Άσκηση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος πίνακας και τέτοιος ώστε η απαλοιφή Gauss ολοκληρώνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών. Τότε γνωρίζουμε ότι ο A αναλύεται σε γινόμενο δύο πινάκων, $A=LU$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικός. Δείξτε ότι η ανάλυση αυτή είναι μοναδική, δηλαδή δεν υπάρχει ζεύγος πινάκων $\hat{L}$ και $\hat{U}$ διαφορετικό των L, U με $\hat{L}$ κάτω τριγωνικό με μονάδες στη διαγώνιο και $\hat{U}$ άνω τριγωνικό τέτοιο ώστε $A = \hat{L}\hat{U}$

Αν υπάρχουν οι $\hat{L}$ και $\hat{U}$ τότε $A = LU = \hat{L}\hat{U}$.
Επειδή $L, \hat{L}, \hat{U}, U$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε $\hat{L}^{-1}L = \hat{U}U^{-1}$

Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός πίνακας
Το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας

Συνεπώς $\tilde{L}^{-1}L = \tilde{U}U^{-1}$, για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει

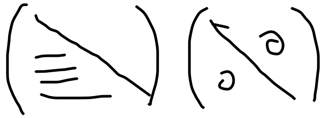
οι παραπάνω πίνακες να είναι διαγώνιοι έτσι υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $\tilde{L}^{-1}L = D = \tilde{U}U^{-1}$

Τότε $L = \tilde{L}D$ $\Rightarrow$ τα διαγώνια στοιχεία του L θα πρέπει να είναι

ίση με τα διαγώνια του $\tilde{L}D$.

Όμως τα διαγώνια στοιχεία του $\tilde{L}D$, θα είναι ίσα με $\tilde{L}_{ii}d_i$, έτσι

$$L_{ii} = \tilde{L}_{ii} d_i$$



Όμως $L_{ii} = \tilde{L}_{ii} = 1$, (από υπόθεση), άρα $d_i = 1$

Συνεπώς $D = I$ και άρα $L = \tilde{L}$ και $U = \tilde{U}$.

__Άσκηση__: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A αντιστρέψιμος και $b \in \mathbb{R}^n$. Πως υπολογίζουμε κατά το δυνατόν οικονομικότερα, από άποψης αριθμών πράξεων και μνήμης, τα διανύσματα: $A^{-4}b$, $A^{-1}BA^{-1}b$

__Παρατήρηση__:

Στους υπολογισμούς στον Η/Υ πρέπει να αποφεύγουμε τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός πίνακα αν μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με τη λύση ενός γραμμικού συστήματος

__Δεν__ υπολογίζουμε τον A^{-1}, για να βρούμε τη λύση του $Ax=b$, δηλαδή να κάνουμε την πράξη $A^{-1}b$. __Λύνουμε__ το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ π.χ. με απαλοιφή Gauss

Το διάνυσμα $A^{-1}b$ μπορούμε να το δούμε ως λύση του γραμμικού συστήματος $A^4 x = b$

Για να κατασκευάσουμε τον A^4 θα χρειαστούμε 2-πλάσια μνήμη από αυτή που χρειαζόμαστε για να αποθηκεύσουμε τον A (Για μεγάλα n αυτό είναι σημαντικό)

Το γραμμικό σύστημα $A^4 x = b$ μπορούμε να το δούμε ως 4 γραμμικά συστήματα, με το ίδιο πίνακα A

$$A^4 x = \underbrace{A\,(\underbrace{A\,(\underbrace{A\,(\underbrace{A x}_{y})}_{z})}_{w})} = b \quad : \quad \begin{cases} Aw = b \\ Az = w \\ Ay = z \\ Ax = y \end{cases}$$

Για τη λυση αυτών των γραμμικων συστηματων χρησιμοποιουμε τον ιδιο πινακα A. Μπορουμε λοιπόν να πραγματοποιησουμε την αναγωγη LU μονο μια φορα και απλως να αλλάζουμε το δεξιό μελος των γραμμικών συστηματος κάθε φορά.

Δεν απαιτειται η αποθηκευση περισσοτερων διανυσματων, παρά μονο το δεξιό-μελος και η λύση καθε φορα.

Παρόμοια για το $x = A^{-1} B A^{-1} b$. Μπορουμε να το δουμε ως

$$Ax = B\underbrace{A^{-1}b}_{y} \quad \& \quad Ay = b$$

Λυνουμε λοιπον τα 2-γραμμικά συστηματα με τον ιδιο πινακα και διαφορετικά δεξιά μελη καθε φορά.