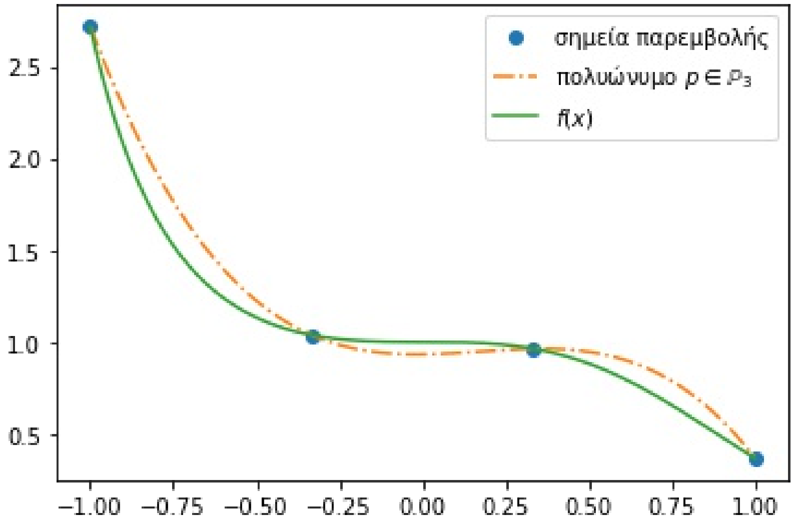
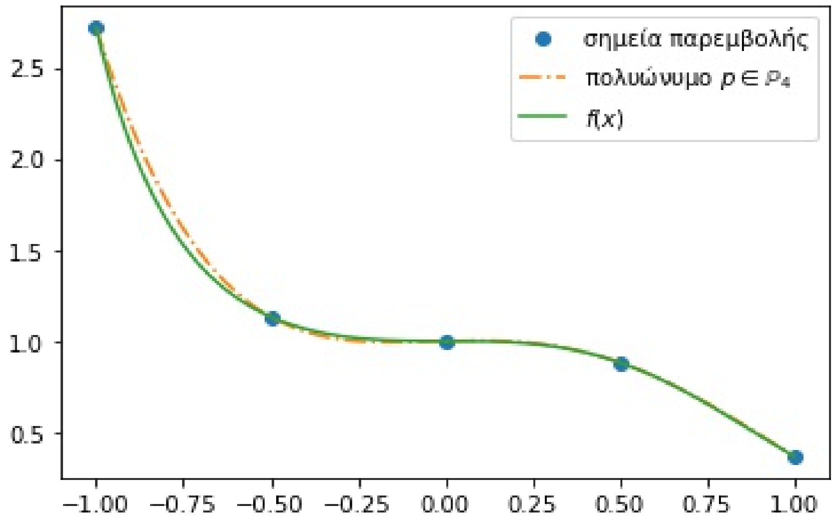
Συμπεριφορά πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλα n.

Το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης f είναι μια συνάρτηση η οποία ταυτίζεται με την f στα σημεία παρεμβολής

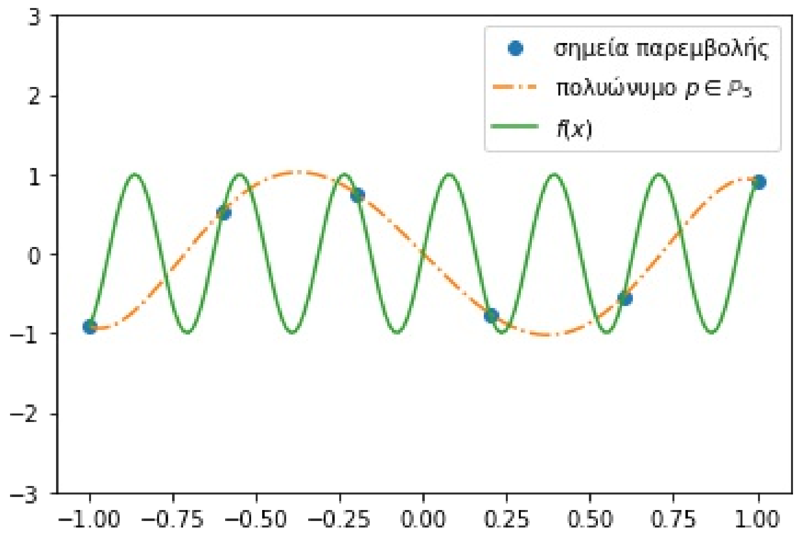
Προφανώς στα υπόλοιπα σημεία θα λαμβάνει διαφορετικές τιμές (αλλιώς θα ήταν η f και αυτή ένα πολυώνυμο)

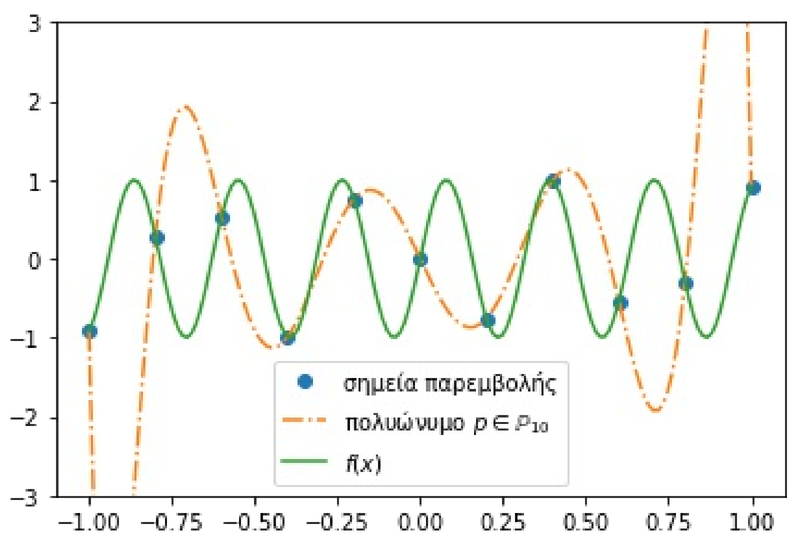
Επειδή ένας λόγος που κατασκευάζουμε το πολυώνυμο παρεμβολής είναι να προσεγγίσουμε τιμές της f, στα υπόλοιπα σημεία (εκτός από τους κόμβους x_i), αυξάνοντας τον βαθμό του πολυωνύμου n (παίρνοντας δηλ. περισσότερους κόμβους) περιμένουμε να "πλησιάζουμε καλύτερα" την f.





Αυξανοντας τον αριθμό των σημειων που παρεμβαλουμε παρατηρουμε το γραφημα του πολυωνυμου παρεμβολης να πλησιαζει καλυτερα στο γραφημα της συναρτησης f





Δυστυχώς όμως, μπορεί η f να είναι τέτοια ώστε
αυξάνοντας τον αριθμό των σημείων παρεμβολής, το γράφημα του
πολυωνύμου παρεμβολής να <u>μην</u> πλησιάζει αυτό της f
Να υπάρχουν δηλαδή σημεία που το σφάλμα να μεγαλώνει συνεχώς

Για να μελετήσουμε αυτή τη συμπεριφορά, ας θεωρήσουμε $n+1$ σημεία στο $[-1,1]$ (διαφορετικά ανά δύο)

$$x_0, \ldots, x_n \in [-1,1]$$

Είχαμε δείξει ότι το σφάλμα της παρεμβολής ικανοποιεί τη ακόλουθη σχέση, (αν η $f \in C^{n+1}[-1,1]$),

$\forall x \in [-1,1]$ υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τ.ω.

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \phi_{n+1}(x)$$

όπου
$$\phi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

και P_n το πολυώνυμο παρεμβολής ως προς τα σημεία $x_0, \ldots, x_n$

και άρα

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\phi_{n+1}\|_\infty$$

όπου $\|g\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} |g(x)|$

Αν υποθέσουμε ότι $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ παραμένει φραγμένη καθώς αυξάνουμε την τάξη της παραγώγου, αυτό που θα πρέπει να δούμε είναι πόσο μεγαλώνει η $\|\phi_{n+1}\|_\infty$, καθώς παίρνουμε όλο και περισσότερα σημεία παρεμβολής - κόμβους.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα σημεία
$x_0, x_1, \ldots, x_n \in [-1,1]$ είναι ισαπέχοντα

δηλαδή έχουμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[-1,1]$
Αυτά τα σημεία τότε θα ικανοποιούν

$$x_i = -1 + ih \quad , \quad i=0,\ldots,n \quad , \quad h = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = -1 \; , \; x_1 = -1+h \; , \; x_2 = -1+2h \; , \; \ldots \; , \; x_n = -1 + n \cdot h = 1$$

<u>Πρόταση</u>: Αν $x_0, \dots, x_n$ είναι ισαπέχοντα σημεία του $[-1,1]$ τότε

η $\phi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ ικανοποιεί

$$\|\phi_{n+1}\|_\infty = \max_{-1 \le x \le 1} |\phi_{n+1}(x)| \le \frac{n!}{4} h^{n+1}$$

όπου $h = \frac{2}{n}$

<u>Απόδειξη</u>: Θα το δείξουμε ως άσκηση.

Λόγω αυτής της Πρότασης έχουμε για το σφάλμα της Παρεμβολής Lagrange, αν τα σημεία $x_0, \dots, x_n$ είναι ισαπέχοντα στο $[-1, 1]$

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Επομένως αν $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ παραμένει φραγμένο καθώς το $n \to \infty$ εύκολα βλέπουμε ότι $h = \frac{2}{n} \to 0$, $n \to \infty$ και

$$\|f - p_n\|_\infty \to 0$$

Άρα βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση αν αυξήσουμε τον αριθμό των σημείων της παρεμβολής η παρεμβάλουσα θα πλησιάζει όλο και περισσότερο την f

Παράδειγμα: $f(x)=e^{x}$ τότε $f^{(n+1)}(x)=e^{x}$, $-1\le x\le 1$

και $\|f^{(n+1)}\|_{\infty}=\max\limits_{-1\le x\le 1}|f^{(n+1)}(x)|=e$

$$\|f-p_n\|_{\infty}=\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-p_n(x)|\le \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}\cdot e=\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1}\frac{e}{4(n+1)}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Ισχυρισμός: Αν έχουμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό, καθώς το πλήθος των σημείων της παρεμβολής τείνει στο άπειρο, η ακολουθία των πολυωνύμων παρεμβολής μιας οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης f στο $[-1,1]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f

$$\forall f \in C[-1,1], \quad \|f - p_n\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Αν έχουμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό, καθώς το πλήθος των σημείων της παρεμβολής τείνει στο άπειρο, η ακολουθία των πολυωνύμων παρεμβολής μιας οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης f στο $[-1,1]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f

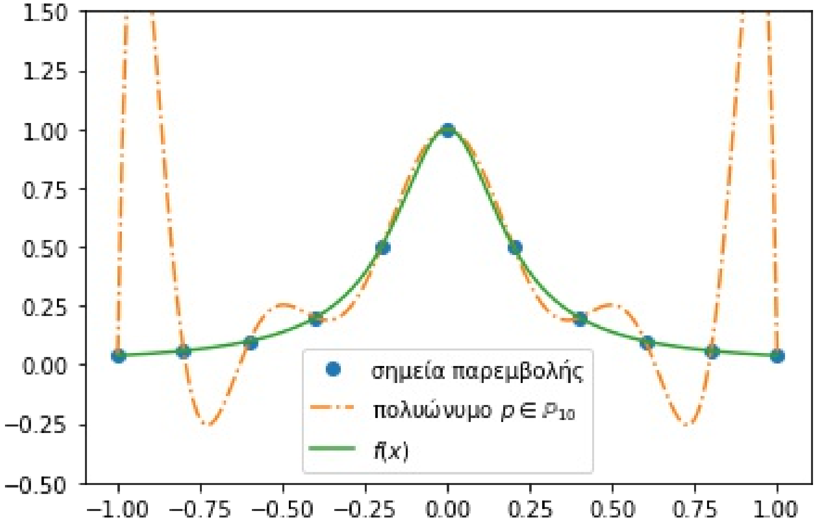
$$\forall f \in C[-1,1], \quad \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

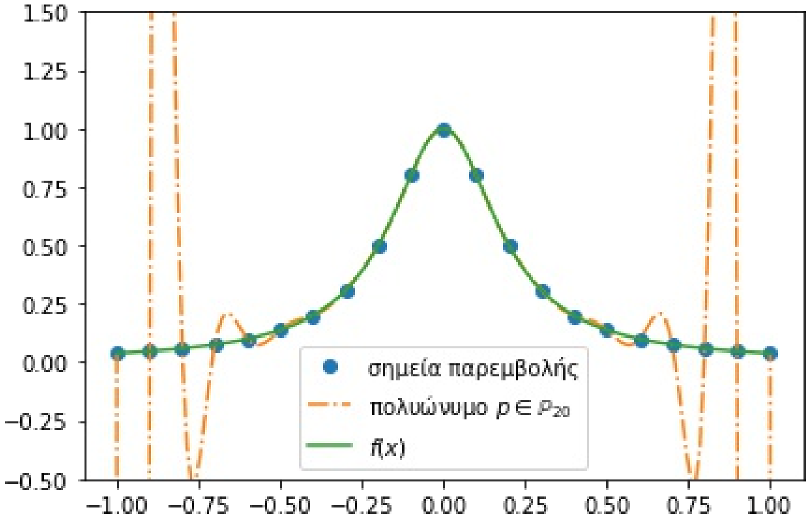
<u>Ο ισχυρισμός είναι λάθος!!!</u>

Παραδειγμα Runge

Θεωρουμε τη συναρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$



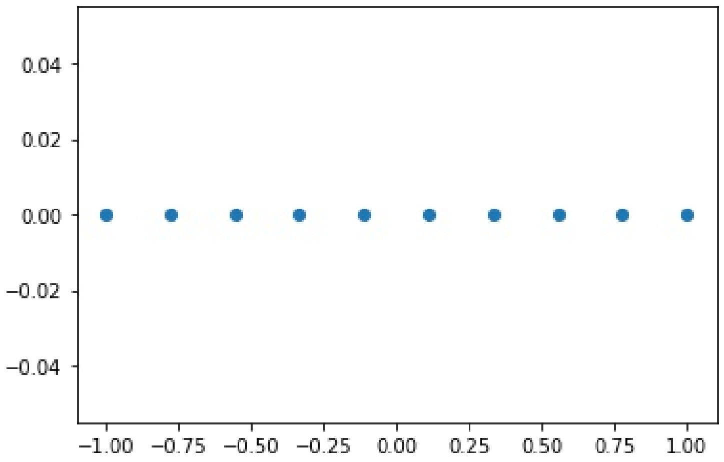


Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ και

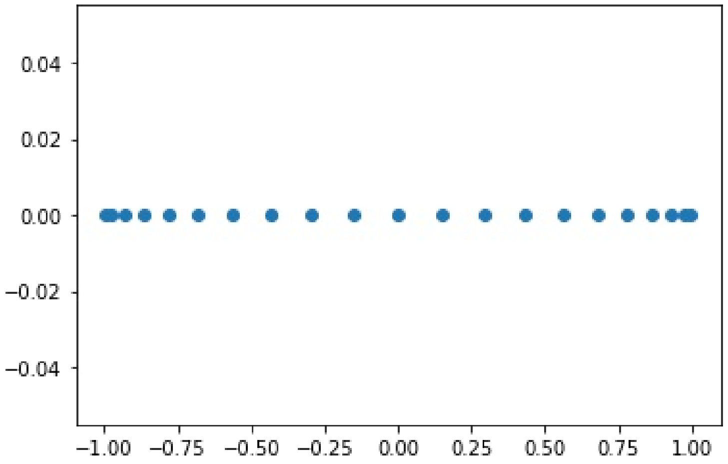
$$\|f - p_n\|_\infty \to \infty \quad , \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty$$

Από το γραφήματα φαίνεται ότι γύρω από το 0 το πολυώνυμο παρεμβολής πλησιάζει πολύ καλά τη συνάρτηση f, όμως στα άκρα του $[-1,1]$ εμφανίζονται μεγάλα σφάλματα.

Ερώτημα: Μήπως αν δεν παίρναμε ομοιόμορφα τα σημεία παρεμβολής, αλλά παίρναμε περισσότερα στα άκρα από ότι στο κέντρο, θα είχαμε καλύτερη προσέγγιση;



Ομοιόμορφος διαμερισμός



Διαμερισμός Chebyshev
(μη-ομοιόμορφος)

Σημεία Chebyshev:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad i=0,\dots,n$$

__Πρόταση__: Αν $x_i, i=0,\dots,n$ τα σημεία Chebyshev, τότε η

$$\phi_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \quad \text{ικανοποιεί}$$

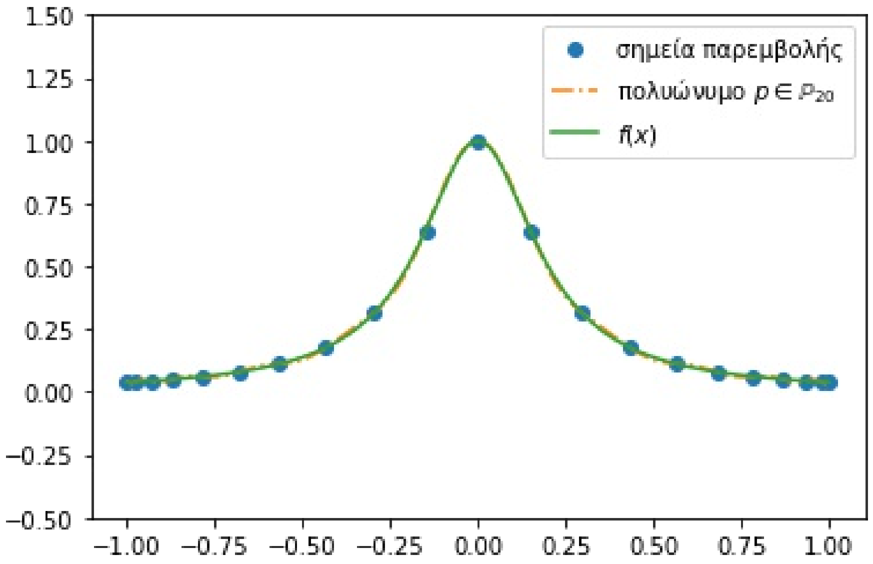
$$\|\phi_{n+1}\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1}|\phi_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$$

Το σφάλμα του πολυωνύμου παρεμβολής ως προς τα σημεία Chebyshev

$$\|f-p_n\|_\infty \le \frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Πρόταση: Αν θεωρήσουμε τα σημεία Chebyshev στο $[-1,1]$, τότε

$$\forall f \in C^1[-1,1], \quad \|f - p_n\|_\infty \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$



$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Παρατηρήσεις:

1) Θεώρημα (Faber, 1914)

Για κάθε επιλογή σημείων παρεμβολής, υπάρχει συνεχής συνάρτηση, για την οποία το σφάλμα της παρεμβολής δεν συγκλίνει στο 0 (Η παρεμβολή αποτυγχάνει)

2) <u>Προβληματισμός</u>: Ακόμα και αν η παρεμβολή έχει μικρό σφάλμα για μεγάλα n, ο υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής είναι προβληματικός, λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης (συσσώρευση)