Άσκηση: Προσδιορίστε τα βάρη w_1 και w_2 έτσι ώστε ο τύπος

$$Q(f) = w_1 f(\tfrac{1}{2}) + w_2 f(1),$$ να ολοκληρώνει στο διάστημα $[-1,1]$ πολυώνυμα μέχρι και πρώτου βαθμού ακριβώς

Απόδειξη: Έστω $q_i(x) = x^i$, $i = 0, 1$.

Για να ολοκληρώσει ο τύπος Q ακριβώς μέχρι και πολυώνυμα βαθμού 1 αρκεί να ολοκληρώνει ακριβώς τα q_0, q_1

$$\int_{-1}^{1} q_0(x)dx = 2 \quad \text{και} \quad \int_{-1}^{1} q_1(x)dx = 0$$

Πρέπει λοιπόν

$$\left.\begin{aligned} w_1 q_0(\tfrac{1}{2}) + w_2 q_0(1) &= w_1 + w_2 = 2 \\ w_1 q_1(\tfrac{1}{2}) + w_2 q_1(1) &= w_1 \tfrac{1}{2} + w_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2 \\ w_2 &= -\frac{1}{2} w_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} w_1 - \frac{1}{2} w_1 &= 2 \\ w_2 &= -\frac{1}{2} w_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} w_1 &= 4 \\ w_2 &= -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2 \end{aligned}$$

Άσκηση: Προσδιορίστε τα βάρη w_1, w_2 και τους κόμβους x_1 και x_2 έτσι ώστε ο τύπος Q, $Q(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$ να ολοκληρώνει στο διάστημα $[-1,1]$ ακριβώς πολυώνυμα του μεγίστου δυνατού βαθμού.

Απόδειξη: Έστω n είναι ο μέγιστος βαθμός πολυωνύμων που ο Q μπορεί να ολοκληρώσει ακριβώς.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει τα σημεία x_1 και x_2 και τα βάρη w_1 και w_2.

Το $q(x) = (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \in \mathbb{P}_4$ και

$$Q(q) = w_1 q(x_1) + w_2 q(x_2) = 0$$

Όμως $q(x) \geq 0$ και $\int_{-1}^{1} q(x)dx > 0$

Συνεπώς ο Q δεν μπορεί να ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα πολυώνυμα βαθμού 4. Οπότε ο μέγιστος βαθμός πολυωνύμων που μπορεί να ολοκληρώνει ακριβώς είναι το πολύ $n=3$

Για να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού ως $n=3$, αρκεί

$$Q(q_i) = \int_{-1}^{1} q_i(x)\,dx \quad , \quad q_i(x) = x^i \quad , \quad i=0,1,2,3$$

Συνεπώς θα έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

(1) $w_1 + w_2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$

(2) $w_1 x_1 + w_2 x_2 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$

(3) $w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = 2/3$

(4) $w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0$

Από τη (2) $\Rightarrow$ $w_1 x_1 = -w_2 x_2$

Επομένως η (4) γίνεται

$$w_1 x_1^3 + (-w_1 x_1) x_2^2 = w_1 x_1 (x_1^2 - x_2^2) = 0$$

Με ανάλογο τρόπο η (4) δίνει και την

$$(-w_2 x_2) x_1^2 + w_2 x_2^3 = w_2 x_2 (x_2^2 - x_1^2) = 0$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

είτε $w_1 x_1 = w_2 x_2 = 0$ ή $x_1^2 = x_2^2$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η πρώτη περίπτωση δηλαδή $w_1 x_1 = w_2 x_2 = 0$
τότε η (3) δίνει

$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = 0$, το οποίο είναι άτοπο γιατί θέλουμε να είναι $2/3$

Επομένως πρέπει να ισχύει $\underline{x_1^2 = x_2^2}$

Άρα από τη $x_1^2 = x_2^2$, θα ισχυει ειτε $x_1 = x_2$ ειτε $x_1 = -x_2$

Ας υποθεσουμε τωρα ότι $x_1 = x_2$, από τις (2) & (3)

$$\left.\begin{aligned} w_1x_1 + w_2x_2 &= (w_1+w_2)\,x_1 = 0 \\ w_1x_1^2 + w_2x_2^2 &= (w_1+w_2)\,x_1^2 = 2/3 \end{aligned}\right\}$$ το οποιο ειναι αδύνατο

Συνεπώς $x_1 = -x_2$

Φυσικά δεν μπορεί να ισχυει ότι $x_1 = -x_2 = 0$ γιατί τότε δεν θα ισχυει η (3)

Οπότε $x_1 = -x_2 \neq 0$

Λόγω αυτης της σχεσης η (2) θα γινει

$$w_1x_1 + w_2x_2 = w_1x_1 - w_2x_1 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$$

Άρα έχουμε δείξει ότι θα πρέπει $x_1 = -x_2$ & $w_1 = w_2$

Από την (1) θα έχουμε τώρα ότι $w_1 + w_2 = 2 \Rightarrow 2w_1 = 2 \Rightarrow w_1 = 1$.

Οπότε η (3) γίνεται

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = x_1^2 + x_1^2 = 2x_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Συνεπώς για $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, οδηγούμαστε στον τύπο

$$Q(f) = f(-\sqrt{1/3}) + f(\sqrt{1/3})$$

Αν $x_1 = \sqrt{1/3}$ οδηγούμαστε και πάλι στον ίδιο τύπο.

<u>Άσκηση</u>: Έστω Q_n ο τύπος ολοκλήρωσης Newton-Cotes σε ένα διάστημα $[-a,a]$ με n κόμβους. Αν

$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$ και x_i, x_j δύο κόμβοι

τέτοιοι ώστε $x_i = -x_j$, δείξτε ότι για τα αντίστοιχα βάρη ισχύει

$w_i = w_j$

<u>Απόδειξη</u>: Αφού Q_n είναι τύπος ολοκλήρωσης Newton-Cotes

τότε $Q_n(p) = \int_{-a}^{a} p(x)dx$, $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}$

Το διάστημα $[-a,a]$ είναι συμμετρικό ως προς το 0, και

οι κόμβοι x_i είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο $[-a,a]$

Αν x_i είναι κόμβος $x_i = -a+ih$, $h = \frac{2a}{n-1}$, $i=0,\dots,n-1$

τότε ο $-x_i = -(-a+ih) = a - ih = -a+2a-ih$

$$= -a + (n-1)\frac{2a}{n-1} - i\frac{2a}{n-1} = -a + (n-1-i)\frac{2a}{n-1}$$

$$= x_{n-1-i}, \quad i=0,\dots,n-1 \quad \text{(Άρα } -x_i \text{ είναι κόμβος)}$$

Έστω τώρα $x_i = -x_j$ δύο κόμβοι του διαμερισμού.

Επίσης έστω L_i, L_j τα αντίστοιχα πολυώνυμα Lagrange ως προς το διαμερισμό $x_0, \dots, x_{n-1}$

Τα βάρη του κανόνα ολοκλήρωσης είναι

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx, \quad i=0,\dots,n-1$$

και

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Συνεπώς

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i - x_k}\,dx$$

Δείξαμε ότι αν x_i ρίζα και ο $-x_i$ είναι κόμβος συνεπώς

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1} \frac{x+x_k}{x_i+x_k}$$

Άρα $w_i = \displaystyle\int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1} \frac{x+x_k}{x_i+x_k}\,dx = -\int_{a}^{-a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{-t+x_k}{-x_j+x_k}\,dt$

Αλλαγή μεταβλητής

$x=-t$

& $x_i=-x_j$

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{t-x_k}{x_j-x_k}\,dt = w_j$$

Άσκηση: Έστω Q_n ο τύπος ολοκλήρωσης των Newton-Cotes σε ένα διάστημα της μορφής $[-a,a]$

Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να δείξετε ότι ο Q_n ολοκληρώνει ακριβώς κάθε περιττή και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[-a,a]$

Απόδειξη: Αφού η f είναι περιττή συνάρτηση: $f(-x)=-f(x)$

τότε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ και $f(0)=0$

Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[-a, a]$, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση θα είναι συμμετρικός

δηλαδή x_i & $-x_i$ είναι κόμβοι και αν $x_i = -x_j$ τότε

$w_i = w_j$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι $x_i = -x_{n-1-i}$, $i = 0, \dots, n-1$

Αν n είναι περιττός αριθμός τότε το $x=0$ είναι κόμβος γιατί υπάρχει i τέτοιο ώστε $2i = n-1$ και τότε $i+i = n-1$

ή $i = n-1-i$ δηλ $x_i = x_{n-1-i}$ ή $x_i = -x_i \Rightarrow x_i = 0$

Αν το n είναι άρτιος τότε το 0 δεν είναι κόμβος

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{[n/2]} w_i \left(f(x_i) + f(x_{n-1-i}) \right)$$

(Αν το 0 είναι κόμβος $f(0)=0$)

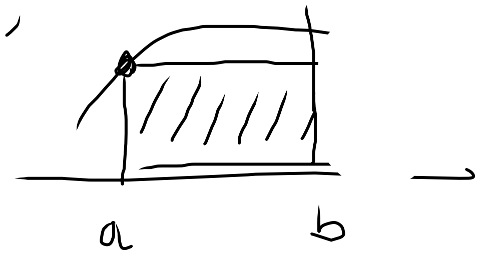
και επειδή η f είναι περιττή συνάρτηση

$$f(x_i) = f(-x_{n-1-i}) = -f(x_{n-1-i})$$

Άρα $Q_n(f) = 0$

Άσκηση: Θεωρούμε τον (αριστερό) τύπο του ορθογωνίου Q,

$$Q(f) = (b-a) f(a), \quad f \in C[a,b]$$



Έστω R το σφάλμα του κανόνα ολοκλήρωσης

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$$

(α) Δείξτε ότι το Q ολοκληρώνει ακριβώς σταθερές συναρτήσεις

(β) Δείξτε ότι
$$\forall f \in C^1[a,b] \ \exists \xi \in (a,b), \ R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

(γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$ και $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$

Δείξτε ότι για $f \in C^1[a,b]$ $\exists \ \xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2}\, h\, f'(\xi)$$

Απόδειξη: α) Έστω $p \in \mathbb{P}_0$, $p(x) = c$. Τότε

$$\int_a^b p(x)\,dx = c\,(b-a) \quad \text{και} \quad Q(p) = c\cdot(b-a)$$

β) Έστω $f \in C^1[a,b]$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor την f ως προς a έχουμε $\forall x \in [a,b]$ $\exists\, \xi(x) \in (a,b)$: $f(x) - f(a) = (x-a) f'(\xi(x))$

Τότε το $R(f) = \int_a^b f(x) - Q(f) = \int_a^b f(x)\,dx - f(a)(b-a)$

$$= \int_a^b \big(f(x) - f(a)\big)\,dx = \int_a^b (x-a)\, f'(\xi(x))\,dx$$

Οπότε επειδή $(x-a) > 0$ για $x \in [a,b]$

$$\min_{x\in[a,b]} f'(x) \int_a^b (x-a)dx \leq R(f) \leq \max_{x\in[a,b]} f'(x) \int_a^b (x-a)dx$$

Συνεπώς υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\frac{R(f)}{\int_a^b (x-a)dx} = f'(\xi)$$

Άρα $R(f) = f'(\xi) \int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\xi)$

Σχόλιο για το γ) ερώτημα

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Q σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ και αθροίζοντας τα αποτελέσματα έχουμε

$$Q_{n+1}(f) = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

$$= h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Οπότε $R_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_{n+1}(f)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h f(x_i) \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2}{2} f'(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Συνεπώς

$$R_{n+1}(f) = \frac{h}{2} \underbrace{(nh)}_{b-a} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)$$

Επειδή $f \in C^1[a,b]$ $\exists$ $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$R_{n+1}(f) = \frac{h}{2}(b-a) \cdot f'(\xi)$$