Θεώρημα (Weierstrass): Αν $f \in C[-1,1]$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο q τέτοιο ώστε $\|f-q\|_\infty < \varepsilon$

Άσκηση: Αν $-1 \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le 1$, $f \in C[-1,1]$ δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει πολυώνυμο p (όχι απαραίτητα βαθμού το πολύ n) τέτοιο ώστε

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i=0,\dots,n \quad \text{και} \quad \|f-p\|_\infty < \varepsilon$$

Απόδειξη: Έστω $\hat{\varepsilon}>0$ ένα κατάλληλο μικρό $\hat{\varepsilon}$, το οποίο θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Από το θεώρημα Weierstrass για $\hat{\varepsilon}>0$ υπάρχει q πολυώνυμο τ.ω.

$$\|f-q\|_\infty < \hat{\varepsilon}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - q(x)$ και το πολυώνυμο παρεμβολής $r \in \mathbb{P}_n$ της φ στα σημεία $x_0, \dots, x_n$

Τότε το $p = q + r$ είναι πολυώνυμο και στα σημεία $x_0, \dots, x_n$ ικανοποιεί

$$p(x_i) = q(x_i) + r(x_i) = q(x_i) + \varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Άρα το p παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$.

Μένει να δείξουμε την εκτίμηση φράγματος.

Έστω $L_0, \dots, L_n$ τα πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$

τότε $$r(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(x_i) L_i(x)$$

Επομένως

$$\|r\|_\infty \le \sum_{i=0}^{n} |g(x_i)|\,\|L_i\|_\infty \le \|g\|_\infty \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \|L_i\|_\infty}_{C} = C\,\|g\|_\infty$$

$$= C\,\|f-q\|_\infty \le C\tilde{\varepsilon}$$

Άρα $\|f-p\|_\infty = \|f-(q+r)\|_\infty \le \|f-q\|_\infty + \|r\|_\infty \le (C+1)\tilde{\varepsilon}$

Οπότε αν θέλουμε $\|f-p\|_\infty < \varepsilon$ αρκεί να επιλέξουμε $\tilde{\varepsilon} \le \dfrac{\varepsilon}{1+C}$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $p \in \mathbb{P}_3$ με $p(x_i) = \ln(x_i)$, $x_i = i+1$, $i = 0, 1, 2, 3$

Δείξτε ότι η συνάρτηση ε, $\varepsilon(x) = \ln(x) - p(x)$ έχει στο διάστημα $[1, 4]$ ακριβώς 4 ρίζες

<u>Απόδειξη</u>: Η $f(x) = \ln(x)$ είναι $C^4[1, 4]$, από το Θεώρημα του σφάλματος της παρεμβολής που έχουμε δείξει ισχύει

$$\forall x \in [1, 4], \ \exists \xi \in (1, 4) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \prod_{i=0}^{3} (x - x_i)$$

Εκτός από τις προφανείς ρίζες x_i, $i = 0, 1, 2, 3$, έστω ότι η $\varepsilon(x)$ έχει μια ρίζα ακόμα $\hat{x} \in (1, 4)$, $\hat{x} \neq x_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Δηλαδή $f(\hat{x}) = p(\hat{x})$

Τότε σύμφωνα με την εξίσωση του σφάλματος υπάρχει ξ τ.ω.

$$0 = f(\tilde{x}) - p(\tilde{x}) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \prod_{i=0}^{3} (\tilde{x} - x_i)$$

Δηλαδή $f^{(4)}(\xi) = 0$.

Όμως $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \ldots \Rightarrow f^{(4)}(x) = -6\frac{1}{x^4}$, η οποία δεν

έχει ρίζα στο $[1,4]$. Συνεπώς καταλήγουμε σε άτοπο

Άσκηση: Έστω $p \in \mathbb{P}_3$ τέτοιο ώστε $p(i) = e^i$, $i = 1, 2, 3, 4$

Δείξτε ότι $\forall\, x \in (2,3)$ $e^x > p(x)$

Απόδειξη: $f(x) = e^x$ και $p \in \mathbb{P}_3$ το πολυώνυμο παρεμβολής με τιμές τα σημεία $x_i = i+1$, $i = 0, 1, 2, 3$

Τότε από την εξίσωση για το σφάλμα της παρεμβολής: $\forall\, x \in [1,4]$, $\exists\, \xi \in (1,4)$:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$= \frac{e^{\xi}}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Η ποσότητα μηδέν $f(x)-p(x)>0$ αν και μόνο αν

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$$

Αυτό όμως, για $x\in[1,4]$, ικανοποιείται μόνο για $x\in(2,3)$

Άσκηση: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x_i = -1 + i\frac{2}{n}$, $i = 0, \dots, n$, $f \in C[-1,1]$

και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$.

Αν η f είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αντίστοιχα, τότε και το p είναι άρτιο ή περιττό αντίστοιχα.

Απόδειξη: Ο διαμερισμός είναι τέτοιος ώστε αν x_i είναι κόμβος τότε και ο $-x_i$ είναι κόμβος.

Άρτιο: $f(x) = f(-x)$

Έστω f περιττή συνάρτηση, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$

Θεωρούμε το $q \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $q(x) := -p(-x)$

Τότε $q(x_i) = -p(-x_i) = -f(-x_i) = f(x_i)$, $i=0,\dots,n$

Συνεπώς το q παρεμβάλει την f στα σημεία x_i, $i=0,\dots,n$.

Όμως το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ είναι μοναδικό, τότε

$p \equiv q$ δηλαδή $p(x) = -p(-x)$.

Άρα το p είναι περιττή συνάρτηση.

Η απόδειξη για την άρτια συνάρτηση γίνεται ανάλογα.

Άσκηση: Έστω $f \in C[a,b]$, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$. Αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο P, το οποίο παρεμβάλλει την f στα ίδια σημεία είναι της μορφής

$$P = p + rq, \quad \text{όπου } q \text{ τυχόν πολυώνυμο και}$$

$$r(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$$

Απόδειξη: Το $P-p$ θα είναι ένα πολυώνυμο το οποίο θα έχει ρίζες τα $x_0, \dots, x_n$.

Συνεπώς $(P-p)(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n) \cdot q(x)$, με q κάποιο άλλο πολυώνυμο.

Δείξαμε λοιπόν ότι $P = p + rq$