Άσκηση : Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Εξετάστε αν η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ στη λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$

Απόδειξη :

$$A = D - L - U = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

Ο πινακας επαναληψης της Gauss-Seidel θα ειναι ο $T_{GS} = (D-L)^{-1}U$

$$D-L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -3/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Οποτε $$T_{GS} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -3/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/8 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Παρατηρουμε οτι $\|T_{GS}\|_\infty = \max\left(1/8 + 1/4,\ 1/4,\ 3/8 + 1/4\right) = \frac{5}{8} < 1$

Οποτε υπαρχει μια φυσική νορμα πινακων για την οποία ο πινακας επαναληψης T_{GS}, $\|T_{GS}\|_\infty < 1$
Αρα η μεθοδος συγκλινει.

<u>Άσκηση</u>: Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

α) Δείξτε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος

β) Δείξτε ότι αν θεωρήσουμε τη μέθοδο Jacobi για να προσεγγίσουμε τη λύση γραμμικών συστημάτων με πίνακα τον A, τότε η $\rho(T_J) > 1$, όπου T_J ο πίνακας επανάληψης της μεθόδου Jacobi για τον A

<u>Απόδειξη</u>: α) το αποτέλεσμα μπορούμε να το δείξουμε με 2-τρόπους

Σύμφωνα με τον ορισμό θέλουμε να δείξουμε ότι $x^T A x > 0$ για $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$

Αν θέσουμε $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ τότε $Ax = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$

$$x^T A x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3$$

$$+ 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_3x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

$$= 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$$

$$= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 2x_1x_2 + (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3) + x_1^2 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2 > 0$$ αν x_1, x_2, x_3 όχι όλα 0

β΄ τρόπος: Θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση Cholesky. Αν ο $A = LL^T$, όπου

L άνω τριγωνικός με θετικά (διαφορετικά του μηδέν) διαγώνια στοιχεία, τότε ολοκληρώνεται ο αλγόριθμος Cholesky για τον A.

Έστω. $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$. Θέλουμε να βρούμε τον L, τ.ω. $A = LL^T$, & $l_{ii} > 0$
$i = 1, 2, 3$

$$LL^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$l_{11}^2 = 3 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{3}$$

$$l_{21} l_{11} = 2 \Rightarrow l_{21} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 3 \Rightarrow l_{22}^2 = 3 - l_{21}^2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow l_{22} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$l_{31} l_{11} = 1 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} = 2 \Rightarrow l_{32} = (2 - l_{31} l_{21}) / l_{22} = \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 3 \Rightarrow l_{33}^2 = 3 - l_{31}^2 - l_{32}^2 = 3 - \frac{1}{3} - \frac{16}{15} = \frac{24}{15}$$

$$\Rightarrow l_{33} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}$$

Συνεπώς αφού ολοκληρώνεται ο αλγόριθμος Cholesky ο A είναι θετικά ορισμένος β) Θεωρούμε τώρα τη μέθοδο Jacobi για τον A, οπότε

$$A = D - L - U, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}, \quad L + U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε $T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & 0 & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα T_J, οπότε

$$\det(T_J - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -\lambda & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2/3 \\ -2/3 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3} \det\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -\lambda \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \det\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -\lambda & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - 4/9\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9} - \frac{\lambda}{3}\right)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda - \frac{8}{27}$$

Μπορούμε να δούμε ότι για $\lambda = 1/3$, $\det(T_J - \lambda I) = 0$

οπότε $-\lambda^3 + \lambda - 8/27 = -(\lambda - 1/3)\left(\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda - 8/9\right)$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες του $\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda - 8/9$, οι οποίες είναι

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{6} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{6}$$

Παρατηρούμε ότι $\left|\frac{1 + \sqrt{33}}{6}\right| > 1$, οπότε $\rho(T_J) > 1$ και άρα η μέθοδος Jacobi δεν συγκλίνει

Άσκηση: Αποδείξτε ότι η μέθοδος Gauss-Seidel δεν συγκλίνει για

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 50 & 25 & 2 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε $A = D - L - U$, όπου

$$T_{GS} = (D-L)^{-1} U, \quad D - L = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \\ 50 & 25 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να βρούμε ότι

$$(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ -5/16 & 1/4 & 0 \\ 25/32 & -25/8 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Οπότε $T_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 5/8 & 1/16 \\ 0 & -25/16 & 75/32 \end{pmatrix}$

Στη συνέχεια θέλουμε να βρούμε τις ιδιοτιμές του T_{GS}.

$$\det(T_{GS} - \lambda I) = \dots = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{95}{32}\lambda + \frac{25}{16^2}\right)$$

Επειδή $\frac{95}{32} > 2$ εύκολα βγαίνει ότι υπάρχει ρίζα του $\lambda^2 - \frac{95}{32}\lambda + \frac{25}{16^2}$ μεγαλύτερη του 1, αν Δ η διακρίνουσα τότε η ρίζα $\frac{\frac{95}{32} + \sqrt{\Delta}}{2} > 1$.

(Μπορούμε να δούμε ότι $\Delta > 0$). Συνεπώς η μέθοδος Gauss-Seidel δεν συγκλίνει.