Άσκηση: Έστω $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$. Διερευνήστε αν έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $[-1,1]$ και αν ναι βρείτε ποιό είναι. Έχει η g σταθερά σημεία σε κάποιο άλλο διάστημα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική ακολουθία για να τα προσεγγίσουμε;

Εύκολα βλέπουμε ότι $g'(x) = \frac{2}{3}x$. Οπότε στο διάστημα $[-1,1]$

$$\max_{x\in[-1,1]} |g'(x)| = \frac{2}{3} < 1$$

Άρα η g είναι συστολή στο $[-1,1]$. Επίσης η g' είναι θετική στο $[0,1]$ και αρνητική στο $[-1,0]$. Άρα η g είναι φθίνουσα στο $[-1,0]$ και αύξουσα στο $[0,1]$ οπότε

$g([-1,0]) = [g(0), g(-1)] = [-1/3, 0]$ και $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [-1/3, 0]$

Άρα $g: [-1,1] \to [-1/3, 0] \subset [-1,1]$

Οπότε η g θα έχει σταθερό σημείο στο $[-1,1]$ και επειδή η σταθερά Lipschitz στο $[-1,1]$ είναι μικρότερη του 1, θα είναι και μοναδικό.

Μπορούμε να βρούμε το σταθερό σημείο λύνοντας την εξίσωση

$$g(x^*)=x^*, \quad \frac{(x^*)^2-1}{3}=x^* \Leftrightarrow (x^*)^2-3x^*-1=0$$

Λύνοντας την εξίσωση 2ου βαθμού έχουμε $x^*=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

Μπορούμε να δούμε ότι $x^*=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\in[-1,1]$, και αυτό θα είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της g στο $[-1,1]$

Το άλλο σημείο, $x^* = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \in [3,4]$, διότι $3 < \sqrt{13} < 4$

Επομένως η g έχει ένα σταθερό σημείο στο $[3,4]$

Όμως $g'(x) = \frac{2}{3}x$ στο $[3,4]$, λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του 1

[Είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[3,4]$ και $g'(3) = 2$]

Δεν είναι συστολή στο $[3,4]$. Δεν μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε

$x_0 \in [3,4]$ και να πάρουμε μια επαναληπτική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία να συγκλίνει στο σταθερό σημείο της g στο $[3,4]$.

Άσκηση: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα σταθερού σημείου για να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \pi + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $[0, 2\pi]$

Επειδή $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \in [0, 1]$ για $x \in [0, 2\pi]$ θα έχουμε ότι

η $f(x) \in \left[\pi, \pi + \frac{1}{2}\right]$, για $x \in [0, 2\pi]$

Επομένως $f : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$

Επίσης $f'(x) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, και $\max\limits_{x \in [0, 2\pi]} \left| \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right| = \frac{1}{4} < 1$

Επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου και η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in [0, 2\pi]$, θα συγκλίνει στο x^*, με $f(x^*) = x^*$.

Άσκηση: Έστω ότι για μια συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\exists\, c > 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq c\,|x - y|$$

Δείξτε ότι αν x_0 δεν είναι σταθερό σημείο της φ, τότε η επαναληπτική ακολουθία $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, αποκλίνει

Αφού το x_0 δεν είναι σταθερό σημείο της φ, θα έχουμε $\varphi(x_0) \neq x_0$. Οπότε

$x_1 = \varphi(x_0) \neq x_0$

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \geq c\,|x_n - x_{n-1}| \geq c^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \geq \ldots \geq c^n |x_1 - x_0|$$

Οπότε επειδή $c^n \to \infty$, $n \to \infty$, (x_n) αποκλίνει