Άσκηση: Θεωρούμε τον τύπο του μέσου Q, $Q(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$f \in C[a,b]$. Έστω R το σφάλμα του,

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$$

a) Δείξτε ότι ο Q ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και ένα δηλ. $p \in \mathbb{P}_1$, ισχύει $R(p) = 0$

β) Δείξτε ότι $\forall f \in C^2[a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$ $R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$

γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$ και $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$. Δείξτε ότι για $f \in C^2[a,b]$

υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) =$$

Απόδειξη. Έστω $p \in \mathbb{P}_1$, $p(x) = \gamma x + \delta$. Τότε

α) $$\int_a^b p(x)dx = \gamma \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b + \delta(b-a) = \gamma \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \delta(b-a)$$
$$= (b-a)\left[\frac{\gamma}{2}(b+a) + \delta\right]$$

$$Q(p) = (b-a)\, p\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left(\gamma \frac{a+b}{2} + \delta\right)$$ (Έχουμε το ζητούμενο)

β) Έστω $f \in C^2[a,b]$. Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite $p \in \mathbb{P}_1$ τ.ώ.
$$p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{και} \quad p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Από το θεώρημα για το σφάλμα του πολυωνύμου παρεμβολής Hermite έχουμε

$\forall x \in (a,b)\ \exists\ \vartheta \in (a,b)$ τ.ω $f(x) - p(x) = \frac{1}{2} f''(\vartheta)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$

Χρησιμοποιώντας αυτό και το γεγονός ότι $\int_a^b p(x)dx = Q(p) = Q(f)$

$$R(f) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\vartheta(x))\,dx$$

Ακολουθώντας τώρα την επιχειρηματολογία για παρόμοια αποτελέσματα που έχουμε δείξει στο μάθημα,

$$\min_{y\in[a,b]} f''(y)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \leq 2R(f) \leq \max_{y\in[a,b]} f''(y)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

Οπότε $\exists\ \xi \in (a,b)$ τ.ω

$$2R(f) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \cdot f''(\xi)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 f''(\xi)$$

Συνεπώς

$$R(f) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$$

γ) Για να δείξουμε το σύνθετο φράγμα θεωρούμε το φράγμα για κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h\, f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{h^3}{24}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = \frac{h^2}{24}\, nh\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)\right), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= \frac{(b-a)}{24}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

Άσκηση. Θεωρούμε ένα διάστημα της μορφής $[-a,a]$ και μια άρτια συνάρτηση βάρους $w:[-a,a]\to\mathbb{R}$

Αποδείξτε ότι ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss Q_n με n κόμβους ως προς w, είναι συμμετρικός. Δηλαδή αν x_i είναι κόμβος του Q_n τότε $-x_i$ είναι επίσης κόμβος και τα αντίστοιχα βάρη είναι ίσα

Απόδειξη:

Αν ένα πολυώνυμο p είναι άρτιο ή περιττό και το x^* είναι ρίζα του p, τότε θα έχουμε ότι και το $-x^*$ είναι ρίζα του p $\left(p(x^*)=p(-x^*),\ p(x^*)=-p(-x^*)\right)$

Αφού w άρτια συνάρτηση τότε αν

$\{p_n\}$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w, τότε αυτά είναι άρτια ή περιττά αν ο αριθμός n είναι άρτιος ή περιττός

(Αποδεικνύεται επαγωγικά, θεωρήστε το δεδομένο)

Αφού οι κόμβοι στον τύπο ολοκλήρωσης είναι οι ρίζες του αντίστοιχου πολυωνύμου P_n, τότε θα έχουμε ότι αν x_i είναι ρίζα και το $-x_i$ θα είναι ρίζα του P_n.

Έστω λοιπόν $Q_n(f) = \sum_{\ell=1}^{n} w_\ell f(x_\ell)$, ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss

Αν τώρα $\tilde{Q}_n(f) = \sum_{\ell=1}^{n} w_\ell f(-x_\ell)$, για τις συναρτήσεις q_i, $q_i(x) = x^i$, $i = 0, \dots, 2n-1$

θα ισχύει

$$Q_n(q_i) = \sum_{\ell=1}^{n} w_\ell (x_\ell)^i = (-1)^i \sum_{\ell=1}^{n} w_\ell (-x_\ell)^i = (-1)^i \tilde{Q}_n(q_i), \quad i = 0, \dots, 2n-1$$

Ο τύπος Q_n ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι βαθμού $2n-1$.

Αν $0 \le i \le 2n-1$, άρτιος τότε $Q_n(q_i) = \tilde{Q}_n(q_i)$

Αν i περιττός τότε $Q_n(q_i) = \int_{-a}^{a} w(x) q_i(x)\,dx$, όμως το ολοκλήρωμα

μιας περιττής συνάρτησης σε συμμετρικό διάστημα είναι 0, έτσι

$Q_n(q_i) = 0$.

Άρα για κάθε $0 \le i \le 2n-1$ $Q_n(q_i) = \tilde{Q}_n(q_i)$, οπότε

$\tilde{Q}_n \equiv Q_n$

Άρα αφού $-x_i = x_j$ (για κάποιο j) θα έχουμε $w_i = w_j$

Άσκηση: Έστω $x_1, \dots, x_n$ οι ρίζες του ορθογώνιου πολυωνύμου $P_n \in \mathbb{P}_n$ ως προς $w(x)=1$, στο $(-1,1)$. Αν L_i, $i=1,\dots,n$ είναι τα πολυώνυμα Lagrange ως προς $x_1, \dots, x_n$, $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, δείξτε

$$\int_{-1}^{1} L_i(x)dx = \int_{-1}^{1} L_i^2(x)dx \quad , \quad i=1,\dots,n$$

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε τον κανόνα Gauss Q_n,

$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$, αυτός ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι βαθμού $2n-1$

Άρα $\int_{-1}^{1} L_i(x)dx = Q_n(L_i) = w_i = Q_n(L_i^2) = \int_{-1}^{1} L_i^2(x)dx$