Άσκηση: Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρούμε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x)=e^{x}-x-2$. Δείξτε ότι η f έχει μια θετική και μια αρνητική ρίζα. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν $x_0>0$ τότε οι προσεγγίσεις συγκλίνουν στη θετική ρίζα, αν $x_0<0$ τότε οι προσεγγίσεις συγκλίνουν στην αρνητική ρίζα.

Εύκολα παρατηρούμε ότι $f'(x)=e^{x}-1>0$, για $x>0$ και $f'(x)<0$ για $x<0$ και ακόμα $f''(x)=e^{x}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι φθίνουσα για $x<0$ και αύξουσα για $x>0$.

$f(-2)=e^{-2}-(-2)-2=e^{-2}>0$ $\quad f(0)=e^{0}-0-2=-1<0$

$f(2)=e^{2}-4>0$. Άρα η f έχει μια ρίζα $\rho_1\in[-2,0]$ και άλλη μια $\rho_2\in[0,2]$.

Παρατηρούμε ότι $f(0)<0$, $f'(x)\geq 0$, $x\geq 0$, $f''(x)\geq 0$ $x\geq 0$

Οπότε σύμφωνα με θεώρημα που έχουμε δείξει στο μάθημα για $x_0\geq 0$

η ακολουθία x_n που προκύπτει με τη μέθοδο Newton, θα συγκλίνει στη ρίζα $\rho_2>0$ της συνάρτησης f

Έστω τώρα $x_0<0$. Εύκολα παρατηρούμε ότι αν $\rho_1<x_0<0$, θα έχουμε

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}<x_0,$$ επειδή $f(x_0)<0$ και $f'(x_0)<0$ [Η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty,0)$]

Συνεπώς $f(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)f'(x_0)+\frac{(x_1-x_0)^2}{2}f''(\xi)=\frac{(x_1-x_0)^2}{2}f''(\xi)>0$

Άρα $f(x_1)>0$, και τότε $x_1<\rho_1$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $x_0 < \rho_1 < 0$

Τότε $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$, γιατί $f(x_0) > 0$ και $f'(x_0) < 0$

Επίσης $f(x_1) = \dfrac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi) > 0$

Άρα $x_0 < x_1 < \rho_1$

Εύκολα λοιπόν βλέπουμε ότι επαγωγικά θα έχουμε

$$x_n < x_{n+1} < \rho_1$$

Η (x_n) λοιπόν θα είναι μια αύξουσα & φραγμένη ακολουθία, άρα είναι συγκλίνουσα. Συνεπώς $x_n \to x^* \leq \rho_1 < 0$

Οπότε $x^* = x^* - f(x^*)/f'(x^*) \Rightarrow f'(x^*) \neq 0$ & $f(x^*) = 0$, Άρα $x^* = \rho_1$

Άσκηση: Θέλουμε να προσεγγίσουμε τη $\sqrt{a}$, για $a>1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{a}{x}$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη φ για να θεωρήσουμε μια επαναληπτική ακολουθία, $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $x_0\in\mathbb{R}$, η οποία να συγκλίνει στο $\sqrt{a}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Έστω $x^*=\varphi(x^*)$ σταθερό σημείο της φ. Τότε $x^*=\frac{a}{x^*}$ ή $(x^*)^2=a$.

Άρα το $\sqrt{a}$ είναι σταθερό σημείο της φ. Παρατηρούμε ότι $\varphi'(x)=-\frac{a}{x^2}$

Συνεπώς $\varphi'(\sqrt{a})=-\frac{a}{a}=-1$.

Επίσης για $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, παίρνουμε την ακολουθία.

$$x_0, \; x_1 = \frac{a}{x_0}, \quad x_2 = \frac{a}{x_1} = \frac{a}{\frac{a}{x_0}} = x_0, \quad x_3 = \frac{a}{x_2} = \frac{a}{x_0} = x_1.$$

Άρα $x_n \not\to x^* = \sqrt{a}$, για κάθε επιλογή $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$.

Άσκηση: Έστω $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x^* σταθερό σημείο της φ και έστω ότι η φ είναι $p\geq 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*.

Έστω ότι $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\dots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$, $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$

Θεωρείστε την επαναληπτική ακολουθία (x_n)

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\quad n\geq 0.$$

Αποδείξτε ότι για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x^* και ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

Αφού $\varphi'(x^*)=0$, υπάρχει $I_\delta=[x^*-\delta, x^*+\delta]$ τ.ω.

$$\max_{x\in I_\delta} |\varphi'(x)| \leq L < 1$$

Τότε $|\varphi(x)-x^*| = |\varphi(x)-\varphi(x^*)| \leq L|x-x^*| < \delta$, $x\in I_\delta$

Άρα $\varphi(x)\in I_\delta$. Συνεπώς $\varphi: I_\delta \to I_\delta$ και είναι συστολή στο I_δ

Συνεπώς $x_n \to x^* \in I_\delta$, $x_0\in I_\delta$, $x^*=\varphi(x^*)$

Τώρα

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)=\varphi(x^*)+(x_n-x^*)\varphi'(x^*)+\dots+\frac{(x_n-x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n),$$ ξ_n ανάμεσα στα x^*, x_n

$$= x^* + \frac{(x_n-x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)$$

Οπότε $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{1}{p!}\, \varphi^{(p)}(x^*)$

Άσκηση: Έστω ότι x^* είναι ρίζα της f, πολ/τητας $m \geq 2$, και είναι m-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κοντά στο x^*.
Θεωρείστε την παραλλαγή της μεθόδου του Newton

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Αποδείξτε ότι για x_0 κοντά στο x^* η ακολουθία x_n συγκλίνει στο x^* και έχει τάξη σύγκλισης $p=2$

$f(x) = (x-x^*)^m q(x)$, $q(x^*) \neq 0$

Θεωρούμε $\varphi(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$\varphi(x^*) = x^*$ (Αν και $f'(x^*) = 0$, έχουμε δείξει ότι $\frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = 0$.)

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη

$$\varphi'(x) = 1 - m\frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - m + m\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Από το ανάπτυγμα Taylor των f, f' και f'' με κέντρο το x^* έχουμε

$$f(x) = \frac{(x-x^*)^m}{m!}f^{(m)}(\xi), \quad f'(x) = \frac{(x-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(\zeta)$$

$$f''(x) = \frac{(x-x^*)^{m-2}}{(m-2)!}f^{(m)}(\sigma)$$, με ξ, ζ, σ ανάμεσα στα x & x^*

Συνεπώς $\varphi'(x) = 1 - m + m\,\frac{m-1}{m}\,\frac{f^{(m)}(\xi)\,f^{(m)}(\sigma)}{\left(f^{(m)}(\zeta)\right)^2}$

και $\lim_{x \to x^*} \varphi'(x) = 1 - m + m\,\frac{m-1}{m} = 0$

Οπότε $\varphi(x^*) = x^*$, $\varphi'(x^*) = 0$, και σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{1}{2}\varphi''(x^*)$$

Άρα έχει τάξη σύγκλισης 2 (τουλάχιστον)