Άσκηση: Προσδιορίστε σταθερές σύγκρισης για όλα τα ζεύγη των νορμών $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ του $\mathbb{R}^n$

Για τις $\|\cdot\|_\infty$ & $\|\cdot\|_1$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) = n \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

Άρα $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Για τις $\|\cdot\|_2$ & $\|\cdot\|_\infty$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1/2} = \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$$

Άρα $\quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$

Για τις $\|x\|_2$ & $\|x\|_1$

Θα μπορούσαμε να συνδυάσουμε τις προηγούμενες σχέσεις αλλά οι σταθερές δεν θα ήταν οι καλύτερες δυνατές

Έχουμε $\quad \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \leq n\|x\|_2$

και $\quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|x\|_1$

Άρα $\quad \dfrac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_2$

Μπορούμε όμως να βρούμε καλύτερη σχέση ανάμεσα στις 2 νόρμες

Επίσης έχουμε $(|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2) \leq (|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|)^2$

(απλή γενίκευση της $(|x_1|^2+|x_2|^2) \leq (|x_1|+|x_2|)^2 = |x_1|^2+|x_2|^2+2|x_1||x_2|$)

Οπότε $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$

Επίσης από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για 2 διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|(x,y)_2| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \qquad (x,y)_2 = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

αν επιλέξουμε $y \in \mathbb{R}$ τ.ω. $y_i = \frac{x_i}{|x_i|}$, $i=1,\dots,n$ ($x_i \neq 0$, διαφορετικά $y_i = 0$)

$$(x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 = \|x\|_2 \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1/2} = \sqrt{n}\, \|x\|_2$$

Συνεπώς $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$

Άσκηση: Δείξτε ότι ο ορισμός της φυσικής νόρμας πινάκων

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

μπορεί να αντικατασταθεί με

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|$$

Για $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ έχουμε ότι $x = \frac{y}{\|y\|}$ έχει $\|x\| = 1$.

Επομένως $\frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \left\| \frac{1}{\|y\|} A y \right\| = \left\| A \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\| = \|Ax\|$

Συνεπώς $\|A\| = \sup\limits_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ y\neq 0}} \dfrac{\|Ay\|}{\|y\|} = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$

Για να δείξουμε τη σχέση με $\{x : \|x\| \leq 1\}$, παρατηρούμε καταρχήν

$\|Ax\| \leq \|A\|\cdot\|x\| \leq \|A\|$, $\forall x$ τ.ω. $\|x\| \leq 1$.

Άρα $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\| \leq \|A\|$

Επίσης $\{x : \|x\| = 1\} \subset \{x : \|x\| \leq 1\}$.

άρα $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\| \Rightarrow \|A\| \leq \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\|$

Άσκηση: Θεωρούμε τις ποσότητες $\|A\|_{max} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$

και $\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$. Ορίζουν αυτές οι ποσότητες

φυσικές νόρμες πινάκων; Δείξτε ότι $\|Ax\|_2 \le \|A\|_E \|x\|_2$

Αρχικά να βρούμε ένα πίνακα A για τον οποίο οι παραπάνω ποσότητες δεν ικανοποιούν μια ιδιότητα που έχουν οι φυσικές νόρμες πινάκων.

Ας θεωρήσουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$\lambda = -1$ και $\lambda = 3$, οπότε $\rho(A) = 3$. Όμως παρατηρούμε ότι

$\|A\|_{max} = 2 < \rho(A) = 3$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε φυσική νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$, $\rho(A) \le \|A\|$

Άρα $\|\cdot\|_{max}$ δεν μπορεί να είναι φυσική νόρμα πινάκων.

Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε το I, τότε

$$\|I\|_E = \sqrt{n} > 1 \quad , n \geq 2,$$ Όμως για κάθε φυσική νόρμα πινάκων

$\|I\| = 1$. Άρα η $\|\cdot\|_E$ δεν μπορεί να είναι φυσική νόρμα πινάκων.

Στη συνέχεια θα δείξουμε την ανισότητα.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2$$

- Αν θεωρήσουμε $a \in \mathbb{R}^n$ με στοιχεία αυτά της i-γραμμής του πίνακα A τότε

$$(a,x)_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

όμως από την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|(a,x)_2| \le \|a\|_2 \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$$

Συνεπώς $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$

οπότε $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\right\}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \|A\|_E^2 \|x\|_2^2$$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει

$$\|A\|_2 \le \|A\|_E \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

Σε προηγούμενη άσκηση δείξαμε ότι $\|Ax\|_2 \le \|A\|_E \|x\|_2$

Συνεπώς έχουμε ότι $\|A\|_2 \le \|A\|_E$.

Έστω τώρα s η γραμμή τ.ω. $\sum_{j=1}^{n} (a_{sj})^2 = \max_{1\le i\le n} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2\right) = S$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\|A\|_E^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2 \le nS$.

Θέτουμε τώρα $x \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $x_j = a_{sj}$, $j = 1, \dots, n$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \geq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{sj}^2 \right)^2$$

$$= S \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) = S \|x\|_2^2$$

Συνεπώς $\|A\|_2^2 \geq \dfrac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq S$

Άρα $\|A\|_E^2 \leq nS \leq n\|A\|_2^2 \Rightarrow \|A\|_E \leq \sqrt{n}\, \|A\|_2$