Άσκηση: Έστω $x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία. Αν $f \in C^4[a,b]$ και $p \in \mathbb{P}_3$ τέτοιο ώστε

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,2$$

$$p'(x_1) = f'(x_1)$$

αποδείξτε ότι

$$\forall x \in [a,b] \;\; \exists \xi \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{1}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2) f^{(4)}(\xi)$$

Απόδειξη: Για $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$ ισχύει (προφανώς). Έστω $x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

Θέτουμε $\Phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$ και ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση $\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\Phi(t)$, $t \in [a,b]$

Προφανώς $\varphi \in C^4[a,b]$ και $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0,1,2$, $\varphi(x) = 0$

Επομένως υπάρχουν τρία σημεία ξ_1, ξ_2, ξ_3 διαφορετικά μεταξύ τους τω $\varphi'(\xi_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3$

Επίσης $\varphi'(t) = f'(t) - p'(t) - \dfrac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi'(t)$

και εύκολα παρατηρούμε ότι $\varphi'(x_1) = 0$

Συνεπώς η φ' έχει 4 ρίζες διαφορετικές ανά δύο. Οπότε η φ'' έχει 3 ρίζες, η $\varphi^{(3)}$ έχει 2 ρίζες και η $\varphi^{(4)}$ έχει μια ρίζα.

Έστω $\xi \in (a, b)$ τω $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$.

Επειδή $\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \dfrac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} 4!$

$$\Rightarrow \varphi^{(4)}(\xi) = 0 \Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \Phi(x)$$

Άσκηση: Έστω $f \in C^2[-1,1]$ και $p_1 \in \mathbb{P}_1$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f ως προς τα σημεία $x_0=-1$ και $x_1=1$.

Δείξτε ότι

$$|f(x)-p_1(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2}(1-x^2), \quad \forall x \in [-1,1]$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα για το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής Lagrange γνωρίζουμε ότι

$\forall x \in [-1,1], \ \exists \xi \in (-1,1)$ τω

$$f(x)-p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)(x-x_1) = \frac{f''(\xi)}{2}(x+1)(x-1)$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2}(x^2-1)$$

Συνεπως

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]} |f''(x)|}{2} \cdot (1-x^2)$$

Άσκηση Έστω $f(x) = x^3$ και $p_1 \in \mathbb{P}_1$ το πολυώνυμο παρεμβολής ως προς τα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = a$

Δείξτε ότι

$$\forall x \in [0, a], \quad f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)x, \quad \xi = \frac{1}{3}(x+a)$$

Απόδειξη: Το γραμμικό πολυώνυμο p_1 θα είναι

$$p_1(x) = \frac{f(a) - f(0)}{a}(x-0) + f(0)$$

$$= \frac{a^3}{a} x = a^2 x$$

Άρα $f(x) - p_1(x) = x^3 - a^2 x = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)x = \frac{6}{2}\xi(x-a)x$

Συνεπώς $x^3 - a^2 x = x(x^2 - a^2) = x(x-a)(x+a) = 3\xi(x-a)x$

οπότε $\xi = \dfrac{(x+a)}{3}$

Άσκηση: Έστω $f(x) = (2x-a)^4$ και $p_1 \in \mathbb{P}_1$ το πολυώνυμο παρεμβολής στα σημεία $x_0=0$ και $x_1=a$, τότε δείξτε ότι υπάρχουν δύο σημεία ξ τ.ω.

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2} x(x-a)$$

Απόδειξη: Το $p_1(x) = \dfrac{f(a)-f(0)}{a} x + f(0) = \dfrac{a^4 - a^4}{a} x + a^4 = a^4$

Οπότε $f(x) - p_1(x) = (2x-a)^4 - a^4 = \left((2x-a)^2 - a^2\right)\left((2x-a)^2 + a^2\right)$

$$= (2x-a-a)(2x-a+a)\left((2x-a)^2+a^2\right)$$

$$= 4(x-a)x\left((2x-a)^2+a^2\right)$$

Συνεπώς $f(x) - p_1(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)x$, έχουμε ότι

$$f''(\xi) = 8\left((2x-a)^2+a^2\right)$$

$f(x) = (2x-a)^4$, $f'(x) = 4(2x-a)^3 \cdot 2 = 8(2x-a)^3$

$f''(x) = 24 \cdot 2\,(2x-a)^2$

Άρα $f''(\xi) = 48\,(2\xi-a)^2$

Οπότε $(2\xi-a)^2 = \frac{1}{48}\,8\left((2x-a)^2 + a^2\right) = \frac{1}{6}\left((2x-a)^2 + a^2\right)$

ή $\xi = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{\frac{1}{6}\left((2x-a)^2 + a^2\right)}\right)$

Άσκηση. Κατασκευαστε το πολυωνυμο παρεμβολης Hermite βαθμου 3 για τη συναρτηση $f(x)=x^5$, χρησιμοποιωντας τους κομβους $x_0=0$, $x_1=a$

Δειξτε οτι $p(x)=3a^2x^3-2a^3x^2$. Στη συνεχεια δειξτε οτι

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2x^2 \quad \text{με} \quad \xi=\frac{1}{5}(x+2a)$$

Αποδειξη: Το πολυωνυμο βαθμου 3 θα πρεπει να ικανοποιει τις σχεσεις

$$p(0)=f(0), \quad p'(0)=f'(0), \quad p(a)=f(a), \quad p'(a)=f'(a)$$

Αν $p(x)=Ax^3+Bx^2+\Gamma x+\Delta$, πρεπει να προσδιορισουμε τα A, B, Γ, Δ

Εύκολα βλέπουμε από τις $p(0)=f(0)$, $p'(0)=f'(0)$, ότι $\Gamma=\Delta=0$

Άρα $p(x)=Ax^3+Bx^2$, $p'(x)=3Ax^2+2Bx$

Από τις $p(a)=f(a)=a^5$ και $p'(a)=f'(a)=5a^4$ παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} Aa^3+Ba^2&=a^5 \\ 3Aa^2+2Ba&=5a^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} Aa+B&=a^3 \\ 3Aa+2B&=5a^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A&=3a^2 \\ B&=-2a^3 \end{aligned}$$

Συνεπώς $p(x)=3a^2x^3-2a^3x^2$

Στη συνέχεια $f(x)-p(x) = x^5 - x^2(3a^2x - 2a^3)$

$$= x^2(x^3 - 3a^2x + 2a^3)$$

Επειδή σύμφωνα με το θεώρημα για το σφάλμα της παρεμβολής Hermite θα έχουμε ότι

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^2 (x-a)^2, \text{ για κάποιο } \xi,$$

θα έχουμε ότι $$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2 = x^3 - 3a^2x + 2a^3$$

Εύκολα τώρα μπορούμε να δούμε ότι

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x-a)^2(\gamma x + \delta), \text{ με } \gamma = 1 \text{ και } \delta = 2a$$

Συνεπώς

$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = (x+2a)$$

Οπότε $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$, ..., $f^{(4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\, x = 5!\, x$

Άρα $5\xi = (x+2a) \Rightarrow \xi = \frac{1}{5}(x+2a)$

Ασκηση. Εστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ενας διαμερισμος του $[a,b]$ και $m \in \mathbb{N}$. Αν

$$\Sigma_m(\Delta) = \left\{ s \in C^m[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m,\ i = 0, \dots, n-1 \right\}$$

δείξτε οτι ο χωρος των συναρτησεων $\Sigma_m(\Delta)$ συμπιπτει με το χωρο των πολυωνυμων βαθμου το πολύ m στο $[a,b]$

Απόδειξη: Εστω ένας εσωτερικος κομβος x_i, $i = 1, \dots, n-1$

Στο $[x_{i-1}, x_i]$ η $s \in \Sigma_m(\Delta)$ ειναι πολυωνυμο βαθμου το πολύ m.

Αναπτύσοντας κατα Taylor την $s\big|_{[x_{i-1}, x_i]}$ με κεντρο το x_i

$$S(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i -)}{j!} (x - x_i)^j \quad , \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

όπου $S^{(j)}(x_i -)$ είναι η παράγωγος τάξεως j της s (από αριστερά)

$$s^{(j)}(x_i -) = \lim_{\substack{x \to x_i^- \\ (x < x_i)}} s^{(j)}(x)$$

Ανάλογα για την $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$,

$$S(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i +)}{j!} (x - x_i)^j \quad , \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

όπου $s^{(j)}(x_i +)$ είναι η παράγωγος τάξεως j της s (από δεξιά)

Επειδή η s είναι $C^m[a,b]$, $s^{(j)}(x_i+) = s^{(j)}(x_i-)$, $j=0,\dots,m$

Άρα το s είναι το ίδιο πολυώνυμο στο $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$

και αυτό συμβαίνει για $i=1,2,\dots,n-1$

Συνεπώς $s \in \mathbb{P}_m$

Άσκηση: Αν $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, με $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$

τότε δείξτε ότι για $\Phi(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

$$\max_{a \le x \le b} |\Phi(x)| \le \frac{n!\, h^{n+1}}{4}$$

Απόδειξη.

Αν $\max\limits_{a \le x \le b} |\Phi(x)| = |\Phi(\tilde{x})|$, τότε το $\tilde{x} \in [x_i, x_{i+1}]$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\tilde{x} \in [x_0, x_1]$ (διαφορετικά η απόδειξη γίνεται ανάλογα)

$$\max_{a \le x \le b} |\Phi(x)| = \max_{x_0 \le x \le x_1} |\Phi(x)| = \max_{x_0 \le x \le x_1} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_n)|$$

$$\leq \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \left|(x-x_0)(x-x_1)\right| \cdot 2h \cdot 3h \cdot \ldots \cdot nh$$

$$= \frac{h^2}{4} \, n! \, h^{n-1} = \frac{h^{n+1} \, n!}{4}$$