Άσκηση: Θέλουμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\sin(100x)$ στο $[0,\pi]$ με μια γραμμική spline. Πόσους κόμβους θα χρειαστούμε ώστε το μέγιστο σφάλμα να είναι μικρότερο από 10^{-8}

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι αν s είναι spline τότε

$$\|f-s\|_\infty \leq \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty,$$ όπου h είναι το βήμα του διαμερισμού, $h=\frac{b-a}{n}$

Το διάστημα $[a,b]=[0,\pi] \Rightarrow h=\frac{\pi}{n}$

$$f'(x)=100\cos(100x) \Rightarrow f''(x)=-10^4\sin(100x) \Rightarrow \|f''\|_\infty \leq 10^4$$

Συνεπώς

$$\|f-s\|_\infty \leq \frac{10^4}{8}\cdot\frac{\pi^2}{n^2} < 10^{-8} \quad \text{ή} \quad n^2 > \frac{\pi^2}{8}10^{12}$$

Έχουμε ότι $$n > \frac{\pi}{2\sqrt{2}}10^6 = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}10^6 \approx \frac{(1.5)3}{4}10^6 \approx 1.125\times 10^6$$

Άσκηση: Κατασκευάστε μια κυβική φυσική spline η οποία να διέρχεται από τα σημεία $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,-1)$

Θεωρούμε λοιπόν το διαμερισμό $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$

Οπότε αναζητούμε S τω

$$S(x)=\begin{cases} a_{13}x^3+a_{12}x^2+a_{11}x+a_{10}, & x\in[-1,0] \\ a_{23}x^3+a_{22}x^2+a_{21}x+a_{20}, & x\in[0,1] \end{cases}$$

$$S(0-)=a_{10}=S(0+)=a_{20}$$

$$S'(x)=\begin{cases} 3a_{13}x^2+2a_{12}x+a_{11} \\ 3a_{23}x^2+2a_{22}x+a_{21} \end{cases} \Rightarrow \text{λόγω συνέχειας στο } x=0$$

$$a_{11}=a_{21}$$

$$S''(x) = \begin{cases} 6a_{13}x + 2a_{12} \\ 6a_{23}x + 2a_{22} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ λόγω συνέχειας στο $x=0$, $a_{12} = a_{22}$

Άρα

$$S(x) = \begin{cases} a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \\ a_{23}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} \end{cases}$$

Πρέπει $S(-1) = 1$, $S(0) = 2$, $S(1) = -1$

$\boxed{a_{10} = 2}$, $-a_{13} + a_{12} - a_{11} + 2 = 1$ ή $\boxed{-a_{13} + a_{12} - a_{11} = -1}$

$$S(1) = -1, \quad a_{23} + a_{12} + a_{11} + 2 = -1$$

$$\text{ή} \quad \boxed{a_{23} + a_{12} + a_{11} = -3}$$

$$S''(-1) = S''(1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} S''(-1) &= \boxed{-6a_{13} + 2a_{12} = 0} \\ S''(1) &= \boxed{6a_{23} + 2a_{12} = 0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2a_{12} &= 6a_{13} \text{ ή } a_{12} = 3a_{13} \\ 2a_{12} &= -6a_{23} \text{ ή } a_{12} = -3a_{23} \end{aligned}$$

$$a_{13} = \frac{1}{3}a_{12} \quad \text{και} \quad a_{23} = -\frac{1}{3}a_{12}$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}a_{12}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11} + 2 \\ -1/3\, a_{12}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11} + 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} -a_{13} + a_{12} - a_{11} &= -1 \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{3}a_{12} + a_{12} - a_{11} = -1 \\ a_{23} + a_{12} + a_{11} &= -3 \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{3}a_{12} + a_{12} + a_{11} = -3 \end{aligned}\right\}$$

λύνουμε & βρίσκουμε τους αγνώστους $\underline{\underline{a_{12} \,\&\, a_{11}}}$

<u>Άσκηση</u>: Βρείτε τη παράμετρο c ώστε η ακόλουθη συνάρτηση να είναι κυβική spline

$$S(x) = \begin{cases} 4 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{4}x^3, & x \in [0,1] \\ 2 - \frac{1}{2}(x-1) + c(x-1)^2 - \frac{3}{4}(x-1)^3, & x \in [1,2] \end{cases}$$

Είναι φυσική κυβική spline;

<u>Απόδειξη</u>

$$S(1-) = S(1+) \quad (?)$$

$$S(1-) = 4 - \frac{11}{4} + \frac{3}{4} = 4 - \frac{8}{4} = 4 - 2 = 2$$

$$S(1+) = 2$$

$$S'(x) = \begin{cases} -\frac{11}{4} + \frac{9}{4}x^2 , & x \in (0,1) \\ -\frac{1}{2} + 2c(x-1) - \frac{9}{4}(x-1)^2 & x \in (1,2) \end{cases}$$

$$S'(1-) = -\frac{11}{4} + \frac{9}{4} = -\frac{2}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$S'(1+) = -\frac{1}{2}$$

$$S''(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x , & x \in [0,1) \\ 2c - \frac{9}{2}(x-1) , & x \in (1,2] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} S''(1-) &= \frac{9}{2} \\ S''(1+) &= 2c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{9}{2} = 2c$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{9}{4}}$$

$$s''(0) = s''(2) = 0$$

$$s''(0) = 0 \quad , \quad s''(2) = 2c - \frac{9}{2} = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

Άσκηση: Βρείτε τις παράμετρο c & d ώστε η

$$S(x) = \begin{cases} 6 - 2x + \frac{1}{2}x^3, & x \in [0,2] \\ 6 + 4(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

να είναι κυβική spline. Στη συνέχεια βρείτε αν υπάρχει d τ.ω. να είναι φυσική κυβική spline

$$S'(x) = \begin{cases} -2 + \frac{3}{2}x^2 \\ 4 + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2 \end{cases} \qquad S''(x) = \begin{cases} 3x \\ 2c + 6d(x-2) \end{cases}$$

$s(2-) = 6 - 2\cdot 2 + \frac{1}{2}8 = 6 = s(2+)$, $S'(2-) = -2 + \frac{3}{2}4 = 4 = S'(2+)$

$s''(2-) = 6 = 2c \Rightarrow c = 3$, $d \in \mathbb{R}$ είναι κυβική spline

$$S''(0) = S''(3) = 0$$

$$S''(0) = 0 \quad , \quad S''(3) = 2c + 6d = 6 + 6d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -1}$$

Άσκηση: Δείξτε ότι αν p το πολυώνυμο παρεμβολής ως προς τα $x_0 = a$ και $x_1 = b$, μιας συνάρτησης f, ικανοποιεί, για κάθε $x \in (a, b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\left[\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$$

Απόδειξη: $x_0 = a, \quad x_1 = b$

$$p(x) = f(a)L_0(x) + f(b)L_1(x)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{1} \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{x-x_1}{a-x_1} = \frac{x-b}{a-b}, \quad L_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$p(x) = \frac{f(a)(x-b)}{a-b} + \frac{f(b)(x-a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left[f(b)(x-a) - f(a)(x-b)\right]$$

$$f(x) - p(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\left[f(b)(x-a) - f(a)(x-b) \right]$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\left[\frac{f(x)\ (b-a)}{(x-a)(x-b)} - \left[\frac{f(b)}{x-b} - \frac{f(a)}{x-a} \right] \right]$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\left[\frac{f(x)\big((b-x)+(x-a)\big)}{(x-a)(x-b)} - \left[\frac{f(b)}{x-b} - \frac{f(a)}{x-a} \right] \right]$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\left[\frac{f(x)}{x-b} - \frac{f(x)}{x-a} - \left[\frac{f(b)}{x-b} - \frac{f(a)}{x-a} \right] \right]$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)}\left[\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right]$$

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι αν $|f'(x)| \leq C$ στο (a,b), τότε το $p \in \mathbb{P}_1$ που παρεμβάλλει την f στα $x_0 = a$ και $x_1 = b$ ικανοποιεί

$$\forall x \in (a,b) \quad |f(x) - p(x)| \leq \frac{C}{2} |b-a|$$

<u>Απόδειξη</u>: Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$|f(x) - p(x)| \leq \left|\frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\right| \left(\left|\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\right| + \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \right)$$

$$\leq \left|\frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\right| \left(|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)| \right)$$

$$\leq \frac{2C}{|b-a|} |(x-a)(x-b)| \leq \frac{2C}{|b-a|} \frac{|b-a|^2}{4} = \frac{C}{2} |b-a|$$

Άσκηση: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

Δείξτε αν συγκλίνει η μέθοδος Jacobi. Στη συνέχεια δείξτε αν συγκλίνει η μέθοδος Gauss-Seidel

Απόδειξη:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = D - L - U$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_J = D^{-1}(L+U)$$

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν υπάρχει φυσική νορμα $\|T_J\| < 1$ $\Rightarrow$ η μέθοδος συγκλίνει

Πρεπει να βρουμε $\rho(T_J) < 1$ $\Rightarrow$ η μεθοδος συγκλίνει

$$\det(T_J - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2-2) + (2\lambda+4) - 2(2+2\lambda) = -\lambda^3$$

Οι ιδιοτιμές του T_J ειναι $\lambda = 0$ $\Rightarrow$ η μεθοδος συγκλίνει

Gauss-Seidel

$$T_{GS} = (D-L)^{-1} U$$

$$D-L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο T_{GS} είναι άνω τριγωνικός $\Rightarrow$ οι ιδιοτιμές είναι στη διαγώνιο

$\rho(T_{GS}) = 2 \Rightarrow$ η μέθοδος αποκλίνει

<u>Άσκηση</u>: Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Cholesky για να βρείτε για ποιά a ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος

<u>Απόδειξη</u>. Αν ο A είναι θετικά ορισμένος τότε $A = LL^T$, L κάτω τριγωνικός με θετικά διαγώνια στοιχεία $\underline{L_{ii} > 0}$ $\Rightarrow$ ανάλυση Cholesky

$A = LL^T,$ $\quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$L_{11}^2 = a \Rightarrow L_{11} = \sqrt{a}, \quad \underline{\underline{a > 0}}$

$L_{21} L_{11} = 1 \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$L_{21}^2 + L_{22}^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{a} + L_{22}^2 = 2 \Rightarrow L_{22}^2 = 2 - \frac{1}{a} = \frac{2a-1}{a} > 0 \Rightarrow \boxed{a > 1/2}$

$L_{22} = \sqrt{\frac{2a-1}{a}}$

$$L_{31} L_{11} = L_{31} \cdot \sqrt{a} = -1 \Rightarrow L_{31} = -\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$L_{31} L_{21} + L_{32} L_{22} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + L_{32} \cdot \sqrt{\frac{2a-1}{a}} = 1$$

$$\Rightarrow L_{32} = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a-1}}$$

$$L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 = 4 \Rightarrow L_{33}^2 = 4 - L_{31}^2 - L_{32}^2 = 4 - \frac{1}{a} - \frac{(a+1)^2}{a^2} \cdot \frac{a}{2a-1}$$

$$= 4 - \frac{1}{a} - \frac{(a+1)^2}{a} \cdot \frac{1}{2a-1} > 0$$

$$= \frac{4a(2a-1) - (2a-1) - (a+1)^2}{(2a-1)a} > 0$$

Αρκεί $(2a-1)(4a-1) - (a+1)^2 > 0 \Rightarrow 7a^2 - 8a + 2 > 0$, έχει ρίζες $\frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{14}$

Για να είναι η πυθοτητα θετική θα πρέπει

$$a > \frac{8+2\sqrt{2}}{14} \quad ή \quad a < \frac{8-2\sqrt{2}}{14}$$

$$\frac{8+2\sqrt{2}}{14} > \frac{1}{2} > \frac{8-2\sqrt{2}}{14}$$

Αν πάρουμε $a > \frac{8+2\sqrt{2}}{14} \Rightarrow A$ θετικά ορισμένος.