau_2^{-1} \circ \sigma \circ \tau_1$ είναι η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \tau_1 & & \sigma & & \tau_2^{-1} & \\ 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 3 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 3\,. \end{array} \tag{2.3}$$

Εάν σ είναι μία μετάθεση του $\{1, 2, 3, 4\}$, γνωρίζουμε οτι ο όρος $a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}a_{3\,\sigma(3)}a_{4\,\sigma(4)}$ εμφανίζεται στον τύπο για την ορίζουσα του πίνακα A πολλαπλασιασμένος με $\det P_\sigma$. Με το συμβολισμό που εισαγάγαμε, εάν $\sigma(1) = j$, ο όρος $a_{2\,\sigma(2)}a_{3\,\sigma(3)}a_{4\,\sigma(4)}$ εμφανίζεται στον τύπο για την ορίζουσα του πίνακα $A_{1\,\sigma(1)}$ πολλαπλασιασμένος με $\det P_{\sigma_1}$. Έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ του αθροίσματος $C_{1\,\sigma(1)}$ και της ορίζουσας $\det A_{1\,\sigma(1)}$. Το ακόλουθο Λήμμα δίδει τη σχέση μεταξύ της $\det P_\sigma$ και της $\det P_{\sigma_1}$.

Λήμμα 2.9 *Για κάθε μετάθεση σ, με τον παραπάνω συμβολισμό,*

$$\det P_\sigma = (-1)^{1+\sigma(1)} \det P_{\sigma_1}\,.$$

Απόδειξη. Για κάθε μετάθεση με $\sigma(1) = 1$, όπως έχουμε παρατηρήσει,

$$\det P_\sigma = \det P_{\sigma_1}\,.$$

Στη γενική περίπτωση, $\sigma(1) = j$, ο πίνακας P_σ έχει συνιστώσα 1 στη θέση $(1\,j)$. Εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την j στήλη από τον πίνακα P_σ, παίρνουμε το πίνακα P_{σ_1}. Στο παράδειγμα (2.3),

$\sigma_n(k) = \sigma(k)$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Είναι φανερό οτι

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} P_{\sigma_n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix},$$

και συνεπώς

εφόσον απαιτείται ο ίδιος αριθμός εναλλαγών γραμμών και στηλών για να καταλήξουμε στον ταυτοτικό πίνακα.

Στη γενική περίπτωση, για $i \in \{1, \ldots, n\}$, μετατρέπουμε τον πίνακα P_σ στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} P_{\sigma_n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Χρειάζονται $n-i$ εναλλαγές γραμμών για να μετακινηθεί η συνιστώσα του $\mathbb{P}_\sigma$ από τη θέση $(i,\, \sigma(i))$ στη θέση $(n,\, \sigma(i))$, και $n-\sigma(i)$ εναλλαγές στηλών για να μετακινηθεί από τη θέση $(n,\, \sigma(i))$ στη θέση $(n,\, n)$. Συνεπώς

$$\det P_\sigma = (-1)^{(n-i)+(n-\sigma(i))} \begin{vmatrix} P_{\sigma_i} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+\sigma(i)} \det P_{\sigma_i}.$$

□

Θεωρούμε τις μεταθέσεις σ του συνόλου $\{1, \ldots, n\}$ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (2.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{11}. Βγάζουμε το a_{11} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{11} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{11}\, a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma = a_{11} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \right) = a_{11} C_{11}.$$

Συμβολίζουμε A_{11} τον πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \times & \times & \ldots & \times \\ \times & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Οι μεταθέσεις του $\{1, 2, \ldots, n\}$ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$, αντιστοιχούν σε μεταθέσεις του $\{2, 3, \ldots, n\}$. Άρα το άθροισμα C_{11} είναι ακριβώς η ορίζουσα του πίνακα A_{11}

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{\substack{\text{μετάθεση του } \{1,\, \ldots,\, n\} \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \\ &= \sum_{\text{μετάθεση του } \{2,\, \ldots,\, n\}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \\ &= \begin{vmatrix} \times & \times & \ldots & \times \\ \times & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 2$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (2.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{12}. Βγάζουμε το a_{12} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{12} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{12}\, a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma = a_{12} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right) = a_{12}\, C_{12}.$$

Κάθε μετάθεση σ του $\{1, 2, \dots, n\}$ για την οποία $\sigma(1) = 2$, αντιστοιχεί σε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση απο το $\{2, 3, \dots, n\}$ στο $\{1, 3, 4, \dots, n\}$, και το άθροισμα C_{12} διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο απο την ορίζουσα του πίνακα A_{12} που προκύπτει απο τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ a_{21} & \times & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \times & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

και

$$C_{12} = \sum_{\substack{\text{μετάθεση του } \{1,\, \dots,\, n\} \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma = \pm \det A_{12}\,.$$

Για να δούμε πώς διαφέρει το πρόσημο του C_{12} από αυτό της ορίζουσας $\det A_{12}$, εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Για $j = 1, \dots, n$ θεωρούμε τις αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

$$\tau_j = \{1, \dots, n-1\} \longrightarrow \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$$

που διατηρούν τη διάταξη των φυσικών αριθμών. Για κάθε μετάθεση σ του $\{1, \dots, n\}$, και κάθε $i = 1, \dots, n$, ορίζουμε τη μετάθεση σ_i του $\{1, \dots, n-1\}$ ως τη σύνθεση $\sigma_i = \tau_{\sigma(i)}^{-1} \circ \sigma \circ \tau_i$:

$$\{1, \dots, n-1\} \xrightarrow{\tau_i} \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} \xrightarrow{\sigma} \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma(i)\} \xrightarrow{\tau_{\sigma(i)}^{-1}} \{1, \dots, n-1\}\,.$$

Για παράδειγμα, εάν $n = 4$, τ_2 είναι η απεικόνιση $\tau_2 : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 3, 4\}$ για την οποία

$$\tau_2(1) = 1,\ \tau_2(2) = 3,\ \tau_2(3) = 4\,.$$

Εάν σ είναι η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $\sigma_2 = \tau_3^{-1} \circ \sigma \circ \tau_2$ είναι η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \tau_2 & & \sigma & & \tau_3^{-1} & \\ 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 3\,. \end{array}$$

Στη γενική περίπτωση, εάν $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$, και $i \in \{1, \ldots, n\}$, για κάθε $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, η σ_i δίδεται από

$$\sigma_i(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{εάν } k < i \text{ και } \sigma(k) < \sigma(i) \\ \sigma(k) - 1 & \text{εάν } k < i \text{ και } \sigma(k) \geq \sigma(i) \\ \sigma(k+1) & \text{εάν } k \geq i \text{ και } \sigma(k+1) < \sigma(i) \\ \sigma(k+1) - 1 & \text{εάν } k \geq i \text{ και } \sigma(k+1) \geq \sigma(i). \end{cases}$$

Λήμμα 2.10 *Για κάθε μετάθεση σ, με τον παραπάνω συμβολισμό,*

$$\det P_\sigma = (-1)^{i+\sigma(i)} \det P_{\sigma_i}$$

Απόδειξη. Εάν $\sigma(n) = n$, τότε $\sigma_n(k) = \sigma(k)$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Είναι φανερό οτι

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} P_{\sigma_n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix},$$

και συνεπώς

$$\det P_\sigma = \det P_{\sigma_n}.$$

εφόσον απαιτείται ο ίδιος αριθμός εναλλαγών γραμμών και στηλών για να καταλήξουμε στον ταυτοτικό πίνακα.

Στη γενική περίπτωση, για $i \in \{1, \ldots, n\}$, μετατρέπουμε τον πίνακα P_σ στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} P_{\sigma_n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Χρειάζονται $n - i$ εναλλαγές γραμμών για να μετακινηθεί η συνιστώσα του $\mathbb{P}_\sigma$ από τη θέση $(i, \sigma(i))$ στη θέση $(n, \sigma(i))$, και $n - \sigma(i)$ εναλλαγές στηλών για να μετακινηθεί από τη θέση $(n, \sigma(i))$ στη θέση (n, n). Συνεπώς

$$\det P_\sigma = (-1)^{(n-i)+(n-\sigma(i))} \begin{vmatrix} P_{\sigma_i} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+\sigma(i)} \det P_{\sigma_i}.$$

□

Με τον παραπάνω συμβολισμό, τ_1 είναι η απεικόνιση $\tau_1(i) = i + 1$, από το $\{1, \ldots, n-1\}$ στο $\{2, \ldots, n\}$, και

$$C_{12} = \sum_{\substack{\sigma \text{ μετάθεση του } \{1, \ldots, n\} \\ \sigma(1)=2}} a_{\tau_1(1)\ \sigma\circ\tau_1(1)} \cdots a_{\tau_1(n-1)\ \sigma\circ\tau_1(n-1)} (-1)^{1+2} \det P_{\sigma_1}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{\rho \text{ μετάθεση του } \{1,\,\ldots\,,n-1\}} a_{\tau_1(1)\ \tau_2\circ\rho(1)} \cdots a_{\tau_1(n-1)\ \tau_2\circ\rho(n-1)} \det P_\rho \\
&= -\det A_{12}.
\end{aligned}
$$

Γενικότερα θεωρούμε τους όρους στο άθροισμα (2.2) που αντιστοιχούν σε μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma\,(1) = j$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma\,(1)=j}} a_{1\,j}\, a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma &= a_{1j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma\,(1)=j}} a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right) \\
&= a_{1\,j}\, C_{1\,j}
\end{aligned}
$$

Το άθροισμα $C_{1\,j}$ διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο απο την ορίζουσα του πίνακα A_{1j} που προκύπτει απο τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη j στήλη.

$$
A_{1j} = \begin{bmatrix} \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,(j-1)} & \times & a_{2\,(j+1)} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & \times & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,(j-1)} & a_{2\,(j+1)} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}
$$

και

$$
C_{1j} = (-1)^{1+j} \det(A_{1\,j})\,.
$$

Θεωρούμε τώρα όλες τις μεταθέσεις σ του $\{1,\,\ldots\,,n\}$, ομαδοποιημένες ανάλογα με την τιμή του $\sigma\,(1)$ και έχουμε

$$
\det A = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma\,(1)=j}} a_{1\,j}\, a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{1\,j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma\,(1)=j}} a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right).
$$

Καταλήγουμε στο *ανάπτυγμα της ορίζουσας* $\det A$ *ως προς την πρώτη γραμμή*:

$$
\det A = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + \cdots + a_{1\,n}\, C_{1\,n}\,.
$$

Ορισμός 2.3. Εάν $A = (a_{i\,j})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας ο οποίος προκύπτει απο το A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και τη j στήλη, ονομάζεται **ελάσσων πίνακας** της συνιστώσας $a_{i\,j}$ του A.

$$
A_{i\,j} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,(j-1)} & a_{1\,(j+1)} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)\,1} & \cdots & a_{(i-1)\,(j-1)} & a_{(i-1)\,(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)\,n} \\ a_{(i+1)\,1} & & a_{(i+1)\,(j-1)} & a_{(i+1)\,(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}
$$

Ο αριθμός $C_{i\,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i\,j}$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** ή **συμπαράγοντας** της συνιστώσας $a_{i\,j}$.

Ένας εύκολος τρόπος να παραστήσουμε το πρόσημο του συμπαράγοντα C_{ij} είναι ο ακόλουθος πίνακας.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Η προηγούμενη μελέτη γενικεύεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.11 *α΄. Για κάθε* $i = 1, \ldots, n$ *ισχύει*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\, C_{i\,j}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det A$ *ως προς την* i*-γραμμή.*

β΄. Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ *ισχύει*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\, C_{i\,j}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det A$ *ως προς τη* j*-στήλη.*

Παράδειγμα 2.4 Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ως προς την πρώτη γραμμή είναι

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= +1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(2+2+2-1-1-8) - 2(2+1-2+1-1-4) \\ &\quad -3(4+1-1+2-1-2) + 4(2+2-1+4-1-1) \\ &= 25\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.5 Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα του παραδείγματος 2.3, ως προς την τρίτη στήλη είναι

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 3 & 0 \\ 5 & 17 & 19 & 11 \\ 7 & 17 & 0 & 13 \end{vmatrix} &= -3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 17 & 11 \\ 7 & 17 & 13 \end{vmatrix} + 19\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 7 & 17 & 13 \end{vmatrix} \\
&= -3(-2(5\cdot 13 - 11\cdot 7)) + 19(0\cdot 13 - 0\cdot 7) \\
&= 2\cdot 3\cdot 5\cdot 13 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\,.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.6 Ένας **τριδιαγώνιος πίνακας** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει μηδέν όλες τις συνιστώσες εκτός από τις a_{ij} για τις οποίες $i-j=-1$, 0 ή 1. Αυτές οι συνιστώσες βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο και στις δύο διαγωνίους πάνω και κάτω από την κύρια.

Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του τριδιαγώνιου πίνακα

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\det A_4 = 2(-1)^{1+1}\det(A_4)_{11} + (-1)(-1)^{1+2}\det(A_4)_{12}$$

όπου

$$(A_4)_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A_3$$

και

$$(A_4)_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του $(A_4)_{12}$ ως προς την πρώτη στήλη έχουμε $\det(A_4)_{12} = (-1)(-1)^{1+1}\det A_2$. Άρα

$$\det A_4 = 2\det A_3 - \det A_2\,.$$

Παρόμοια δείχνουμε οτι για τον $n\times n$ τριδιαγώνιο πίνακα A_n με 2 στην κύρια διαγώνιο και (-1) στις άλλες δύο διαγωνίους ισχύει,

$$\det A_n = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}.$$

2.7 Ασκήσεις

Άσκηση 2.24 Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς;

α΄. Η ορίζουσα του πίνακα $S^{-1}AS$ είναι ίση με την ορίζουσα του A.

β΄. Εάν $\det A = 0$, τότε τουλάχιστον ένας από τους συμπαράγοντες είναι 0.

γ΄. Ένας πίνακας με στοιχεία 0 και 1 έχει ορίζουσα 1, 0 ή -1.

Άσκηση 2.25 Τι πρόσημο έχει ο όρος $a_{15}\, a_{24}\, a_{33}\, a_{42}\, a_{51}$ στον τύπο για την ορίζουσα ενός 5×5 πίνακα. Δηλαδή είναι η μετάθεση $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ περιττή ή άρτια;

Άσκηση 2.26 Εάν F_n είναι η ορίζουσα του $n \times n$ τριδιαγώνιου πίνακα με στοιχεία $1, 1, -1$,

$$F_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε οτι $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Η ακολουθία F_n είναι η ακολουθία Fibonacci, $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.

Άσκηση 2.27 Για τους ακόλουθους πίνακες βρείτε τον μοναδικό μη μηδενικό όρο στον τύπο για την ορίζουσα.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχει μόνον ένας τρόπος να επιλέξετε 4 μη μηδενικά στοιχεία από διαφορετικές γραμμές και στήλες. Υπολογίστε τις ορίζουσες $\det A$ και $\det B$.

Άσκηση 2.28 Για τους πίνακες της Άσκησης 2.27, αναπτύξτε τις ορίζουσες ως προς την πρώτη γραμμή. Υπολογίστε τους συμπαράγοντες (μη ξεχάσετε το πρόσημο $(-1)^{i+j}$) και τις ορίζουσες $\det A$ και $\det B$.

Άσκηση 2.29 Εξετάστε τους τριδιαγώνιους $n \times n$ πίνακες με 1 στις τρεις διαγωνίους:

$$A_1 = [1] \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ldots$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα D_n του A_n.

α'. Αναπτύξτε την ορίζουσα σε συμπαράγοντες κατά μήκος της πρώτης γραμμής, και δείξτε οτι $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$.

β'. Ξεκινώντας με $D_1 = 1$ και $D_2 = 0$, βρείτε τις D_3, D_4, …, D_8. Παρατηρήστε την περιοδικότητα στις τιμές της D_n, και βρείτε την D_{1000}.

Άσκηση 2.30

α'. Βρείτε την παραγοντοποίηση LU, τους οδηγούς και την ορίζουσα του 4×4 πίνακα με στοιχεία $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

β'. Βρείτε την ορίζουσα του $A = (a_{ij})$, εάν $a_{ij} = \min\{n_i, n_j\}$ και $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$, $n_4 = 10$. Μπορείτε να βρείτε γενικό κανόνα για οποιουσδήποτε αριθμούς $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$;

Άσκηση 2.31 Χρησιμοποιήστε τον τύπο της ορίζουσας για να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

όπου C είναι ο 6×6 πίνακας με μπλοκ τους πίνακες A και B. Είναι οι στήλες αυτών των πινάκων γραμμικά ανεξάρτητες;

Άσκηση 2.32 Τοποθετήστε τον ελάχιστο αριθμό από 0 σε ένα 4×4 πίνακα, που εξασφαλίζουν οτι η ορίζουσα είναι 0. Τοποθετήστε όσο το δυνατόν περισσότερα μηδενικά, που να επιτρέπουν στην ορίζουσα να είναι διαφορετική από 0.

Άσκηση 2.33 Εάν $\det A \neq 0$, τουλάχιστον ένας από τους $n!$ όρους του τύπου της ορίζουσας δεν είναι 0. Συμπεράνετε οτι υπάρχει κάποια μετάθεση P των γραμμών του A τέτοια ώστε να μην υπάρχουν 0 στη διαγώνιο του PA.

Άσκηση 2.34 Βρείτε τους συμπαράγοντες και τον προσαρτημένο πίνακα. Κατόπιν πολλαπλασιάστε με τον αρχικό πίνακα. Τι παρατηρείτε;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.35 Υπολογίστε τις ορίζουσες των 1, 3, 1 τριδιαγώνιων πινάκων

$$C_1 = [3], \quad C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Μπορείτε να μαντέψετε την $\det C_4$; (Θυμηθείτε τους αριθμούς Fibonacci). Χρησιμοποιήστε ανάπτυγμα σε συμπαράγοντες για να δείξετε την αναδρομική σχέση

$$\det C_n = 3 \det C_{n-1} - \det C_{n-2}\,.$$

Δείξτε οτι $\det C_n$ είναι ο αριθμός F_{2n+2} της ακολουθίας Fibonacci (Πρώτα δείξτε οτι $F_{2n+2} = 3F_{2n} - F_{2n-2}$)

Άσκηση 2.36 Εξηγήστε γιατί, εάν A και D είναι τετραγωνικοί πίνακες,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A|\;|D|\,.$$

Βρείτε ένα παράδειγμα με 2×2 πίνακες για να δείξετε οτι

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |A|\,|D| - |C|\,|B|.$$

Άσκηση 2.37 Υποθέστε οτι $CD = -DC$ και βρείτε το λάθος στον επόμενο συλλογισμό: Παίρνοντας τις ορίζουσες, έχουμε $(\det C)(\det D) = -(\det D)\,(\det C)$, άρα ένας από τους C και D έχει μηδενική ορίζουσα. Συνεπώς, η $CD = -DC$ είναι δυνατή μόνον όταν ο C ή ο D είναι ιδιόμορφος.

Άσκηση 2.38 Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Γιά ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος;

Άσκηση 2.39 Έστω

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

α΄. Χρησιμοποιήστε κατάλληλη πράξη μεταξύ των γραμμών του B για να έχετε μια γραμμή με δύο μηδενικά, και χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη γραμμή, για να υπολογίσετε την ορίζουσα του B.

β΄. Υπολογίστε όλους τους συμπαράγοντες του πίνακα B. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα συμπαραγόντων για να υπολογίσετε τον αντίστροφο του B.

2.8 Εφαρμογές των Οριζουσών

Υπολογισμός του αντιστρόφου

Έχουμε δει οτι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $\det A \neq 0$.

Ορισμός 2.4. Θεωρούμε τον πίνακα συμπαραγόντων $C = (C_{ij})$ που έχει ως στοιχείο στη θέση (i, j) τον συμπαράγοντα του στοιχείου a_{ij} του A. Ο **ανάστροφος** αυτού του πίνακα, C^T, ονομάζεται **προσαρτημένος πίνακας** του A (ή **συζυγής πίνακας** του A), και συμβολίζεται $\operatorname{adj} A$,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Λήμμα 2.12 *Εάν $A = (a_{i\,j})$ είναι $n \times n$ πίνακας, $C_{i\,j}$ ο συμπαράγων του στοιχείου $a_{i\,j}$, και $b = (b_1, \ldots, b_n)$ διάνυσμα, τότε*

$$b_1\, C_{i\,1} \,+\, b_2\, C_{i\,2} \,+\, \cdots \,+\, b_n\, C_{i\,n}$$

είναι η ορίζουσα του πίνακα B^i που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το b στην i γραμμή του πίνακα A,

$$B^i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)\,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

και

$$b_1\, C_{1\,j} + b_2\, C_{2\,j} + \cdots + b_n\, C_{n\,j}$$

είναι η ορίζουσα του πίνακα B_j που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το b στην j στήλη του πίνακα A,

$$B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,(j-1)} & b_1 & a_{1\,(j+1)} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & b_n & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη. Τα στοιχεία της j στήλης του πίνακα A δεν εμφανίζονται στους συμπαράγοντες $C_{1\,j}, \cdots, C_{n\,j}$. Συνεπώς αυτοί οι συμπαράγοντες του A είναι ίσοι με τους συμπαράγοντες του πίνακα B_j. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του B_j ως προς τη j-στήλη είναι

$$\det B_j = b_1 C_{1\,j} + b_2 C_{2\,j} + \cdots + b_n C_{n\,j}\,.$$

Το αποτέλεσμα για τους πίνακες B^i αποδεικνύεται ανάλογα.

□

Πρόταση 2.13 *Εάν A είναι $n \times n$ πίνακας,*

$$A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\,A = \det A \,\cdot\, \mathbf{I}_n\,.$$

Πριν δούμε την απόδειξη της Πρότασης 2.13, υπολογίζουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.7 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Η ορίζουσα του πίνακα A είναι $\det A = -4$.

Υπολογίζουμε τους συμπαράγοντες του πίνακα A.

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

και βρίσκουμε τον πίνακα συμπαραγόντων

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \\ 7 & -5 & -1 \end{bmatrix},$$

και τον προσαρτημένο πίνακα

$$\operatorname{adj} A = C^T = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο $A \operatorname{adj} A$,

$$\begin{aligned} A \operatorname{adj} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -8 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \det A \, \mathbf{I}_3 . \end{aligned}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε οτι όταν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα A με τον προσαρτημένο πίνακα $\operatorname{adj} A$, η συνιστώσα στη θέση (i, j) είναι το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ \vdots \\ C_{jn} \end{bmatrix} = a_{i\,1}C_{j\,1} + a_{i\,2}C_{j\,2} + \cdots + a_{i\,n}C_{j\,n} .$$

Προσέξτε τη θέση των δεικτών, υπενθυμίζουμε οτι $\operatorname{adj} A = (C_{i\,j})^T$.

Εάν $i = j$, το άθροισμα είναι ακριβώς το ανάπτυγμα της $\det A$ ως προς την i-γραμμή. Εάν $i \neq j$ το άθροισμα δίδει την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε την i-γραμμή του A στη j-γραμμή του A. Αλλά αυτός ο πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες, και

συνεπώς η ορίζουσα του είναι μηδέν.
Άρα

$$A\,(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη για το $(\text{adj } A)\, A$ είναι ανάλογη.

□

Θεώρημα 2.14 *Εάν* $\det A \neq 0$ *τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{adj}\, A)\,.$$

Παρατήρηση. Αυτός ο τύπος για το αντίστροφο ενός $n \times n$ πίνακα έχει θεωρητικό ενδιαφέρον, αλλά δεν αποτελεί πρακτικό τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου, καθώς απαιτεί πολύ περισσότερες πράξεις απ' οτι η μέθοδος Gauss - Jordan.

Η λύση της εξίσωσης $Ax = b$

Θεώρημα 2.15 (Κανόνας του Cramer) *Εάν* $\det A \neq 0$*, η λύση της εξίσωσης*

$$A\,x = b$$

είναι το διάνυσμα $x = (x_1,\, x_2,\, \dots, x_n)$*, όπου*

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

και B_j *είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα* b *στη* j *στήλη του* A*.*

Απόδειξη. Εφόσον $\det A \neq 0$, ο A είναι μη ιδιόμορφος, και

$$x = A^{-1} b = \frac{1}{\det A}(\text{adj}\, A)\, b$$

Άρα

$$x_j = \frac{1}{\det A}\,(C_{1\,j}\, b_1 + \cdots + C_{n\,j}\, b_n) = \frac{\det B_j}{\det A}.$$

□

Παρατηρούμε οτι ο κανόνας του Cramer δεν αποτελεί πρακτικό τρόπο υπολογισμού της λύσης της εξίσωσης $Ax = b$, καθώς απαιτεί πολύ περισσότερες πράξεις απο τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 2.8 Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 6 \end{array}$$

αντικαθιστούμε το διάνυσμα (0, 6) στην πρώτη στήλη του πίνακα για να υπολογίσουμε το x_1, και στη δεύτερη στήλη του πίνακα για να υπολογίσουμε το x_2:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-2} = 9, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-2} = -3\,.$$

Ο όγκος του n-διάστατου παραλληλεπίπεδου

Εάν τα n διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ που αποτελούν τις ακμές ενός παραλληλεπιπέδου είναι ορθογώνια, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι το γινόμενο των μηκών των διανυσμάτων,

$$V = ||u_1||\,||u_2|| \cdots ||u_n||\,.$$

Υποθέτουμε οτι τα $u_1, \ldots, u_n$ είναι οι στήλες του πίνακα A. Αφού αυτά είναι ορθογώνια $u_i^T u_j = 0$ εάν $i \neq j$ και έχουμε

$$A^T A = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & \cdots & u_1^T u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^T u_1 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ||u_1||^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ||u_n||^2 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$V^2 = ||u_1||^2 \cdots ||u_n||^2 = \det(A^T A) = (\det A)^2\,,$$

και ο όγκος είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας,

$$V = |\det A|\,.$$

Το πρόσημο της ορίζουσας εξαρτάται από τη διάταξη των διανυσμάτων $u_1, \ldots, u_n$. Λέμε οτι τα $u_1, \ldots, u_n$ αποτελούν ''*δεξιόστροφο σύστημα*'' εάν $\det A > 0$ και ''*αριστερόστροφο σύστημα*'' εάν $\det A < 0$.

Εάν τα διανύσματα δεν είναι ορθογώνια, τότε ο όγκος δεν είναι ίσος με το γινόμενο των μηκών των πλευρών. Σε δύο διαστάσεις, το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές w_1 και w_2 είναι ίσο με το μήκος της πλευράς w_1 επί το ''ύψος''. Εάν κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα, θα δείτε οτι το ''ύψος'' είναι ακριβώς το μήκος του ορθογωνίου διανύσματος που παίρνουμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας Gram-Schmidt: το διάνυσμα $w_2' = w_2 - s w_1$ το οποίο είναι ορθογώνιο στο w_1. Αλλά η ορίζουσα του πίνακα με στήλες w_1 και w_2' είναι ίση με την ορίζουσα του πίνακα με στήλες w_1 και w_2. Άρα πάλι έχουμε

$$V = |\det A|$$

όπου A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα w_1 και w_2.

Σε n διαστάσεις, ισχύει οτι όταν αφαιρέσουμε πολλαπλάσια των διανυσμάτων $w_1, \ldots, w_{k-1}$ από το διάνυσμα w_k, δεν αλλάζει ούτε ο όγκος του n-διάστατου παραλληλεπίπεδου που αντιστοιχεί σε αυτά τα διανύσματα, ούτε η ορίζουσα του πίνακα. Αφού μπορούμε, επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία να κατασκευάσουμε ορθογώνια διανύσματα $w_1', w_2', \ldots, w_n'$, για τα οποία γνωρίζουμε οτι ο όγκος είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας, έχουμε και στη γενική περίπτωση

$$V = |\det A|\,.$$

Ο τύπος για τους οδηγούς

Τώρα μπορούμε να δώσουμε ένα κριτήριο για το πότε είναι δυνατόν να ολοκληρωθεί η απαλοιφή Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών, και σε αυτήν την περίπτωση να εκφράσουμε τους οδηγούς μέσω οριζουσών. Η βασική παρατήρηση είναι οτι, εάν δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών, οι k πρώτοι οδηγοί καθορίζονται από τον $k \times k$ υποπίνακα A_k στο άνω αριστερό μέρος του πίνακα A. Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & e \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & \frac{af-ec}{a} \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός προφανώς εξαρτάται μόνον από τον $A_1 = [a]$. Ο δεύτερος οδηγός εξαρτάται από τα στοιχεία a, b, c, d που αποτελούν τον υποπίνακα $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Μετά το πρώτο βήμα της απαλοιφής, ο υποπίνακας A_2 έχει γίνει άνω τριγωνικός, και δεν μεταβάλεται από τα επόμενα βήματα της απαλοιφής.

Γενικότερα, για ένα $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A_1 και $k \leq n$, έχουμε, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των μπλόκ,

$$\begin{aligned} A = LU &= \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & F \\ 0 & G \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_k U_k & L_k F \\ B U_k & BF + CG \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και συνεπώς $A_k = L_k U_k$. Αλλά L_k είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, συνεπώς $\det L_k = 1$, ενώ U_k είναι άνω τριγωνικός με τους k πρώτους οδηγούς $d_1, \ldots, d_k$ στη διαγώνιο. Άρα

$$\det A_k = \det U_k = d_1 \ldots d_k.$$

Αφού $\det A_{k-1} = d_1 \ldots d_{k-1}$, μπορούμε να εκφράσουμε τον οδηγό d_k ως το πηλίκο

$$d_k = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}.$$

Συμβατικά, θέτουμε $\det A_0 = 1$, έτσι ώστε αυτός ο τύπος να ισχύει και για $k = 1$. Καταγράφουμε αυτό το αποτέλεσμα στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.16 *Η απαλοιφή Gauss σε έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A ολοκληρώνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών εάν και μόνον εάν όλοι οι άνω αριστερά τετραγωνικοί υποπίνακες $A_1, \ldots, A_n$ είναι μή ιδιόμορφοι. Τότε οι οδηγοί $d_1, \ldots, d_n$ δίδονται από τα πηλίκα*

$$d_k = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}.$$

2.9 Ασκήσεις

Άσκηση 2.40 Βρείτε τους συμπαράγοντες και την ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Σχηματίστε τον ανάστροφο του πίνακα συμπαραγόντων C, και επαληθεύστε οτι $AC^T = (\det A)I$.

Άσκηση 2.41 Υπολογίστε τους συμπαράγοντες C_{11}, C_{21}, C_{23} και C_{33} του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.42 Υπολογίστε τους συμπαράγοντες C_{12}, C_{24}, C_{33} και C_{43} του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.43

α΄. Σχεδιάστε το τρίγωνο με κορυφές $A = (2, 2)$, $B = (-1, 3)$ και $C = (0, 0)$. Θεωρήστε το ως το μισό ενός παραλληλογράμμου, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

β΄. Τώρα θεωρήστε το τρίγωνο με κορυφές A, B και $D = (1, -4)$, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABD) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Αφαιρέστε μία γραμμή από τις άλλες δύο).

Άσκηση 2.44 Χρησιμοποιήστε ορίζουσες για να υπολογίσετε τους οδηγούς των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής για να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα σας.

Άσκηση 2.45 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Cramer για να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 1 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

Άσκηση 2.46 Θεωρήστε τον πίνακα M που προκύπτει όταν ένα διάνυσμα $x = (x_1, \ldots, x_n)$ αντικαθιστά τη στήλη j του ταυτοτικού πίνακα.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & x_j & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}$$

α′. Βρείτε την ορίζουσα του M.

β′. Εάν $Ax = b$, δείξτε οτι AM είναι ο πίνακας B_j της εξίσωσης,

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}\,, \text{ όπου } B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & a_{nn} \end{bmatrix},$$

και η δεξιά πλευρά b εμφανίζεται στην j-οστή στήλη.

γ′. Συμπεράνετε τον κανόνα του Cramer, παίρνοντας ορίζουσες στην $AM = B_j$.

Άσκηση 2.47 Εξηγήστε γιατί εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι 0, ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι διαφορετικοί από το 0, είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος;

Άσκηση 2.48 Εάν οι στήλες ενός 4×4 πίνακα έχουν μήκος ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 και ℓ_4, ποιά είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή για την ορίζουσα του πίνακα. Εάν όλα τα στοιχεία του πίνακα είναι 1 ή -1, ποιά είναι η μεγαλύτερη τιμή της ορίζουσας.

Άσκηση 2.49 Ο πίνακας B_n είναι ίσος με τον -1, 2, -1 τριδιαγώνιο πίνακα A_n (δες Παράδειγμα 2.6) με τη διαφορά οτι στη θέση (1, 1) έχει $b_{11} = 1$ αντί για $a_{11} = 2$. Χρησιμοποιήστε συμπαράγοντες ως προς την τελευταία γραμμή, για να δείξετε οτι

$$|B_4| = 2|B_3| - |B_2| = 1\,.$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η αναδρομική σχέση $|B_n| = 2|B_{n-1}| - |B_{n-2}|$ είναι ίδια με αυτή των A_n. Αλλάζουν όμως οι αρχικές τιμές. Μπορείτε να βρείτε τους οδηγούς του πίνακα B_n;

Κεφάλαιο 3

Ιδιοτιμές και Διαγωνιοποίηση

3.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού πίνακα

Στο πρώτο μέρος του μαθήματος ΜΕΜ112 Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα το βασικό αντικείμενο που μελετήσαμε ήταν η εξίσωση

$$Ax = b\,,$$

όπου ο άγνωστος είναι το διάνυσμα x, ενώ στη δεξιά πλευρά έχουμε ένα δεδομένο διάνυσμα b.

Από τη μελέτη αυτής της εξίσωσης κατασκευάσαμε μία πλούσια θεωρία, που περιγράφει, μεταξύ άλλων, τη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$. Η T_A απεικονίζει τα στοιχεία του μηδενόχωρου του πίνακα A, $\mathcal{N}(A)$ στο 0, ενώ απεικονίζει τα στοιχεία του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ αμφιμονοσήμαντα στα στοιχεία του χώρου στηλών $\mathcal{R}(A)$.

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα εξετάσουμε, για έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A, την εξίσωση

$$Ax = \lambda x\,,$$

όπου οι άγνωστοι είναι ο αριθμός λ και το διάνυσμα x. Παρατηρήστε οτι το διάνυσμα εμφανίζεται και στις δύο πλευρές της εξίσωσης. Αναζητούμε διανύσματα στα οποία η απεικόνιση T_A δρα με τον πιο απλό τρόπο: τα πολλαπλασιάζει με έναν αριθμό λ, χωρίς να αλλάζει τη "διεύθυνσή" τους.

Παράδειγμα 3.1 Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ αλλάζει τη διεύθυνση του διανύσματος $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ενώ το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ απλώς το πολλαπλασιάζει με τον αριθμό 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.2 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ και τα διανύσματα $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Παρατηρούμε οτι

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4x$$

και

$$Ay = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} = 6y\,.$$

Εάν γράφουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των x και y, εύκολα βρίσκουμε τη δράση του A σε αυτό: εάν $u = cx + dy$, τότε

$$\begin{aligned} Au &= cAx + dAy \\ &= 4cx + 6dy. \end{aligned}$$

Τα μη μηδενικά διανύσματα x που ικανοποιούν την εξίσωση $Ax = \lambda x$ για κάποιο αριθμό $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι, κατά κάποιο τρόπο, ειδικά διανύσματα του πίνακα A: αυτά πάνω στα οποία ο πολλαπλασιασμός με τον A δρα με τον απλούστερο τρόπο. Γι' αυτό ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα (στα αγγλικά eigenvectors, έχει διατηρηθεί ο γερμανικός όρος ως πρώτο συνθετικό). Εκτός από το θεωρητικό ενδιαφέρον, για να κατανοήσουμε καλύτερα τη δράση του πίνακα, τα ιδιοδιανύσματα παρουσιάζουν αμέτρητες εφαρμογές, σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και άλλων επιστημών. Κάποιες από αυτές τις εφαρμογές θα δούμε αργότερα.

Ορισμός 3.1. Θεωρούμε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{R}$.
Οι αριθμοί $\lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$Ax = \lambda x \tag{3.1}$$

ονομάζονται **ιδιοτιμές** του πίνακα A.
Τα μή μηδενικά διανύσματα $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την εξίσωση 3.1 ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα A για την ιδιοτιμή λ.

Δραστηριότητα 3.1 Ελέγξτε οτι $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Σε ποιά ιδιοτιμή του πίνακα αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα x;

Πώς θα βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $Ax = \lambda x$; Παρατηρούμε οτι για οποιοδήποτε λ, το διάνυσμα 0 είναι πάντα μία λύση. Μας ενδιαφέρουν οι **μή μηδενικές λύσεις**.

Γράφουμε την εξίσωση 3.1 στη μορφή

$$Ax - \lambda x = 0$$

και εισάγουμε τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbf{I}$,

$$Ax - \lambda \mathbf{I} x = 0$$

για να καταλήξουμε στην εξίσωση

$$(A - \lambda \mathbf{I})x = 0\,.$$

Βλέπουμε οτι τα x που αναζητούμε βρίσκονται στο μηδενοχώρο του πίνακα $A - \lambda\mathbf{I}$. Συνεπώς, το πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τους αριθμούς λ για τους οποίους ο μηδενοχώρος του πίνακα $A - \lambda\mathbf{I}$ περιέχει μή μηδενικά διανύσματα. Αυτό συμβαίνει μόνον όταν ο πίνακας $A - \lambda\mathbf{I}$ είναι ιδιόμορφος. Η ορίζουσα του πίνακα μας δίδει το κατάλληλο κριτήριο: ο πίνακας $A - \lambda\mathbf{I}$ είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν $\det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Πρόταση 3.1 *Οι ιδιοτιμές του $n \times n$ πίνακα A είναι οι λύσεις της εξίσωσης*

$$\det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0\,. \tag{3.2}$$

Η ορίζουσα $\det(A - \lambda\mathbf{I})$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με μεταβλητή λ. Ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A, και συμβολίζεται χ_A. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι *ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου* του A.

Εάν λ_i είναι μία ιδιοτιμή του A, τότε $A - \lambda_i\mathbf{I}$ έχει μη τετριμμένο μηδενοχώρο.

Πρόταση 3.2 *Τα ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή λ_i είναι τα* μη μηδενικά διανύσματα *του μηδενοχώρου του πίνακα $A - \lambda_i\mathbf{I}$.*

Όλος ο μηδενοχώρος του $A - \lambda_i\mathbf{I}$ ονομάζεται **ιδιοχώρος** του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Τονίζουμε οτι **το μηδενικό διάνυσμα δεν είναι ιδιοδιάνυσμα**. Ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή λ_i αποτελείται από το μηδενικό διάνυσμα και όλα τα ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Δραστηριότητα 3.2 Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$, δηλαδή τα μη μηδενικά διανύσματα x που ικανοποιούν $Ax = x$.

Παράδειγμα 3.3 Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα A,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές, θεωρούμε την ορίζουσα

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(4-\lambda)(3+\lambda) + 10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2\,. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο $\chi_A = \lambda^2 - \lambda - 2$ παραγοντοποιείται, $\chi_A = (-1-\lambda)(2-\lambda)$. Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι -1 και 2. Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2\,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, είναι οι μή μηδενικές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$(A - \lambda_1 \mathbf{I})x = 0\,,$$

δηλαδή της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ενώ ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ είναι ο μηδενοχώρος του πίνακα $A - \lambda_1 \mathbf{I}$, δηλαδή ο υπόχωρος

$$X_1 = \{t(1,\,1) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχουμε, ανάλογα,

$$(A - \lambda_2 \mathbf{I})x = 0$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, και ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ είναι ο υπόχωρος

$$X_2 = \{t(5,\,2) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Παρατηρούμε οτι σε αυτό το παράδειγμα οι ιδιόχωροι του A για τις δύο ιδιοτιμές είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ διάστασης 1. Τα δύο ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^2$

Παράδειγμα 3.4 Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του B είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + (4-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^2(4-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 4$.

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Η εξίσωση έχει 2 ελεύθερες μεταβλητές. Μία βάση του μηδενόχωρου είναι τα διανύσματα $(-1, 0, 1)$ και $(-1, 1, 0)$. Ο ιδιόχωρος του B για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι ο

$$X_1 = \{s(-1, 0, 1) + t(-1, 1, 0) : s, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του B για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι το $(-1,\,-2,\,1)$. Ο ιδιόχωρος του B για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι

$$X_2 = \{t(-1,\,-2,\,1) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Παρατηρούμε οτι σε αυτό το παράδειγμα οι ιδιόχωροι του B για τις δύο ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 4$είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 και 1 αντίστοιχα. Βρήκαμε τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανυσματα, που αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Δραστηριότητα 3.3 Ο μηδενόχωρος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ παράγεται από το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Βρείτε μία ιδιοτιμή και ένα ιδιοδιάνυσμα για τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 3.5 Θεωρούμε τον πίνακα

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του C είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$.

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Μία λύση της εξίσωσης είναι η $x = (1,\,1,\,1)$. Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα του C για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι το $x = (1,\,1,\,1)$. Ο ιδιόχωρος του C για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι ο χώρος λύσεων της εξίσωσης,

$$X_1 = \{t(1,\,1,\,1) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του C για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι το $x = (0,\,1,\,1)$. Ο ιδιόχωρος του C για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι

$$X_2 = \{t(0,\,1,\,1) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Παρατηρούμε οτι σε αυτό το παράδειγμα, στις δύο διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν μόνο δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα οποία δεν παράγουν όλο το χώρο $\mathbb{R}^3$.

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A πρέπει να λύσουμε την πολυωνυμική εξίσωση $\chi_A(\lambda) = 0$. Ένα πολυώνυμο μπορεί να μην έχει λύσεις πραγματικούς αριθμούς. Όμως σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, (Σημειώσεις Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 3), ένα πολυώνυμο με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού $n \geq 1$, έχει πάντα λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Θεώρημα 3.3 *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού $n \geq 1$,*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\,, \qquad a_n \neq 0,\; a_0,\,\ldots,\,a_n \in \mathbb{C}\,.$$

Τότε υπάρχουν n μιγαδικοί αριθμοί $w_1,\,\ldots,\,w_n$, όχι υποχρεωτικά διαφορετικοί, τέτοιοι ώστε

$$p(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_n)\,.$$

Οι αριθμοί $w_1,\,\ldots,\,w_n$ ονομάζονται **ρίζες** του πολυωνύμου $p(z)$. Εάν ακριβως k από τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1,\,\ldots,\,w_n$ είναι ίσοι με w, λέμε οτι w είναι ρίζα του $p(z)$ με **πολλαπλότητα** k. Τότε $(z - w)^k$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$, αλλά $(z - w)^{k+1}$ δεν το διαιρεί.

Είναι προφανές οτι οι ρίζες $w_1,\,\ldots,\,w_n$ του πολυωνύμου $p(z)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $p(z) = 0$, αφού

$$p(w_i) = a_n(w_i - w_1)\cdots(w_i - w_i)\cdots(w_i - w_n) = 0\,.$$

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή οι μόνες λύσεις της εξίσωσης $p(z) = 0$ είναι οι ρίζες $w_1,\,\ldots,\,w_n$.

Πρόταση 3.4 *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού n,*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\,, \qquad a_n \neq 0,\; a_0,\,\ldots,\,a_n \in \mathbb{C}\,.$$

Τότε $p(a) = 0$ εάν και μόνον εάν $z - a$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$.

Στο Παράδειγμα 3.4, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_B(\lambda) = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$ έχει ρίζες $\lambda_1 = 2$ με πολλαπλότητα 2, και $\lambda_2 = 4$ με πολλαπλότητα 1. Λέμε οτι η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχει *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2, ενώ η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ έχει *αλγεβρική πολλαπλότητα* 1. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιόχωρου. Αντιθέτως, στο Παράδειγμα 3.5, στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_C(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$, η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, αλλά ο αντίστοιχος ιδιόχωρος του πίνακα C έχει διάσταση 1.

Ορισμός 3.2. Εάν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, **αλγεβρική πολλαπλότητα** της λ είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $(x-\lambda)^k$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$.
Γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή.

Θα δούμε οτι αυτή η διάκριση μεταξύ της αλγεβρικής και της γεωμετρικής πολλαπλότητας μίας ιδιοτιμής Είναι πολύ σημαντική.

Αφού οι ρίζες ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί, ένας πίνακας με πραγματικές συνιστώσες μπορεί να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.6 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2 - 8\lambda + 25)(2-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο έχει μία πραγματική ρίζα, $\lambda_1 = 2$. Οι άλλες δύο ρίζες είναι μιγαδικές,

$$\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i} \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 4 - 3\mathrm{i}\,.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

από την οποία βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι το $x = (0, 1, 0)$.

Εάν αντικαταστήσουμε στον πίνακα $A - \lambda\mathbf{I}$ μία από τις μη πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα A, παίρνουμε έναν πίνακα με συνιστώσες στο $\mathbb{C}$. Αφού οι πράξεις στο $\mathbb{C}$ έχουν ιδιότητες ανάλογες των πράξεων στο $\mathbb{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss σε έναν πίνακα με μιγαδικές συνιστώσες, για να βρούμε τα διανύσματα του μηδενόχωρου του $A - \lambda\mathbf{I}$, τα οποία θα ανήκουν στο σύνολο διατεταγμένων τριάδων μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}^3$.

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i}$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2-3\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 0 & -3\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $-\mathrm{i}$ και την αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή. Ο νέος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή. Στην εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2-3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

θέτουμε την τιμή 1 για την ελεύθερη μεταβλητή x_3, και βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i}$ είναι το $x = (-\mathrm{i},\, 0,\, 1)$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4 - 3\mathrm{i}$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2+3\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 0 & 3\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με i και την αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή. Στην εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2+3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

θέτουμε την τιμή 1 για την ελεύθερη μεταβλητή x_3 και βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4 - 3\mathrm{i}$ είναι το $x = (\mathrm{i},\, 0,\, 1)$.

Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα A με συνιστώσες πραγματικούς αριθμούς, αυτός έχει μόνο μία ιδιοτιμή, $\lambda_1 = 2$, και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο

$$X_1 = \{t(0,\, 1,\, 0) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα A με συνιστώσες μιγαδικούς αριθμούς τότε αυτός έχει τρεις ιδιοτιμές. Ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι ο

$$X_1 = \{t(0,\, 1,\, 0) : t \in \mathbb{C}\}\,,$$

ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i}$ είναι ο

$$X_2 = \{t(-\mathrm{i},\, 0,\, 1) : t \in \mathbb{C}\}$$

και ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4 - 3i$ είναι ο

$$X_3 = \{t(\mathrm{i},\, 0,\, 1) : t \in \mathbb{C}\}\,.$$

Ανακεφαλαιώνουμε τη διαδικασία για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων ενός $n \times n$ πίνακα

1. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A - \lambda\mathbf{I}$. Αυτή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς τη μεταβλητή λ, το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του A.

2. Βρίσκουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου. Αυτές είναι οι *ιδιοτιμές* του A.

3. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, βρίσκουμε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$(A - \lambda_i\mathbf{I})x = 0\,.$$

Κάθε μη μηδενική λύση είναι ένα *ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα A για την ιδιοτιμή λ_i, ενώ το σύνολο όλων των λύσεων είναι ο *ιδιόχωρος* του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Δραστηριότητα 3.4 Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα[1]

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Εν αντιθέσει με την περίπτωση της λύσης του συστήματος $Ax = b$ με απαλοιφή Gauss, η διαδικασία που περιγράφουμε εδώ δεν δίδει έναν αλγόριθμο για τον αναλυτικό υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Το πρόβλημα βρίσκεται στο βήμα 2. Ενώ γνωρίζουμε οτι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες (στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών), για πολυώνυμα βαθμού $n \geq 5$ δεν είναι δυνατόν να βρεθεί αναλυτικός τύπος για τον υπολογισμό τους (όπως ο τύπος των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης)[2].

Παρ' όλο που δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος που να δίδει τις ρίζες στη γενική περίπτωση, σε πολλές ειδικές περιπτώσεις μπορούμε να τις προσδιορίσουμε αναλυτικά, ή μπορούμε να τις προσεγγίσουμε αριθμητικά. Θα δούμε οτι μπορούμε να έχουμε κάποια πληροφορία για τις ιδιοτιμές ακόμα και χωρίς να τις υπολογίσουμε.

Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα ονομάζεται **ίχνος** του πίνακα (trace) και συμβολίζεται $\operatorname{tr} A$.

[1] Τα διανύσματα που θα βρείτε πρέπει να είναι μη μηδενικά πολλαπλάσια των (5, 2) και (3, 1).

[2] Αυτό είναι το περιεχόμενο της θεωρίας Galois (την οποία μπορείτε να μελετήσετε στο μάθημα Θεωρία Σωμάτων), μίας πολύ ενδιαφέρουσας θεωρίας που δημιούργησε ένας ακόμη πιο ενδιαφέρων άνθρωπος.

Πρόταση 3.5 *Θεωρούμε έναν $n \times n$ πίνακα A πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς. Μετρώντας την αλγεβρική πολλαπλότητα, ο πίνακας έχει n ιδιοτιμές, λ_1, λ_2, …, λ_n, όχι υποχρεωτικά όλες διαφορετικές.*

1. *Το άθροισμα των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα,*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A$$

2. *Το γινόμενο των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα,*

$$\lambda_1 \, \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A\,.$$

Απόδειξη.

1. Εάν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, έχουμε

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)\,.$$

Συγκρίνουμε τους όρους τάξεως $n-1$ στα δύο πολυώνυμα. Οι όροι στους οποίους το λ εμφανίζεται στη δύναμη $n-1$ στην ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

πρέπει να προέρχονται από όρους της ορίζουσας που είναι γινόμενο τουλάχιστον $n-1$ στοιχείων στη διαγώνιο του πίνακα. Αλλά ένας όρος της ορίζουσας δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από ένα στοιχείο από κάθε στήλη και από κάθε γραμμή του πίνακα. Συνεπώς, ο μοναδικός όρος που περιέχει το γινόμενο $n-1$ διαγώνιων στοιχείων, είναι το γινόμενο όλων των διαγώνιων στοιχείων,

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)\,.$$

Ο όρος τάξεως $n-1$ αυτού του πολυωνύμου είναι

$$a_{11}\lambda^{n-1} + a_{22}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{nn}\lambda^{n-1} = (a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}\,.$$

Από την άλλη πλευρά ο όρος τάξεως $n-1$ του πολυωνύμου $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ είναι

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1}\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr} A\,.$$

2. Εξετάζουμε του σταθερούς όρους των πολυωνύμων
$$\det(A-\lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)\,.$$
Στη δεξιά πλευρά, ο σταθερός όρος είναι $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. Στην αριστερή πλευρά ο σταθερός όρος είναι η τιμή του πολυωνύμου για $\lambda=0$, δηλαδή $\det A$. Άρα
$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det A\,.$$

□

Δραστηριότητα 3.5 Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$, δηλαδή τις ρίζες του πολυωνύμου $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix}$.
Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα και το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Δραστηριότητα 3.6 Υπολογίστε τις μιγαδικές ιδιοτιμές του πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.
Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα και το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.
Για κάθε ιδιοτιμή βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα του B στο $\mathbb{C}^2$. (Παρατηρήστε οτι $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2$.)

Θα δείξουμε οτι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ειδικότερα, εάν ο $n\times n$ πίνακας A έχει n διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μία βάση του $\mathbb{R}^n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.

Λήμμα 3.6 *Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Εάν $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ είναι οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1,\ldots,v_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε υπάρχει k, με $1<k\leq m$, τέτοιο ώστε $\{v_1,\ldots,v_{k-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά $v_1,\ldots,v_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και μπορούμε να γράψουμε
$$v_k = a_1v_1+\cdots+a_{k-1}v_{k-1}\,. \tag{3.3}$$
Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της 3.3 με A έχουμε
$$Av_k = a_1Av_1+\cdots+a_{k-1}Av_{k-1}$$
και αφού κάθε v_i είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_i,
$$\lambda_kv_k = a_1\lambda_1v_1+\cdots+a_{k-1}\lambda_{k-1}v_{k-1} \tag{3.4}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3.3 με λ_k, και την αφαιρούμε από την 3.4:

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}\,.$$

Εφ' όσον τα $v_1, \ldots, v_{k-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k-1$, αλλά $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, και συνεπώς $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Αλλά τότε, από την 3.3, $v_k = 0$, άτοπο. Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Υπενθυμίζουμε οτι δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B λέγονται **όμοιοι** εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $A = S^{-1}BS$.

Πρόταση 3.7 *Εάν $A = S^{-1}BS$, τότε A και B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Εάν v είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ, τότε Sv είναι ιδιοδιάνυσμα του B για την ίδια ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουμε

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(A - x\mathbf{I}) \\
&= \det(S^{-1}BS - xS^{-1}\mathbf{I}S) \\
&= \det(S^{-1}(B - x\mathbf{I})S) \\
&= \det S^{-1}\det(B - x\mathbf{I})\det S \\
&= \chi_B(x)\,.
\end{aligned}$$

Εάν v είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ, τότε $S^{-1}BSv = \lambda v$. Άρα $BSv = S(\lambda v) = \lambda(Sv)$, και Sv είναι ιδιοδιάνυσμα του B για την ιδιοτιμή λ.

□

3.2 Ασκήσεις

Άσκηση 3.1 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα, και το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Άσκηση 3.2 Εάν $B = A - 7\mathbf{I}$, όπου A είναι ο πίνακας της Άσκησης 3.1, βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B. Πως σχετίζονται με αυτά του A;

Άσκηση 3.3 Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε οτι οι ιδιοτιμές αλλάζουν όταν αφαιρέσουμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη. Εξηγήστε γιατί εάν το 0 είναι μία από τις ιδιοτιμές, αυτή δεν αλλάζει.

Άσκηση 3.4 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος, και το γινόμενο με την ορίζουσα.

Άσκηση 3.5 Υποθέτουμε οτι λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A, και x είναι ιδιοδιάνυσμα: $Ax = \lambda x$. Δείξτε οτι x είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του αντιστρόφου A^{-1}, και βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Άσκηση 3.6 Δείξτε οτι οι ιδιοτιμές του ανάστροφου πίνακα A^T είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του A.

Άσκηση 3.7 Κατασκευάστε 2×2 πίνακες A και B, τέτοιους ώστε οι ιδιοτιμές του AB δεν είναι ίσες με τα γινόμενα των ιδιοτιμών του A και του B, και οι ιδιοτιμές του $A + B$ δεν είναι ίσες με τα αθροίσματα των ιδιοτιμών.

Άσκηση 3.8 Υποθέτουμε οτι ο 3×3 πίνακας A έχει ιδιοτιμές 0, 3, 5 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v, w.

1. Βρείτε μία βάση του μηδενοχώρου του A, και μία βάση του χώρου στηλών του A.
2. Βρείτε μία λύση της εξίσωσης $Ax = v + w$. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.
3. Δείξτε οτι η εξίσωση $Ax = u$ δεν έχει λύσεις.

Άσκηση 3.9 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.10 Κάθε πίνακας μετάθεσης αφήνει το διάνυσμα $x = (1, 1, \ldots, 1)$ αμετάβλητο. Άρα έχει μία ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε άλλες δύο ιδιοτιμές για τους πίνακες

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 Διαγωνιοποίηση

Στο Παράδειγμα 3.2 παρατηρήσαμε οτι εάν γράψουμε ένα διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό ιδιοδιανυσμάτων του A, τότε μπορούμε εύκολα να περιγράψουμε τη δράση του A σε αυτό το διάνυσμα. Αφού $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= 3\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 12\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε κάθε διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων, και ο πολλαπλασιασμός οποιουδήποτε διανύσματος με τον πίνακα εκφράζεται με αυτό τον τρόπο. Το ακόλουθο θεώρημα δίδει μια πιο ακριβή διατύπωση αυτής της ιδέας.

Θεώρημα 3.8 *Υποθέτουμε οτι ο $n \times n$ πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n$. Θεωρούμε το πίνακα R, ο οποίος έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Τότε ο πίνακας*

$$\Lambda = R^{-1}AR$$

είναι διαγώνιος, και τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του A. Δηλαδή

$$\Lambda = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

και

$$A = R\Lambda R^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}^{-1}.$$

Απόδειξη. Η j-στήλη του πίνακα AR είναι το διάνυσμα $Ax_j = \lambda_j x_j$. Άρα

$$AR = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_n x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Η j-στήλη του $R^{-1}(AR)$ είναι η j-στήλη του AR πολλαπλασιασμένη με τον πίνακα R^{-1}. Αλλά η j-στήλη του AR είναι η j-στήλη του R πολλαπλασιασμένη επί λ_j. Άρα η j-στήλη του

$R^{-1}(AR)$ είναι $\lambda_j \times$ (j-στήλη του $R^{-1}R$), δηλαδή $\lambda_j e_j$. Συμπεραίνουμε οτι

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 e_1 & \cdots & \lambda_n e_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix},$$

δηλαδή ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ στη διαγώνιο.

□

Παράδειγμα 3.7 Στα Παραδείγμα 3.4 είδαμε οτι ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

έχει τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ και $(-1, -2, 1)$. Θεωρούμε τον πίνακα R με στήλες αυτά τα ιδιοδιανύσματα,

$$R = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$BR = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

και

$$R \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Προσέξτε οτι η διάταξη των ιδιοδιανυσμάτων στον πίνακα R είναι η ίδια με τη διάταξη των αντίστοιχων ιδιοτιμών στον πίνακα Λ.

> **Δραστηριότητα 3.7** Στη Δραστηριότητα 3.4 βρήκατε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. Βάλτε τα ιδιοδιανύσματα που βρήκατε ως στήλες του πίνακα R και υπολογίστε τους πίνακες R^{-1} και $R^{-1}AR$.

> **Δραστηριότητα 3.8** Θεωρήστε τον πίνακα R που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B που υπολογίσατε στη Δραστηριότητα 3.6, και τον διαγώνιο πίνακα Λ που έχει τις ιδιοτιμές στην αντίστοιχη θέση στη διαγώνιο.
> Επαληθεύστε οτι $BR = R\Lambda$.

Ένας πίνακας A για τον οποίο υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R τέτοιος ώστε ο $R^{-1}AR$ να είναι διαγώνιος ονομάζεται **διαγωνιοποιήσιμος**. Εν γένει, κάποια από τα ιδιοδιανύσματα μπορεί να έχουν μιγαδικές συνιστώσες, οπότε ο πίνακας $\mathbb{R}$ επίσης είναι ένας μιγαδικός πίνακας.

Εάν ο πίνακας A έχει πραγματικές συνιστώσες, και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R με πραγματικές συνιστώσες τέτοιος ώστε ο $R^{-1}AR$ να είναι διαγώνιος, λέμε οτι ο A είναι **διαγωνιοποιήσιμος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς**.

Στο Λήμμα 3.6 δείξαμε οτι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτό συνεπάγεται οτι εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n *διαφορετικές* ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$, τότε έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα στον $\mathbb{C}^n$, και είναι διαγωνιοποιήσιμος. Εάν ο πίνακας έχει n διαφορετικές *πραγματικές* ιδιοτιμές, τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

3.4 Εφαρμογές της διαγωνιοποίησης

Η διαγωνιοποίηση είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, αλλά και σε άλλες επιστήμες. Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε κάποια απλά παραδείγματα.

Υπολογισμός δυνάμεων ενός πίνακα

Εάν A, B και R είναι $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες, R είναι αντιστρέψιμος και $A = RBR^{-1}$, παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} A^2 &= RBR^{-1}RBR^{-1} = RB^2R^{-1} \\ A^3 &= A^2A = RB^2R^{-1}RBR^{-1} = RB^3R^{-1} \end{aligned}$$

και μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή οτι για κάθε k,

$$A^k = RB^kR^{-1}\,.$$

Δραστηριότητα 3.9 Αποδείξτε με επαγωγή στο k οτι εάν $A = RBR^{-1}$, τότε για κάθε k

$$A^k = RB^kR^{-1}\,.$$

Καταγράψτε αναλυτικά όλη τη διαδικασία της μαθηματικής επαγωγής, σύμφωνα με το υπόδειγμα στο Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 3.

Εάν ο 2×2 πίνακας D είναι διαγώνιος, $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$, τότε

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2 \end{bmatrix} \\ D^3 &= \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^3 & 0 \\ 0 & d_2^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Για κάθε $n \times n$ διαγώνιο πίνακα D μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή οτι για κάθε k,

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{bmatrix}.$$

Δραστηριότητα 3.10 Αποδείξτε με επαγωγή στο k οτι

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{bmatrix}.$$

Εάν ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.8, εάν R είναι ο αντιστρέψιμος πίνακας με τα ιδιοδιανύσματα ως στήλες, τότε $R^{-1}AR$ είναι διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο. Συνεπώς, για κάθε φυσικό αριθμό k,

$$A^k = R \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} R^{-1}.$$

Παράδειγμα 3.8 Στα Παραδείγματα 3.4 και 3.7 είδαμε οτι ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

έχει τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ και $(-1, -2, 1)$, και οτι

$$BR = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = R\Lambda.$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο, R^{-1},

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τώρα για να βρούμε οποιαδήποτε δύναμη του B αρκεί να υπολογίσουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} B^k &= R\Lambda^k R^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2^k & -2^k & -4^k \\ 0 & 2^k & -2(4^k) \\ 2^k & 0 & 4^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^k+4^k & -2^k+4^k & -2^k+4^k \\ 2(-2^k+4^k) & 2(4^k) & 2(-2^k+4^k) \\ 2^k-4^k & 2^k-4^k & 3(2^k)-4^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 3.11 Εφαρμόστε τη διαδικασία Gauss – Jordan στον επεκτεταμένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

για να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα R^{-1}.

Δραστηριότητα 3.12 Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ της Δραστηριότητας 3.7, υπολογίστε τον πίνακα A^{10}.
Υπολογίστε την αναλυτική έκφραση[3] για τον πίνακα A^k.

Εξισώσεις Διαφορών

Μία **εξίσωση διαφορών** είναι μία εξίσωση που συνδέει τους όρους μίας ακολουθίας με προηγούμενους όρους της ακολουθίας. Για παράδειγμα, θεωρήστε την ακολουθία x_k που ορίζεται από τη σχέση

$$x_{k+1} = 5x_k - 1\,,\ \text{με αρχική συνθήκη } x_0 = 1\,.$$

Από αυτές τις σχέσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= 5\cdot 1 - 1 = 4 \\ x_2 &= 5\cdot 4 - 1 = 19 \\ x_3 &= 5\cdot 19 - 1 = 94 \end{aligned}$$

Το ζητούμενο είναι να βρούμε μία έκφραση για το γενικό όρο x_k της ακολουθίας.

Μία ιδιαίτερα απλή περίπτωση εξίσωσης διαφορών είναι η

$$x_{k+1} = ax_k\,,\ \text{για } a \in \mathbb{R}\,,\ \text{με αρχική συνθήκη } x_0 = c\,.$$

[3] Πρέπει να βρείτε $\begin{bmatrix} -5+6(2^k) & 15-15(2^k) \\ -2+2(2^k) & 6-5(2^k) \end{bmatrix}$.

Σε αυτή την περίπτωση εύκολα δείχνουμε με επαγωγή οτι x_k είναι μία γεωμετρική ακολουθία, $x_k = a^k c$.

Παράδειγμα 3.9 Η **ακολουθία Fibonacci** ορίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}\,, \text{ με αρχικές συνθήκες } F_1 = 1\,, \; F_0 = 0\,. \tag{3.5}$$

Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας Fibonacci είναι 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Για να υπολογίσουμε τον γενικό όρο της ακολουθίας θεωρούμε την ακολουθία διανυσμάτων $u_k = (F_k,\, F_{k-1})$. Τότε η εξίσωση διαφορών 3.5 μπορεί να εκφραστεί ως μία διανυσματική εξίσωση διαφορών,

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix} = A u_{k-1}$$

για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ με αρχικές συνθήκες $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Γενικότερα, θεωρούμε n ακολουθίες $x_1 = (x_{1,k}),\, \ldots,\, x_n = (x_{n,k})$ και το διάνυσμα $u_k = (x_{1,k},\, \ldots,\, x_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$. Ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων διαφορών είναι μία σχέση

$$u_{k+1} = A u_k\,, \text{ με αρχικές συνθήκες } u_0 = (x_{1,0},\, \ldots,\, x_{n,0})$$

όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας.

Πρόταση 3.9 *Η λύση του συστήματος εξισώσεων διαφορών*

$$u_{k+1} = A u_k\,, \text{ με αρχικές συνθήκες } u_0 = (x_{1,0},\, \ldots,\, x_{n,0}) \tag{3.6}$$

είναι

$$u_k = A^k u_0\,.$$

Απόδειξη. Για $k = 1$, από την 3.6, έχουμε $u_1 = A u_0$. Υποθέτουμε οτι $u_k = A^k u_0$. Τότε, από την 3.6 έχουμε $u_{k+1} = A u_k = A(A^k u_0) = A^{k+1} u_0$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής, συμπεραίνουμε οτι για κάθε φυσικό αριθμό k, $u_k = A^k u_0$.

□

Παράδειγμα 3.10 Οι όροι της ακολουθίας Fibonacci δίδονται από την έκφραση $u_k = A^k u_0$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις A^k, εξετάζουμε εάν ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος. Βρίσκουμε οτι ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 - \lambda - 1$, το οποίο έχει ρίζες τις δύο ιδιοτιμές, $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A για τις ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\begin{bmatrix} 1-\lambda_i & 1 \\ 1 & -\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$, δηλαδή $\begin{bmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Εκφράζουμε την αρχική συνθήκη $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων. Οι συντελεστές c_1 και c_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Άρα

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^k \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \lambda_2^k \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στην αναλυτική έκφραση για τον γενικό όρο της ακολουθίας Fibonacci,

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

Παρατηρήστε οτι οι όροι της ακολουθίας Fibonacci είναι φυσικοί αριθμοί. Άρα στο τελικό αποτέλεσμα θα απαλειφθούν οι τετραγωνικές ρίζες.

Ας δούμε ένα παράδειγμα με πιο απλούς αριθμούς, για να επικεντρωθούμε στη διαδικασία.

Παράδειγμα 3.11 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 7x_k - 15y_k \\ y_{k+1} &= 2x_k - 4y_k, \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Εκφράζουμε το σύστημα ως μία διανυσματική εξίσωση $u_{k+1} = Au_k$, με $u_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Στη Δραστηριότητα 3.4 βρήκαμε οτι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ και ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα

$$\begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2^k) \\ 1(2^k) \end{bmatrix}.$$

Εάν θέσουμε τα ιδιοδιανύσματα ως στήλες του πίνακα R, και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές στη διαγώνιο του πίνακα Λ, έχουμε $A^k = R\Lambda^k R^{-1}$, δηλαδή τον πίνακα που υπολογίσαμε στη Δραστηριότητα 3.12. Πολλαπλασιάζουμε το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών με αυτόν τον πίνακα και βρίσκουμε τη λύση του συστήματος εξισώσεων διαφορών,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-9(2^k) \\ 4-3(2^k) \end{bmatrix}.$$

Ένας άλλος τρόπος να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα είναι να εκφράσουμε το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων, λύνοντας το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε $c = 2$, $d = -3$. Αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ στη σχέση $u_k = A^k u_0$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^k \left(2\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 2(1^k)\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 3(2^k)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10-9(2^k) \\ 4-3(2^k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Μαρκοβιανές διαδικασίες

Μία **Μαρκοβιανή διαδικασία** (ή Μαρκοβιανή αλυσσίδα) αποτελείται από έναν σταθερό πληθυσμό, τα άτομα του οποίου βρίσκονται σε διαφορετικές καταστάσεις. Σε κάθε βήμα της διαδικασίας τα άτομα του πληθυσμού μπορεί να μετακινηθούν από μία κατάσταση σε μία άλλη. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό μίας Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι οτι η πιθανότητα να μετακινηθεί ένα άτομο στο επόμενο βήμα σε μία κατάσταση, εξαρτάται μόνον από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, και όχι από το τι έχει συμβεί σε προηγούμενα βήματα.

Τα δεδομένα μίας Μαρκοβιανής διαδικασίας με n διαφορετικές καταστάσεις καταγράφονται σε έναν $n \times n$ **πίνακα μετάβασης** του οποίου το στοιχείο στην i γραμμή και στην j στήλη καταφράφει την πιθανότητα ένα άτομο που βρίσκεται στην κατάσταση j, στο επόμενο βήμα να μετακινηθεί στην κατάσταση i. Αφού τα στοιχεία του πίνακα καταγράφουν πιθανότητες, είναι αριθμοί μεταξύ 0 και 1. Όλα τα άτομα που βρίσκονται σε μία κατάσταση, στο επόμενο βήμα θα πρέπει να βρίσκονται πάλι σε μία κατάσταση, την ίδια ή διαφορετική. Συνεπώς το άθροισμα των πιθανοτήτων σε κάθε στήλη είναι 1.

Ένας Μαρκοβιανός πίνακας είναι ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας που δεν περιέχει αρνητικούς αριθμούς και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι 1. Ένα **διάνυσμα κατανομής** είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, του οποίου το στοιχείο στη θέση i καταγράφει την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να βρίσκεται στην κατάσταση i.

Παράδειγμα 3.12 Θεωρούμε οτι ο πληθυσμός της Ελλάδας είναι σταθερός στα 10 εκατομμύρια, και τον διακρίνουμε σε δύο καταστάσεις: τους κατοίκους της Αττικής και τους κατοίκους των άλλων περιφερειών. Υποθέτουμε οτι κάθε χρόνο, το 4% του πληθυσμού που κατοικεί εκτός Αττικής μετακινείται στην Αττική, ενώ το 6% του πληθυσμού της Ατικής μετακινείται σε άλλη περιφέρεια. Σε αυτή τη διαδικασία έχουμε δύο καταστάσεις, άρα ο Μαρκοβιανός πίνακας θα έχει διαστάσεις 2×2. Στην πρώτη στήλη βάζουμε την κατάσταση ''κατοικεί εκτός Αττικής'', και στη δεύτερη στήλη την κατάσταση ''κατοικεί στην Αττική''. Με τα παραπάνω δεδομένα έχουμε τον Μαρκοβιανό πίνακα

$$M = \begin{bmatrix} 0,96 & 0,06 \\ 0,04 & 0,94 \end{bmatrix}.$$

Υποθέτουμε οτι το 1970 κατοικούσαν 8 εκατομμύρια εκτός Αττικής και 2 εκατομμύρια στην Αττική. Δηλαδή έχουμε αρχικό διάνυσμα κατανομής $\begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}$. Στο επόμενο βήμα, το 1971, η κατανομή του πληθυσμού θα είναι

$$\begin{bmatrix} 0,96 & 0,06 \\ 0,04 & 0,94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,78 \\ 0,22 \end{bmatrix},$$

το 1972 θα είναι

$$\begin{bmatrix} 0,96 & 0,06 \\ 0,04 & 0,94 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,762 \\ 0,238 \end{bmatrix},$$

ενώ μετά από k έτη η κατανομή θα έχει γίνει

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,96 & 0,06 \\ 0,04 & 0,94 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

Εάν ο πίνακας M είναι διαγωνιοποιήσιμος, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις δυνάμεις, και να μελετήσουμε τη μακροπρόθεσμη κατανομή του πληθυσμού.

Ας θεωρήσουμε έναν 2×2 Μαρκοβιανό πίνακα,

$$M = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο,

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-a-\lambda & b \\ a & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-a-b-\lambda).$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 1 - a - b$, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$x_1 = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad \text{και } x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε $R = \begin{bmatrix} b & -1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ και έχουμε

$$A^k = R \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} R^{-1}.$$

Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 3.12, με την αρχική κατανομή του πληθυσμού $(0,8\,,\,0,2)$, και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} M^k &= \begin{bmatrix} b & -1 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b - \lambda_2^k(0,2b - 0,8a) \\ a + \lambda_2^k(0,2b - 0,8a) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Εάν $0 < a < 1$ και $0 < b < 1$, τότε $0 < a + b < 2$, και $-1 < 1 - a - b < 1$. Συνεπώς $\lambda_2^k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Για μεγάλα k το διάνυσμα κατανομής τείνει στο $\dfrac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$. Στο παράδειγμα, με $a = 0,04$, $b = 0,06$, η κατανομή του πληθυσμού μεταξύ της υπόλοιπης χώρας και της Αττικής τείνει προς μία αναλογία $3 : 2$. Παρατηρούμε οτι η μακροπρόθεσμη κατανομή δεν εξαρτάται από την αρχική κατανομή, ούτε από τις ακριβείς τιμές των a και b, αλλά μόνον από το λόγο $b : a$.

Δεν υπάρχει πάντα μία μακροπρόθεσμη κατανομή προς την οποία τείνει η Μαρκοβιανή διαδικασία. Στο 2×2 παράδειγμα, εάν $a = b = 1$, τότε $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και οι πληθυσμοί εναλλάσσονται σε κάθε βήμα,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Μία Μαρκοβιανή διαδικασία είναι **κανονική** (regular) εάν κάποια δύναμη του Μαρκοβιανού πίνακα έχει όλα τα στοιχεία γνήσια θετικά. Για τέτοιες διαδικασίες έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεώρημα 3.10 *Εάν M είναι ο $n \times n$ πίνακας μίας κανονικής Μαρκοβιανής διαδικασίας, τότε $\lambda_1 = 1$ είναι ιδιοτιμή με πολλαπλότητα 1, και κάθε άλλη ιδιοτιμή λ_i, $i = 2, \ldots, n$ έχει την ιδιότητα $|\lambda_i| < 1$. Η Μαρκοβιανή διαδικασία έχει μακροπρόθεσμη κατανομή, που είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1.*

Η διαδικασία στο Παράδειγμα 3.12 είναι κανονική, αφού ο πίνακας M δεν έχει μηδενικά στοιχεία. Η μακροπρόθεσμη κατανομή που υπολογίσαμε είναι πράγματι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1.

3.5 Ασκήσεις

Άσκηση 3.11 Διαγωνιοποιήστε τους ακόλουθους πίνακες (δηλαδή βρείτε R τέτοιους ώστε $R^{-1}AR$ είναι διαγώνιος πίνακας):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.12 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και γράψτε δύο διαφορετικούς πίνακες R που διαγωνιοποιούν τον A.

Άσκηση 3.13 Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες δεν μπορούν να διαγωνιοποιηθούν;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.14 Εάν $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, διαγωνιοποιήστε τον A και υπολογίστε τον πίνακα A^{100}.

Άσκηση 3.15 Παραγοντοποιήστε τους ακόλουθους πίνακες στη μορφή $A = RDR^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.6 Ιδιοτιμές γραμμικού τελεστή

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V (όχι υποχρεωτικά πεπερασμένης διάστασης) πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Θα μελετήσουμε γραμμικές απεικονίσεις από τον V στον εαυτό του,

$$L : V \longrightarrow V\,.$$

Μία τέτοια απεικόνιση ονομάζεται **γραμμικός τελεστής** στο V (ή **ενδομορφισμός** του V).

Ορισμός 3.3. Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Οι αριθμοί λ του $\mathbb{K}$ για τους οποίους υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $v \in V$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$L\,v = \lambda v \tag{3.7}$$

ονομάζονται **ιδιοτιμές** του γραμμικού τελεστή L, ενώ τα *μη μηδενικά* διανύσματα που ικανοποιούν την 3.7 ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του L για την ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του L για την ιδιοτιμή λ, μαζί με το διάνυσμα 0, αποτελεί ένα γραμμικό υπόχωρο του V που ονομάζεται **ιδιόχωρος** του L για την ιδιοτιμή λ.

Δραστηριότητα 3.13 Ελέγξτε οτι πράγματι ο ιδιόχωρος του L για την ιδιοτιμή λ είναι γραμμικός υπόχωρος του V, δηλαδή οτι είναι κλειστός ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου.

Παράδειγμα 3.13 Ο τελεστής $L = a\mathbf{I}_V \,:\, v \mapsto av$ έχει μοναδική ιδιοτιμή a. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του V είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή a. Ο ιδιοχώρος του L για την ιδιοτιμή a είναι όλος ο χώρος V.

Παράδειγμα 3.14 Ο τελεστής $L(x,\,y) = (3x,\,\frac{1}{2}y)$ έχει ιδιοδιάνυσμα $(1,\,0)$ για την ιδιοτιμή 3 και ιδιοδιάνυσμα $(0,\,1)$ για την ιδιοτιμή $\frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 3.15 Ο τελεστής περιστροφής κατά $\frac{\pi}{2}$ στο $\mathbb{R}^2$, $R(x,\,y) = (-y,\,x)$ δεν έχει καμία ιδιοτιμή στο $\mathbb{R}$.
Ο τελεστής περιστροφής κατά $\frac{\pi}{2}$ στο $\mathbb{C}$, $R(z) = \mathrm{i}z$ έχει ιδιοτιμή i, με ιδιόχωρο όλο το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 3.16 Θεωρούμε τον τελεστή παραγώγισης στο διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, $D : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, που απεικονίζει κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ στην τυπική παράγωγό του, $D(p(x)) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$. Αφού $\deg(D(p(x))) = \deg(p(x)) - 1$, κανένα πολυώνυμο θετικού βαθμού δεν απεικονίζεται σε πολλαπλάσιο του εαυτού του. Η μοναδική ιδιοτιμή του τελεστή D είναι $\lambda = 0$, και ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το σταθερό πολυώνυμο $p(x) = 1$.

Παράδειγμα 3.17 Θεωρούμε τον τελεστή shift στο διανυσματικό χώρο των ακολουθιών με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$, $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, που απεικονίζει κάθε ακολουθία (a_n) στην ακολουθία

(b_n), όπου $b_n = a_{n+1}$. Ο τελεστής shift έχει κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{K}$ ως ιδιοτιμή, με ιδιοδιάνυσμα τις αντίστοιχες γεωμετρικές ακολουθίες: Εάν $\lambda \neq 0$ και x_λ είναι η γεωμετρική ακολουθία $x_{\lambda,n} = a\lambda^n$, τότε $s(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$.

Πρόταση 3.11 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ και $M : W \longrightarrow W$ είναι γραμμικοί τελεστές και υπάρχει ισομορφισμός $T : V \longrightarrow W$ τέτοιος ώστε*

$$L = T^{-1} \circ M \circ T$$

τότε οι τελεστές L και M έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Επί πλέον, εάν v είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή λ, τότε $T(v)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του M για την ίδια ιδιοτιμή.

Απόδειξη. Για κάθε $v \in V$ έχουμε $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν $T^{-1} \circ M \circ T(v) = \lambda v$, δηλαδή $M \circ T(v) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Συνεπώς λ είναι ιδιοτιμή του L, με ιδιοδιάνυσμα v, εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του M, με ιδιοδιάνυσμα $T(v)$.

□

Λήμμα 3.12 *Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή $L : V \longrightarrow V$ εάν και μόνον εάν $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ είναι ο πυρήνας $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$, και κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή λ.*

Απόδειξη. Εάν $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $(L - \lambda \mathbf{I}_V)(v) = 0$, δηλαδή $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς v είναι ιδιοδιάνυσμα του L και λ ιδιοτιμή του L.

Αντίστροφα, εάν $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του L, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς $(L - \lambda \mathbf{I}_V)(v) = 0$, άρα $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός.

□

3.7 Πολυώνυμα και τελεστές

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο p με συντελεστές στο $\mathbb{K}$,

$$p(t) = a_k t^k + \cdots + a_1 t + a_0 \,.$$

Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής στο V, τότε οι δυνάμεις $L^i = L \circ \cdots \circ L$, όπου συνθέτουμε i φορές τον τελεστή L, είναι επίσης γραμμικοί τελεστές στο V. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον τελεστή L στη θέση της μεταβλητής του πολυωνύμου,

$$p(L) = a_k L^k + \cdots + a_1 L + a_0 \mathbf{I}_V \,,$$

και το αποτέλεσμα είναι πάλι ένας γραμμικός τελεστής στο V,

$$p(L) : V \longrightarrow V : v \longmapsto a_k L^k(v) + \cdots + a_1 L(v) + a_0 v\,.$$

Παρατηρούμε οτι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, οι τελεστές $p(L)$ και $q(L)$ μετατίθενται:

$$p(L)q(L) = (pq)(L) = (qp)(L) = q(L)p(L)\,.$$

3.8 Ύπαρξη ιδιοτιμών

Θεώρημα 3.13 *Κάθε τελεστής σε ένα μη μηδενικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, πάνω από το $\mathbb{C}$, έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V, $\dim V = n$, ένα γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$. Τότε η συλλογή v, $L(v)$, $L^2(v)$, …, $L^n(v)$ έχει $n+1$ στοιχεία, και συνεπώς είναι γραμμικά εξαρτημένη. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $a_i \in \mathbb{C}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_n L^n(v) = 0\,.$$

Εάν $a_0 = 0$, τότε κάποιο από τα a_i για $i \geq 1$ είναι διαφορετικό από μηδέν. Εάν $a_0 \neq 0$, αφού $v \neq 0$, πάλι κάποιο από τα a_i για $i \geq 1$ είναι διαφορετικό από μηδέν. Συνεπώς το πολυώνυμο $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ έχει βαθμό k, για $1 \leq k \leq n$. Δηλαδή υπάρχει θετικός ακέραιος $k \leq n$, τέτοιος ώστε $a_k \neq 0$ και $a_i = 0$ για κάθε $i = k+1, \ldots, n$. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, (Σημειώσεις Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 3) το πολυώνυμο $p(x)$ παραγοντοποιείται σε γινόμενο k διωνύμων, δηλαδή υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_k$ τέτοιοι ώστε

$$p(x) = a_k(x - c_1) \cdots (x - c_k)\,.$$

Συνεπώς ο τελεστής $p(L)$ είναι ίσος με τον τελεστή $a_k(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)$, και

$$a_k(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)(v) = 0\,.$$

Αφού $v \neq 0$, ο τελεστής $(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)$ δεν είναι μονομορφισμός, και συμπεραίνουμε οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα i, $1 \leq i \leq k$, για το οποίο η απεικόνιση $L - c_i\mathbf{I}_V$ δεν είναι ενεικονική. Συνεπώς υπάρχει μη μηδενικό $w \in V$ τέτοιο ώστε $(L - c_i\mathbf{I}_V)(w) = 0$, δηλαδή $L(w) = c_i w$, και $\lambda = c_i$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή L.

□

3.9 Τελεστές και πίνακες

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n και βάση $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ του V. Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, τότε ο πίνακας ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον

L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο πίνακας που έχει στη γραμμή i και στήλη j το στοιχείο a_{ij} που ορίζεται από τη σχέση

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \,.$$

Πρόταση 3.14 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, βάση $\mathcal{B}$ του V, και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Τότε $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή L εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Εάν $v_{\mathcal{B}}$ συμβολίζει το διάνυσμα συντεταγμένων του διανύσματος $v \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε, από τον ορισμό του ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ έχουμε

$$(L(v))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} \,.$$

Συνεπώς $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} = (\lambda v)_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}}$.

□

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και L είναι ένας γραμμικός τελεστής στον V, θεωρούμε πίνακες A και B που αντιστοιχούν στον L ως προς διαφορετικές βάσεις του V. Γνωρίζουμε από την Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα οτι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, και συνεπώς οτι $\det A = \det B$. Εύκολα βλέπουμε οτι οι πίνακες πολυωνύμων $A - \lambda \mathbf{I}_n$ και $B - \lambda \mathbf{I}_n$ είναι επίσης όμοιοι, και συνεπώς τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των δύο πινάκων είναι ίσα,

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = \det(B - \lambda \mathbf{I}_n) \,.$$

Συμπεραίνουμε οτι μπορούμε να ορίσουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $\chi_L(\lambda)$ του τελεστή L, να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα του L ως προς οποιαδήποτε βάση του V.

Η ακόλουθη πρόταση είναι συνέπεια του αντίστοιχου αποτελέσματος για πίνακες.

Πρόταση 3.15 *Θεωρούμε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ διαφορετικές ιδιοτιμές του L, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, \ldots, v_m$. Τότε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Πόρισμα 3.16 *Κάθε τελεστής στο διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, έχει το πολύ $\dim V$ διαφορετικές ιδιοτιμές.*

□

3.10 Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Θεωρούμε έναν γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$ σε ένα διανυσματικό χώρο V. Γνωρίζουμε οτι τα σύνολα $\ker L$ και $\operatorname{im} L$ είναι υπόχωροι του V, και εύκολα ελέγχουμε οτι

$$L(\ker L) \;\subseteq\; \ker L$$

$$L(\operatorname{im} L) \quad \subseteq \quad \operatorname{im} L\,.$$

Ο ιδιόχωρος X_λ μίας ιδιοτιμής του L είναι επίσης ένας υπόχωρος του V με την ιδιότητα $L(X_\lambda) \subseteq X_\lambda$.

Ορισμός 3.4. $L : V \longrightarrow V$ γραμμικός τελεστής. Ο υπόχωρος $X \subseteq V$ ονομάζεται **αναλλοίωτος** υπόχωρος από τον τελεστή L, εάν

$$L(X) \subseteq X\,.$$

Προσέξτε οτι δεν υποθέτουμε οτι $L(X) = X$, ούτε οτι $L^{-1}(X) \subseteq X$.

Παράδειγμα 3.18 Για κάθε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, οι υπόχωροι $\{0\}$, V, $\ker L$ και $\operatorname{im} L$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L.

Παράδειγμα 3.19 Για κάθε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και κάθε ιδιοτιμή λ του L, οι υπόχωροι του ιδιόχωρου της λ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L.

Παράδειγμα 3.20 Θεωρούμε τον τελεστή $L(x,\, y,\, z) = (x + z,\, y,\, z - y)$. Ο υπόχωρος $U = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{K}^3 : y = 0\}$ είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή L: $L(x,\, 0,\, z) = (x + z,\, 0,\, z) \in U$. Ο υπόχωρος $W = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{K}^3 : x = y = 0\}$ δεν είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή L: $L(0,\, 0,\, 1) = (1,\, 0,\, 1) \notin W$.

Παράδειγμα 3.21 Θεωρούμε τον τελεστή παραγώγισης στο διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, $D : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, και τον υπόχωρο $\mathbb{K}_m[x]$των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με m. Αφού κάθε πολυώνυμο βαθμού k απεικονίζεται σε πολυώνυμο μικρότερου βαθμού, ο υπόχωρος $\mathbb{K}_m[x]$ είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή D.

Παράδειγμα 3.22 Θεωρούμε τον τελεστή shift στο διανυσματικό χώρο των ακολουθιών με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$, $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, και τον υπόχωρο X των ακολουθιών που είναι φραγμένες. Αφού μία φραγμένη ακολουθία παραμένει φραγμένη όταν ‘‘ξεχάσουμε’’ τον πρώτο όρο της, ο υπόχωρος X είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή shift.

Πρόταση 3.17 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Εάν X και Y είναι υπόχωροι του V αναλλοίωτοι από τον L, τότε $X \cap Y$ και $X + Y$ είναι υπόχωροι αναλλοίωτοι από τον L.*

Πρόταση 3.18 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι τελεστής στο χώρο V, και X είναι υπόχωρος του V αναλλοίωτος από τον L, με $\dim V = n$ και $\dim X = k$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλη βάση του V έτσι ώστε ο πίνακας του L ως προς την επιλεγμένη βάση να είναι της μορφής*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

με ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε οτι κάθε βάση $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του X μπορεί να επεκταθεί σε βάση $\{x_1, \ldots, x_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ του V. Εάν X είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και $[a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\{x_1, \ldots, x_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ τότε

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij} v_i \,.$$

Όμως $L(x_j) \in X$ και συνεπώς $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Άρα ο πίνακας (a_{ij}) έχει ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

□

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, γνωρίζουμε οτι για ένα πίνακα της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} B & F \\ 0 & C \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

ισχύει $\det A = \det B \det C$. Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα στον πίνακα πολυωνύμων $A - \lambda \mathbf{I}$, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση[4].

Πρόταση 3.19 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Εάν X υπόχωρος του V αναλλοίωτος από τον L, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $L|_X$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L,*

$$\chi_{L|_X}(\lambda) \,|\, \chi_L(\lambda)\,.$$

Όταν ο διανυσματικός χώρος V διασπάται σε ευθύ άθροισμα δύο ή περισσότερων υπόσωρων, κάθε ένας εκ των οποίων είναι αναλλοίωτος από έναν τελεστή, τότε και ο πίνακας μπορεί να πάρει τη μορφή διαγώνιου πίνακα σε μπλοκ. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για δύο υπόχωρους, και αφήνουμε ως άσκηση τη γενίκευση, με χρήση επαγωγής.

[4] Ο συμβολισμός $a \,|\, b$ σημαίνει οτι το a διαιρεί το b.

Πρόταση 3.20 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n, και υπόχωρους X και Y του V, τέτοιους ώστε*

$$V = X \oplus Y\,,$$

με βάσεις $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ του X και $\mathcal{C} = \{y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ του Y. Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής και X, Y είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L, τότε ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ είναι διαγώνιος σε μπλοκ, δηλαδή έχει τη μορφή

$$_{\mathcal{S}}L_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

όπου B είναι ο $k \times k$ πίνακας του τελεστή $L|_X$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και C είναι ο $(n-k)\times(n-k)$ πίνακας του τελεστή $L|_Y$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.
Τότε για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L ισχύει

$$\chi_L(\lambda) = \chi_{L|_X}(\lambda)\,\chi_{L|_Y}(\lambda)\,.$$

Απόδειξη. Εάν ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{S}$ είναι $[a_{ij}]$, τότε για $j = 1, \ldots, k$,

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij}y_i\,.$$

Αλλά $L(x_j) \in X$, άρα $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Παρόμοια, για $j = k+1, \ldots, n$, $a_{ij} = 0$ για $i = 1, \ldots, k$.

Η ιδιότητα των χαρακτηριστικών πολυωνύμων είναι συνέπεια της 3.8.

□

3.11 Βάσεις από ιδιοδιανύσματα

Πρόταση 3.21 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής, και ο διανυσματικός χώρος V έχει μία πεπερασμένη βάση από ιδιοδιανύσματα του L, τότε ο πίνακας του L ως προς αυτήν τη βάση είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές του τελεστή στη διαγώνιο.*

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μία βάση από ιδιοδιανύσματα, και $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τότε

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i = \lambda_j v_j\,.$$

Αφού τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές είναι μοναδικοί, και

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ \lambda_j & \text{εάν} \quad i = j\,. \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας $[a_{ij}]$ είναι διαγώνιος.

□

Είναι προφανές οτι ισχύει και το αντίστροφο: εάν ο πίνακας του τελεστή L ως προς κάποια βάση είναι διαγώνιος, τότε τα στοιχεία της βάσης είναι ιδιοδιανύσματα του L.

Εάν $\dim V = n$ και ο L έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μία βάση του V η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L, και ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι διαγώνιος. Έχουμε δει όμως παραδείγματα όπου υπάρχουν λιγότερα από n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, και δεν υπάρχει βάση ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι διαγώνιος.

Υπενθυμίζουμε οτι η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου της ιδιοτιμής.

Πρόταση 3.22 *Η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι ίση ή μικρότερη από την αλγεβρική πολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι η ιδιοτιμή λ_1 έχει γεωμετρική πολλαπλότητα k, και επιλέγουμε γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ_1, $v_1, \ldots, v_k$. Συμπληρώνουμε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ σε βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ του V. Αφού για $j = 1, \ldots, k$, $L(v_j) = \lambda_1 v_j$, η στήλη j του πίνακα $A =_{\mathcal{B}} L_{\mathcal{B}}$ έχει στοιχεία $a_{jj} = \lambda_1$ και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_L(\lambda)$ διαιρείται από το $(\lambda - \lambda_1)^k$. Άρα k δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από την πολλαπλότητα της ρίζας λ_1 στο χ_L.

□

3.12 Τριγωνικοί πίνακες

Υπενθυμίζουμε οτι ένας $n \times n$ πίνακας είναι *άνω τριγωνικός* όταν έχει μηδενικά σε όλες τις θέσεις κάτω από τη διαγώνιο, δηλαδή όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Ένας άνω τριγωνικός πίνακας είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν έχει μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε οτι πάνω από το $\mathbb{C}$ μπορούμε πάντα να βρούμε μία βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι άνω τριγωνικός.

Πρόταση 3.23 *Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του V. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας A του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι άνω τριγωνικός*
2. *$L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ για $j = 1, \ldots, n$.*
3. *Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον L.*

Απόδειξη. Το 2 σημαίνει οτι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει μηδενικά στις τελευταίες $n - j$ θέσεις, που είναι ακριβώς το ίδιο με το 1. Είναι προφανές οτι το 3 συνεπάγεται το 2. Θα δείξουμε οτι το 2 συνεπάγεται το 3. Εάν $v \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$, τότε

$v = a_1v_1 + \cdots + a_jv_j$. Εάν ισχύει το 2, για κάθε $i = 1, \ldots, j$

$$L(v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

Συνεπώς

$$L(v) = a_1L(v_1) + \cdots + a_jL(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

□

Ορισμός 3.5. Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία στο $\mathbb{K}$ είναι **τριγωνοποιήσιμος (πάνω από το** $\mathbb{K}$**)** εάν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα U, δηλαδή εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R με στοιχεία στο $\mathbb{K}$ τέτοιος ώστε $A = RUR^{-1}$.
Ένας τελεστής $L : V \longrightarrow V$ είναι **τριγωνοποιήσιμος** εάν υπάρχει μία διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι άνω τριγωνικός.

Πρόταση 3.24 *Υποθέτουμε οτι ο τελεστής $L : V \longrightarrow V$ είναι τριγωνοποιήσιμος. Τότε οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου του τριγωνικού πίνακα που παριστάνει τον L.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα A της L, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Τότε η απεικόνιση $L - \lambda \mathbf{I}_V$, για $\lambda \in \mathbb{K}$, έχει πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν λ είναι ίσο με κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Άρα οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

□

Θεώρημα 3.25 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε ο τελεστής L είναι τριγωνοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στη διάσταση του V. Εάν $\dim V = 1$, αρκεί να παρατηρήσουμε οτι κάθε 1×1 πίνακας είναι άνω τριγωνικός.

Υποθέτουμε οτι $\dim V = n \geq 2$. Αφού βρισκόμαστε πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, από το Θεώρημα 3.13, ο L έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή λ_1. Έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_1. Συμπληρώνουμε το $\{u_1\}$ σε βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ του V, και θεωρούμε τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Η πρώτη στήλη του A περιέχει το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(u_1) = \lambda_1 u_1$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Συνεπώς ο A έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το V ως ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $V_1 = \langle u_1 \rangle$ και $U = \langle u_2, \ldots, u_n \rangle$, έτσι ώστε κάθε $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $v = a_1 u_1 + u$, για $a_1 \in \mathbb{C}$ και $u \in U$. Έχουμε απεικονίσεις $j : U \longrightarrow V : u \mapsto u$ και $p : V \longrightarrow U : v \mapsto u$, και ορίζουμε

$$M = p \circ L \circ j : U \longrightarrow U\,.$$

Για $i = 2, \ldots, n$, $M(u_i) = a_{2i}u_2 + \cdots + a_{ni}u_n$, όπου $(a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ είναι η στήλη του πίνακα D που αντιστοιχεί στην i στήλη του πίνακα A. Συνεπώς D είναι ο πίνακας που παριστάνει την απεικόνιση M ως προς τη βάση $\{u_2, \ldots, u_n\}$. Αφού $\dim U = n - 1$, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει βάση $\mathcal{W} = \{w_2, \ldots, w_n\}$, ως προς την οποία ο πίνακας της απεικόνισης M είναι άνω τριγωνικός. Εξετάζουμε τώρα τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{u_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Αυτός έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

όπου T είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας ο οποίος παριστάνει την απεικόνιση M ως προς τη βάση $\mathcal{W}$. Συνεπώς ο T είναι άνω τριγωνικός. Συμπεραίνουμε οτι ο πίνακας B του τελεστή L ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$ είναι άνω τριγωνικός.

$\square$

Πρόταση 3.26 *Κάθε τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{C}$ είναι τριγωνοποιήσιμος.*

Παράδειγμα 3.23 Στο χώρο $\mathbb{C}_3[x]$ των πολυωνύμων βαθμού ίσου ή μικρότερου από 3, με την κανονική διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$, ο τελεστής παραγώγισης $D : \mathbb{C}_3[x] \longrightarrow \mathbb{C}_3[x]$ παριστάνεται από τον πίνακα

$${}_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε οτι ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός. Για να τον μετατρέψουμε σε άνω τριγωνικό αρκεί μία αναδιάταξη της βάσης, $\mathcal{F} = \{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$. Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{F}$ είναι

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

με $R^{-1} = R$. Άρα ο άνω τριγωνικός πίνακας είναι

$${}_{\mathcal{F}}D_{\mathcal{F}} = R\,{}_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}}R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ας εφαρμόσουμε τη διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος 3.25 για να τριγωνοποιήσουμε τον τελεστή D. Ο D έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 0$, με ιδιοδιάνυσμα το σταθερό πολυώνυμο 1. Επιλέγουμε ως πρώτο στοιχείο της βάσης αυτό το πολυώνυμο, και θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{C} = \{1,\, x^3,\, x^2,\, x\}$ ως προς την οποία ο πίνακας του τελεστή D είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο κάτω δεξιά 3×3 πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

παριστάνει τον τελεστή $M : \langle x^3,\, x^2,\, x\rangle \longrightarrow \langle x^3,\, x^2,\, x\rangle$ που απεικονίζει τα $x^3,\, x^2,\, x$ στα $3x^2,\, 2x,\, 0$ αντίστοιχα. Αυτός ο τελεστής έχει τριγωνικό πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{C}' = \{x,\, x^2,\, x^3\}$. Από αυτή τη διαδικασία, καταλήγουμε οτι ως προς τη βάση $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\} = \mathcal{F}$ ο πίνακας του τελεστή D είναι άνω τριγωνικός, που επαληθεύει το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Όταν ο διανυσματικός χώρος V είναι πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών, δεν είναι δεδομένη η ύπαρξη ιδιοτιμών. Σε αυτή την περίπτωση για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη βάσης ως προς την οποία ο τελεστής είναι άνω τριγωνικός, πρέπει να υποθέσουμε οτι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1. Διατυπώνουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση ενός $n \times n$ πίνακα.

Θεώρημα 3.27 *Θεωρούμε $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία στο $\mathbb{K}$. Τότε ο A είναι τριγωνοποιήσιμος εάν και μόνον εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$ είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1 πάνω από το $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη. Εάν ο A είναι τριγωνοποιήσιμος, θεωρούμε τριγωνικό πίνακα B όμοιο με τον A, με στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ στη διαγώνιο. Τότε $\det(A-\lambda\mathbf{I}) = \det(B-\lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$, και συνεπώς $\chi_A(\lambda)$ είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1 πάνω από το $\mathbb{K}$.

Εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων πάνω από το $\mathbb{K}$, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.25 θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Έστω λ_1 τέτοιο ώστε $(\lambda_1-\lambda)$ διαιρεί το $\chi_A(\lambda)$. Τότε λ_1 είναι ιδιοτιμή του A· έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα της λ_1. Θεωρούμε αντιστρέψιμο πίνακα R με πρώτη στήλη u_1. Τότε $R^{-1}u_1$ είναι η πρώτη στήλη του ταυτοτικού πίνακα $\mathbf{I}_n$, και $R^{-1}AR$ έχει πρώτη στήλη $R^{-1}Au_1 = \lambda_1 R^{-1}u_1$. Συνεπώς

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

όπου $b = (b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$ και B είναι $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας. Από την Πρόταση 3.8, $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)\chi_B(\lambda)$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1. Από την επαγωγική υπόθεση, ο πίνακας B είναι τριγωνοποιήσιμος. Άρα υπάρχει $(n-1)\times(n-1)$ αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $S^{-1}BS$ να είναι άνω τριγωνικός. Θέτουμε $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} U^{-1}R^{-1}ARU &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & bS \\ 0 & S^{-1}BS \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

που είναι άνω τριγωνικός.

□

Παράδειγμα 3.24 Θα εξετάσουμε εάν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι τριγωνοποιήσιμος. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $\chi_A(x) = -x(x-2)^2$. Αφού το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων ο πίνακας είναι τριγωνοποιήσιμος.

Για να βρούμε τον πίνακα ο οποίος τριγωνοποιεί τον A, υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα. Ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 0 είναι το $(1, 1, 0)$. Η ιδιοτιμή 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, αλλά γεωμετρική πολλαπλότητα 1: υπάρχει μόνον ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα. Επιλέγουμε το $(1, 1, -2)$. Αυτά τα δύο διανύσματα θα είναι οι δύο πρώτες στήλες του πίνακα R που τριγωνοποιεί τον πίνακα A. Για την τρίτη στήλη μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα έτσι ώστε να έχουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα. Επιλέγουμε το διάνυσμα $(1, -1, 0)$.

Ο πίνακας $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ τριγωνοποιεί τον A. Δηλαδή υπάρχει άνω τριγωνικός πίνακας U τέτοιος ώστε $AR = RU$. Αφού οι δύο πρώτες στήλες του R είναι τα ιδιοδιανύσματα του A, στις δύο πρώτες στήλες του U έχουμε τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Άρα $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, όπου $(a,\, b,\, c)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε $(a,\, b,\, c) = (-1,\, 1,\, 2)$, συνεπώς $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = R^{-1}AR$.

3.13 Θεώρημα Cayley – Hamilton

Παράδειγμα 3.25 Πριν διατυπώσουμε το Θεώρημα Cayley – Hamilton θα υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix},$$

δηλαδή του $k \times k$ πίνακα $[b_{ij}]$, με $b_{ij} = 0$ όταν $j \neq k$ και $i \neq j+1$, $b_{(j+1)\,j} = 1$ για $j = 1, \dots, k-1$ και $b_{ik} = a_i$. Αυτό είναι ίσο με την ορίζουσα

$$\det(B - x\mathbf{I}_k) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\det(B - x\mathbf{I}_n)$ θα χρησιμοποιήσουμε απαλοιφή από κάτω προς τα επάνω, για να απαλείψουμε τα $-x$ στη διαγώνιο. Αφαιρώντας $-x$ φορές την τελευταία γραμμή από την προτελευταία, έχουμε

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1}+a_kx-x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Συνεχίζουμε, αφαιρώντας $-x$ φορές τη γραμμή i από τη γραμμή $i-1$, για $i = k-1, k-2, \dots, 2$, και καταλήγουμε με την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 + a_2x + \dots + a_kx^{k-1} - x^k \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 + a_3x + \dots + a_kx^{k-2} - x^{k-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1}+a_kx-x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix},$$

την οποία αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(B - x\mathbf{I}) \\ &= (-1)^{k+1}(a_1 + a_2x + \dots + a_kx^{k-1} - x^k) \\ &= (-1)^k(x^k - a_kx^{k-1} - \dots - a_2x - a_1)\,. \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.28 (Cayley – Hamilton) *Εάν $\chi_L(x) = b_nx^n + \dots + b_1x + b_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή L, σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, τότε ο τελεστής*

$$\chi_L(L) = b_nL^n + \dots + b_1L + b_0\mathbf{I}_V$$

είναι ο μηδενικός τελεστής: για κάθε $v \in V$, $\chi_L(L)(v) = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $\chi_L(x) = b_nx^n + \dots + b_1x + b_0$. Θα δείξουμε οτι ο τελεστής $\chi_L(L) = b_nL^n + \dots + b_1L + b_0\mathbf{I}_V$ παίρνει την τιμή 0 σε κάθε $v \in V$, και συνεπώς οτι είναι ο μηδενικός τελεστής.

Εάν $v = 0$ τότε προφανώς $\chi_L(L)(v) = 0$. Υποθέτουμε οτι $v \neq 0$. Εάν $\dim V = n$, θεωρούμε τη συλλογή των διανυσμάτων

$$v_1 = v,\ v_2 = L(v),\ v_3 = L^2(v),\ \dots,\ v_{n+1} = L^n(v)\,.$$

Αφού αυτή περιέχει $n+1$ διανύσματα, είναι γραμμικά εξαρτημένη. Από την Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε οτι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε η συλλογή

$v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη, ενώ η συλλογή $v_1, \ldots, v_{k+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένη και υπάρχουν $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε

$$v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k\,.$$

Επεκτείνουμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ σε βάση του V,

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}\,.$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{array}{rcl} L(v_1) & = & v_2 \\ L(v_2) & = & v_3 \\ & \vdots & \\ L(v_{k-1}) & = & v_k \\ L(v_k) & = & v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \end{array}$$

Αυτό σημαίνει οτι ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον L και συνεπώς οτι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει τη μορφή

$${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Ο $k \times k$ πίνακας A έχει στη στήλη j τις k πρώτες συντεταγμένες του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Εάν $j = 1, \ldots, k-1$, $L(v_j) = v_{j+1}$, άρα $a_{(j+1)j} = 1$, και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j+1$. Δηλαδή ο πίνακας έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix}.$$

Γνωρίζουμε οτι

$$\begin{array}{rcl} \chi_L(x) & = & \det({}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} - x\mathbf{I}_n) \\ & = & \det(A - x\mathbf{I}_k)\det(D - x\mathbf{I}_{n-k}) \\ & = & \chi_A(x)\chi_D(x) \end{array}$$

ενώ από το Παράδειγμα 3.25 έχουμε οτι

$$\chi_A(x) = (-1)^k(x^k - a_k x^{k-1} - \cdots - a_2 x - a_1)\,.$$

Αντικαθιστούμε L για το x και υπολογίζουμε την τιμή του τελεστή $\chi_A(L)$ στο v:

$$\begin{aligned} \chi_A(L)(v) &= (-1)^k(L^k(v) - a_kL^{k-1}(v) - \cdots - a_2L(v) - a_1v) \\ &= (-1)^k(v_{k+1} - a_kv_k - \cdots - a_2v_2 - a_1v_1) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Αφού οι τελεστές $\chi_A(L)$ και $\chi_D(L)$ μετατίθενται,

$$\chi_L(L)(v) = \chi_D(L)\chi_A(L)(v) = 0\,.$$

Τέλος, αφού αυτό ισχύει για κάθε $v \in V$, $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής.

□

Παράδειγμα 3.26 Θεωρούμε τον τελεστή $L(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$. Ο πίνακας του L ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_L(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4\,.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα, ο τελεστής $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής και ο πίνακας $\chi_A(A) = 0$. Πράγματι

$$\chi_A(A) = A^2 - 3A - 4\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Το Θεώρημα Cayley - Hamilton επιτρέπει να απλοποιούμε παραστάσεις με πίνακες, ή να εκφράζουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα ως πολυώνυμο. Αφού $A^2 = 3A + 4\mathbf{I}_2$,

$$\begin{aligned} A^3 &= 3A^2 + 4A = 3(3A + 4\mathbf{I}_2) + 4A = 13A + 12\mathbf{I}_2\,, \\ A^4 &= 13A^2 + 12A = 13(3A + 4\mathbf{I}_2) + 12A = 51A + 52\mathbf{I}_2\,, \text{ κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ δεν είναι μηδέν, το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, και ο A είναι αντιστρέψιμος. Αφού $A^2 - 3A = 4\mathbf{I}_2$, έχουμε $A - 3\mathbf{I}_2 = 4A^{-1}$ και συνεπώς $A^{-1} = \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}\mathbf{I}_2$.

Παράδειγμα 3.27 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

που έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 7$. Από το Θεώρημα Cayley – Hamilton υπολογίζουμε

$$A^3 = 5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3\,,$$

$$
\begin{aligned}
A^4 &= AA^3 = 5A^3 - 8A^2 + 7A \\
&= 5(5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3) - 8A^2 + 7A \\
&= 17A^2 - 33A + 35\mathbf{I}_3\,, \\
A^5 &= 5A^4 - 8A^3 + 7A^2 \\
&= 5(17A^2 - 33A + 35\mathbf{I}_3) - 8(5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3) + 7A^2\,.
\end{aligned}
$$

Με αυτή τη διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε και αρνητικές δυνάμεις ενός πίνακα εάν αυτός είναι αντιστρέψιμος. Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ δεν είναι μηδέν, μπορούμε να εκφράσουμε το A^{-1} ως πολυώνυμο του A: έχουμε $A^2 = A^3A^{-1} = (5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3)A^{-1} = 5A - 8\mathbf{I}_3 + 7A^{-1}$. Άρα

$$
A^{-1} = \frac{1}{7}(A^2 - 5A + 8\mathbf{I}_3)\,.
$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^8 - 17x^6 + 33x^5 - 36x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 7x + 1$. Το διαιρούμε με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$:

$$
p(x) = \chi_A(x)(-x^5 - 5x^4 + x) + 2x^2 + 1\,.
$$

Αφού $\chi_A(A) = 0$, έχουμε $p(A) = 2A^2 + \mathbf{I}_3$, δηλαδή

$$
p(A) = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 8 & 11 & 2 \\ 6 & 18 & 5 \end{bmatrix}.
$$

3.14 Ασκήσεις

Άσκηση 3.16 Δίδεται γραμμικός τελεστής $L : V \to V$, και X, Y γραμμικοί υπόχωροι του V αναλλοίωτοι από τον L. Να εξετάσετε εάν οι γραμμικοί υπόχωροι $X + Y$ και $X \cap Y$ είναι αναλλοίωτοι.

Άσκηση 3.17 Αποδείξτε οτι μία γραμμική απεικόνιση $L : V \to V$ είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν το μηδέν δεν είναι ιδιότιμη της L.

Άσκηση 3.18 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $u \mapsto Au$, όπου

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

1. στο $\mathbb{R}^3$
2. στο $\mathbb{C}^3$

Άσκηση 3.19 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή shift στο $\mathbb{R}^\infty$,

$$s(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$$

Άσκηση 3.20 Δίδονται οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και

$$A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 7 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 13 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

1. Για κάθε πίνακα, βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές.

2. Για κάθε ιδιοτιμή, βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα, και τον ιδιόχωρο.

3. Εάν χρειάζεται συμπληρώσετε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων, ώστε να κατασκευάσετε μία βάση του $\mathbb{R}^3$, και βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης $x \mapsto A_i x$ ως προς αυτήν τη βάση.

Άσκηση 3.21 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών, με πεπερασμένη διάσταση, γραμμική απεικόνιση $L : V \to V$, και γραμμικό υπόχωρο X του V, αναλλοίωτο από την L. Δείξτε οτι ο X περιέχει ένα ιδιοδιάνυσμα της L.

Άσκηση 3.22 Έστω L και M δύο γραμμικοί τελεστές στον V, οι οποίοι αντιμετατίθενται: $L \circ M = M \circ L$. Δείξτε οτι τότε κάθε ιδιοχώρος του M είναι αναλλοίωτος από τον L.
Συμπεράνετε οτι οι L και M έχουν ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα.

Άσκηση 3.23 Βρείτε τις ιδιοτιμές ενός άνω τριγωνικού $n \times n$ πίνακα.

Άσκηση 3.24 Θεωρούμε τον 3×3 άνω τριγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τα ιδιοδιανυσματικά του τελεστή $T_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. λ_1, λ_2, λ_3 είναι ανα δύο διαφορετικοί.
2. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_3$.
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Άσκηση 3.25 Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Έχει ο τελεστής $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ιδιοτιμές; Συγκρίνετε αυτόν τον τελεστή με τον αντίστοιχο $T_A : \mathbb{C}^2 \to C^2$.

Άσκηση 3.26 Δείξτε οτι, αν ο τετραγωνικός πίνακας A με πραγματικούς συντελεστές, ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$ αυτός δεν επιδέχεται πραγματικές ιδιοτιμές. Συμπεράνετε οτι δεν υπάρχει 3×3 πίνακας με πραγματικούς συντελεστές ο οποίος να ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$.

Άσκηση 3.27 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

1. Δείξτε οτι $A^3 - aA^2 + 2A - I = 0$.
2. Δείξτε οτι ο A είναι αντιστρέψιμος και συμπεράνετε από το α΄ τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}.
3. Υπολογίστε τον πίνακα $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I$.

Άσκηση 3.28 Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, του οποίου ο πίνακας ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Διαγωνιοποιήστε τον τελεστή L.
2. Βρείτε τον πίνακα ως προς την κανονική βάση, του τελεστή $L^6 - 8L^4 + L^3 - 9L + I$.

Άσκηση 3.29 Δίδεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ και οι ακολουθίες u_n και v_n οι οποίες ορίζονται αναδρομικά:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

1. Εξετάστε εάν είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος
2. Υπολογίστε τα u_n και v_n ως συναρτήσεις του n.
3. Βρείτε ακολουθία w_n τέτοια ώστε $w_1 = 1$, $w_2 = 4$ και $w_{n+2} - 15w_{n+1} + 50w_n = 0$.

Άσκηση 3.30 Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

και διαγωνιοποιήστε τον A.

Άσκηση 3.31 Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται **μηδενοδύναμος** εάν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $A^k = 0$. Δείξτε οτι εάν $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή ενός μηδενοδύναμου πίνακα, τότε $\lambda = 0$. Συμπεράνετε οτι $k \leq n$.

Κεφάλαιο 4

Νέοι Διανυσματικοί Χώροι

Το κύριο χαρακτηριστικό της Γραμμικής Άλγεβρας είναι η δυνατότητα να ενοποιεί σε μία θεωρία πολλά διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα. Ήδη έχουμε δει παραδείγματα διανυσματικών χώρων στη Γεωμετρία, στη θεωρία των πολυωνύμων, των πινάκων, των συναρτήσεων πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, και άλλα. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα διευρύνουμε περισσότερο το πεδίο της Γραμμικής Άλγεβρας και θα εξετάσουμε διανυσματικούς χώρους πάνω από πιο γενικά σύνολα αριθμών. Επίσης θα μελετήσουμε διαδικασίες με τις οποίες κατασκευάζουμε νέους διανυσματικούς χώρους.

4.1 Αλγεβρικά σώματα

Ποιές ιδιότητες των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιήσαμε για να αναπτύξουμε τη θεωρία των διανυσματικών χώρων μέχρι τώρα; Χρειάζεται να μπορούμε να προσθέτουμε και να αφαιρούμε τους συντελεστές σε ένα γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων, να τους πολλαπλασιάζουμε, και να μπορούμε να τους διαιρούμε με ένα μη μηδενικό αριθμό[1]. Υπάρχουν άλλα σύνολα αριθμών, εκτός από τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς, που έχουν αυτές τις ιδιότητες;

Στο σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$, ορίζονται οι πράξεις και έχουν όλες τις ιδιότητες που χρησιμοποιήσαμε. Μπορούμε, για παράδειγμα, να εφαρμόσουμε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss σε έναν πίνακα με ρητούς αριθμούς, και το αποτέλεσμα θα είναι πίνακας με ρητούς αριθμούς.

Αυτό δεν ισχύει στο σύνολο των ακεραίων αριθμών, $\mathbb{Z}$. Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με οποιονδήποτε μη μηδενικό ακέραιο και να παραμείνουμε στο σύνολο των ακεραίων.

Ένα σύνολο με δύο πράξεις που έχουν τις βασικές ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που χρειαζόμαστε στη μελέτη διανυσματικών χώρων, είναι ένα *αλγεβρικό σώμα*

[1] Η μόνη περίπτωση που χρησιμοποιήσαμε άλλες ιδιότητες των αριθμών, ήταν στην εύρεση των ιδιοτιμών ενός γραμμικού τελεστή, που χρειάστηκε να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου

Ορισμός 4.1. Ένα **αλγεβρικό σώμα** είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$ στο οποίο ορίζονται δύο διμελείς πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε **πρόσθεση** και **πολλαπλασιασμό**,

$$(a, b) \mapsto a + b \quad \text{και} \quad (a, b) \mapsto ab$$

και οι οποίες ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα.

ΑΣ1. Η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b, c \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc)$$

ΑΣ2. Η αντιμεταθετική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$a + b = b + a \quad , \quad ab = ba$$

ΑΣ3. Η επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b, c \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$a(b + c) = ab + ac$$

ΑΣ4. Υπάρχουν στοιχεία $0 \in \mathbb{K}$ και $1 \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε για κάθε $a \in \mathbb{K}$,

$$a + 0 = a \quad \text{και} \quad a1 = a$$

ΑΣ5. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $a + b = 0$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται $-a$ και ονομάζεται *αντίθετο* του a.

ΑΣ6. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $ab = 1$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται a^{-1} και ονομάζεται *αντίστροφο* του a.

Παράδειγμα 4.1 Οι ρητοί αριθμοί, $\mathbb{Q}$, οι πραγματικοί αριθμοί, $\mathbb{R}$, και οι μιγαδικοί αριθμοί, $\mathbb{C}$, με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελούν αλγεβρικά σώματα. Οι ακέραιοι αριθμοί, $\mathbb{Z}$, δεν αποτελούν σώμα καθώς δεν ικανοποιείται το αξίωμα (ΑΣ6).

Παράδειγμα 4.2 Το σύνολο $\mathbb{Z}_3$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 3 με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό modulo 3 (δες Θεμέλια των Μαθηματικών, Κεφάλαιο 2), αποτελεί ένα σώμα. Τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_3$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης ισοτιμίας modulo 3 στο $\mathbb{Z}$:

$$m \equiv_3 n \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad m - n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3\,.$$

Θα συμβολίσουμε n_3 την κλάση υπολοίπων του n. Αυτή η σχέση διαμερίζει το σύνολο των ακεραίων σε 3 κλάσεις, 0_3, 1_3, 2_3. Ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathbb{Z}_3$ ως εξής:

$$\begin{aligned} m_3 + n_3 &= (m+n)_3 && (4.1)\\ m_3 n_3 &= (mn)_3 && (4.2) \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, $1_3 + 2_3 = 3_3 = 0_3$, $2_3 2_3 = 4_3 = 1_3$.

Γενικότερα, για κάθε πρώτο αριθμό p, το σύνολο $\mathbb{Z}_p$ των κλάσεων υπολοίπων modulo p αποτελεί ένα σώμα.

> **Δραστηριότητα 4.1** Εξετάστε εάν το στοιχείο 3_6 στο σύνολο $\mathbb{Z}_6$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 6, έχει αντίστροφο. Είναι το $\mathbb{Z}_6$ αλγεβρικό σώμα;

Παράδειγμα 4.3 Το σύνολο των ρητών αριθμών επεκτεταμένο με την τετραγωνική ρίζα του 2, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a,\, b \in \mathbb{Q}\}$, αποτελεί ένα σώμα. Ορίζουμε τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ακριβώς όπως στους πραγματικούς αριθμούς. Το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι κλειστό ως προς αυτές τις πράξεις, και έτσι έχουμε καλά ορισμένες πράξεις στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$$\begin{aligned} (a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) &= (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\\ (a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) &= (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\,. \end{aligned}$$

> **Δραστηριότητα 4.2** Βρείτε το αντίστροφο του $a + b\sqrt{2}$ όταν $b \neq 0$ και δείξτε οτι ανήκει στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα μπορούμε να αποδείξουμε άλλες ιδιότητες που έχει κάθε αλγεβρικό σώμα, όπως

1. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $0a = a0 = 0$.
2. Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{K}$ ισχύει $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

Μία σημαντική ιδιότητα που απορρέει από τα αξιώματα ενός σώματος, και συνεπώς ισχύει σε κάθε σώμα, ενώ μπορεί να μην ισχύει σε άλλες αλγεβρικές δομές, είναι η *ιδιότητα της διαγραφής*.

Λήμμα 4.1 *Σε ένα σώμα $\mathbb{K}$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Εάν $a,\, b \in \mathbb{K}$ και $ab = 0$, τότε είτε $a = 0$ είτε $b = 0$.*
2. *Εάν $a,\, b,\, c \in \mathbb{K}$ και $c \neq 0$, τότε $ac = bc$ συνεπάγεται $a = b$.*

Απόδειξη. α′. Έστω $ab = 0$ και $a \neq 0$. Τότε, από τα αξιώματα (ΑΣ6) και (ΑΣ1), έχουμε $a^{-1}(ab) = (aa^{-1})b = 1b = b$. Αλλά αφού $ab = 0$, έχουμε $a^{-1}(ab) = a0 = 0$. Άρα $b = 0$.
β′. Εάν $ac = bc$ τότε $ac + (-b)c = 0$, άρα $(a + (-b))c = 0$. Αφού $c \neq 0$, από το α′ έχουμε $a + (-b) = 0$, συνεπώς $a = b$.

□

Αλγεβρικά σώματα θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά στο μάθημα "Άλγεβρα Ι".

4.2 Αξιώματα Διανυσματικού Χώρου

Θα ορίσουμε ένα διανυσματικό χώρο πάνω από ένα αλγεβρικό σώμα, ως ένα σύνολο με δύο πράξεις, που ικανοποιούν τα κατάλληλα αξιώματα.

Ορισμός 4.2. Θεωρούμε ένα αλγεβρικό σώμα $\mathbb{K}$ και ένα σύνολο V με δύο πράξεις, την πρόσθεση διανυσμάτων,

$$\alpha : V \times V \longrightarrow V \qquad \alpha(v, w) = v \dotplus w$$

και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό από το σώμα $\mathbb{K}$,

$$\mu : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \qquad \mu(a, v) = a \cdot v\,.$$

Το σύνολο V με τις πράξεις α και μ, ονομάζεται **διανυσματικός χώρος πάνω από το** $\mathbb{K}$ εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα.

ΔΧ1. Για κάθε $v, w \in V$, $\quad v \dotplus w = w \dotplus v$.

ΔΧ2. Για κάθε $v, w, u \in V$, $\quad (v \dotplus w) \dotplus u = v \dotplus (w \dotplus u)$.

ΔΧ3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in V$, $\quad v \dotplus \bar{0} = v$.

ΔΧ4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $u \dotplus w = \bar{0}$.

ΔΧ5. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v \in V$, $\quad a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.

ΔΧ6. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $1 \cdot v = v$.

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και $v, w \in V$, $\quad a \cdot (v \dotplus w) = a \cdot v \dotplus a \cdot w$.

ΔΧ8. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v, \in V$, $\quad (a + b) \cdot v = a \cdot v \dotplus b \cdot v$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

Παρατήρηση: Στη διατύπωση των αξιωμάτων χρησιμοποιούμε το σύμβολο $+$ για την πρόσθεση στο σώμα των αριθμών, και το σύμβολο $\dotplus$ για την πρόσθεση διανυσμάτων. Αργότερα δεν θα κάνουμε αυτή τη διάκριση, καθώς θα είναι σαφές από τα συμφραζόμενα σε ποιά πράξη αναφερόμαστε. Επίσης, εάν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο 0 είτε για τον αριθμό μηδέν στο σώμα, είτε για το μηδενικό διάνυσμα.

4.3 Πρώτα αποτελέσματα από τα αξιώματα.

Το μηδενικό διάνυσμα ενός χώρου είναι μοναδικό, όπως βλέπουμε εάν υποθέσουμε οτι $\tilde{0}$ είναι ένα στοιχείο με την ιδιότητα (ΔΧ3). Τότε $\tilde{0} = \bar{0} \dotplus \tilde{0} = \bar{0}$.

Λήμμα 4.2 *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, με πράξεις $\dot{+}$ και $\cdot$.*

1. *Το γινόμενο ενός αριθμού $a \in \mathbb{K}$, και ενός διανύσματος $v \in V$, είναι το μηδενικό διάνυσμα εάν και μόνον εάν $a = 0$ ή $v = 0$.*

   Πιο αναλυτικά, για κάθε $v \in V$, $0 \cdot v = \bar{0}$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$, και αντίστροφα, για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και για κάθε $v \in V$, εάν $a \cdot v = \bar{0}$, τότε είτε $a = 0$ ή $v = \bar{0}$.

2. *Το αντίθετο ενός διανύσματος $v \in V$ είναι μοναδικό, και ίσο με $(-1) \cdot v$.*

Απόδειξη. Για το 1, θεωρούμε ένα διάνυσμα $v \in V$, και τον αριθμό μηδέν, $0 \in \mathbb{K}$. Θα δείξουμε οτι $0 \cdot v = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0+0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v \end{aligned}$$

Έστω w ένα αντίθετο του διανύσματος $0 \cdot v$, δηλαδή $0 \cdot v \dot{+} w = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \cdot v \dot{+} w \\ &= (0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v) \dot{+} w \\ &= 0 \cdot v \dot{+} (0 \cdot v \dot{+} w) \\ &= 0 \cdot v \dot{+} \bar{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

Θεωρούμε έναν αριθμό $a \in \mathbb{K}$, και το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0} \in V$. Θα δείξουμε οτι $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{0} &= a \cdot (\bar{0} \dot{+} \bar{0}) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Έστω u ένα αντίθετο του διανύσματος $a \cdot \bar{0}$, δηλαδή $a \cdot \bar{0} + u = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= a \cdot \bar{0} \dot{+} u \\ &= (a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0}) \dot{+} u \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} (a \cdot \bar{0} \dot{+} u) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} \bar{0} \\ &= a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Αντίστροφα, εάν $a \neq 0$ και $a \cdot v = \bar{0}$, τότε

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1} a) \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}\,.$$

Για το 2, υποθέτουμε οτι w και w' είναι αντίθετα του $v \in V$, και θα δείξουμε οτι $w = w'$. Έχουμε οτι $v \dotplus w = \bar{0} = v \dotplus w'$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} w &= w \dotplus \bar{0} \\ &= w \dotplus (v \dotplus w') \\ &= (w \dotplus v) \dotplus w' \\ &= (v \dotplus w) \dotplus w' \\ &= \bar{0} \dotplus w' \\ &= w' \dotplus \bar{0} \\ &= w' \end{aligned}$$

Τώρα δείχνουμε οτι το γινόμενο $(-1) \cdot v$ είναι αντίθετο του v:

$$\begin{aligned} v \dotplus ((-1) \cdot v) &= (1 \cdot v) \dotplus ((-1) \cdot v) \\ &= (1 + (-1)) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Το μοναδικό αντίθετο του v συμβολίζουμε $-v$.

□

4.4 Παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Στην ''Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα'' έχουμε δει πολλά παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς. Αντίστοιχους διανυσματικούς χώρους μπορούμε να ορίσουμε πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς.

1. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$, των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών.

2. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, των ακολουθιών με όρους πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς, και τους διανυσματικούς υποχώρους αυτών, όπως το χώρο των φραγμένων ακολουθιών, ή των συγκλινουσών ακολουθιών.

3. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}[x]$ και $\mathbb{C}[x]$, των πολυωνύμων μίας μεταβλητής με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές, όπως και τους υποχώρους $\mathbb{R}_k[x]$ και $\mathbb{C}_k[x]$ των πολυωνύμων βαθμού ίσου ή μικρότερου από k.

4. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^X$ και $\mathbb{C}^X$, των συναρτήσεων από ένα σύνολο X στους πραγματικούς ή τους μιγαδικούς αριθμούς.

5. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ και $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{C})$, των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία στους πραγματικούς ή τους μιγαδικούς αριθμούς.

Αυτά τα παραδείγματα εύκολα γενικεύονται σε διανυσματικούς χώρους πάνω από άλλο αλγεβρικό σώμα.

Παράδειγμα 4.4 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{Z}_3^n$, των διατεταγμένων n-άδων στοιχείων του $\mathbb{Z}_3$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{Z}_3$. Για παράδειγμα, ο χώρος $\mathbb{Z}_3^2$ αποτελείται από τα 9 διατεταγμένα ζεύγη (m_3, k_3).

Το σύνολο των σημείων (m_3, k_3) του $\mathbb{Z}_3^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $m_3 + k_3 = 0_3$ είναι $\{(0_3, 0_3), (1_3, 2_3), (2_3, 1_3)\}$. Αυτά τα τρία σημεία αποτελούν έναν υπόχωρο του $\mathbb{Z}_3^2$, μία ''ευθεία'' στο ''επίπεδο'' $\mathbb{Z}_3^2$.

Το σύνολο $\{(1_3, 2_3), (2_3, 1_3)\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, αφού $(2_3, 1_3) = 2_3(1_3, 2_3)$.

Το σύνολο $\{(0_3, 2_3), (1_3, 1_3)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αφού μπορούμε να ελέγξουμε οτι κανένα από τα πολλαπλάσια του $(1_3, 1_3)$ με στοιχεία του $\mathbb{Z}_3$ δεν είναι ίσο με το $(0_3, 2_3)$.

Παράδειγμα 4.5 Μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$, με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης δύο πραγματικών αριθμών και του πολλαπλασιασμού ενός πραγματικού αριθμού με ένα ρητό. Θα χρησιμοποιήσουμε τα γράμματα x, y για τα στοχεία του $\mathbb{R}$, που τα θεωρούμε τα διανύσματα, και τα γράμματα p, q για τα στοιχεία του $\mathbb{Q}$ όταν τα θεωρούμε τους αριθμούς.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο όλων των πολλαπλασίων του x με ένα ρητό αριθμό, αποτελεί έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}$, $U = \{px : p \in \mathbb{Q}\}$. Εάν $x \neq 0$, τότε ο υπόχωρος U έχει διάσταση 1.

Εάν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και x/y δεν είναι ρητός, το σύνολο $V = \{px + qy : p, q \in \mathbb{Q}\}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$, διάστασης 2. Τα x και y είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$, αφού δεν υπάρχουν p και q, όχι και τα δύο ίσα με το μηδέν, τέτοια ώστε $px + qy = 0$.

Παράδειγμα 4.6 Όπως το $\mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 1 πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών, το $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 1 πάνω από το σώμα των μιγαδικών. Όμως μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών, με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης δύο μιγαδικών αριθμών και του πολλαπλασιασμού ενός μιγαδικού αριθμού με έναν πραγματικό.

4.5 Γραμμικές απεικονίσεις

Η έννοια της γραμμικής απεικόνισης γενικεύεται σε Η έννοια της γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από το σώμα πάνω από το οποίο είναι ορισμένος ένας διανυσματικός χώρος: για να είναι η $L : V \longrightarrow W$ γραμμική, πρέπει να ισχύει $L(av) = aL(v)$ *για κάθε* $a \in \mathbb{K}$. Εάν θεωρήσουμε ένα σώμα $\mathbb{K}'$ που περιέχει το $\mathbb{K}$, αυξάνονται οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι μία απεικόνιση γραμμική.

Παράδειγμα 4.7 Η απεικόνιση $z \mapsto \bar{z}$ είναι γραμμική απεικόνιση εάν θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς: $\overline{az} = a\bar{z}$ όταν a είναι πραγματικός αριθμός. Αλλά εάν $\operatorname{Im} a \neq 0$, τότε $\overline{az} \neq a\bar{z}$. Συνεπώς η απεικόνιση δεν είναι γραμμική εάν θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς.

4.6 Εικόνα και αντίστροφη εικόνα. Αριστερό και δεξιό αντίστροφο.

Πρόταση 4.3 *Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A, και την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

1. *Εάν V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε η εικόνα του V μέσω της απεικόνισης T_A, $T_A(V) = \{T_A(v) \mid v \in V\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.*

2. *Εάν W είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, τότε η αντίστροφη εικόνα του W μέσω της απεικόνισης T_A, $T_A^{-1}(W) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T_A(v) \in W\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το 1, θεωρούμε w_1, $w_2 \in T_A(V)$ και $c \in \mathbb{R}$, και πρέπει να δείξουμε οτι $w_1 + w_2$ και $cw_1 \in T_A(V)$. Εφόσον $w_1 \in T_A(V)$, υπάρχει $v_1 \in V$ τέτοιο ώστε $T_A(v_1) = w_1$, και ανάλογα για το w_2. Εφόσον V είναι διανυσματικός υπόχωρος, $v_1 + v_2 \in V$ και $T_A(v_1 + v_2) = T_A(v_1) + T_A(v_2) = w_1 + w_2$, άρα $w_1 + w_2 \in T_A(V)$. Παρόμοια $cv_1 \in V$ και $T_A(cv_1) = cT_A(v_1) = cw_1$. Αρα $cw_1 \in T_A(V)$.

Για το 2, θεωρούμε v_1, $v_2 \in T_A^{-1}(W)$ και $c \in \mathbb{R}$, και πρέπει να δείξουμε οτι $v_1 + v_2$ και $cv_1 \in T_A^{-1}(W)$. Υπάρχουν $w_1 \in W$ τέτοιο ώστε $T_A(v_1) = w_1$, και ανάλογα για το w_2. Αλλά τότε $T_A(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 \in W$, και $T_A(cv_1) = cw_1 \in W$, άρα $v_1 + v_2$ και cv_1 ανήκουν στο $T_A^{-1}(W)$.

□

Το επόμενο ερώτημα που θέλουμε να εξετάσουμε είναι υπό ποίες συνθήκες είναι η απεικόνιση T_A ενεικονική, επεικονική ή αμφιμονοσήμαντη.

Η T_A είναι ενεικονική εάν για κάθε v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^n$, η υπόθεση $T_A(v_1) = T_A(v_2)$ συνεπάγεται οτι $v_1 = v_2$. Αυτό ισχύει εάν και μόνον εάν ισχύει η συνεπαγωγή $Av_1 = Av_2 \Rightarrow v_1 = v_2$, ή ισοδύναμα εάν $A(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0$. Δηλαδή η T_A είναι ενεικονική, εάν και μόνον εάν, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, δηλαδή εάν και μόνον εάν η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = 0$ είναι η τετριμμένη, $x = 0$. Αλλά γνωρίζουμε οτι η ομογενής εξίσωση έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, ακριβώς όταν δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, δηλαδή όταν η τάξη του πίνακα είναι $r = n$.

Η T_A είναι επεικονική εάν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$, υπάρχει $v \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $T_A(v) = b$, δηλαδή όταν η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. Αυτό ισχύει ακριβώς όταν ο χώρος στηλών του A είναι όλος ο $\mathbb{R}^m$, δηλαδή όταν η τάξη του πίνακα είναι $r = m$.

Εχουμε αποδείξει την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 4.4 *Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε η απεικόνιση T_A είναι*

1. *ενεικονική, εάν και μόνον εάν $r = n$, δηλαδή όταν $\mathcal{N}(A) = \{0\}$,*
2. *επεικονική, εάν και μόνον εάν $r = m$, δηλαδή όταν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$, και*
3. *αμφιμονοσήμαντη εάν και μόνον εάν $r = m = n$.*

□

Μία απεικόνιση $f : N \to M$ έχει **αριστερό αντίστροφο** $g : M \to N$, τέτοιο ώστε $g \circ f = \mathbf{I}_N$, εάν και μόνον εάν η f είναι ενεικονική, και έχει **δεξιό αντίστροφο** $h : M \to N$, τέτοιο ώστε $f \circ h = \mathbf{I}_M$, εάν και μόνον εάν η f είναι επεικονική, (δες σημειώσεις του μαθήματος Θεμέλια των Μαθηματικών).

Ορισμός 4.3. Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας,

1. ο $n \times m$ πίνακας B είναι **αριστερός αντίστροφος** του A, εάν $BA = I_n$.
2. ο $n \times m$ πίνακας C είναι **δεξιός αντίστροφος** του A, εάν $AC = I_m$.

Πρόταση 4.5 *Ο $m \times n$ πίνακας A, έχει*

1. *αριστερό αντίστροφο εάν και μόνον εάν η τάξη $r = n \leq m$.*
2. *δεξιό αντίστροφο εάν και μόνον εάν η τάξη $r = m \leq n$.*

Απόδειξη. Πολλαπλασιασμός με τον αριστερό ή το δεξιό αντίστροφο πίνακα, ορίζει το αριστερό ή το δεξιό αντίστροφο της συνάρτησης T_A, αντίστοιχα. Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε οτι η συνθήκη $r = n$ ή $r = m$ είναι αναγκαία. Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη βρίσκοντας συγκεκριμένο αριστερό ή δεξιό αντίστροφο όταν ικανοποιείται η αντίστοιχη συνθήκη.

Εάν η τάξη του $m \times n$ πίνακα A είναι $r = n$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και από το Λήμμα 1.7, το ίδιο ισχύει για τις στήλες του τετραγωνικού πίνακα $A^T A$. Άρα ο $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος. Θέτουμε $B = (A^T A)^{-1} A^T$, και έχουμε $BA = \left[(A^T A)^{-1} A^T\right] A = (A^T A)^{-1}(A^T A) = I_n$.

Είναι φανερό οτι εάν η τάξη του A είναι $r = m$, τότε η τάξη του A^T είναι ίση με τον αριθμό των στηλών του, και από το Λήμμα, ο πίνακας $(A^T)^T A^T = AA^T$ είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε $C = A^T(AA^T)^{-1}$, και έχουμε $AC = A\left[A^T(AA^T)^{-1}\right] = (AA^T)(AA^T)^{-1} = I_m$. □

Στην περίπτωση ενός τετραγωνικού πίνακα A, $m = n$, και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η τάξη του πίνακα είναι $r = n$.

2. Ο πίνακας A έχει αριστερό αντίστροφο.

3. Ο πίνακας A έχει δεξιό αντίστροφο.

4. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

4.7 Ασκήσεις

Άσκηση 4.1 Εάν $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$, βρείτε (μία βάση για) τους διανυσματικούς υπόχωρους $T_A(V)$ και $T_A^{-1}(V)$, για τον πίνακα

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Άσκηση 4.2 Ελέγξτε εάν οι παρακάτω πίνακες έχουν αριστερό ή δεξιό αντίστροφο, και υπολογίστε το

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4.3 Υποθέστε οτι αναζητούμε τον δεξιό αντίστροφο του πίνακα A. Τότε $AB = I$ οδηγεί στην $A^TAB = A^T$ ή $B = (A^TA)^{-1}A^T$. Ο B όμως ικανοποιεί την $BA = I$ και είναι αριστερός αντίστροφος. Ποιό βήμα είναι λάθος στον παραπάνω συλλογισμό;

Άσκηση 4.4 Δείξτε οτι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\begin{aligned}
\varphi(1,\,1,\,\ 1) &= (1,\,0,\,1)\\
\varphi(0,\,1,\,-1) &= (2,\,1,\,3)\\
\varphi(1,\,2,\,1) &= (1,\,1,\,2)\,.
\end{aligned}$$

1. Βρείτε τον πίνακα A της παραπάνω απεικόνισης.
2. Δείξτε οτι η εικόνα $\varphi(\mathbb{R}^3)$ της φ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
3. Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$ μέσω της απεικόνισης φ.
4. Βρείτε έναν υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 με την ιδιότητα $\varphi(V) = \varphi(\mathbb{R}^3)$.
5. Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $\varphi(v) = (6,\,-1,\,5)$.
6. Βρείτε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 με την ιδιότητα ο $\varphi(W)$ να είναι η ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από το διάνυσμα $(6,\,-1,\,5)$.

Άσκηση 4.5 Έστω $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Δείξτε οτι η απεικόνιση είναι επεικονική.
2. Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $T_A(v) = (-2,\,5)$.
3. Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$ μέσω της απεικόνισης T_A.
4. Βρείτε μονόπλευρο αντίστροφο (αριστερό ή δεξιό;) της γραμμικής απεικόνισης T_A.

4.8 Ευθύ Αθροισμα

Στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα είδαμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V που παράγεται από την ένωση δύο γραμμικών υποχώρων X και Y, είναι το σύνολο όλων των αθροισμάτων ενός διανύσματος στο X και ενός διανύσματος στο Y. Αυτό το γραμμικό υπόχωρο ονομάσαμε *άθροισμα* των X και Y, και τον συμβολίσαμε

$$X + Y = \{x + y : x \in X,\, y \in Y\}\,.$$

Μία περίπτωση αθροίσματος δύο υποχώρων που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι όταν η τομή των X και Y είναι τετριμμένη. Εάν $X \cap Y = \{0\}$, τότε κάθε διάνυσμα $u \in X + Y$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα διανυσμάτων του X και του Y: εάν $x,\, x' \in X$, $y,\, y' \in Y$ και $x + y = x' + y'$, τότε $x = x'$ και $y = y'$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζουμε το διανυσματικό χώρο $X+Y$ *(εσωτερικό) ευθύ άθροισμα* των X και Y, και το συμβολίζουμε $X \oplus Y$.

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε μία πιο γενική κατασκευή ευθέως αθροίσματος. Ξεκινάμε με δύο διανυσματικούς χώρους V και W, πάνω από το ίδιο σώμα $\mathbb{K}$, και ορίζουμε δομή διανυσματικού χώρου στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W$. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε ένα νέο διανυσματικό χώρο, που περιέχει γραμμικούς υπόχωρους V' και W', ισομορφικούς με τους V και W, και με την ιδιότητα $V' \cap W' = \{0\}$.

Αυτό το νέο διανυσματικό χώρο τον ονομάζουμε *(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα* των V και W, και τον συμβολίζουμε $V \oplus W$. Η χρήση του ίδιου ονόματος και του ίδιου συμβολισμού στις δύο διαφορετικές περιπτώσεις είναι δικαιολογημένη γιατί, όπως θα αποδείξομε, το εξωτερικό ευθύ άθροισμα των διανυσματικών χώρων V και W είναι ισομορφικό με το εσωτερικό ευθύ άθροισμα των υποχώρων V' και W',

$$V \oplus W \cong V' + W'\,.$$

Ορισμός 4.4. Θεωρούμε V και W διανυσματικούς χώρους πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W = \{(v,\, w) : v \in V,\, w \in W\}$ ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με στοιχεία του $\mathbb{K}$ ως εξής: για $(v,\, w)$, $(x,\, y) \in V \times W$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$(v,\, w) + (x,\, y) = (v+x,\, w+y) \qquad \text{και} \qquad a\,(v,\, w) = (a\,v,\, a\,w)\,.$$

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $V \times W$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τον οποίο ονομάζουμε **(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα** των V και W, και συμβολίζουμε $V \oplus W$.

Παράδειγμα 4.8 Το ευθύ άθροισμα $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ είναι ο διανυσματικός χώρος που συνήθως συμβολίζουμε $\mathbb{R}^2$. Στοιχεία του είναι τα διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών $(x,\, y)$, και οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα.

Παράδειγμα 4.9 Εάν V και W είναι δύο διαφορετικοί διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, το ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ είναι διαφορετικό από το ευθύ άθροισμα $W \oplus V$. Όμως τα δύο αθροίσματα είναι ισομορφικά:

$$V \oplus W \cong W \oplus V\,.$$

Δραστηριότητα 4.3 Δείξτε οτι η απεικόνιση $(v,\, w) \mapsto (w,\, v)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική, και συνεπώς ορίζει έναν ισομορφισμό $C : V \oplus W \longrightarrow W \oplus V$.

Παράδειγμα 4.10 Εάν U, V και W είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, το ευθύ άθροισμα $(U \oplus V) \oplus W$ και το ευθύ άθροισμα $U \oplus (V \oplus W)$ είναι ισομορφικά:

$$(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)\,.$$

Δραστηριότητα 4.4 Δείξτε οτι η απεικόνιση $((u, v), w)) \mapsto (u, (v, w))$ είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική, και συνεπώς ορίζει έναν ισομορφισμό

$$D : (U \oplus V) \oplus W \longrightarrow U \oplus (V \oplus W)\,.$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να ορίσουμε το ευθύ άθροισμα περισσότερων από δύο διανυσματικών χώρων, $V_1, V_2, \ldots, V_k$, ως

$$\bigoplus_{j=1}^{k} V_j = (\cdots((V_1 \oplus V_2) \oplus V_3) \oplus \cdots) \oplus V_k\,,$$

γνωρίζοντας οτι εάν αλλάξουμε τις παρενθέσεις θα έχουμε έναν ισόμορφο διανυσματικό χώρο.

Παράδειγμα 4.11 Συχνά εξετάζουμε έναν $m \times n$ πίνακα ως ένα σύνολο από n στήλες, κάθε μία από τις οποίες είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{K}^n$. Αυτή η προσέγγιση μας οδηγεί να θεωρήσουμε το διανυσματικό χώρο των $m \times n$ πινάκων, $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ ως ισομορφικό με το ευθύ άθροισμα n διανυσματικών χώρων $\mathbb{K}^m$,

$$\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{K}^m\,.$$

Το ακόλουθο Λήμμα εξηγεί τη σχέση μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού ευθέως αθροίσματος.

Λήμμα 4.6 *Εάν X και Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, και $X \cap Y = \{0\}$, τότε το (εσωτερικό ευθύ) άθροισμα των X και Y είναι ισομορφικό με το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα:*

$$X + Y \cong X \oplus Y\,.$$

Απόδειξη. Εάν $v \in X + Y \subseteq V$, υπάρχουν μοναδικά $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $v = x + y$. Ορίζουμε την απεικόνιση $L : X + Y \longrightarrow X \oplus Y$ με $L(v) = (x, y)$. Από τη μοναδικότητα, η L είναι καλά ορισμένη. Ελέγχουμε οτι είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική. □

Προσέξτε τη διαφορά μεταξύ του ισομορφισμού στο Λήμμα 4.6 και του ισομορφισμού που προκύπτει από την επιλογή μίας βάσης του διανυσματικού χώρου V, $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$, (''Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα'', Θεώρημα Δομής διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης). Ο ισομορφισμός $X + Y \cong X \oplus Y$ δεν βασίζεται σε κάποια επιλογή: τα x και y είναι μοναδικά καθορισμένα από τα δεδομένα του προβλήματος. Λέμε οτι αυτός είναι ένας **κανονικός ισομορφισμός**, ενώ ο ισομορφισμός $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$ δεν είναι κανονικός, αφού εξαρτάται από την επιλογή μίας βάσης του V.

Στο ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ θεωρούμε τους υπόχωρους $V' = V \times \{0\}$ και $W' = \{0\} \times W$. Οι απεικονίσεις $j_1 : V \longrightarrow V'$, $j_1(v) = (v, 0)$, και $j_2 : W \longrightarrow W'$, $j_2(w) = (0, w)$ είναι ισομορφισμοί. Κάθε διάνυσμα στο $V \oplus W$ γράφεται ως άθροισμα ενός διανύσματος στο V'

και ενός διανύσματος στο W': $(v,\, w) = (v,\, 0) + (0,\, w)$. Οι υπόχωροι V' και W' έχουν τετριμμένη τομή: εάν $(v,\, w) \in V' \cap W'$ τότε $(v,\, w) = (0,\, 0)$. Συνεπώς $V \oplus W = V' + W'$.

Λήμμα 4.7 *Εάν $\{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_k\}$ και $\{w_1,\, w_2,\, \ldots,\, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα (παράγοντα σύνολα, βάσεις) στους διανυσματικούς χώρους V και W αντίστοιχα, τότε*

$$\{(v_1,\, 0),\, (v_2,\, 0),\, \ldots,\, (v_k,\, 0),\, (0,\, w_1),\, (0,\, w_2),\, \ldots,\, (0,\, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο (αντίστοιχα, παράγον σύνολο, βάση) του $V \oplus W$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι τα στοιχεία $a_1,\, \ldots,\, a_k,\, b_1,\, \ldots,\, b_m$ του $\mathbb{K}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$a_1(v_1,\, 0) + \cdots + a_k(v_k,\, 0) + b_1(0,\, w_1) + \cdots + b_m(0,\, w_m) = (0,\, 0)\,.$$

Τότε ισχύει $(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k, b_1w_1 + \cdots + b_mw_m) = (0,\, 0)$, και συνεπώς $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0$ και $b_1w_1 + \cdots + b_mw_m = 0$.

Αν $\{v_1,\, \ldots,\, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο V, συμπεραίνουμε οτι $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Αντίστοιχα, αν $\{w_1,\, \ldots,\, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο W, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Δείξαμε οτι

$$\{(v_1,\, 0),\, (v_2,\, 0),\, \ldots,\, (v_k,\, 0),\, (0,\, w_1),\, (0,\, w_2),\, \ldots,\, (0,\, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $V \oplus W$.

Τώρα θεωρούμε στοιχείο $(v,\, w) \in V \oplus W$. Αν $\{v_1,\, \ldots,\, v_k\}$ είναι παράγον σύνολο του V, υπάρχουν $a_1,\, \ldots,\, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$. Αντίστοιχα, αν $\{w_1,\, \ldots,\, w_m\}$ είναι παράγον σύνολο του W, υπάρχουν $b_1,\, \ldots,\, b_m \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $w = b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$. Συμπεραίνουμε οτι

$$(v,\, w) = a_1(v_1,\, 0) + \cdots + a_k(v_k,\, 0) + b_1(0,\, w_1) + \cdots + b_m(0,\, w_m)\,,$$

και συνεπώς

$$\{(v_1,\, 0),\, (v_2,\, 0),\, \ldots,\, (v_k,\, 0),\, (0,\, w_1),\, (0,\, w_2),\, \ldots,\, (0,\, w_m)\}$$

είναι παράγον σύνολο του $V \oplus W$.

□

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 4.8 *Εάν V και W είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε*

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W\,.$$

□

Παράδειγμα 4.12 Εάν X και Y είναι ξένα σύνολα, $X \cap Y = \varnothing$, τότε ο διανυσματικός χώρος των απεικονίσεων από το σύνολο $X \cup Y$ στο $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{X \cup Y}$, είναι ισομορφικός με το ευθύ άθροισμα των διανυσματικών χώρων των απεικονίσεων από το X στο $\mathbb{K}$ και από το Y στο $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^{X\cup Y} \cong \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y .$$

Θα κατασκευάσουμε την απεικόνιση $L : \mathbb{K}^{X\cup Y} \longrightarrow \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y$ και θα δείξουμε οτι είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Θεωρούμε $f \in K^{X\cup Y}$, δηλαδή απεικόνιση $f : X\cup Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Τότε ορίζονται οι απεικονίσεις περιορισμού της f στα υποσύνολα X και Y, $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{K}$ και $f|_Y : Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Ορίζουμε $L(f) = (f|_X,\, f|_Y)$. Η L είναι γραμμική. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} L(f+g) &= ((f+g)|_X,\, (f+g)|_Y) \\ &= (f|_X + g|_X,\, f|_Y + g|_Y) \\ &= (f|_X,\, f|_Y) + (g|_X,\, g|_Y) . \end{aligned}$$

Για να δείξουμε οτι η L είναι ισομορφισμός, ορίζουμε την απεικόνιση $G : \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y \longrightarrow K^{X\cup Y}$, και δείχνουμε οτι είναι αντίστροφη της L. Για $(f_1,\, f_2) \in \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y$, ορίζουμε $G(f_1,\, f_2) = f$, όπου $f : X \cup Y \longrightarrow \mathbb{K}$ ορίζεται ως

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{εάν } t \in X\, , \\ f_2(t) & \text{εάν } t \in Y\, . \end{cases}$$

Προφανώς, $f|_X = f_1$ και $f|_Y = f_2$, άρα $L \circ G(f_1,\, f_2) = (f_1,\, f_2)$. Επίσης $G \circ L(f) = G(f|_X,\, f|_Y) = f$. Άρα G είναι αντίστροφη της L, και L είναι ισομορφισμός.

Παράδειγμα 4.13 Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους V_1 και V_2 με βάσεις $\mathcal{B}_1 = \{v_{11},\, \dots\;\, v_{1k}\}$ και $\mathcal{B}_2 = \{v_{21},\, \dots\;\, v_{2\ell}\}$ αντίστοιχα, και τους διανυσματικούς χώρους W_1 και W_2 με βάσεις $\mathcal{C}_1 = \{w_{11},\, \dots\;\, w_{1m}\}$ και $\mathcal{C}_2 = \{w_{21},\, \dots\;\, w_{2n}\}$ αντίστοιχα.

Εάν $L_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ και $L_2 : V_2 \longrightarrow W_2$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση

$$L_1 \oplus L_2 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$$

η οποία απεικονίζει το διάνυσμα $(u_1,\, u_2) \in V_1 \oplus V_2$ στο διάνυσμα $(L_1(u_1),\, L_2(u_2)) \in W_1 \oplus W_2$.

Εάν A είναι ο πίνακας της L_1 ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{C}_1$, και B είναι ο πίνακας της L_2 ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2$ και $\mathcal{C}_2$, τότε ο πίνακας της απεικόνισης $L_1 \oplus L_2$ ως προς τις βάσεις

$$\{(v_{11},\, 0),\, \dots,\, (v_{1k},\, 0),\, (0,\, v_{21}),\, \dots,\, (0,\, v_{2\ell})\} \quad \text{του } V_1 \oplus V_2 \tag{4.3}$$

και

$$\{(w_{11},\, 0),\, \dots,\, (w_{1m},\, 0),\, (0,\, w_{21}),\, \dots,\, (0,\, w_{2n})\} \quad \text{του } W_1 \oplus W_2 \tag{4.4}$$

είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} .$$

Με το ευθύ άθροισμα δύο διανυσματικών χώρων V και W συνδέονται οι ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:

1. Οι **κανονικές εμφυτεύσεις** του V και του W στο $V \oplus W$,

$$\begin{aligned} j_1 : V &\longrightarrow V \oplus W \ : \ v \mapsto (v,\, 0) \\ j_2 : W &\longrightarrow V \oplus W \ : \ w \mapsto (0,\, w)\,. \end{aligned}$$

2. Οι **κανονικές προβολές** του $V \oplus W$ επί των V και W,

$$\begin{aligned} p_1 : V \oplus W &\longrightarrow V \ : \ (v,\, w) \mapsto v \\ p_2 : V \oplus W &\longrightarrow W \ : \ (v,\, w) \mapsto w\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.14 Θεωρούμε τους χώρους V_1, V_2, W_1 και W_2 του Παραδείγματος 4.13, και τις απεικονίσεις $j_1 : V_1 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$, $j_2 : V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$ και $p_1 : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1$, $p_2 : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_2$.

Εάν $L : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε το πίνακας της L ως προς τις βάσεις 4.3 και 4.4, είναι ο

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix},$$

όπου A είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{11} = p_1 \circ L \circ j_1$, C είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{12} = p_1 \circ L \circ j_2$, D είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{21} = p_2 \circ L \circ j_1$ και B είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{22} = p_2 \circ L \circ j_2$.

4.9 Χώρος πηλίκο

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμικό υπόχωρο X του V. Στο V ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$v \sim w \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad v - w \in X\,.$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης το ονομάζουμε **πηλίκο** του V με το X, και το συμβολίζουμε

$$V/\,X\,.$$

Την κλάση ισοδυναμίας του $v \in V$ ως προς αυτή τη σχέση τη συμβολίζουμε

$$v + X, \quad \text{ή} \quad \tilde{v}\,.$$

Παράδειγμα 4.15 Στο $\mathbb{R}^3$, θεωρούμε τον υπόχωρο $X = \{(t,\, t,\, 2t)\,|\, t \in \mathbb{R}\}$. X είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(0,\, 0,\, 0)$ και $(1,\, 1,\, 2)$. Η κλάση ισοδυναμίας του σημείου $(x,\, y,\, z)$ στο πηλίκο $\mathbb{R}^3/X$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής

$$(x,\, y,\, z) + (t,\, t,\, 2t) \quad t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή είναι η ευθεία που περνάει από το (x, y, z) και είναι παράλληλη προς τον X. Το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}^3/X$ είναι το σύνολο όλων των ευθειών στο $\mathbb{R}^3$ που είναι ίσες ή παράλληλες με την X.

Στο πηλίκο V/X ορίζουμε τις πράξεις, για $v + X,\, y + X \in V/X,\, a \in \mathbb{K}$.

$$(v + X) + (w + X) = (v + w) + X$$

$$a\,(v + X) = a\,v + X\,.$$

Λήμμα 4.9 *Με αυτές τις πράξεις V/X είναι διανυσματικός χώρος πάνω απο το $\mathbb{K}$.*

Ο διανυσματικός χώρος V/X ονομάζεται **χώρος πηλίκο** του $V \bmod X$.

Απόδειξη. Μηδέν είναι η κλάση του $X = 0+X$ και το αντίθετο του $v+X$ είναι $-(v+X) = (-v) + X$. Εύκολα ελέγχουμε τα υπόλοιπα αξιώματα.

□

Ορίζεται κανονική *επεικόνιση* $P : V \to V/X$, με $v \mapsto v + X$, η οποία είναι γραμμική: εάν $u,\, v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} P(au + v) &= (au + v) + X \\ &= a(u + X) + (v + X) \\ &= aP(u) + P(v)\,. \end{aligned}$$

Θεώρημα 4.10 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης και υπόχωρο X του V. Εάν $\{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι βάση του X, και $\{x_1, \ldots, x_k, v_1, \ldots, v_m\}$ βάση του V, τότε $\{v_1 + X, \ldots, v_m + X\}$ αποτελεί βάση του V/X, και συνεπώς*

$$\dim(V/X) = \dim V - \dim X\,.$$

Απόδειξη. Εστω $v \in V$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k$ και $b_1, \ldots, b_m$ τέτοια ώστε $v = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + b_1v_1 + \cdots + b_mv_m$. Τότε $v - (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) \in X$, άρα

$$\begin{aligned} v + X &= (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) + X \\ &= b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) \end{aligned}$$

άρα $\{v_1 + X, \cdots, v_m + X\}$ παράγουν το V/X.

Έστω $b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) = 0$. Τότε $b_1v_1 + \cdots + b_mv_m \in X$, άρα υπάρχουν $a_1, \cdots, a_k$ τέτοια ώστε $b_1v_1+\cdots+b_mv_m = a_1x_1+\cdots+a_kx_k$. Αλλά απο γραμμική ανεξαρτησία των $\{x_1, \cdots, x_k, v_1, \cdots, v_m\}$ έχουμε $a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_m = 0$. Άρα το σύνολο $\{v_1 + X, \cdots, v_m + X\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και αποτελεί βάση του V/X.

□

Παράδειγμα 4.16 Θεωρούμε το 'πολύεδρο' του σχήματος, με μία έδρα σ, πέντε ακμές $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ και τέσσερεις κορυφές A, B, C, D.

Ορίζουμε τους διανυσματικούς χώρους

$$C_0 = \{a_1 A + a_2 B + a_3 C + a_4 D \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$C_1 = \{b_1 \alpha + b_2 \beta + \cdots + b_5 \varepsilon \,|\, b_i \in \mathbb{R}\}$$

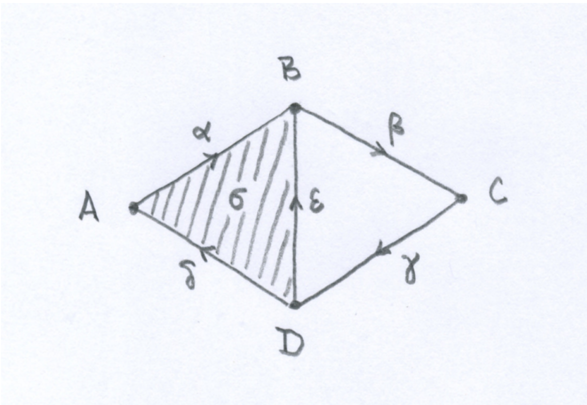
$$C_2 = \{s\sigma \,|\, s \in \mathbb{R}\}\,.$$

και τις γραμμικές απεικονίσεις

$$\partial_2 \,:\, C_2 \to C_1, \qquad \partial_1 \,:\, C_1 \to C_0$$

με $\partial_2(\sigma) = \alpha + \delta - \varepsilon$ και

$$\begin{aligned} &\partial_1(b_1\alpha + \cdots + b_5\varepsilon) = \\ &= \ b_1(B-A) + b_2(C-B) + b_3(D-C) + b_4(A-D) + b_5(B-D) \\ &= \ (b_4 - b_1)A + (b_1 - b_2 + b_5)B + (b_2 - b_3)C + (b_3 - b_4 - b_5)D\,. \end{aligned}$$



Σχήμα 4.1: Ένα ‘‘πολύεδρο’’.

Λήμμα 4.11 (Λήμμα Poincaré)

$$\partial_1\partial_2 = 0\,.$$

Απόδειξη. $\partial_1\partial_2(\sigma) = \partial_1(\alpha + \delta - \varepsilon) = (B - A) + (A - D) + (B - D) = 0.$ □

Συνεπώς $\operatorname{im}\partial_2 \subseteq \ker\partial_1$ και ορίζεται ο διανυσματικός χώρος πηλίκο

$$H_1 = \ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2\,.$$

Θα προσδιορίσουμε μία βάση του H_1. Πρώτα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που ορίζουν το $\ker\partial_1$, και βρίσκουμε οτι τα διανύσματα $\beta + \gamma + \varepsilon$ και $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ αποτελούν μία βάση του χώρου $\ker\partial_1$. Το διάνυσμα $\alpha + \delta - \varepsilon$ αποτελεί μία βάση του $\operatorname{im}\partial_2$. Από το Θεώρημα

4.10, για να προσδιορίσουμε μία βάση του πηλίκου $\ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2$, πρέπει να βρούμε μία βάση του $\ker\partial_1$ η οποία να περιέχει το διάνυσμα $\alpha+\delta-\varepsilon$ της βάσης του $\operatorname{im}\partial_2$. Παρατηρούμε οτι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\delta-\varepsilon)+(\beta+\gamma+\varepsilon)$ και συνεπώς $\{\alpha+\delta-\varepsilon,\ \beta+\gamma+\varepsilon\}$ είναι βάση του $\ker\partial_1$. Συμπεραίνουμε οτι το διάνυσμα $(\beta+\gamma+\varepsilon)+\operatorname{im}\partial_2$ αποτελεί βάση του H_1.

Η διάσταση του H_1 μετράει τις 'τρύπες' στο πολύεδρο. Το στοιχείο της συγκεκριμένης βάσης που βρήκαμε διαγράφει έναν 'κύκλο' γύρω από την τρύπα του πολυέδρου.

Θεώρημα 4.12 (Θεώρημα Ισομορφισμού) *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμική απεικόνιση $L: V\longrightarrow W$.*

1. *Η απεικόνιση $\tilde{L}: V/\ker L\longrightarrow W$, $\tilde{L}(v+\ker L)=L(v)$, είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση, και η L παραγοντοποιείται ως σύνθεση $L=\tilde{L}\circ P$, όπου $P: V\longrightarrow V/\ker L$ είναι η κανονική επεικόνιση $v\longmapsto v+\ker L$.*
2. *Υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$V/\ker L\cong\operatorname{im}L\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλάση ισοδυναμίας του v στο $V/\ker L$, δηλαδή $v+\ker L=\{u\in V\,|\,u-v\in\ker L\}$. Παρατηρούμε οτι εάν $u\in v+\ker L$ τότε $L(u)=L(v)$. Αρα η απεικόνιση $\tilde{L}: V/\ker L\longrightarrow W$, $\tilde{L}(v+\ker L)=L(v)$ είναι καλά ορισμένη. Ελέγχουμε οτι η $\tilde{L}$ είναι γραμμική:

$$\begin{aligned}\tilde{L}\left(a(v+\ker L)+(u+\ker L)\right) &= \tilde{L}\left((a\,v+u)+\ker L\right)\\ &= L(a\,v+u)\\ &= a\,L(v)+L(u)\\ &= a\,\tilde{L}(v+\ker L)+\tilde{L}(u+\ker L)\,.\end{aligned}$$

Η $\tilde{L}$ είναι μονομορφισμός, εφ' όσον εάν $L(v)=L(u)$, τότε $v-u\in\ker L$ και $v+\ker L=u+\ker L$. Η $\tilde{L}$ είναι επεικονική στην εικόνα της L, γιατί εάν $w=L(v)$, τότε $w=\tilde{L}(v+\ker L)$. Συμπεραίνουμε οτι $\tilde{L}$ είναι ισομορφισμός από το πηλίκο $V/\ker L$ στην εικόνα $\operatorname{im}L$.

□

Στη συνέχεια δίδουμε δύο άλλα αποτελέσματα, τα οποία αναφέρονται ως Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.

Πρόταση 4.13 (Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.)

1. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και X, Y γραμμικούς υπόχωρους του V. Τότε υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*
$$(X+Y)/Y \cong X/(X\cap Y)\,.$$

2. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και X, Y γραμμικούς υπόχωρους του V τέτοιους ώστε $X \subseteq Y$. Τότε Y/X είναι υπόχωρος του V/X, και υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*
$$(V/X)/(Y/X) \cong V/Y\,.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του Δεύτερου Θεωρήματος Ισομορφισμού, θεωρούμε το μονομορφισμό $i : X \longrightarrow X+Y$ και τον επιμορφισμό $p : X+Y \longrightarrow (X+Y)/Y$. Θα δείξουμε οτι η σύνθεση $L = p\circ i$ είναι επιμορφισμός, με πυρήνα $X\cap Y$.

Συγκεκριμένα θα δείξουμε οτι για κάθε $(x+y)+Y \in (X+Y)/Y$, $L(x) = (x+y)+Y$. Πράγματι, αφού $y\in Y$, $(x+y)+Y = x+Y = L(x)$. Άρα L είναι επιμορφισμός. Εάν $x \in \ker L$, τότε $L(x) = x+Y = 0+Y$, δηλαδή $x\in Y$. Άρα ο πυρήνας είναι ακριβώς $X\cap Y$. Από το Θεώρημα Ισομορφισμού,
$$(X+Y)/\,Y \cong X/\,(X\cap Y)\,.$$

Για την απόδειξη του Τρίτου Θεωρήματος Ισομορφισμού, θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $X \subseteq Y \subseteq V$. Τότε προφανώς $Y/\,X$ είναι υποσύνολο του $V/\,X$. Για να δείξουμε οτι είναι γραμμικός υπόχωρος, θεωρούμε γραμμικό συνδυασμό $a(y_1+X)+(y_2+X)$ με y_1, $y_2 \in Y$. Αυτός είναι ίσος με $(ay_1+y_2)+X$ και συνεπώς ανήκει στο $Y/\,X$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την αντιστοίχιση $v+X \longmapsto v+Y$, για $v\in V$. Αυτή δίδει μία καλά ορισμένη απεικόνιση $L : V/\,X \longrightarrow V/\,Y$, αφού εάν $v_1 - v_2 \in X$, τότε $v_1 - v_2 \in Y$, και συνεπώς εάν $v_1 + X = v_2 + X$, τότε $L(v_1+X) = L(v_2+X)$. Θα δείξουμε οτι η L είναι επιμορφισμός, με πυρήνα $Y/\,X$. Θεωρούμε $v+Y \in V/\,Y$. Τότε $v+X \in V/\,X$ και $L(v+X) = v+Y$, συνεπώς L είναι επιμορφισμός. Η κλάση $v+X$ ανήκει στον πυρήνα της L εάν και μόνον εάν $L(v+X) = 0+Y$, δηλαδή $v\in Y$ και $v+X \in Y/\,X$. Άρα $\ker L = V/\,Y$. Από το Θεώρημα Ισομορφισμού,
$$V/\,Y \cong (V/\,X)/\,(Y/\,X)\,.$$

□

Παράδειγμα 4.17 Υπάρχει επίσης ισομορφισμός $V \cong \ker L \oplus \operatorname{im} L$, αλλά αυτός δεν είναι κανονικός. Εάν επιλέξουμε μία βάση $\{w_1, \ldots, w_m\}$ του $\operatorname{im} L$, και $v_1, \ldots, v_m$ τέτοια ώστε $L(v_i) = w_i$, τότε τα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και ορίζεται γραμμική ενεικόνιση, $M_2 : \operatorname{im} L \to V \,:\, w_i \mapsto v_i$. Η απεικόνιση
$$M : \ker L \oplus \operatorname{im} L \to V \,:\, (v,\, w) \mapsto v + M_2(w)$$

είναι ισομορφισμός, αλλά εξαρτάται από την επιλογή των v_i.

4.10 Δυϊκοί χώροι

Εχουμε δεί οτι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από ένα διανυσματικό χώρο V σε ένα διανυσματικό χώρο W είναι επίσης διανυσματικός χώρος, ο $\mathcal{L}(U, V)$. Στην περίπτωση που W είναι ο μονοδιάστατος χώρος $\mathbb{K}$, ονομάζουμε τον $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ **δυϊκό χώρο** του V, και τον συμβολίζουμε V'.

Παράδειγμα 4.18 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ ορίζονται οι *συναρτήσεις συντεταγμένων* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Εάν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε $\varphi_k(x) = x_k$.

Εάν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$, έχουμε $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Εάν $\psi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση, η ψ καθορίζεται από τις τιμές της στα στοιχεία της βάσης: εάν $\psi(e_i) = a_i \in \mathbb{K}$, τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 \psi(e_1) + \cdots + x_n \psi(e_n) \\ &= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n , \end{aligned}$$

δηλαδή, για κάθε γραμμική συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, $\psi(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων $x_i = \varphi_i(x)$ του x,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \\ &= \varphi_1(x) a_1 + \cdots + \varphi_n(x) a_n , \end{aligned}$$

αλλά καθώς ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{K}$ είναι μεταθετικός,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x) \\ &= (a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n)(x) . \end{aligned}$$

Καθώς αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{K}^n$, έχουμε $\psi = a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n$, και οι συναρτήσεις συντεταγμένων φ_i παράγουν το δυϊκό χώρο $(\mathbb{K}^n)'$.

Συμβολισμός. Εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό των συναρτήσεων, $\varphi(x) = a$, για στοιχεία του δυϊκού χώρου χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$\langle x, \varphi \rangle = a .$$

Παράδειγμα 4.19 Στο χώρο $\mathbb{K}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}$ για την οποία $\varphi(p(x)) = \langle p(x), \varphi \rangle = p(0)$ είναι ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{K}[x])'$. Γενικότερα, εάν $t_1, \ldots, t_k$ και $a_1, \ldots, a_k$ είναι στοιχεία του $\mathbb{K}$, τότε η συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}$, για την οποία $\psi(p(x)) = \langle p(x), \psi \rangle = a_1 p(t_1) + \cdots + a_k p(t_k)$, είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{K}[x])'$.

Παράδειγμα 4.20 Στο χώρο $C^0[0,\,1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,\,1]$, εάν $0 \leq a < b \leq 1$, και $\alpha\,:\,[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, η συνάρτηση $\psi\,:\,C^0[0,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία

$$\psi(f) = \langle f,\,\psi\rangle = \int_a^b \alpha(t)\,f(t)\,dt$$

είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου $(C^0[0,\,1])'$.

Παράδειγμα 4.21 Θεωρούμε μία διαφορίσισμη συνάρτηση $f\,:\,\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Το διαφορικό της f στο σημείο $(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$Df(x_1,\,\ldots,\,x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (v_1,\,\ldots,\,v_n) \longmapsto v_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\,.$$

Δηλαδή $Df(x_1,\,\ldots,\,x_n) \in (\mathbb{R}^n)'$ και Df είναι μία απεικόνιση $Df\,:\,\mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)'$, εν γένει μη γραμμική.

Υπενθυμίζουμε οτι εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $\{v_1,\,\ldots,\,v_n\}$ είναι βάση του V, και $a_1,\,\ldots,\,a_n \in \mathbb{K}$, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi \in \mathcal{L}(V,\,\mathbb{K})$ τέτοια ώστε $\varphi(v_i) = a_i$ για κάθε $i = 1,\,\ldots,\,n$. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\varphi \in V'$ τέτοιο ώστε $\langle v_i,\,\varphi\rangle = a_i$.

Θεώρημα 4.14 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\{v_1,\,\ldots,\,v_n\}$ είναι βάση του V, τότε υπάρχει βάση του V', $\{\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_n\}$, για την οποία, με το συμβολισμό $\delta_{i\,j}$ του Kronecker,*

$$\varphi_j(v_i) = \langle v_i,\,\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$$

και άρα

$$\dim V' = \dim V\,.$$

Η βάση $\{\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_n\}$ ονομάζεται **δυϊκή βάση** της $\{v_1,\,\ldots,\,v_n\}$.

Απόδειξη. Πρώτα δείχνουμε οτι το $\{\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Ο γραμμικός συνδυασμός $\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ είναι 0 εάν και μόνον εάν $\psi(v) = 0$ για κάθε $v \in V$. Ειδικότερα, για κάθε $i = 1,\,\ldots,\,n$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = \psi(v_i) &= \langle v_i,\,a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n\rangle \\ &= a_1\langle v_i,\,\varphi_1\rangle + \cdots + a_n\langle v_i,\,\varphi_n\rangle \\ &= a_1\delta_{i1} + \cdots + a_n\delta_{in} \\ &= a_i \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε οτι $\{\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Για να δείξουμε οτι τα $\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_n$ παράγουν το δυϊκό χώρο V', θεωρούμε $\psi \in V'$ με $\langle v_i,\,\psi\rangle = c_i$ για κάθε $i = 1,\,\ldots,\,n$, και $u = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$. Τότε

$$\langle u,\,\psi\rangle \;=\; \langle b_1v_1 + \cdots + b_nv_n,\,\psi\rangle$$

$$\begin{aligned} &= b_1\langle v_1,\,\psi\rangle + \cdots + b_n\langle v_n,\,\psi\rangle \\ &= b_1c_1 + \cdots + b_nc_n \\ &= \langle u,\,\varphi_1\rangle c_1 + \cdots + \langle u,\,\varphi_n\rangle c_n \\ &= \langle u,\,c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n\rangle \end{aligned}$$

άρα $\psi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$.

□

Θεώρημα 4.15 *Εάν $v,\,w \in V$ και $v \neq w$, τότε υπάρχει $\psi \in V'$ τέτοιο ώστε $\langle v,\,\psi\rangle \neq \langle w,\,\psi\rangle$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε βάση $\{v_i,\,\ldots,\,v_n\}$ του V, και τη δυϊκή βάση $\{\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_n\}$ του V'. Εάν $\langle v,\,\psi\rangle = \langle w,\,\psi\rangle$ για όλα τα $\psi \in V'$, τότε, για κάθε φ_i της δυϊκής βάσης, έχουμε $\langle v-w,\,\varphi_i\rangle = 0$, και $v - w = \langle u-w,\,\varphi_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v-w,\,\varphi_n\rangle v_n = 0$.

□

Αφού ο δυϊκός χώρος V' είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το δυϊκό του χώρο, $(V')'$, ο οποίος συμβολίζεται V''. Ένα στοιχείο χ του χώρου V'' είναι μία γραμμική συνάρτηση στο χώρο V',

$$\chi\,:\,V' \longrightarrow \mathbb{K}\,:\,\psi \longmapsto \chi(\psi)\,.$$

Παράδειγμα 4.22 Εάν $v \in V$, τότε η απεικόνιση $\eta : \psi \longmapsto \langle v,\,\psi\rangle$ είναι γραμμική ως προς το ψ, (Ασκηση: Τί ακριβώς σημαίνει αυτό;). Συνεπώς για κάθε $v \in V$ ορίζεται, με φυσικό τρόπο, ένα $\eta \in V''$. Θα δούμε οτι, για χώρους πεπερασμένης διάστασης, αυτή η αντιστοιχία είναι ένας ισομορφισμός.

Θεώρημα 4.16 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε η απεικόνιση*

$$\nu\,:\,V \longrightarrow V''\,:\,v \longmapsto (\eta\,:\,\psi \longmapsto \langle v,\,\psi\rangle)$$

είναι (κανονικός) ισομορφισμός.

Απόδειξη. Η ν είναι γραμμική:

$$\begin{aligned} \nu(a\,v + w)(\psi) &= \langle a\,v + w,\,\psi\rangle \\ &= a\,\langle v,\,\psi\rangle + \langle w,\,\psi\rangle \\ &= a\,\nu(v)(\psi) + \nu(w)(\psi)\,. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε οτι η ν είναι ενεικόνιση, θεωρούμε $v,\,w \in V$. Εάν $\nu(v) = \nu(w)$ τότε, για κάθε $\psi \in V'$, $\psi(v) = \psi(w)$, και από το Θεώρημα 4.15, $v = w$.

Από το Θεώρημα 4.14, $\dim V'' = \dim V' = \dim V$, και συνεπώς η ν είναι επεικόνιση.

□

Εάν $L:\,V \longrightarrow W$ είναι γραμμική απεικόνιση, μπορούμε να ορίσουμε τη **δυϊκή απεικό-**

νιση L' (ή **ανάστροφη απεικόνιση** L^T) ανάμεσα στους δυϊκούς χώρους:

$$L' : W' \longrightarrow V' \quad , \quad L'(\psi) = \psi \circ L \,.$$

Προσέξτε οτι η L' έχει φορά αντίθετη από την L, και ικανοποιεί τη σχέση $\langle v,\, L'\psi\rangle = \langle Lv,\, \psi\rangle$.

Παρατηρούμε οτι η αντιστοιχία $L \mapsto L'$ είναι γραμμική απεικόνιση από το $\mathcal{L}(V, W)$ στο $\mathcal{L}(W', V')$: $(a\,L + M)' = a\,L' + M'$.

Λήμμα 4.17 *Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $L : U \longrightarrow V$ και $M : V \longrightarrow W$. Τότε*

1. $(M \circ L)' = L' \circ M'$.
2. *Εάν η $L : U \longrightarrow V$ είναι αντιστρέψιμη, τότε η $L' : V' \longrightarrow U'$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και $(L^{-1})' = (L')^{-1}$.*
3. *Εάν οι χώροι U και V είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων μετατίθεται:*

$$\begin{array}{ccccc} & U & \longrightarrow & V & \\ \nu_U & \downarrow & & \downarrow & \nu_V \\ & U'' & \longrightarrow & V'' & \end{array} \,,$$

δηλαδή

$$\nu_V \circ L = L'' \circ \nu_U \,,$$

όπου $L'' = (L')'$ και ν_U, ν_V είναι οι κανονικοί ισομορφισμοί.

Απόδειξη. Εάν $\zeta \in W'$, τότε

$$\begin{aligned} (M \circ L)'(\zeta) &= \zeta \circ (M \circ L) \\ &= (\zeta \circ M) \circ L \\ &= L'(\zeta \circ M) \\ &= L'(M'(\zeta)) \\ &= L' \circ M'(\zeta) \end{aligned}$$

Εάν η L είναι αντιστρέψιμη, τότε

$$\left(L^{-1}\right)' \circ L' = \left(L \circ L^{-1}\right)' = (\mathbf{I}_V)' = \mathbf{I}_{V'}$$

και

$$L' \circ \left(L^{-1}\right)' = \left(L^{-1} \circ L\right)' = (\mathbf{I}_U)' = \mathbf{I}_{U'} \,.$$

Εάν $u \in U$ και $\varphi \in U'$, έχουμε $\nu_U(u)(\varphi) = \langle u,\, \varphi\rangle$. Εάν $\psi \in V'$, έχουμε

$$\begin{aligned} L''\nu_U(u)(\psi) &= \nu_U(u)(L'\psi) \\ &= \langle u,\, L'\psi\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle Lu, \psi\rangle \\
&= \nu_V(Lu)(\psi) \\
&= \nu_V \circ L(u)(\psi)\,.
\end{aligned}
$$

□

4.11 Πίνακας δυϊκής απεικόνισης

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W, με βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε οτι ορίζεται η δυϊκή βάση $\mathcal{B}' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ του δυϊκού χώρου V', όπου

$$\varphi_i(v_j) = \langle v_j, \varphi_i\rangle = \delta_{i\,j} \quad \text{για} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

και η δυϊκή βάση $\mathcal{C}' = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ του δυϊκού χώρου W', όπου

$$\psi_k(w_\ell) = \langle w_\ell, \psi_k\rangle = \delta_{k\,\ell} \quad \text{για} \quad k, \ell = 1, \ldots, m\,.$$

Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ και τον πίνακα $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ του V και $\mathcal{C}$ του W. Η δυϊκή απεικόνιση $L' : W' \longrightarrow V'$ έχει πίνακα ως προς τις βάσεις $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{B}'$, $A' = {}_{\mathcal{B}'}L'_{\mathcal{C}'} = (a'_{j\,k})$ τέτοιο ώστε

$$L'(\psi_k) = \sum_{j=1}^{n} a'_{j\,k}\varphi_j\,. \tag{4.5}$$

Όμως γνωρίζουμε οτι η δυϊκή απεικόνιση ικανοποιεί, για κάθε $k = 1, \ldots, m$ και κάθε $v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$,

$$
\begin{aligned}
L'(\psi_k)(v) &= \psi_k \circ L(v) \\
&= \psi_k(Av) \\
&= \psi_k\left(\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{\ell\,j}b_jw_\ell\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell\,j}b_j\psi_k(w_\ell) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j}b_j \qquad \text{αφού } \psi_k(w_\ell) = 0 \text{ όταν } \ell \neq k, \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j}\varphi_j(v)
\end{aligned}
$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$L'(\psi_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j}\varphi_j\,. \tag{4.6}$$

Συγκρίνοντας τις 4.5 και 4.6, καταλήγουμε οτι $a'_{j\,k} = a_{k\,j}$, δηλαδή οτι ο πίνακας $A' = {}_{\mathcal{B}'}L'_{\mathcal{C}'}$ της δυϊκής απεικόνισης $L' : W' \longrightarrow V'$ είναι ο **ανάστροφος** του πίνακα $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης $L : V \longrightarrow W$.

Παράδειγμα 4.23 Θεωρούμε πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ και την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Οι συναρτήσεις συντεταγμένων ορίζουν βάσεις στους δυϊκούς χώρους $(\mathbb{R}^3)'$ και $(\mathbb{R}^2)'$: εάν $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ και $\mathcal{E}_2 = \{f_1, f_2\}$ είναι οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$, οι δυϊκές βάσεις είναι $\mathcal{E}'_3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ και $\mathcal{E}'_2 = \{\psi_1, \psi_2\}$, όπου $\varphi_i(e_j) = \delta_{i\,j}$ για $i, j = 1, 2, 3$ και $\psi_k(f_\ell) = \delta_{k\,\ell}$ για $k, \ell = 1, 2$.

Η δυϊκή απεικόνιση $(T_A)' : (\mathbb{R}^2)' \longrightarrow (\mathbb{R}^3)'$ απεικονίζει τη συνάρτηση $\psi \in (\mathbb{R}^2)'$ με $\langle f_k, \psi\rangle = b_k$ για $k = 1, 2$, στη συνάρτηση $(T_A)'(\psi) \in (\mathbb{R}^3)'$ με $\langle e_i, (T_A)'(\psi)\rangle = c_i$ για $i = 1, 2, 3$, και

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, εάν $\psi(y_1, y_2) = b_1 y_1 + b_2 y_2$, τότε

$$(T_A)'(\psi)(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = b_1 x_1 + 2(b_1 + b_2) x_2 + (b_2 - b_1) x_3\,.$$

4.12 Ασκήσεις

Άσκηση 4.6 Θεωρήστε τα διανύσματα x, y, u και v στο $\mathbb{K}^4$, όπου $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα στο οποίο $1 \neq -1$, και τους υπόχωρους Z και W που παράγονται απο τα σύνολα $\{x, y\}$ και $\{u, v\}$ αντίστοιχα. Σε ποιές απο τις ακόλουθες περιπτώσεις ισχύει οτι $\mathbb{K}^4 = Z \oplus W$.

1.
$$x = (1, 1, 0, 0) \qquad y = (1, 0, 1, 0)$$
$$u = (0, 1, 0, 1) \qquad v = (0, 0, 1, 1)$$

2.
$$x = (1, 0, 0, 1) \qquad y = (0, 1, 1, 0)$$
$$u = (1, 0, -1, 0) \qquad v = (0, 1, 0, 1)$$

Άσκηση 4.7 Εάν X, Y, Z είναι διανυσματικοί χώροι πάνω απο το σώμα $\mathbb{K}$, δείξτε οτι υπάρχουν ισομορφισμοί.

1. $X \oplus Y \cong Y \oplus X$
2. $X \oplus (Y \oplus Z) \cong (X \oplus Y) \oplus Z$

Άσκηση 4.8 Έστω διανυσματικός χώρος U και υπόχωροι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ του U. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ και $V = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$.

1. Δείξτε οτι $Y \cong V$ εάν και μόνον εάν για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ισχύει $(X_1 + \cdots + X_i) \cap X_{i+1} = 0$.
2. Δείξτε οτι εάν $Y \cong V$ τότε $X_i \cap X_j = 0$ για κάθε $i \neq j$. Βρείτε ένα παράδειγμα με τρείς υπόχωρους X_1, X_2, X_3 για να δείξετε οτι δεν ισχύει το αντίστροφο.

Άσκηση 4.9 Εάν $L : V \to X$ και $M : W \to Y$ είναι γραμμικές απεικονίσεις διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, δείξτε οτι ορίζεται απεικόνιση $L \oplus M$ από το $V \oplus W$ στο $X \oplus Y$,

$$L \oplus M(v, w) = (L(v), M(w)),$$

η οποία είναι γραμμική. Δείξτε οτι $\operatorname{im}(L \oplus M) = \operatorname{im} L \oplus \operatorname{im} M$ και οτι $\ker(L \oplus M) = \ker L \oplus \ker M$.

Άσκηση 4.10 Ελέγξτε οτι οι κανονικές εμφυτεύσεις $j_1 : V \longrightarrow V \oplus W$ και $j_2 : W \longrightarrow V \oplus W$ και οι κανονικές προβολές $p_1 : V \oplus W \longrightarrow V$ και $p_2 : V \oplus W \longrightarrow W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και οτι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_1 \circ j_1 = \mathbf{I}_V, \quad p_1 \circ j_2 = 0, \quad p_2 \circ j_1 = 0, \quad p_2 \circ j_2 = \mathbf{I}_W.$$

Άσκηση 4.11 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, και τον υπόχωρο $\mathbb{P}_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n. Έχει ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}[x]/\,\mathbb{P}_n$ πεπερασμένη διάσταση;

Άσκηση 4.12 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^4$ θεωρήστε τους υπόχωρους

$$U = \left\{(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 = z_2\right\}\ ,$$

$V =$

$$\left\{(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 - z_2 - iz_3 + iz_4 = 2z_2 + z_3 = 2z_2 + (1+\mathrm{i})z_3 - iz_4 = 0\right\}\ .$$

1. Δείξτε οτι $V \subseteq U$.

2. Βρείτε μία βάση του χώρου πηλίκο $U/\,V$.

Άσκηση 4.13 Υποθέτουμε οτι $L : V \longrightarrow W$ είναι γραμμική απεικόνιση, X είναι γραμμικός υπόχωρος του V, Y είναι γραμμικός υπόχωρος του W, και ισχύει $L(X) \subseteq Y$. Δείξτε οτι ορίζεται γραμμική απεικόνιση $\tilde{L} : V/\,X \longrightarrow W/\,Y$, τέτοια ώστε

$$\tilde{L} \circ P = Q \circ L\,,$$

όπου $P : V \longrightarrow V/\,X$ και $Q : W \longrightarrow W/\,Y$ είναι οι κανονικές επεικονίσεις.

Άσκηση 4.14 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, με πραγματικούς συντελεστές, και το σύνολο $W = \{s(x) \in \mathbb{R}[x] : s(x) = q(x)(x^2+1), q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ των πολυωνύμων που διαιρούνται με το $x^{+}1$.

1. Δείξτε οτι W είναι γραμμικός υπόχωρος του V.

2. Δείξτε οτι για κάθε πολυώνυμο $p(x) \in V$ υπάρχει πολυώνυμο $r(x)$ βαθμού ίσου ή μικρότερου από 1, τέτοιο ώστε $p(x) - r(x) \in W$.

3. Θεωρήστε το χώρο πηλίκο $V/\,W$. Δείξτε οτι κάθε πολυώνυμο $p(x) \in V$ ανήκει σε μία κλάση ισοδυναμίας $(ax+b)+W$, για $a,\, b \in \mathbb{R}$.

4. Δείξτε οτι $\mathcal{B} = \{x+W,\, 1+W\}$ αποτελεί βάση του χώρου πηλίκο $V/\,W$. (Στο 3 δείξατε οτι τα στοιχεία $x+W,\, 1+W$ παράγουν το χώρο $V/\,W$. Απομένει να δείξετε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.)

Θεωρήστε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Για κάθε πολυώνυμο $p(x) \in V$, ορίζεται ο πίνακας $p(A) \in \mathcal{M}(2,\, \mathbb{R})$. Θεωρήστε το σύνολο των πινάκων $U = \{p(A) \in \mathcal{M}(2,\, \mathbb{R}) : p(x) \in V\}$.

5. Δείξτε οτι U είναι διανυσματικός χώρος.

6. Δείξτε οτι η απεικόνιση $F : V/\,W \longrightarrow U : p(x) + W \longmapsto p(A)$ είναι καλά ορισμένη και είναι (κανονικός) ισομορφισμός $V/\,W \cong U$.

Άσκηση 4.15 Βρείτε ένα μη μηδενικό στοιχείο φ του χώρου $(\mathbb{C}^3)'$, τέτοιο ώστε εάν $x_1 = (1,\, 1,\, 1)$ και $x_2 = (1,\, 1,\, -1)$, τότε $\langle x_1,\, \varphi\rangle = \langle x_2,\, \varphi\rangle = 0$.

Άσκηση 4.16 Τα διανύσματα $x_1 = (1,\, 1,\, 1)$, $x_2 = (1,\, 1,\, -1)$ και $x_3 = (1,\, -1,\, -1)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^3$. Εάν $\{\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3\}$ είναι η δυϊκή βάση του $(\mathbb{C}^3)'$, και $x = (0,\, 1,\, 0)$, βρείτε τα $\langle x,\, \varphi_1\rangle$, $\langle x,\, \varphi_2\rangle$ και $\langle x,\, \varphi_3\rangle$.

Άσκηση 4.17 Ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις στο $\mathbb{C}^3$ είναι στοιχεία του $(\mathbb{C}^3)'$;

1. $\varphi(z_1,\, z_2,\, z_3) = z_1 + 3z_2$
2. $\varphi(z_1,\, z_2,\, z_3) = z_1 - {z_3}^2$
3. $\varphi(z_1,\, z_2,\, z_3) = z_2 + 1$
4. $\varphi(z_1,\, z_2,\, z_3) = z_1 + z_2 z_3$

Άσκηση 4.18 Θεωρούμε μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(c_k) = (c_0,\, c_1,\, c_2,\, \ldots)$. Για κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ ορίζουμε $\psi(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i c_i$. Δείξτε οτι $\psi \in (\mathbb{R}[x])'$, και οτι κάθε στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{R}[x])'$ προκύπτει με αυτόν τον τρόπο, για κατάλληλη επιλογή της ακολουθίας (a_k).

Άσκηση 4.19 Εάν $\psi \in V'$, $\psi \neq 0$ και $a \in \mathbb{K}$, είναι αλήθεια οτι υπάρχει $x \in V$ τέτοιο ώστε $\langle x,\, \psi\rangle = a$;

Άσκηση 4.20 Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους U, V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Δείξτε οτι η απεικόνιση $\mathcal{L}(U,\, V) \to \mathcal{L}(U,\, W) : M \mapsto L \circ M$ είναι γραμμική.

Άσκηση 4.21 Δείξτε οτι εάν V είναι διανυσματικός χώρος, και φ είναι μη μηδενικό στοιχείο τουV', τότε το σύνολο

$$U = \{x \in V | \langle x,\, \varphi\rangle = 0\}$$

είναι υπόχωρος του V. Εάν $\dim V < \infty$, βρείτε τη διάσταση του U.

Άσκηση 4.22 Δείξτε οτι εάν φ και $\psi \in V'$ και για κάθε $x \in V$, $\langle x,\, \varphi\rangle = 0$ εάν και μόνον εάν $\langle x,\, \psi\rangle = 0$, τότε υπάρχει $a \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $\psi = a\varphi$.

Άσκηση 4.23 Μία συνάρτηση $Q : W \times V \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **διγραμμική** εάν η Q είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά, δηλαδή, για κάθε $w,\, z \in W$, $u,\, v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{array}{ll} Q(w+z,\, u) = Q(w,\, u) + Q(z,\, u) & \quad Q(aw,\, u) = aQ(w,\, u) \\ Q(w,\, u+v) = Q(w,\, u) + Q(w,\, v) & \quad Q(w,\, au) = aQ(w,\, u) \end{array}$$

Δείξτε οτι το σύνολο $\mathcal{L}(W,\, V;\, \mathbb{K})$ των διγραμμικών συναρτήσεων στο $W \times V$ είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις κατά σημείο πράξεις.

Άσκηση 4.24 Θεωρούμε μία απεικόνιση $L : W \to V'$, δηλαδή για κάθε $w \in W$, $L(w)$ είναι μία γραμμική απεικόνιση $L(w) : V \to \mathbb{R}$.

1. Τι σημαίνει να είναι η L γραμμική απεικόνιση;

2. Δείξτε οτι εάν L είναι γραμμική, τότε η απεικόνιση $M : W \times V \to \mathbb{R}$, για την οποία $M(w,\, v) = \langle v,\, L(w)\rangle$ είναι διγραμμική.

3. Δείξτε οτι η αντιστοιχία $L \mapsto M$ ορίζει ισομορφισμό μεταξύ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}(W,\, V')$ και του χώρου των διγραμμικών συναρτήσεων $\mathcal{L}(W, V; \mathbb{R})$.

4.13 Πίνακες πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$

Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathcal{M}(m,\, n,\, \mathbb{K})$ ή $\mathbb{K}^{m,\, n}$ ή $\mathcal{M}_{m,\, n}(\mathbb{K})$. Το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ το συμβολίζουμε $\mathcal{M}(n,\, \mathbb{K})$.

Η θεωρία των πινάκων που μελετήσαμε στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, στο μεγαλύτερο μέρος της ισχύει επακριβώς για πίνακες με όρους σε οποιοδήποτε σώμα.

Για οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}(m,\, n,\, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται όταν αυτοί έχουν κατάλληλο σχήμα. Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, και B είναι $n \times k$ πίνακας πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, ορίζεται το γινόμενο AB, και είναι ο $m \times k$ πίνακας C, ο οποίος έχει στη θέση $i\,j$, δηλαδή στην i γραμμή και στην j στήλη, τον όρο

$$\begin{aligned} c_{i\,j} &= a_{i\,1}\, b_{1\,j} + \cdots + a_{i\,n}\, b_{n\,j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\,\ell}\, b_{\ell\,j}\,. \end{aligned}$$

Η απαλοιφή Gauss μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$ για να μετατρέψουμε ένα $m \times n$ πίνακα σε ένα γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

Η **τάξη** του πίνακα A (ή **βαθμός** του πίνακα A) είναι ο αριθμός $r(A)$,

$$\begin{aligned} r(A) &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του } A \\ &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του } A \\ &= \text{αριθμός οδηγών στο γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή} \end{aligned}$$

Προσέξτε οτι σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, κάθε μή μηδενική γραμμή έχει έναν οδηγό. (Καμία φορά μας διαφεύγει ο οδηγός στην τελευταία γραμμή, επειδή δεν χρησιμοποιείται κατά την απαλοιφή).

Πρόταση 4.18 *Κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ αντιστοιχεί σε ένα $m \times n$ πίνακα A, τέτοιο ώστε, για κάθε $b \in \mathbb{K}^n$, $L(b) = Ab$,*

$$L(b_1, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{K}^n$,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_j = (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{nj}), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

και τα διανύσματα $L(e_1), \ldots, L(e_n) \in \mathbb{K}^m$.

Ορίζουμε τον πίνακα A να έχει στη j στήλη, για $j = 1, \ldots, n$, το διάνυσμα $L(e_j) \in \mathbb{K}^m$. Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

όπου $(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = L(e_j)$.

Εάν $b = (b_1, \ldots, b_n)$ έχουμε $b = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} L(b) &= b_1 L(e_1) + \cdots + b_n L(e_n) \\ &= b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε την παράσταση του γινομένου πίνακα με διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα, και έχουμε

$$\begin{aligned} L(b) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= Ab\,. \end{aligned}$$

□

4.14 Χώροι γραμμικών απεικονίσεων

Να συμπληρωθεί;

******

Επίσης, παρατήρηση για παραγοντοποιήση απεικόνισης. Να δω που θα πάει.

Στη Γραμμική Άλγεβρα I, έχουμε δεί οτι εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, στη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$ αντιστοιχεί μία αντιστρέψιμη απεικόνιση από το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στο χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, και οτι η T_A μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση τριών απεικονίσεων,

$$T_A = E \circ L \circ P\,,$$

όπου $P : \mathbb{R}^n \to \mathcal{R}(A^T)$ είναι η προβολή στο χώρο γραμμών, $L : \mathcal{R}(A^T) \to \mathcal{R}(A)$ είναι η αντιστρέψιμη απεικόνιση $L(x) = Ax$, και $E : \mathcal{R}(A) \to \mathbb{R}^m$ είναι ο εγκλεισμός $E(y) = y$.

Τώρα βλέπουμε οτι σε γενικούς διανυσματικούς χώρους, χωρίς επιλεγμένες βάσεις, έχουμε μια ανάλογη παραγοντοποίηση, όπου τη θέση του χώρου γραμμών καταλαμβάνει το πηλίκο.

Πρόταση 4.19 *Εάν $L : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε $L = E \circ \tilde{L} \circ P$, όπου $P : V \to V/\ker(L)$ είναι η κανονική επεικόνιση, $\tilde{L} : V/\ker(L) \to \mathrm{im}\,(L)$ είναι ο κανονικός ισομορφισμός και $E : \mathrm{im}\,(L) \to W$ είναι ο εγκλεισμός.*

□

4.15 Ασκήσεις

Κεφάλαιο 5

Διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο

5.1 Διανυσματικοί χώροι με νόρμα

Για το $\mathbb{R}^n$, έχουμε δει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων x και y,

$$x \cdot y = x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

και τη νόρμα

$$||x|| = \sqrt{\langle x,\, y\rangle}\,.$$

Στο $\mathbb{C}$, θα θέλαμε η νόρμα $||z||$ να συμπίπτει με το μέτρο $|z|$ και, εάν $z = x + \mathrm{i}y$ με τη νόρμα του $(x,\, y)$:

$$||z|| = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = ||(x,\, y)||\,.$$

Ανάλογα, στο $\mathbb{C}^n$, εάν θέλουμε $||(z_1, \ldots, z_n)||$ να συμπίπτει με τη νόρμα του διανύσματος $(x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2, \ldots, x_n,\, y_n)$ στο $\mathbb{R}^{2n}$, όπου $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, πρέπει να ορίσουμε τη νόρμα

$$||z|| = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n}$$

και το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle z,\, w\rangle = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n\,.$$

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις, δίδουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.1. V διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση $V \longrightarrow \mathbb{R} : v \mapsto ||v||$ ονομάζεται **νόρμα** (ή **στάθμη**) εάν

N1. $||v|| = 0$ εάν και μόνον εάν $v = 0$

N2. Για κάθε $v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, $||av|| = |a|\,||v||$

N3. Για κάθε $v,\, w \in V$, $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (τριγωνική ανισότητα)

Λήμμα 5.1 *Σε ένα διανυσματικό χώρο V με νόρμα,*

1. *Για κάθε $v \in V$, $||v|| \geq 0$.*

2. *Για κάθε $v, w \in V$, $||v - w|| \geq |\, ||v|| - ||w||\, |$.*

Απόδειξη.

1. Για κάθε $v \in V$,

$$\begin{aligned} ||v|| &= \frac{1}{2}(||v|| + ||v||) = \frac{1}{2}(||v|| + ||-v||) \\ &\geq \frac{1}{2}||v + (-v)|| = \frac{1}{2}||0|| = 0\,. \end{aligned}$$

2. Για κάθε $v, w \in V$,

$$||v|| = ||(v - w) + w|| \leq ||v - w|| + ||w||\,,$$

και συνεπώς

$$||v - w|| \geq ||v|| - ||w||\,.$$

Ανάλογα

$$||v - w|| = ||w - v|| \geq ||w|| - ||v||\,.$$

□

Παράδειγμα 5.1 Στο $\mathbb{R}^n$ και στο $\mathbb{C}^n$ η ευκλείδεια νόρμα (ή ℓ^2-νόρμα) είναι η συνήθης νόρμα

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

και

$$||z|| = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n}\,, \quad z \in \mathbb{C}^n\,.$$

Τα αξιώματα Ν1 και Ν3 μας επιτρέπουν να θεωρούμε τη νόρμα ως γενίκευση της έννοιας του μήκους ενός γεωμετρικού διανύσματος. Κάθε διάνυσμα έχει μήκος μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν, και μόνο το μηδενικό διάνυσμα έχει μήκος μηδέν. Μπορούμε να θεωρήσουμε το $||v - w||$ ως στην απόσταση από το διάνυσμα v στο διάνυσμα w, που ικανοποιεί τη βασική ιδιότητα της απόστασης, την τριγωνική ανισότητα $||v - w|| \leq ||v - u|| + ||u - w||$.

Ορισμός 5.2. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V με νόρμα $\|\cdot\|$. Η **απόσταση μεταξύ των σημείων** $v, w \in V$ **ως προς τη νόρμα** $\|\cdot\|$ είναι $\|v - w\|$.
Η **σφαίρα ακτίνας** r **στο** V **ως προς τη νόρμα** $\|\cdot\|$ είναι το σύνολο $S_{\|\cdot\|}(r) = \{v \in V : \|v\| = r\}$. Η σφαίρα ακτίνας 1 ονομάζεται και μοναδιαία σφαίρα του χώρου V με νόρμα$\|\cdot\|$.

Παράδειγμα 5.2 Η ℓ^1-νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|\,.$$

Ελέγχουμε τα αξιώματα:

N1.

$$\begin{aligned} ||x||_1 = 0 &\Leftrightarrow |x_1| = \cdots = |x_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

N2.

$$||ax||_1 = \sum_{i=1}^{n} |ax_i| = |a| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |a|\,||x||_1\,.$$

N3.

$$||x+y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = ||x||_1 + ||y||_1\,.$$

Δραστηριότητα 5.1 Βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων (1, 2) και (5, 3) $\in \mathbb{R}^2$ με την ℓ^1-νόρμα.
Σχεδιάστε τη σφαίρα ακτίνας 1 στο $\mathbb{R}^2$ με την ℓ^1-νόρμα.

Παράδειγμα 5.3 Η ℓ^∞-νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$||x||_\infty = \max\{|x_i| \ : \ i = 1, \ldots, n\}\,.$$

Δραστηριότητα 5.2 Δείξτε οτι $||x||_\infty$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

Παράδειγμα 5.4 Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$, με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ορίζουμε τη νόρμα

$$||p(x)|| = \left(\int_0^1 |p(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Ο έλεγχος των αξιωμάτων Ν 1 και Ν 2 είναι εύκολος. Για το Ν 3 παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} ||p(x) + q(x)||^2 &= \int_0^1 |p(t) + q(t)|^2 dt \\ &= \int_0^1 |p(t)|^2 dt + \int_0^1 |q(t)|^2 dt + 2\mathrm{Re} \int_0^1 p(t)\overline{q(t)} dt \end{aligned}$$

ενώ

$$(||p(x)|| + ||q(x)||)^2 = ||p(x)||^2 + ||q(x)||^2 + 2||p(x)||\,||q(x)||\,.$$

Άρα για να ισχύει η τριγωνική ανισότητα, αρκεί να ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{Re} \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt \le ||p(x)||\ ||q(x)||\,,$$

την οποία θα αποδείξουμε στην Πρόταση 5.5.

Παράδειγμα 5.5 Στο χώρο $C[a,\, b]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,\, b]$ (με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές) ορίζουμε την L^2-νόρμα

$$||f|| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

και την L^∞-νόρμα

$$||f||_\infty = \max\{|f(x)|\ :\ x \in [a,\, b]\}\,.$$

Δραστηριότητα 5.3 Δείξτε οτι $||f||_\infty$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

Παράδειγμα 5.6 Ο περιορισμός της L^2-νόρμας σε συνεχείς συναρτήσεις δεν είναι φυσιολογικός, αφού για τον ορισμό της νόρμας χρησιμοποιούμε μόνο το ολοκλήρωμα. Στην Ανάλυση συχνά εξετάζουμε όρια συναρτήσεων, και το όριο μία ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητα συνεχής συνάρτηση. Ας προσπαθήσουμε να ορίσουμε μία νόρμα σε ένα μεγαλύτερο σύνολο συναρτήσεων. Ορίζουμε $\mathcal{L}^2(I)$ ως το σύνολο των συναρτήσεων στο διάστημα $I = [0,\, 1]$ (με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές), για τις οποίες το ολοκλήρωμα $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$. Εύκολα δείχνουμε οτι αυτό το σύνολο είναι κλειστό ως προς πολλαπλασιασμό με αριθμό. Μπορούμε επίσης να δείξουμε οτι

$$\int_0^1 |f(t)+g(t)|^2 dt \le \left(\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}\right)^2,$$

και συνεπώς το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση συναρτήσεων. Συμπεραίνουμε οτι $\mathcal{L}^2(I)$ είναι διανυσματικός χώρος[1]. Στο $\mathcal{L}^2(I)$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$||f|| = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2},$$

η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα Ν 2 και Ν 3. Όμως μία συνάρτηση με μηδενικό ολοκλήρωμα δεν είναι υποχρεωτικά ίση με 0. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $h : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{2} \\ 0 & x \neq \frac{1}{2} \end{cases},$$

[1]Στον ορισμό του χώρου $\mathcal{L}^2(I)$ χρησιμοποιούμε έναν άλλο ορισμό του ολοκληρώματος, το ολοκλήρωμα Lebesgue, το οποίο όμως έχει ιδιότητες παρόμοιες με αυτές του ολοκληρώματος Riemann που έχετε γνωρίσει στον Απειροστικό Λογισμό Ι

είναι ολοκληρώσιμη, με $\int_0^1 |h(t)|^2 dt = 0$ αλλά δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Για να μπορέσουμε να ορίσουμε μία νόρμα σε αυτή την περίπτωση, χρειάζεται να εξετάσουμε έναν διαφορετικό διανυσματικό χώρο. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f \in \mathcal{L}^2(I)$ με $||f|| = 0$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο L_0 του $\mathcal{L}^2(I)$. Θεωρούμε το χώρο πηλίκο του $\mathcal{L}^2(I)$ με το διανυσματικό υπόχωρο L_0. Τότε το σύνολο L_0 αντιστοιχεί στο μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{L}^2(I)/L_0$. Εάν $h \in L_0$, τότε για κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^2(I)$, $||f+h|| = ||f||$. Συμπεραίνουμε οτι η συνάρτηση $(f + L_0) \mapsto ||f||$ είναι καλά ορισμένη στο χώρο πηλίκο $\mathcal{L}^2(I)/L_0$, και οτι ικανοποιεί τα αξιώματα μίας νόρμας. Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}^2(I)/L_0$ με αυτή τη νόρμα συμβολίζεται $L^2(I)$, και η νόρμα ονομάζεται L^2-νόρμα.

5.2 Ισοδύναμες Νόρμες

Ορισμός 5.3. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ στον V λέγονται **ισοδύναμες** αν υπάρχουν θετικές σταθερές m και M τέτοιες ώστε, για κάθε $x \in V$,

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\| .$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει άμεσα οτι για κάθε $x \in V$,

$$\frac{1}{M}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|' .$$

Παράδειγμα 5.7 Οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Πράγματι για $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \max_i |x_i| \sum_{i=1}^n 1 = n\|x\|_\infty$$

Έστω k ο δείκτης για τον οποίο $|x_k| = \|x\|_\infty$, τότε έχουμε

$$\|x\|_\infty = |x_k| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε σύμφωνα με τον ορισμό για $m = 1,\ M = n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Λήμμα 5.2 *Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα μεγίστου $\|\cdot\|_\infty$ του $\mathbb{R}^n$.*

□

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω Λήμμα μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο πιο γενικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 5.3 *Όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.*

Γενικότερα μπορεί να δείξει κανείς οτι σε χώρους πεπερασμένης διάστασης όλες οι νόρμες πάνω στο χώρο είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση οι αντίστοιχες σταθερές m, M του ορισμού, μπορεί να εξαρτώνται από τη διάσταση του χώρου.

5.3 Νόρμες Πινάκων

Εισάγουμε τώρα τις νόρμες πινάκων. Στον γραμμικό χώρο $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ των πινάκων μπορούμε να ορίσουμε διάφορες νόρμες. Όμως, θεωρούμε τους πίνακες ως *απεικονίσεις* από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ και ορίζουμε τις νόρμες πινάκων με συγκεκριμμένο τρόπο.

Ορισμός 5.4. Μια απεικόνιση $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|$ λέγεται **νόρμα πινάκων**(ή **στάθμη πινάκων**) εαν

ΝΠ1. $\|A\| = 0$ εάν και μόνον εάν $A = 0$

ΝΠ2. Για κάθε $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}$, $\|av\| = |a|\,\|v\|$

ΝΠ3. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (τριγωνική ανισότητα)

ΝΠ4. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$

Παρατηρούμε οτι οι τρεις πρώτες ιδιότητες της νόρμας πίνακα ταυτίζονται με τις αντίστοιχες της νόρμας διανύσματος.

Παράδειγμα 5.8 Ένα παράδειγμα νόρμας πίνακα είναι η νόρμα Frobenius :

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} .$$

Όταν ο πίνακας A έχει πραγματικές συνιστώσες, $\|A\|_F == \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$. Όταν ο πίνακας A έχει μιγαδικές συνιστώσες, $\|A\|_F == \sqrt{\operatorname{tr}(A^T \bar{A})}$.

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε σε μια συγκεκριμμένη κατηγορία νορμών πινάκων, τις λεγόμενες **φυσικές νόρμες** ή **νόρμες τελεστών**.

Ορισμός 5.5. Έστω $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \|u\|_v$ μια νόρμα διανυσμάτων. Η απεικόνιση $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|_m$

$$\|A\|_m = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \tag{5.1}$$

λέγεται **φυσική νόρμα πίνακα** παραγόμενη από την νόρμα $\|\cdot\|_v$ του $\mathbb{R}^n$.

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς οτι μια *φυσική νόρμα πίνακα* είναι μια νόρμα πινάκων. Πράγματι μπορούμε να επαληθεύσουμε οτι η 5.1 ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του ορισμού 5.4. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|A\| = 0 \iff \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \iff \forall x \in \mathbb{R}^n \ Ax = 0 \iff A = 0$$

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \ \|A\|$$

$$\|A + B\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|A\|\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \ \|B\|$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από την

$$\|Ax\| \leq \|A\| \ \|x\|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, η οποία είναι άμεση συνέπεια του ορισμού 5.1.

5.3.1 Παραδείγματα φυσικών νορμών πινάκων

1. Στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την νόρμα μεγίστου $\|\cdot\|_\infty$. Η αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται ονομάζεται *νόρμα αθροίσματος γραμμών* και δίνεται από

$$A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \quad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{5.2}$$

2. Στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την νόρμα $\|\cdot\|_1$. Η αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται ονομάζεται *νόρμα αθροίσματος στηλών* και δίνεται από

$$A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \quad \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{5.3}$$

3. Στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την Ευκλείδια νόρμα $\|\cdot\|_2$. Η αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται δίνεται από

$$A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \quad \|A\|_2 = \big(\rho(A^T \ A)\big)^{1/2} \tag{5.4}$$

   όπου $\rho(A)$ είναι η *φασματική ακτίνα* του πίνακα A και ορίζεται ως το μέγιστο τών απολύτων τιμών των ιδιοτιμών του πίνακα A.

Παράδειγμα 5.9 Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

έχουμε ότι $\|A\|_\infty = 9,\ \|A\|_1 = 7,\ \|A\|_2 = 6,3543,\ \|A\|_F = 6,5574$

Τέλος να αναφέρουμε οτι η νόρμα Frobenius που ορίσαμε παραπάνω δεν είναι φυσική νόρμα.

5.4 Δείκτης κατάστασης πίνακα

Έστω $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και θεωρούμε τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$Ax = b. \tag{5.6}$$

Έστω οτι στα στοιχεία του b εισάγεται κάποια διαταραχή Δb. Αυτό έχει ως συνέπεια να διαταράξει την λύση του 5.6 σε $x + \Delta x$,

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b. \tag{5.7}$$

Ερώτημα : Μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος της σχετικής μεταβολής $\|\Delta x\|/\|x\|$ της λύσης του συστήματος λόγω της μεταβολής του δεξιού μέλους;

Με την χρήση των νορμών μπορούμε να απαντήσουμε θετικά στο παραπάνω ερώτημα. Ας δούμε πως ! Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις 5.6 και 5.7 παίρνουμε

$$A\ \Delta x = \Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\ \Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta b\| \tag{5.8}$$

για κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και την παραγόμενη φυσική νόρμα πίνακα. Υποθέτοντας οτι $b \neq 0$, άρα και $x \neq 0$, από την 5.6 έχουμε ότι

$$\|b\| \leq \|A\|\|x\| \tag{5.9}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 5.8, 5.9 παίρνουμε την εκτίμηση

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \tag{5.10}$$

Δοσμένου οτι για κάθε πίνακα A και νόρμα $\|\cdot\|$ μπορούμε να βρούμε b και Δb έτσι ώστε η 5.10 να ισχύει ως ισότητα καταλήγουμε οτι ο αριθμός

$$\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| \tag{5.11}$$

είναι ένας συντελεστής ¨ευαισθησίασ-μεγένθυσησ' που εκφράζει τη μέγιστη δυνατή μεταβολή της λύσης $\|\Delta x\|/\|x\|$ ως προς την μεταβολή του δεξιού μέλους $\|\Delta b\|/\|b\|$

Ορισμός 5.6. Ο αριθμός $\kappa(A) = \|A\|\ \|A^{-1}\|$ ονομάζεται **δείκτης κατάστασης** του πίνακα A.

Παρατηρούμε ότι ο $\kappa(A)$ είναι θετικός αριθμός και μάλιστα είναι μεγαλύτερος ή ίσος με την μονάδα,

$$1 = \|I\| = \|A\ A^{-1}\| \leq \|A\|\ \|A^{-1}\| = \kappa(A).$$

Η τιμή του $\kappa(A)$ εξαρτάται από την νόρμα πίνακα που χρησιμοποιούμε. Για το πίνακα στο παράδειγμα 5.5 έχουμε ότι $\kappa_\infty(A) = 63,\ \kappa_1(A) = 45,5,\ \kappa_2(A) = 32,45,\ \kappa_F(A) = 33,76.$

Ας δούμε τώρα με ένα πάραδειγμα πώς επηρεάζει ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα τη λύση ενός γραμμικού συστήματος.

Παράδειγμα 5.10 Θεωρούμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0,913 & 0,659 \\ 0,780 & 0,563 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,254 \\ 0,217 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

το οποίο έχει μοναδική λύση $x = (1, -1)^T$, αν φυσικά κάνουμε τις πράξεις ακριβώς, δηλαδή χρησιμοποιώντας άπειρα δεκαδικά ψηφία. Όμως αν θελούμε να λύσουμε το συστήμα σε ένα υπολογιστή οι πράξεις θα γίνουνε με αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας. Ο λόγος είναι ότι ακόμα και οι πιο σύγχρονοι υπολογιστές χρησιμοποιούν πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων για την αναπαράσταση των αριθμών.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να λύσουμε το παραπάνω σύστημα σε ένα υπολογιστή που χρησιμοποιεί 3 δεκαδικά ψηφία για αναπαράσταση των αριθμών. Τότε η απαλοιφή Gauss σε αυτόν τον υπολογιστή θα δώσει

$$\begin{bmatrix} 0,913 & 0,659 \\ 0 & 0,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,254 \\ 0,001 \end{bmatrix}$$

και η ανάδρομη αντικατάσταση θα δώσει την λύση $\tilde{x} = (1, -0,443)$!!! Ο λόγος αποτυχίας θα πεί κανείς είναι η αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας των τριών δεκαδικών ψηφίων του συγκεκριμένου υπολογιστή. Αυτό είναι εν μέρει σωστό και αν χρησιμοποιήσουμε έναν υπολογιστή με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων θα πάρουμε την ακριβή λύση του συστήματος $x = (1, -1)^T$.

Ας εξετάσουμε όμως λίγο πιο προσεκτικά το σύστημα αυτό. Ας κρατήσουμε τον πίνακα του συστήματος σταθερό και ας μεταβάλλουμε το δεξί μέλος ελάχιστα, και ας θεωρήσουμε το εξής διαταραγμένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0,913 & 0,659 \\ 0,780 & 0,563 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,253 \\ 0,218 \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Παρατηρήστε οτι η διαταραχή του δεξιού μέλους του 5.13 σε σχέση με το αντίστοιχο του 5.12 είναι $\Delta b = (-0,001, 0,001)$. Η ακριβής λύση του 5.13 είναι $y = (1223, -1694)^T$!!! Μια μικρή μεταβολή του δεξιού μέλους προκάλεσε μια *μεγάλη* μεταβολή στη λύση x. Η εκτίμηση 5.10 και μερικοί απλοί υπολογισμοί θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε γιατί συνέβη αυτό.

Θεωρούμε την νόρμα $\|\cdot\|_1$ στον $\mathbb{R}^n$ και την παραγόμενη νόρμα πίνακα 5.3. Τότε έχουμε

$$\|\Delta x\|_1 = \|y - x\|_1 = |1223 - 1| + |-1694 + 1| = 2915, \ \|x\|_1 = 2 \Rightarrow \tfrac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \sim 1,5 \times 10^3$$
$$\|\Delta b\|_1 = 2 \times 10^{-3}, \ \|b\|_1 = 0,471 \Rightarrow \tfrac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \sim 4 \times 10^{-3}$$

Επίσης

$$\|A\|_1 = \max(1,693,\ 1,222) = 1,693, \qquad \|A^{-1}\|_1 = 10^6 \max(1,572,\ 1,343) = 1,572 \times 10^6$$

Άρα ο δείκτης κατάστασης του πίνακα είναι $\kappa_1(A) = 2,66 \times 10^6$!!! Από την εκτίμηση 5.10 βλέπουμε αμέσως πως μια μικρή μεταβολή της τάξεως 10^{-3} στο δεξί μέλος του συστημάτος πολλαπλασιάστηκε από το δείκτη κατάστασης του πίνακα, τάξεως 10^6, για να δώσει μια μεγένθυνση τάξεως 10^3 στη λύση.

Από τον ορισμό του δείκτη κατάστασης $\kappa(A)$ βλέπουμε οτι αυτός ορίζεται για αντιστρέψιμους πίνακες. Μπορεί να δειχθεί οτι ο λόγος $1/\kappa(A)$ αποτελεί ένα μέτρο για την απόσταση του A από το σύνολο των μη-αντιστρέψιμων πινάκων. Ειδικότερα μπορούμε να δείξουμε την παρακάτω εκτίμηση

$$\frac{1}{\kappa(A)} \leq \inf\left\{\frac{\|A-B\|}{\|A\|}, \quad B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \text{ μη-αντιστρέψιμος}\right\}$$

Άρα όταν $\kappa(A) \to \infty$ ο πίνακας A τείνει να γίνει μη-αντιστρέψιμος. Για συγκεκριμμένες νόρμες πινάκων η προηγούμενη ανισότητα ισχύει και ως ισότητα.

Παρατηρήσεις

1. Για τον υπολογισμό του $\kappa(A)$ απαιτείται η γνώση του αντίστροφου A^{-1} του οποίου το κόστος υπολογισμού είναι πολύ υψηλό για μεγαλές τιμές του n. Στη πράξη χρησιμοποιούνται ειδικοί αλγόριθμοι οι οποίοι προσεγγίζουν την $\|A^{-1}\|$. Συναρτήσεις υπολογισμού του $\kappa(A)$ υπάρχουν σε όλα τα σύγχρονα πακέτα-βιβλιοθήκες επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Στη Python η συνάρτηση $numpy.linalg.cond(A,p)$ προσεγγίζει τον $\kappa(A)$ με μεγάλη ακρίβεια στη νόρμα πίνακα που προσδιορίζεται απο την παράμετρο p.

2. Όπως είδαμε, τόσο η ορίζουσα $det(A)$ όσο και ο λόγος $1/\kappa(A)$ αποτελούν μέτρα για το εαν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος ή οχι. Όμως για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος και κατά πόσο αυτό επηρεάζεται από μικρές διαταραχές στα δεδομένα, μεγαλή σημασία έχει ο δείκτης κατάστασης του πίνακα και όχι η ορίζουσα του. Αναφέρουμε το εξής χαρακτηριστικό παράδειγμα : Θεωρήστε την λύση ενός γραμμικού συστήματος ο πίνακας του οποίου είναι διαγώνιος και όλα τα στοιχεία του ειναι ίσα με $1/2$. Τότε $det(A) = 1/2^n \to 0, n \to \infty$ άρα για μεγαλές τιμές του n ο πίνακας τείνει να γίνει μη-αντιστρέψιμος. Από την άλλη μεριά όμως $\kappa(A) = 1,\ \forall n$ και σε οποιάδηποτε νόρμα. Άρα ο πίνακας είναι ιδανικός για να λύνουμε γραμμικά συστήματα με την έννοια ότι τυχόν μικρές διαταραχές στα δεδομένα ή στις πράξεις δεν θα επιρεάσουν την λύση.

3. Σε πολλές εφαρμογές καταλήγουμε να λύσουμε ένα πολύ μεγάλο γραμμικό σύστημα $Ax = b$, και η χρήση της απαλοιφής Gauss είναι συνήθως ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται. Λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας του υπολογιστή εισάγονται σφάλματα-διαταραχές τόσο στη αναπαράσταση των στοιχείων του συστήματος όσο και κατά την εκτέλεση των πράξεων. Η τελική λύση $\tilde{x}$ που δίνει ο υπολογιστής είναι μια προσέγγιση της ακριβούς λύσης x. Το σχετικό σφάλμα της προσεγγίσης αυτής μπορεί να εκτιμηθεί και δίνεται από
$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{2\ u\ \kappa_\infty(A)}{1-u\ \kappa_\infty(A)}$$

όπου u είναι το *μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης* με $u \sim 10^{-7}$ για απλή ακρίβεια και $u \sim 10^{-15}$ για διπλή ακρίβεια. Από την παραπάνω εκτίμηση περιμένουμε ότι αν $u\, \kappa_\infty(A) \sim 1$, δηλαδή αν $\kappa_\infty(A) >>> 1$, τότε το σχετικό σφάλμα στη λύση θα είναι πολυ μεγαλό. (Δείτε το προηγούμενο παράδειγμα με τον 2×2 πίνακα).

5.5 Εσωτερικό γινόμενο

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του συζυγούς, $\bar{a}$, κατανοώντας οτι εάν το σώμα $\mathbb{K}$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\bar{a} = a$.

Ορισμός 5.7. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση

$$V \times V \to \mathbb{K} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** εάν

ΕΓ 1. Είναι γραμμική στην πρώτη μεταβλητή, δηλαδή εάν για κάθε $u, v, w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

και

$$\langle av, w \rangle = a \langle v, w \rangle .$$

ΕΓ 2. Για κάθε $v, w \in V$,

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

ΕΓ 3. Για κάθε $v \in V$, εάν $v \neq 0$, τότε $\langle v, v \rangle > 0$.

Εάν $\langle v, w \rangle = 0$, λέμε οτι τα διανύσματα v και w είναι **ορθογώνια**.

Παρατηρούμε οτι εάν το σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, τότε η ιδιότητα ΕΓ 2 σημαίνει οτι το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό, και μαζί με την ΕΓ 1, οτι είναι γραμμικό και στη δεύτερη μεταβλητή.

Αντιθέτως, εάν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, για τη δεύτερη μεταβλητή έχουμε

$$\begin{aligned} \langle v, aw \rangle &= \overline{\langle aw, v \rangle} \\ &= \overline{a \langle w, v \rangle} \\ &= \bar{a} \langle v, w \rangle . \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.11 Στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο: εάν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Τα διανύσματα (x_1, x_2) και $(-x_2, x_1)$ είναι ορθογώνια διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 5.12 Στο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται εσωτερικό γινόμενο για $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i .$$

Δραστηριότητα 5.4 Τα διανύσματα (z_1, z_2) και $(-z_2, z_1)$ *δεν* είναι ορθογώνια στο $\mathbb{C}^2$ με αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα ορθογώνιο στο (z_1, z_2)

Παράδειγμα 5.13 Θεωρούμε πίνακα $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, και ορίζουμε την απεικόνιση $f : K^2 \times K^2 \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(v, w) &= v^T A \bar{w} && (5.14) \\ &= [v_1, v_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} && (5.15) \\ &= a v_1 \bar{w}_1 + b v_1 \bar{w}_2 + c v_2 \bar{w}_1 + d v_2 \bar{w}_2 \,. && (5.16) \end{aligned}$$

Ελέγξτε οτι ικανοποιείται η ιδιότητα ΕΓ1. Για την ΕΓ2, $aw_1\bar{v}_1 + bw_1\bar{v}_2 + cw_2\bar{v}_1 + dw_2\bar{v}_2 = \bar{a}\bar{v}_1 w_1 + \bar{b}\bar{v}_1 w_2 + \bar{c}\bar{v}_2 w_1 + \bar{d}\bar{v}_2 w_2$πρέπει να απαιτήσουμε $a = \bar{a}$, $d = \bar{d}$ και $c = \bar{b}$. Τέλος, για να ισχύει η ΕΓ3, πρέπει να ισχύει $av_1\bar{v}_1 + bv_1\bar{v}_2 + cv_2\bar{v}_1 + dv_2\bar{v}_2 > 0$ για κάθε $v \in K^2$, $v \neq 0$. Θεωρούμε $v = (1, 0)$ ή $v = (0, 1)$, και έχουμε $a > 0$, $d > 0$. Μπορούμε να δείξουμε οτι f ικανοποιεί την ιδιότητα ΕΓ3 εάν και μόνον εάν $ad - b\bar{b} > 0$. (Δες την Άσκηση 5.10 για την πραγματική περίπτωση.)

Παράδειγμα 5.14 Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(t)\, \overline{q(t)}\, dt \tag{5.17}$$

Δραστηριότητα 5.5 Ελέγξτε οτι η 5.17 πράγματι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Τα πολυώνυμα $p(x) = (x - \frac{1}{2})^2$ και $q(x) = (x - \frac{1}{2})^3$ είναι ορθογώνια:

$$\begin{aligned} \langle p(x), q(x) \rangle &= \int_0^1 (t - \tfrac{1}{2})^2 (t - \tfrac{1}{2})^3 dt \\ &= \int_0^1 (t - \tfrac{1}{2})^5 dt \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.15 Στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$, με πραγματικές τιμές, $C[a, b]$, ή με μιγαδικές τιμές , $C_{\mathbb{C}}[a, b]$, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(s)\, \overline{g(s)}\, ds \tag{5.18}$$

Δραστηριότητα 5.6 Ελέγξτε οτι η 5.18 πράγματι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Οι συναρτήσεις sin και cos είναι ορθογώνιες στο $C[0,\, \pi]$:

$$\int_0^\pi \sin t \cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2t dt = 0\,.$$

Θεώρημα 5.4 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει, για κάθε $v,\, w$:*

$$|\langle v,\, w\rangle| \leq \sqrt{\langle v,\, v\rangle}\sqrt{\langle w,\, w\rangle}\,.$$

Απόδειξη. Εάν $w = 0$, τότε και οι δύο πλευρές μηδενίζονται και η σχέση επαληθεύεται.

Υποθέτουμε οτι $w \neq 0$ και θεωρούμε, για $a \in \mathbb{K}$, το διάνυσμα $v - aw$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - aw,\, v - aw\rangle \\ &= \langle v,\, v\rangle - \langle v,\, aw\rangle - \langle aw,\, v\rangle + \langle aw,\, aw\rangle \\ &= \langle v,\, v\rangle - \bar{a}\langle v,\, w\rangle - a\overline{\langle v,\, w\rangle} + a\bar{a}\langle w,\, w\rangle\,. \end{aligned}$$

Ειδικότερα, για $a = \frac{\langle v,\, w\rangle}{\langle w,\, w\rangle}$ έχουμε

$$\langle v,\, v\rangle \geq \frac{\langle v,\, w\rangle\overline{\langle v,\, w\rangle}}{\langle w,\, w\rangle}$$

ή

$$|\langle v,\, w\rangle|^2 \leq \langle v,\, v\rangle\langle w,\, w\rangle\,,$$

και αφού οι πραγματικοί αριθμοί $\langle v,\, v\rangle$, $\langle w,\, w\rangle$ και $|\langle v,\, w\rangle|$ είναι θετικοί ή μηδέν, έχουμε

$$|\langle v,\, w\rangle| \leq \sqrt{\langle v,\, v\rangle}\sqrt{\langle w,\, w\rangle}\,.$$

□

Ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι οι ακόλουθες ανισότητες.

Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$, με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο $\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i$,

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Στο χώρο $C[a,\, b]$, με εσωτερικό γινόμενο $\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(s)g(s)ds$,

$$\left|\int_a^b f(s)g(s)ds\right| \leq \left(\int_a^b (f(s))^2\, ds\right)^{1/2}\left(\int_a^b (g(s))^2\, ds\right)^{1/2}.$$

Πρόταση 5.5 *Εάν V είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε ορίζεται μία νόρμα στο V:*

$$||v|| = \sqrt{\langle v,\, v\rangle}\,.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη των Ν 1 και Ν 2 είναι απλή. Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα Ν 3, παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= \langle v+w,\, v+w\rangle \\ &= ||v||^2 + ||w||^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle v,\, w\rangle\,, \end{aligned}$$

και οτι

$$(||v|| + ||w||)^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2||v||\,||w||\,.$$

Αλλά από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $\langle v,\, w\rangle \leq ||v||\,||w||$ και συνεπώς

$$||v+w||^2 \leq (||v|| + ||w||)^2\ .$$

Αφού οι πραγματικοί αριθμοί $||v+w||$, $||v||$ και $||w||$ είναι θετικοί ή μηδέν, έχουμε

$$||v+w|| \leq ||v|| + ||w||\,.$$

□

Με τον συμβολισμό της νόρμας, η ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφεται στη μορφή

$$|\langle v,\, w\rangle| \leq ||v||\,||w||\,.$$

Θεωρώντας τη νόρμα ως το μήκος του διανύσματος, μπορούμε να ορίσουμε τη **γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων** σε οποιοδήποτε πραγματικό διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$-1 \leq \frac{\langle v,\, w\rangle}{||v||\,||w||} \leq 1\,,$$

και συνεπώς υπάρχει $\vartheta \in [0,\, \pi]$ τέτοιο ώστε

$$\cos\vartheta = \frac{\langle v,\, w\rangle}{||v||\,||w||}\,. \tag{5.19}$$

Αυτός ο ορισμός γωνίας ταιριάζει με την έννοια της ορθογωνιότητας, που έχουμε ορίσει σε οποιοδήποτε χώρο με εσωτερικό γινόμενο, πραγματικό ή μιγαδικό. Όταν $\langle v,\, w\rangle = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ και τα διανύσματα v και w σχηματίζουν ορθή γωνία.

Στην ευκλείδεια γεωμετρία, ο 'νόμος του παραλληλογράμμου' λέει οτι σε ένα παραλληλόγραμμο, το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων. Όταν το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, αυτό είναι ισοδύναμο με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Θα δούμε οτι ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει σε κάθε διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση 5.6 *Έστω V ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.*

1. ***Νόμος του Παραλληλογράμμου.*** *Για κάθε $v,\, w \in V$ ισχύει η ισότητα*

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2 \,.$$

2. ***Πυθαγόρειο Θεώρημα.*** *Εάν $v_1,\, \ldots,\, v_k \in V$ και $\langle v_i,\, v_j\rangle = 0$ όταν $i \neq j$, τότε*

$$||v_1 + \cdots + v_k||^2 = ||v_1||^2 + \cdots + ||v_k||^2 \,.$$

Απόδειξη. Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο έχουμε $||v||^2 = \langle v,\, v\rangle$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= \langle v+w,\, v+w\rangle = \langle v,\, v\rangle + \langle v,\, w\rangle + \langle w,\, v\rangle + \langle w,\, w\rangle \,, && (5.20)\\ ||v-w||^2 &= \langle v-w,\, v-w\rangle = \langle v,\, v\rangle - \langle v,\, w\rangle - \langle w,\, v\rangle + \langle w,\, w\rangle \,. && (5.21) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις 5.20 και 5.21 έχουμε τον 'νόμο του παραλληλογράμμου'.

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2\langle v,\, v\rangle + 2\langle w,\, w\rangle \,.$$

Για $k = 2$ το 'Πυθαγόρειο Θεώρημα' προκύπτει από την 5.20, αφού $\langle v_1,\, v_2\rangle = 0$. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με επαγωγή στο k. Αφού $\langle v_1 + \cdots + v_{k-1},\, v_k\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} ||v_1 + \cdots + v_k||^2 &= ||v_1 + \cdots + v_{k-1}||^2 + ||v_k||^2 \\ &= ||v_1||^2 + \cdots + ||v_{k-1}||^2 + ||v_k||^2 \,. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 5.16 Θα δείξουμε οτι η ℓ^1 νόρμα στο $\mathbb{R}^2$ δεν ικανοποιεί το νόμο του παραλληλογράμμου. Θεωρούμε τα διανύσματα $v = (1,\, 0)$ και $w = (0,\, 1)$. Τότε $||v||_1 = |1| + |0| = 1$, $||w||_1 = 1$, και $||v+w||_1 = 2$, $||v-w||_1 = 2$. Άρα $2||v||^2 + 2||w||^2 = 4$ ενώ $||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 8$.

Αφού κάθε νόρμα που προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί το Νόμο του Παραλληλογράμμου, συμπεραίνουμε οτι η νόρμα ℓ^1 δεν προκύπτει από εσωτερικό γινόμενο.

5.6 Ορθοκανονικά σύνολα διανυσμάτων

Ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ονομάζεται **ορθογώνιο** εάν τα στοιχεία του είναι ορθογώνια ανά δύο, δηλαδή εάν για κάθε $i,\, j = 1, \ldots, n, i \neq j$,

$$\langle v_i,\, v_j\rangle = 0 \,.$$

Εάν επί πλέον, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $||v_i|| = 1$, το σύνολο ονομάζεται **ορθοκανονικό**. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό δ του Kronecker,

$$\delta_{ij} = \left[\begin{array}{ll} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{array}\right.$$

βλέπουμε οτι το σύνολο S είναι ορθοκανονικό εάν και μόνον εάν, για κάθε $i,\, j = 1, \ldots, n$,

$$\langle v_i,\, v_j\rangle = \delta_{ij}\,.$$

Λήμμα 5.7 *Ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο, και οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ είναι τέτοιοι ώστε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0,\, v_j\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i,\, v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \\ &= a_j\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς $a_j = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, και το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Ένα ορθοκανονικό σύνολο αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη βάση για το χώρο τον οποίο παράγει. Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς μία ορθοκανονική βάση δίδονται απλώς από τα εσωτερικά γινόμενα του διανύσματος με τα διανύσματα της βάσης. Πράγματι, εάν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση, και

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

τότε

$$\begin{aligned} \langle v,\, v_j\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\,,\, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i,\, v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \\ &= a_j\,. \end{aligned}$$

Σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση, εφαρμόζοντας τη διαδικασία **ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt**.

Θεώρημα 5.8 (Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt) *Θεωρούμε χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, και ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Τότε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$*

$$e_i \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

και

$$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \, .$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος ο συμβολισμός $\langle \ldots \rangle$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει τόσο το εσωτερικό γινόμενο όσο και τον παραγόμενο υπόχωρο, αλλά η διάκριση είναι συνήθως εύκολη από τα συμφραζόμενα.

Απόδειξη. Για κάθε j ορίζουμε πρώτα το διάνυσμα e'_j ορθογώνιο προς τα e_i για $i = 1, \ldots, j-1$, και μετά διαιρούμε με τη νόρμα του e'_j για να πάρουμε το μοναδιαίο διάνυσμα e_j. ένα σύνολο μη μηδενικών ορθογωνίων διανυσμάτων $e'_1, \ldots, e'_n$, και στη συνέχεια θα ορίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα

$$e_i = \frac{1}{||e'_i||} \, e'_i \, .$$

Αφού τα $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $v_1 \neq 0$, και ορίζουμε

$$e'_1 = v_1 \, , \qquad e_1 = \frac{1}{||e'_1||} \, e'_1 \, .$$

Το e'_2 προκύπτει από το v_2 αφαιρώντας κατάλληλο πολλαπλάσιο του e_1 ώστε e'_2 να είναι ορθογώνιο προς το e_1.

$$e'_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 \, .$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \langle e'_2, e'_1 \rangle &= \langle v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle \, e_1, e_1 \rangle \\ &= \langle v_2, e_1 \rangle - \langle v_2, e_1 \rangle \, \langle e_1, e_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι αφού τα e_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $e'_2 \neq 0$ και μπορούμε να διαιρέσουμε το e'_2 με τη νόρμα του για να πάρουμε το μοναδιαίο

$$e_2 = \frac{1}{||e'_2||} \, e'_2 \, .$$

Παρατηρούμε οτι τα e_1, e_2 παράγουν τον ίδιο υπόχωρο που παράγουν τα v_1, v_2.

Στη συνέχεια, για $j = 3, \ldots, n$, ορίζουμε αναδρομικά τα μη μηδενικά διανύσματα

$$e'_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle \, e_i \, , \tag{5.22}$$

τα οποία ικανοποιούν $\langle e_i, e'_j \rangle = 0$ για $i = 1, \ldots, j-1$. Το e'_j δεν είναι μηδενικό, άρα μπορούμε να το διαιρέσουμε με τη νόρμα του για να πάρουμε το διάνυσμα

$$e_j = \frac{1}{||e'_j||}\, e'_j\,.$$

Από την 5.22 είναι φανερό οτι

$$e_j \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$$

και οτι

$$v_j \in \langle e_1, \ldots, e_j \rangle\,.$$

Συνεπώς, για κάθε $j = 1, \ldots, n$

$$\langle e_1, \ldots, e_j \rangle = \langle v_1, \ldots, v_j \rangle\,.$$

□

Παρατήρηση Όταν κάνουμε υπολογισμούς με το χέρι, είναι συχνά προτιμότερο να υπολογίσουμε όλα τα e'_j, ακολουθώντας τη διαδικασία Gram – Schmidt όπως την περιγράψαμε στο Παράδειγμα 1.9, και στο τέλος να διαρέσουμε κάθε διάνυσμα e'_i με τη νόρμα του. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε να μεταφέρουμε σε όλη τη διαδικασία τις τετραγωνικές ρίζες που προκύπτουν από τη νόρμα.

Πολυώνυμα Legendre

Η συνήθης βάση του χώρου των πολυωνύμων, $\{1, x, x^2, \ldots\}$, δεν είναι ορθογώνια για οποιοδήποτε εσωτερικό γινόμενο της μορφής $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t)\bar{q}(t)dt$.

Για να ορίσουμε μία ορθοκανονική οικογένεια πολυωνύμων, που θα μας επιτρέπει να προσεγγίζουμε συναρτήσεις από τις προβολές τους στα στοιχεία αυτής της οικογένειας, διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στο διάστημα $[-1, 1]$. Με αυτή την επιλογή, κάθε άρτιο πολυώνυμο, για το οποίο $p(x) = p(-x)$, είναι εξ αρχής ορθογώνιο σε κάθε περιττό πολυώνυμο, για το οποίο $p(x) = -p(-x)$.

Θεωρούμε λοιπόν το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathbb{R}[x]$,

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt\,,$$

και τα πολυώνυμα $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2, \ldots, p_n(x) = x^n, \ldots$.

Ορίζουμε

$$w_0(x) = p_0(x) = 1\,.$$

Έχουμε $\langle p_1, w_0 \rangle = \int_{-1}^{1} t\, dt = 0$. Άρα

$$w_1(x) = p_1(x) - \frac{\langle p_1, w_0 \rangle}{\langle w_0, w_0 \rangle} w_0(x) = x\,.$$

Για να βρούμε το w_2, υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα

$$\begin{aligned}
\langle p_2,\, w_1\rangle &= \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0\,,\\
\langle p_2,\, w_0\rangle &= \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\,,\\
\langle w_0,\, w_0\rangle &= \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2\,,\\
\langle w_1,\, w_1\rangle &= \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
w_2(x) &= p_2(x) - \frac{\langle p_2,\, w_1\rangle}{\langle w_1,\, w_1\rangle} w_1(x) - \frac{\langle p_2,\, w_0\rangle}{\langle w_0,\, w_0\rangle} w_0(x)\\
&= x^2 - \frac{2/3}{2} = x^2 - \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

και

$$\langle w_2,\, w_2\rangle = \int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45}\,.$$

Όταν διαιρέσουμε τα w_0, w_1, w_2 με τη νόρμα τους, έχουμε

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\\
q_1(x) &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\,,\\
q_2(x) &= \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}(3x^2 - 1)\,.
\end{aligned}$$

Αυτά συνδέονται με τα πολυώνυμα Legendre,

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m\, m!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2 - 1)^m\,.$$

Για $m = 0,\, \ldots,\, n-1$, τα πολυώνυμα

$$q_m(x) = \sqrt{\frac{2m+1}{2}}P_m(x)$$

είναι η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ που προκύπτει με τη διαδικασία Gram – Schmidt, για το εσωτερικό γινόμενο στο διάστημα $[-1,\, 1]$, από τη συνήθη βάση $\{1,\, x,\, x^2,\, \ldots,\, x^{n-1}\}$.

Άσκηση 5.1 Θεωρούμε διανύσματα $v = (v_1, v_2)$ και $w = (w_1, w_2)$ στο $\mathbb{R}^2$.

1. Δείξτε οτι η συνάρτηση
$$(v, w) = 4v_1w_1 + 9v_2w_2$$
ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$.

2. Δείξτε οτι η συνάρτηση
$$(v, w) = 2v_1w_1 - v_2w_2$$
δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 5.2 Θεωρούμε το χώρο $C[0, 1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$, με εσωτερικό γινόμενο
$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

1. Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 2$.
2. Δείξτε οτι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 4x - 3$ είναι ορθογώνιες.
3. Βρείτε μία συνάρτηση ορθογώνια προς την $f(x) = 6x + 12$

Άσκηση 5.3 Θεωρούμε το μιγαδικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε τα (u, v), $||u||$, $||v||$ και την απόσταση $d(u, v) = ||u - v||$ για τα διανύσματα:

1. $u = (2 - \mathrm{i}, 3 + 2\mathrm{i}), \quad v = (3 - 2\mathrm{i}, 2 + \mathrm{i})$.
2. $u = (2 - 3\mathrm{i}, -2 + 3\mathrm{i}), \quad v = (1, 1)$.

Άσκηση 5.4 Στο χώρο $\mathbb{R}^3$, με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, βρείτε την ορθοκανονική βάση που προκύπτει από την εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt στη βάση
$$\{(1, 1, 0), (2, 1, 0), (0, 1, 2)\}.$$

Άσκηση 5.5 Θεωρήστε θετική συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε οτι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε

$$\langle p, q\rangle_f = \int_0^1 f(t)p(t)q(t)dt\,,$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Εάν $f(x) = x + 1$, βρείτε ορθοκανονική βάση για το χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 1, με το εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle_f$.

Άσκηση 5.6 Βρείτε όλα τα διαφορετικά εσωτερικά γινόμενα που ορίζονται σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης 2 πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5.7 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$, με εσωτερικό γινόμενο, και δύο διαφορετικά διανύσματα $a, b \in V$. Αποδείξτε οτι εάν $x \in V$ και $||x - a|| + ||x - b|| = ||a - b||$, τότε $x = \lambda a + \mu b$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda + \mu = 1$.

Άσκηση 5.8 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.

1. Επαληθεύστε οτι τα διανύσματα

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 2, -3),\ v_3 = (5, -4, -1)$$

   είναι ανά δύο ορθογώνια, και βρείτε μία ορθοκανονική βάση του V, διαφορετική από την κανονική.

2. Βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα τα οποία είναι ταυτόχρονα ορθογώνια με τα $v_1 - v_2$ και $v_1 + v_3$.

3. Βρείτε τα διανύσματα τα οποία είναι ορθογώνια στο $2v_2 + v_3$ και ανήκουν στον γραμμικό υπόχωρο που παράγεται από τα $v_1 - v_2$, $v_1 + v_3$.

Άσκηση 5.9 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, και τον υπόχωρο X που παράγεται από τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ και $u_2 = (0, 1, -1, 1)$.
Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $X^{\perp}$, και συμπληρώστε την σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 5.10 Έστω 2×2 πραγματικός πίνακας A. Δείξτε οτι η απεικόνιση

$$\langle x, y \rangle = x^T A y = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$ εάν και μόνον εάν $A^T = A$, $\det A > 0$ και $\operatorname{tr} A > 0$, (δηλαδή εάν $b = c$, $ad - b^2 > 0$ και $a > 0$).

5.7 Ερμιτιανοί τελεστές

Για έναν τελεστή L σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, έχουμε δει οτι εάν υπάρχει βάση του V η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L τότε ο πίνακας του L ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιος. Τώρα θα δούμε οτι σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να δώσουμε συγκεκριμένα κριτήρια για να συμβαίνει αυτό και μάλιστα η βάση να αποτελείται από ορθογώνια διανύσματα.

Σε αυτό το κεφάλαιο όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ ή το σώμα $\mathbb{R}$.

Ορισμός 5.8. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο και ένα γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Ο τελεστής L ονομάζεται **ερμιτιανός** εάν για κάθε $u, v \in V$,

$$\langle L(u), v\rangle = \langle u, L(v)\rangle .$$

Ένας ερμιτιανός τελεστής σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται **συμμετρικός**.

Παράδειγμα 5.17 Θεωρούμε τον τελεστή $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x+2y, 2x)$. Ως προς το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο έχουμε

$$\langle L(u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle (u_1 + 2u_2, 2u_1), (v_1, v_2)\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_1 + 2u_1v_2$$

και

$$\langle (u_1, u_2), L(v_1, v_2)\rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1 + 2v_2, 2v_1)\rangle = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 .$$

Ο τελεστής L είναι συμμετρικός.

Παράδειγμα 5.18 Θεωρούμε τον τελεστή $M : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $L(z, w) = (z + \mathrm{i}w, -\mathrm{i}z)$. Ως προς το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^2$ έχουμε

$$\langle L(u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle (u_1 + \mathrm{i}u_2, -\mathrm{i}u_1), (v_1, v_2)\rangle = u_1\bar{v}_1 + \mathrm{i}u_2\bar{v}_1 - \mathrm{i}u_1\bar{v}_2$$

και

$$\langle (u_1, u_2), L(v_1, v_2)\rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1 + \mathrm{i}v_2, -\mathrm{i}v_1)\rangle = u_1\bar{v}_1 + u_1\bar{\mathrm{i}}\bar{v}_2 + u_2(-\bar{\mathrm{i}})\bar{v}_1 .$$

Ο τελεστής L είναι ερμιτιανός.

Ορισμός 5.9. Θεωρούμε έναν τετραγωνικό μιγαδικό πίνακα $A = [a_{ij}]$. Ο **συζυγής** (ή **αναστροφοσυζυγής**) του πίνακα A είναι ο πίνακας $A^* = [b_{ij}]$, όπου

$$b_{ij} = \bar{a}_{ji} .$$

Δηλαδή οι όροι του πίνακα A^* είναι οι μιγαδικοί συζυγείς των όρων του ανάστροφου του A. Εάν ο πίνακας A είναι πραγματικός, τότε $A^* = A^T$.

Παράδειγμα 5.19 Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3+\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 2 & 3-\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

και

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 5.10. Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A ονομάζεται **ερμιτιανός** εάν είναι ίσος με τον συζυγή του, $A^* = A$.
Ένας ερμιτιανός πίνακας του οποίου όλοι οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί είναι **συμμετρικός**.

Παρατηρούμε οτι τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.

Λήμμα 5.9 *Θεωρούμε ερμιτιανό τελεστή $L : V \to V$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, και ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του V. Τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ερμιτιανός,*

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Εάν $A = [a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$,

$$L(u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k\,.$$

Αλλά τότε

$$\begin{aligned} \langle L(u_j),\, u_i\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k,\, u_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle a_{kj} u_k,\, u_i\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle u_k,\, u_i\rangle \\ &= a_{ij}\,, \end{aligned}$$

αφού η βάση είναι ορθοκανονική. Εξ άλλου,

$$\langle u_j,\, L(u_i)\rangle = \left\langle u_j,\, \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \langle u_j,\, a_{ki} u_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki} \langle u_j,\, u_k \rangle \\
&= \bar{a}_{ji}\,.
\end{aligned}
$$

Αφού ο L είναι ερμιτιανός, $a_{ij} = \langle L(u_j),\, u_i \rangle = \langle u_j,\, L(u_i) \rangle = \bar{a}_{ji}$ και ο πίνακας A είναι ίσος με τον συζυγή του.

□

Πρόταση 5.10 *Θεωρούμε μιγαδικό διανυσματικό χώρο V και τελεστή $L : V \to V$. Εάν ο L είναι ερμιτιανός, τότε οι ιδιοτιμές του L είναι πραγματικοί αριθμοί.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μία ιδιοτιμή του L, και $v \in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ, $L(v) = \lambda v$. Τότε

$$\langle L(v),\, v \rangle = \langle \lambda v,\, v \rangle = \lambda \langle v,\, v \rangle\,,$$

και

$$\langle v,\, L(v) \rangle = \langle v,\, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v,\, v \rangle\,.$$

Αφού $\langle v,\, v \rangle \neq 0$ και ο L είναι ερμιτιανός, $\lambda = \bar{\lambda}$. Άρα η ιδιοτιμή λ είναι πραγματικός αριθμός.

□

Λήμμα 5.11 *Εάν $L : V \to V$ είναι ερμιτιανός τελεστής, τότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ιδιοτιμές λ και μ του L και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u και v. Τότε

$$\lambda \langle u,\, v \rangle = \langle L(u),\, v \rangle = \langle u,\, L(v) \rangle = \bar{\mu} \langle u,\, v \rangle\,.$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, $\lambda \langle u,\, v \rangle = \mu \langle u,\, v \rangle$, και εάν $\lambda \neq \mu$, $\langle u,\, v \rangle = 0$.

□

5.8 Μοναδιαίοι τελεστές

Ορισμός 5.11. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο και ένα γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Ο τελεστής L ονομάζεται **μοναδιαίος** (ή **ορθομοναδιαίος**) εάν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή εάν για κάθε $u,\, v \in V$,

$$\langle L(u),\, L(v) \rangle = \langle u,\, v \rangle\,.$$

Ένας μοναδιαίος τελεστής σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Παράδειγμα 5.20 Ο τελεστής $L(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ είναι ορθογώνιος. Ο τελεστής $M(z, w) = (e^{\mathrm{i}\theta}z, e^{-\mathrm{i}\theta}w)$ είναι μοναδιαίος. Ελέγξτε οτι διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{C}^2$ αντίστοιχα.

Ορισμός 5.12. Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A ονομάζεται **μοναδιαίος** εάν $A^*A = \mathbf{I}_n$.
Ένας μοναδιαίος πίνακας του οποίου όλοι οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Παράδειγμα 5.21 Ένας 2×2 πραγματικός πίνακας είναι ορθογώνιος εάν και μόνον εάν είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

για κάποιο θ.

Λήμμα 5.12 *Θεωρούμε μοναδιαίο τελεστή $L : V \to V$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης n, και ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του V. Τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι μοναδιαίος,*

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Εάν $A = [a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε για κάθε $j = 1, \dots, n$,

$$L(u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}u_k\,.$$

Αφού ο L είναι μοναδιαίος και η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθοκανονική, $\langle L(u_i), L(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$. Εξ άλλου

$$\begin{aligned} \langle L(u_i), L(u_j)\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k, \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}u_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{\ell j}\langle u_k, u_\ell\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{\ell j}\delta_{k\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} \\ &= (A^*A)_{ji}\,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι $A^*A = \mathbf{I}_n$ και ο πίνακας A είναι μοναδιαίος.

□

Πρόταση 5.13 *Θεωρούμε μιγαδικό διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, και τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Εάν ο L είναι μοναδιαίος, τότε οι ιδιοτιμές του L είναι μιγαδικοί αριθμοί μέτρου* 1.

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μία ιδιοτιμή του L, και $v \in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ, $L(v) = \lambda v$. Τότε

$$\langle v, v\rangle = \langle L(v), L(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle .$$

Αφού $\langle v, v\rangle \neq 0$, $\lambda\bar{\lambda} = 1$.

□

5.9 Τριγωνοποίηση τελεστών σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Στο επόμενο Θεώρημα θα δείξουμε οτι όταν έχουμε χώρο με εσωτερικό γινόμενο, η βάση ως προς την οποία ο πίνακας ενός τελεστή είναι άνω τριγωνικός, μπορεί να επιλεγεί να είναι ορθοκανονική.

Θεώρημα 5.14 (Λήμμα Schur.) *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, με εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του V ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα του Θεωρήματος Τριγωνοποίησης, Θεώρημα 3.25. Πρέπει να δείξουμε οτι εάν V είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να επιλέξουμε τη βάση $\mathcal{B}'$ να είναι ορθοκανονική.

Υποθέτουμε οτι $\dim V = n \geq 2$. Ο τελεστής L έχει μία ιδιοτιμή λ_1. Έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα με $||u_1|| = 1$. Συμπληρώνουμε σε ορθοκανονική βάση του V, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ και θεωρούμε τον πίνακα $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Η πρώτη στήλη του A είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(u_1) = \lambda_1 u_1$, και συνεπώς ο A έχει τη μορφή

$$A = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right].$$

Θεωρούμε το V ως ευθύ άθροισμα των $V_1 = \langle u_1\rangle$ και $U = \langle u_2, \ldots, u_n\rangle$ και τις κανονικές απεικονίσεις $j_2 : U \to V_1 \oplus U$ και $p_2 : V_1 \oplus U \to U$, σελ. 128. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$M = p_2 \circ L \circ j_2 : U \to U$$

και παρατηρούμε οτι ο πίνακας που παριστάνει την απεικόνιση M ως προς τη βάση $\{u_2, \ldots, u_n\}$ είναι ο D.

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει βάση $\mathcal{W} = \{w_2, \ldots, w_n\}$, ως προς την οποία ο πίνακας T της απεικόνισης M είναι άνω τριγωνικός. Παρατηρούμε οτι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{u_1, w_2, \ldots, w_n\}$ έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{1\,2} & \ldots & b_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

δηλαδή είναι άνω τριγωνικός.

□

Πόρισμα 5.15 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο χ_L του τελεστή $L : V \longrightarrow V$ αναλύεται σε παράγοντες πρώτου βαθμού πάνω από το $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.*

Απόδειξη. Αφού $\chi_L(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$, οι ιδιοτιμές του L είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, και υπάρχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα $u_1 \in V$, με $||u_1|| = 1$, έστω για την ιδιοτιμή λ_1.

Για να εφαρμόσουμε την επαγωγή όπως στο Θεώρημα 5.14, αρκεί να παρατηρήσουμε οτι $\chi_L(x) = -(x-\lambda_1)\chi_M(x)$, και συνεπώς χ_M επίσης αναλύεται σε παραγόντες πρώτου βαθμού.

□

Παράδειγμα 5.22 θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$, το οποίο είναι γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμού. Θα βρούμε ορθογώνιο πίνακα ο οποίος τριγωνοποιεί τον A. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1, -1, 1)$, και $\lambda_2 = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και ιδιοδιάνυσμα $v_2 = (2, -1, 3)$. Σύμφωνα με την απόδειξη του Λήμματος Schur επιλέγουμε ένα ιδιοδιάνυσμα και βρίσκουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου που παράγεται από αυτό. Εάν επιλέξουμε το v_1, το ορθογώνιο συμπλήρωμα είναι ο χώρος $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle^{\perp} = \langle w_1, w_2 \rangle$, με

$$w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε τον τελεστή $M : W \longrightarrow W$, $M(w) = P \circ L(w)$, όπου P είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^3$ στο W. Για να υπολογίσουμε τα $M(w_1)$, $M(w_2)$, παρατηρούμε οτι $L(w_1) = (0, -2, 1) = v_1 - w_2$ και $L(w_2) = (2, 2, 3) = v_1 + 2w_1 + 3w_2$, άρα $M(w_1) = -w_2$ και $M(w_2) = 2w_1 + 3w_2$. Δηλαδή ο πίνακας του M ως προς τη βάση $\{w_1, w_2\}$ είναι ο $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Ο C έχει ιδιοτιμές $\mu_1 = 2$ με ιδιοδιάνυσμα $(1, 1)$, και $\mu_2 = 1$ με ιδιοδιάνυσμα $(2, 1)$. Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή M έχουν διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση $\{w_1, w_2\}$ τα $(1, 1)$ και $(2, 1)$. Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα συντεταγμένων $(1, 1)$ βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή M είναι το $w' = w_1 + w_2 = (0, 1, 1)$. Αυτό επιλέγουμε ως δεύτερο διάνυσμα της ορθογώνιας βάσης. Ως τρίτο διάνυσμα μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα ορθογώνιο στα v_1 και w'. Άρα έχουμε τη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

και τον ορθογώνιο πίνακα

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

για τον οποίο $Q^T A Q$ είναι άνω τριγωνικός.

5.10 Διαγωνιοποίηση ερμιτιανών τελεστών.

Θεώρημα 5.16 (Φασματικό Θεώρημα) *Κάθε ερμιτιανός τελεστής σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μία βάση από ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Ο πίνακας του τελεστή ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιος, με τις (πραγματικές) ιδιοτιμές στη διαγώνιο.*

Απόδειξη. Αφού ο τελεστής L είναι ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί, και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμού και στην περίπτωση που το σώμα είναι οι πραγματικοί αριθμοί.

Από το Λήμμα του Schur, υπάρχει ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο πίνακας A του L είναι άνω τριγωνικός. Τότε ο πίνακας A^* είναι κάτω τριγωνικός. Αλλά αφού ο L είναι ερμιτιανός, $A^* = A$, και συνεπώς ο πίνακας A είναι διαγώνιος. Τότε τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή, ενώ η βάση αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του τελεστή.

□

Παράδειγμα 5.23 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix}$. Ελέγξτε οτι ο A είναι ερμιτιανός, $A^* = A$. Οι ιδιοτιμές του A είναι 0 και 6, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(2+\mathrm{i}, -1)$

και $(2+\mathrm{i},\, 5)$. Διαιρούμε με τις νόρμες $\|(2+\mathrm{i},\, 1)\| = \sqrt{6}$ και $\|(2+\mathrm{i},\, 5)\| = \sqrt{30}$ και έχουμε τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2+\mathrm{i},\, -1)$ και $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2+\mathrm{i},\, 5)$. Ο μοναδιαίος πίνακας

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

διαγωνιοποιεί τον A,

$$U^*AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 5.17 *Για κάθε ερμιτιανό πίνακα $A \in \mathcal{M}(n,\, \mathbb{C})$ υπάρχει μοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε $\Lambda = U^*AU$ είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.*
Για κάθε συμμετρικό πίνακα $A \in \mathcal{M}(n,\, \mathbb{R})$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q τέτοιος ώστε $\Lambda = Q^TAQ$ είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.

Θεώρημα 5.18 (Θεώρημα Φασματικής Ανάλυσης.) *Κάθε ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathcal{M}(n,\, \mathbb{C})$ με k διαφορετικές ιδιοτιμές εκφράζεται ως άθροισμα*

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k\,,$$

όπου λ_i, για $i = 1,\, \ldots,\, k$, είναι οι ιδιοτιμές και P_i είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ_i.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε οτι ένας τρόπος να περιγράψουμε το γινόμενο δύο πινάκων, AB είναι ως άθροισμα πινάκων που προκύπτουν από το γινόμενο της i-στήλης του A με την i-γραμμή του B. Συγκεκριμένα,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} & \ldots & b_{ik} \end{bmatrix}.$$

Αναλύουμε με αυτό τον τρόπο το γινόμενο $A = U(\Lambda U^*)$.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\bar{u}_{11} & \ldots & \lambda_1\bar{u}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n\bar{u}_{1n} & \ldots & \lambda_n\bar{u}_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \ldots & \bar{u}_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{bmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1n} & \ldots & \bar{u}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i} & \ldots & \bar{u}_{ni} \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον υπόχωρο που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $(u_{1i}, \ldots, u_{ni})$.

Εάν η ιδιοτιμή λ_j έχει πολλαπλότητα k και ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $w_1, \ldots, w_k$, τότε ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον ιδιόχωρο της λ_j είναι το άθροισμα των ορθογωνίων προβολών σε κάθε ένα από τα $w_1, \ldots, w_k$,

$$P_j = w_1 w_1^* + \cdots + w_k w_k^* \, .$$

□

Παράδειγμα 5.24 Θεωρούμε τον πίνακα A του Παραδείγματος 5.23. Ο A έχει ιδιοτιμές 0 και 6, με αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2+\mathrm{i},\, -1)$ και $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2+\mathrm{i},\, 5)$. Οι πίνακες προβολής στους ιδιόχωρους είναι $u_1 u_1^*$ και $u_2 u_2^*$. Η φασματική ανάλυση του πίνακα A είναι

$$A = 0 u_1 u_1^* + 6 u_2 u_2^* = 6 \begin{bmatrix} \frac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2-\mathrm{i}}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} .$$

5.11 Κανονικοί τελεστές

Οι ερμιτιανοί δεν είναι οι μόνοι τελεστές που διαγωνιοποιούνται από ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα. Για τελεστές σε μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους, μπορούμε να διατυπώσουμε ένα απλό κριτήριο που χαρακτηρίζει τους ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμους τελεστές.

Ορισμός 5.13. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο. Ένας τελεστής $L : V \longrightarrow V$ λέγεται **κανονικός** εάν

$$L \circ L^* = L^* \circ L\,.$$

Εάν A είναι ο πίνακας του τελεστή L ως προς μία ορθοκανονική βάση του V, τότε ο πίνακας του τελεστή L^* είναι ο συζυγής πίνακας A^*, και ο τελεστής L είναι κανονικός εάν και μόνον εάν $AA^* = A^*A$.

Παράδειγμα 5.25 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ και τον τελεστή $T_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$. Τότε $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ και

$$AA^* = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = A^*A\,,$$

άρα T_A είναι κανονικός τελεστής στο $\mathbb{C}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Οι ιδιοτιμές του T_A είναι $2+3\mathrm{i}$, $2-3\mathrm{i}$, και τα ιδιοδιανύσματα $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i},\, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathrm{i},\, 1)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^2$. Ως προς αυτή τη βάση, ο πίνακας του T_A είναι ο

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2-3\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Λήμμα 5.19 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, L είναι κανονικός τελεστής στον V και v είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ, τότε v είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του τελεστή L^* για την ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή $L - \lambda\mathbf{I}$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
(L-\lambda\mathbf{I})\circ(L-\lambda\mathbf{I})^* &= (L-\lambda\mathbf{I})\circ(L^*-\bar{\lambda}\mathbf{I}) = L\circ L^* - \lambda L^* - \bar{\lambda}L + |\lambda|^2\mathbf{I}\,,\\
(L-\lambda\mathbf{I})^*\circ(L-\lambda\mathbf{I}) &= (L^*-\bar{\lambda}\mathbf{I})\circ(L-\lambda\mathbf{I}) = L^*\circ L - \lambda L^* - \bar{\lambda}L + |\lambda|^2\mathbf{I}\,,
\end{aligned}$$

και αφού L είναι κανονικός, $L - \lambda\mathbf{I}$ είναι επίσης κανονικός.

Για το ιδιοδιάνυσμα v ισχύει $(L-\lambda\mathbf{I})(v) = 0$. Άρα

$$\begin{aligned}
0 = \langle (L-\lambda\mathbf{I})(v),\, (L-\lambda\mathbf{I})(v)\rangle &= \langle v,\, (L-\lambda\mathbf{I})^*\circ(L-\lambda\mathbf{I})(v)\rangle\\
&= \langle v,\, (L-\lambda\mathbf{I})\circ(L-\lambda\mathbf{I})^*(v)\rangle\\
&= \langle (L-\lambda\mathbf{I})^*(v),\, (L-\lambda\mathbf{I})^*(v)\rangle\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή $(L^* - \bar{\lambda}\mathbf{I})(v) = 0$ και v είναι ιδιοδιάνυσμα του L^* για την ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$.

□

Λήμμα 5.20 *Τα ιδιοδιανύσματα ενός κανονικού τελεστή για διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Εάν λ_1, λ_2 είναι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του τελεστή L, και v_1, v_2 είναι αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα,

$$\begin{aligned}\lambda_1\langle v_1,\, v_2\rangle &= \langle \lambda_1 v_1,\, v_2\rangle\\ &= \langle L(v_1),\, v_2\rangle\\ &= \langle v_1,\, L^*(v_2)\rangle\\ &= \langle v_1,\, \bar{\lambda}_2 v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1,\, v_2\rangle\,.\end{aligned}$$

Αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$, συμπεραίνουμε οτι $\langle v_1,\, v_2\rangle = 0$.

□

Θεώρημα 5.21 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης $\dim V = n$ πάνω από το $\mathbb{C}$, με εσωτερικό γινόμενο, και τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Ο τελεστής L είναι κανονικός εάν και μόνον εάν ο L είναι μοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L. Ως προς αυτή τη βάση, ο πίνακας του L είναι διαγώνιος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι υπάρχει ορθοκανονική βάση του V από ιδιοδιανύσματα του L. Ο πίνακας του L ως προς αυτή τη βάση είναι

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

και ο πίνακας του συζυγούς τελεστή L^* ως προς την ίδια βάση είναι

$$\Lambda^* = \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}.$$

Αφού $\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$, έπεται οτι $L \circ L^* = L^* \circ L$ και ο L είναι κανονικός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε οτι ο τελεστής L είναι κανονικός. Ο L έχει μία ιδιοτιμή $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, με ιδιοδιάνυσμα v_1. Θεωρούμε τον υπόχωρο $W_1 = \langle v_1\rangle^{\perp}$ των διανυσμάτων που είναι ορθογώνια προς το v_1, και θέτουμε $V_1 = W_1$. Εάν $w \in V_1$, τότε

$$\langle v_1,\, L(w)\rangle = \langle L^*(v_1),\, w\rangle = \bar{\lambda}_1\langle v_1,\, w\rangle = 0\,.$$

Άρα $L(w) \in V_1$, και V_1 είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του L. Άρα υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα v_2 του L που ανήκει στον υπόχωρο V_1. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε οτι ο υπόχωρος $W_2 = \langle v_2\rangle^{\perp}$

είναι αναλλοίωτος από τον L. Θέτουμε $V_2 = V_1 \cap W_2$, και παρατηρούμε οτι V_2 είναι υπόχωρος του V_1 και είναι αναλλοίωτος από τον L.

Υποθέτουμε οτι για $k < n$ έχουμε βρεί ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ του L τέτοια ώστε $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ για $i \neq j$, και $V_k = \langle v_1 \rangle^\perp \cap \cdots \langle v_k \rangle^\perp$ είναι υπόχωρος του V αναλλοίωτος από τον L. Τότε υπάρχει ιδιοδιάνυσμα v_{k+1} του L στον V_k, και ο υπόχωρος $V_{k+1} = V_k \cap \langle v_{k+1} \rangle^\perp$ είναι αναλλοίωτος από τον L.

Αφού $\dim V < \infty$, καταλήγουμε σε βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του V, που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L. Θέτουμε $q_i = \frac{1}{\langle v_i, v_i \rangle^{1/2}} v_i$, και $\{q_1, \ldots, q_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V από ιδιοδιανύσματα του L.

$\square$