Παρεμβολή Hermite

Αν για να κατασκευάσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής p βασιζόμαστε μόνο στις τιμές που λαμβάνει σε ορισμένα σημεία, τα σημεία $x_0, \dots, x_n$, τους κόμβους της παρεμβολής, η παρεμβολή ονομάζεται παρεμβολή Lagrange.

Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f, η οποία θέλουμε να παρεμβάλουμε είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_0, \dots, x_n$ και γνωρίζουμε τις τιμές της παραγώγου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την

πληροφορία για να κατασκευάσουμε ένα διαφορετικό (νέο) πολυώνυμο παρεμβολής το οποίο εκτός από τις τιμές της f παρεμβάλλει τώρα και τιμές της παραγώγου ή παραγώγων της f στους κόμβους.

Αυτή η παρεμβολή ονομάζεται παρεμβολή Hermite

__Θεώρημα__ (Πρόβλημα παρεμβολής Hermite): Έστω $m_0, \dots, m_n \geq 0$ φυσικοί αριθμοί, $N = m_0 + \dots + m_n + n$, και $M = \max\{m_0, \dots, m_n\}$. Αν $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δυο διαφορετικά ανά δυο σημεία και $f \in C^M[a,b]$ τότε το υπάρχει μοναδικό $p \in \mathbb{P}_N$ τέτοιο ώστε

$$p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \qquad i = 0, \dots, m_0$$

$$\vdots$$

$$p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n), \qquad i = 0, \dots, m_n .$$

Απόδειξη: Οι εξισώσεις παρεμβολής, με ανάλογο τρόπο όπως και στην παρεμβολή Lagrange, δημιουργούν ένα σύστημα $N+1$ γραμμικών εξισώσεων με $N+1$ αγνώστους (τους συντελεστές του πολυωνύμου p)

Όπως και στο ανάλογο θεώρημα για την παρεμβολή Lagrange, αρκεί να δείξουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές έχει μόνο την τετριμμένη λύση και άρα το p θα ορίζεται μοναδικά

Αν $q \in \mathbb{P}_N$ είναι το πολυώνυμο που προκύπτει αν λύσουμε τις εξισώσεις του αντίστοιχου ομογενούς τότε το x_0 θα είναι ρίζα του q πολλαπλότητας m_0+1, το x_1 ρίζα πολλαπλότητας m_1+1, κ.ο.κ. Οπότε αν μετρήσουμε

και την πολλαπλότητα κάθε ρίζας, το q θα έχει

$$(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)=m_0+\dots+m_n+n+1=N+1 \text{ ρίζες}$$

Συνεπώς το $q \in \mathbb{P}_N$ θα έχει $N+1$ ρίζες, άρα $q \equiv 0$. $\blacksquare$

Αναπαράσταση πολυωνύμου παρεμβολής Hermite

Η πιο ενδιαφέρουσα παρεμβολή Hermite είναι αυτή όπου $m_0 = \dots = m_n = 1$, και τότε $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ και

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Για αυτή την περίπτωση μπορούμε να δείξουμε ότι το p γράφεται μοναδικά ως

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) H_i^{(1)}(x) + f'(x_i) H_i^{(2)}(x)$$

Κατ' αναλογία με τα πολυώνυμα Lagrange θέλουμε τα $H_i^{(1)}, H_i^{(2)} \in \mathbb{P}_N$ να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{cases} H_i^{(1)}(x_i) = 1 \ , \quad H_i^{(1)}(x_j) = 0 \ , \quad j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ \frac{d}{dx} H_i^{(1)}(x_j) = 0 \ , \quad j = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} H_i^{(2)}(x_j) = 0 \ , \quad j = 0, 1, \dots, n \\ \frac{d}{dx} H_i^{(2)}(x_i) = 1 \ , \quad \frac{d}{dx} H_i^{(2)}(x_j) = 0 \ , \quad j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \end{cases}$$

Σημειώνουμε το θεώρημα που μόλις δείξαμε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $H_i^{(1)}, H_i^{(2)}$ που ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις

Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι τα $H_i^{(1)}$, $H_i^{(2)}$ συνδέονται με τα Πολυώνυμα Lagrange με τον ακόλουθο τρόπο

$$H_i^{(1)}(x) = \left(1 - 2(x-x_i)L_i'(x_i)\right)L_i^2(x)$$

$$H_i^{(2)}(x) = (x-x_i)L_i^2(x)$$

Πράγματι μπορούμε να δούμε ότι

$$H_i^{(1)}(x_i) = \left(1 - 2(x_i - x_i) L_i'(x_i)\right) L_i^2(x_i) = L_i^2(x_i) = 1.$$

$$H_i^{(1)}(x_j) = \left(1 - 2(x_j - x_i) L_i'(x_i)\right) L_i^2(x_j) = 0$$

Επίσης

$$\frac{d}{dx} H_i^{(1)}(x) = -2L_i'(x_i) L_i^2(x) + \left(1 - 2(x - x_i) L_i'(x_i)\right) 2L_i(x) L_i'(x)$$

οπότε $\frac{d}{dx} H_i^{(1)}(x_j) = 0$ για $j \neq i$ και

$$\frac{d}{dx} H_i^{(1)}(x_i) = -2L_i'(x_i) + 2L_i'(x_i) = 0$$

Επίσης $\quad H_i^{(2)}(x_j) = (x_j - x_i)\, L_i^2(x_j) = 0 \quad , \ j = 0, 1, \dots, n$

και $\quad \dfrac{d}{dx} H_i^{(2)}(x) = L_i^2(x) + 2(x - x_i) L_i(x) L_i'(x)$

οπότε $\quad \dfrac{d}{dx} H_i^{(2)}(x_j) = L_i^2(x_j) + 2(x_j - x_i) L_i(x_j) L_i'(x_j) = 0 \quad , \ j \neq i$

και $\quad \dfrac{d}{dx} H_i^{(2)}(x_i) = L_i^2(x_i) = 1$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $f \in C^{2n+2}[a,b]$

Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite που ορίζεται από

$$p(x_i) = f(x_i) \quad , \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

Τότε ισχύει ότι

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι ανάλογη με το αντίστοιχο θεώρημα για την παρεμβολή Lagrange.

Για $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ η ισότητα προφανώς ισχύει. Έστω τώρα $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$, $x \in [a,b]$.

Ας υποθέσουμε (χωρίς αυτό να επηρεάζει τη γενικότητα) ότι $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Έστω $x \in (x_j, x_{j+1})$ για κάποιο $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Αν $x \in [a, x_0)$ ή $x \in (x_n, b]$ η απόδειξη γίνεται ανάλογα.

Θέτουμε $\Psi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2$

και τη βοηθητική συνάρτηση

$$\psi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \Psi(t), \quad t \in [a,b]$$

Προφανώς η $\psi(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$

και επιπλέον $\psi(x) = 0$

Συνεπώς υπάρχουν $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, j-1$

$\xi_j \in (x_j, x)$, $\xi_{j+1} \in (x, x_{j+1})$

$\xi_{i+1} \in (x_i, x_{i+1})$, $i = j+1, \dots, n$

τέτοια ώστε $\psi'(\xi_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι $\psi'(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$

Συνεπώς η ψ μηδενίζεται σε $2n+2$ σημεία (διαφορετικά ανά δύο)

Η $\psi \in C^{2(n+1)}[a,b]$, οπότε (όπως και στο ανάλογο θεώρημα για την παρεμβολή Lagrange) οδηγούμαστε στο ότι

υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω. $\psi^{(2n+2)}(\xi) = 0$

Επειδή $\psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \dfrac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)}(2n+2)!$

Καταλήγουμε στο ότι

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\Psi(x)$$