Άσκηση

Έστω $\|.\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\|.\|$ η φυσική νόρμα πινάκων που παράγεται από αυτήν. Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, με $\|A\| < 1$ δείξτε ότι $I-A$ είναι αντιστρέψιμος και επιπλέον ισχύει

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Απόδειξη: Έστω ότι $(I-A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Υπάρχει λοιπόν $x \neq 0$ τ.ω. $(I-A)x = 0$, δηλαδή $Ax = x$

Συνεπώς $\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| < 1 \, \|x\|$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $I-A$ είναι αντιστρέψιμος

Τώρα θέλουμε να δείξουμε τις ανισότητες

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\|(I-A)x\| \leq \|x\| + \|A\|\,\|x\| \leq (1+\|A\|)\,\|x\|$$

Συνεπώς αν θεωρήσουμε $y = (I-A)x$ τότε $x = (I-A)^{-1}y$ και άρα

$$\|y\| \leq (1+\|A\|)\,\|(I-A)^{-1}y\|,$$ δηλαδή $$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \frac{\|(I-A)^{-1}y\|}{\|y\|}, \quad \forall y \neq 0.$$

Οπότε $$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\|.$$

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$
$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ ή $-\|Ax\| \geq -\|A\| \cdot \|x\|$.

και άρα $\|(I-A)x\| \geq \|x\| - \|Ax\| \geq \|x\| - \|A\| \cdot \|x\| \geq (1-\|A\|)\|x\|$.

Συνεπώς για $y = (I-A)x$ και επειδή $x = (I-A)^{-1}y$,

$$\|y\| \geq (1-\|A\|) \cdot \|(I-A)^{-1}y\| \quad \text{ή} \quad \frac{1}{1-\|A\|} \geq \frac{\|(I-A)^{-1}y\|}{\|y\|}, \quad y \neq 0, \ y \in \mathbb{R}^n.$$

Οπότε

$$\frac{1}{1-\|A\|} \geq \|(I-A)^{-1}\|$$

<u>Άσκηση</u>: Προσδιορίστε σταθερές σύγκρισης για όλα τα ζεύγη των φυσικών νορμών πινάκων, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_\infty$

<u>Απόδειξη</u>: Σε προηγούμενη άσκηση έχουμε δείξει ότι

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

και $$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τις $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \frac{n\,\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \quad \text{για } x \neq 0, \quad \text{οπότε} \quad \|A\|_1 \leq n\|A\|_\infty$$

Ανάλογα, λόγω $\dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \dfrac{\|Ax\|_1}{1/n\,\|x\|_1}$, έχουμε $\|A\|_\infty \leq n\|A\|_1$

Συνεπώς $\frac{1}{n}\|A\|_1 \le \|A\|_\infty \le n\|A\|_1$

Για τις $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ έχουμε

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \le \frac{\sqrt{n}\,\|Ax\|_\infty}{\|Ax\|_\infty}, \quad \text{οπότε} \quad \|A\|_2 \le \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$$

και ανάλογα $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$

Συνεπώς $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_\infty \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$

Τώρα για τις $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, βασιζόμενοι στη σχέση που αναφέραμε για τις αντίστοιχες νόρμες διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$, δείχνουμε με ανάλογο τρόπο ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\,\|A\|_1$$

<u>Άσκηση</u>: Αν $\kappa_2(A)$, $\kappa_1(A)$ είναι οι δείκτες κατάστασης ενός αντιστρέψιμου πίνακα A ως προς τις νόρμες $\|.\|_2$ και $\|.\|_1$ αντίστοιχα, δείξτε ότι

$$\frac{1}{n}\kappa_1(A) \le \kappa_2(A) \le n\kappa_1(A)$$

Βρείτε τις ανάλογες ανισότητες σύγκρισης μεταξύ των δεικτών κατάστασης $\kappa_2(A)$ και $\kappa_\infty(A)$

<u>Απόδειξη</u>: Από προηγούμενη άσκηση έχουμε δείξει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{n}\,\|A\|_2 \quad \text{για κάθε } A\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\kappa_1(A) = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|A\|_2\sqrt{n}\,\|A^{-1}\|_2 = n\kappa_2(A)$$

Αντίστοιχα έχουμε $\kappa_2(A) \leq n\,\kappa_1(A)$

Συνεπώς $\frac{1}{n}\kappa_1(A) \leq \kappa_2(A) \leq n\,\kappa_1(A)$

Επίσης έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Άρα όπως πριν καταλήγουμε $\frac{1}{n}\kappa_\infty(A) \leq \kappa_2(A) \leq n\,\kappa_\infty(A)$

<u>Άσκηση</u> Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A αντιστρέψιμος. Αν $\|\cdot\|$ μια φυσική νόρμα πινάκων και $\|A-B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ δείξτε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Συμπεράνατε ότι για οποιαδήποτε μη-αντιστρέψιμο πίνακα $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει

$$\frac{1}{\kappa(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$$

<u>Απόδειξη</u>: Σε προηγούμενη άσκηση δείξαμε ότι αν $\|A\| < 1$ τότε $I-A$ είναι αντιστρέψιμος

$$I - A^{-1}B = A^{-1}(A-B) \Rightarrow \|I-A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A-B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A-B\| < 1$$

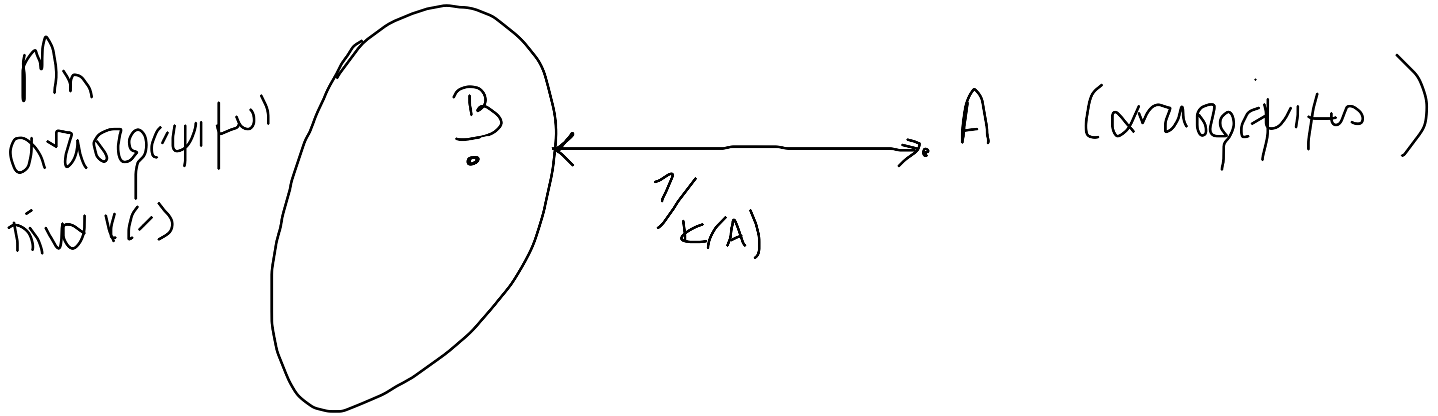
Άρα ο $A^{-1}B = I - (I-A^{-1}B)$ είναι αντιστρέψιμος

Οπότε επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος $B = A(A^{-1}B)$ είναι αντιστρέψιμος

Έστω τώρα B μη-αντιστρέψιμος τότε $\|A-B\| \geq \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$

Οπότε $$\frac{\|A-B\|}{\|A\|} \geq \frac{1}{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|} = \frac{1}{\kappa(A)}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η προηγούμενη άσκηση μας δείχνει ένα μέτρο, για το πόσο "απέχει" ένας πίνακας A από το σύνολο των μη-αντιστρέψιμων πινάκων



Άσκηση: Έστω A αντιστρέψιμος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{pmatrix}$$

Χωρίς να υπολογίσετε τον A^{-1} δείξτε ότι ισχύει

$$k_\infty(A) \geq 100$$

Απόδειξη: Έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση ότι αν B μη αντιστρέψιμος τότε για μια φυσική νόρμα πινάκων.

$$\frac{1}{k(A)} \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$$

Ας θεωρήσουμε έναν μη αντιστρέψιμο πίνακα "κοντά" στον A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ώστε} \quad A - B = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.01 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$\|A-B\|_\infty = 0.02 = 2 \times 10^{-2}, \quad \|A\|_\infty = 2.$$

Άρα $$\frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty} = \frac{2}{2 \times 10^{-2}} = 100 \leq k_\infty(A)$$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $y_1, y_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$
\begin{aligned}
2y_1 + 4y_2 &= 10 + \varepsilon_1 \\
y_1 + 3y_2 &= 7 + \varepsilon_2
\end{aligned}
$$

Δείξτε ότι $|y_1 - 1| + |y_2 - 2| \leq 3\left(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|\right)$

και $\max\left(|y_1 - 1|, |y_2 - 2|\right) \leq 3.5 \max\left(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\right)$

<u>Απόδειξη</u>: Μπορούμε να δούμε ότι η ακριβής λύση του

$$
\left.\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 &= 10 \\
x_1 + 3x_2 &= 7
\end{aligned}\right\} \quad \text{είναι} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2. \end{aligned}
$$

Τώρα η $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ είναι η λύση του γραμμικού συστήματος με ίδιο πίνακα και δεξιό μέλος που έχει μεταβληθεί από $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ σε $\begin{pmatrix} 10+\varepsilon_1 \\ 7+\varepsilon_2 \end{pmatrix}$

Οπότε $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \Delta x$, $\Delta x = \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 - 2 \end{pmatrix}$

Επίσης για $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A(\Delta x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$

Συνεπώς $\Delta x = A^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$

Κάνοντας πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Επίσης $\quad \|\Delta x\|_1 \le \|A^{-1}\|_1 \cdot \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \right\|_1$

και $\quad \|A^{-1}\|_1 = \max(2,3) = 3.$

Συνεπώς $\quad |y_1 - 1| + |y_2 - 2| = \|\Delta x\|_1 \le 3 \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = 3\left(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|\right)$

Επίσης, $\quad \|A^{-1}\|_\infty = 3.5$

Άρα $\quad \max\left(|y_1 - 1|, |y_2 - 2|\right) \le \|A^{-1}\|_\infty \max\left(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\right)$