Παρεμβολή με splines

Ας θεωρήσουμε τη γραμμική παρεμβολή μιας συνάρτησης $f \in C^2[a,b]$ με $p_1 \in \mathbb{P}_1$ ως προς τα σημεία $x_0 = a$ και $x_1 = b$.

Γνωρίζουμε ότι η εκτίμηση του σφάλματος είναι

$$\|f - p_1\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p_1(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

Επίσης αν τώρα θεωρήσουμε $p_2 \in \mathbb{P}_2$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f ως προς $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$, τότε

$$\|f - p_2\|_\infty \le \frac{(b-a)^3}{96} \|f^{(3)}\|_\infty$$

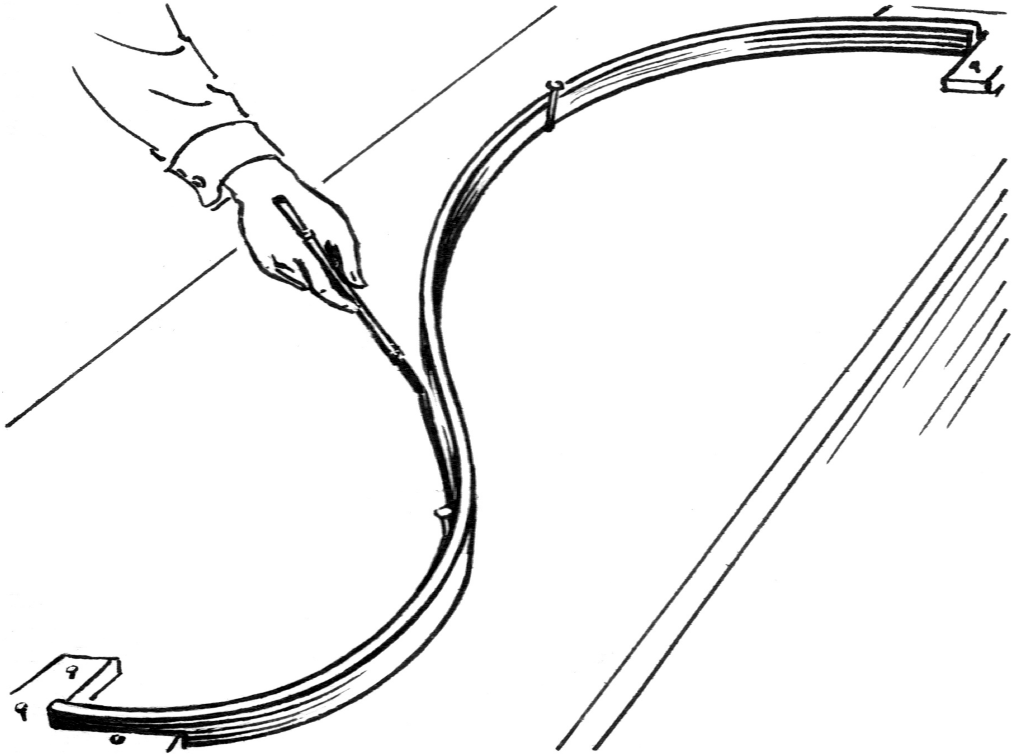
Στη συνέχεια αν $h = \frac{b-a}{3}$ και θεωρήσουμε τα σημεία

$x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a+2h$, $x_3 = a+3h = b$, το πολυώνυμο παρεμβολής

$P_3 \in \mathbb{P}_3$ ως προς τα x_0, x_1, x_2, x_3 θα ικανοποιεί

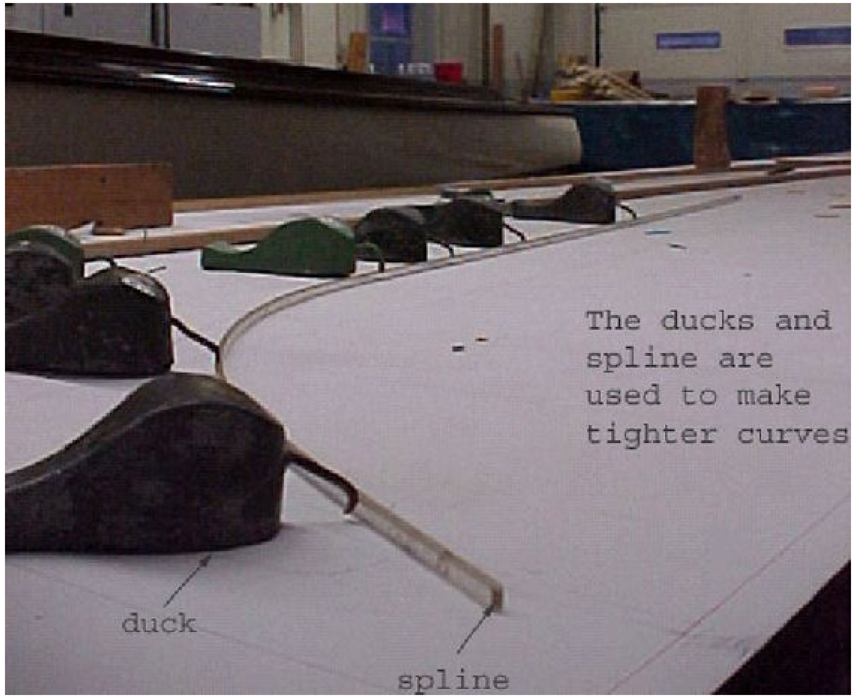
$$\|f - P_3\|_\infty \leq \frac{(b-a)^4}{1296} \|f^{(4)}\|_\infty$$

Παρατηρούμε από τις παραπάνω εκτιμήσεις για τα σφάλματα ότι αν το μήκος του διαστήματος $[a,b]$ είναι μικρό, τότε και το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής είναι μικρό.



Spline

Ευκαμπτη ξυλινη ραβδος η οποια χρησιμοποιειται για το σχεδιασμό καμπυλών



Πολύ πριν τη χρήση υπολογιστών, οι σχεδιαστές χρησιμοποιούσαν splines για να κατασκευάσουν μια καμπύλη η οποία να "περνάει" από δοσμένα σημεία

Ευρεία χρήση στην ναυπηγική

Ορισμός (splines): Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $m \in \mathbb{N}$. Τα στοιχεία του συνόλου

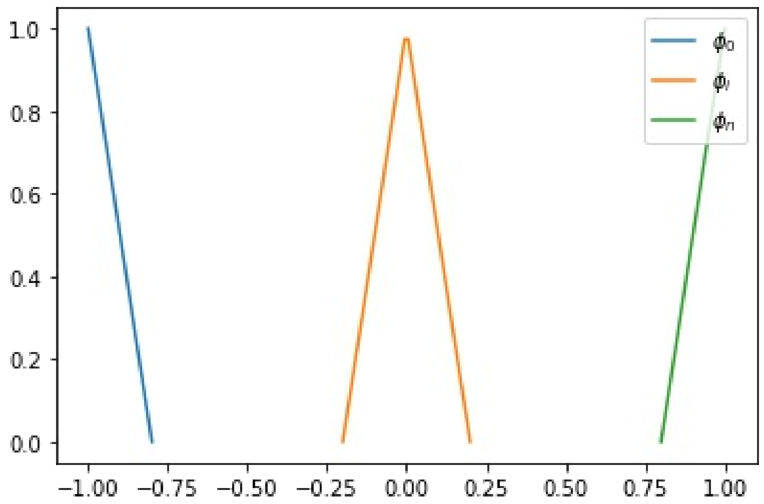
$$S_m(\Delta) = \left\{ s \in C^{m-1}[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m \, , \; i = 0, \dots, n-1 \right\}$$

λέγονται (πολυωνυμικές) splines βαθμού m (ως προς Δ)

Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις

Έστω $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $S_1(\Delta)$ το σύνολο των συνεχών κατά τμήματα (ως προς Δ) γραμμικών συναρτήσεων.

Ορίζουμε τώρα τις συναρτήσεις $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$



Σύμφωνα με τους τύπους

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_0}, & x_0 \le x \le x_1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x_{n-1} \le x \le x_n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \le x \le x_i \\ -\dfrac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

<u>Ορισμός</u>: Οι συναρτήσεις $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ ορισμένες στο $[a,b]$, καλούνται γραμμικώς εξαρτημένες αν υπάρχουν σταθερές $c_0, \dots, c_m$ (όχι όλες μηδέν) τ.ω.

$$c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_m \varphi_m(t) = 0 \quad , \; \forall\, t \in [a,b]$$

Αν οι $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητες

Πρόταση: Οι συναρτήσεις $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Συνεπώς

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(t) = 0 \quad \text{τότε} \quad \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x_j) = 0 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Όμως $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x_j) = c_j \varphi_j(x_j) = c_j \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n$

Άρα $c_j = 0 \quad , \quad j = 0, \dots, n$

<u>Πρόταση</u>: Οι συναρτήσεις $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ αποτελούν βάση του $S_1(\Delta)$

<u>Απόδειξη</u>:

Εύκολα βλέπουμε ότι $\varphi_i \in S_1(\Delta)$, $i = 0, \dots, n$

Επίσης αν $s \in S_1(\Delta)$ τότε έχουμε ότι η συνάρτηση

$$\sum_{i=0}^{n} s(x_i)\varphi_i(t)$$

είναι μια συνάρτηση του $S_1(\Delta)$ η οποία ταυτίζεται με τη s σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Συνεπώς $s(x) = \sum_{i=0}^{n} s(x_i)\varphi_i(x)$ και $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ αποτελούν βάση

Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις

Αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f \in C[a,b]$ υπάρχει μια συνάρτηση (ακριβώς μία) $s \in S_1(\Delta)$ η οποία παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$

$$s(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

Οπότε θα έχουμε

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \varphi_i(x)$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f \in C^2[a,b]$

Δ: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $s \in S_1(\Delta)$ η παρεμβάλλουσα της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$

Αν $h_i = x_i - x_{i-1}$ και $h = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$ τότε

$$\| f - s \|_\infty \le \frac{h^2}{8} \| f'' \|_\infty$$

Απόδειξη: Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε διάστημα $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$

τότε το πολυώνυμο P_i (γραμμικό)

$$P_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

λαμβάνει στα άκρα x_i, x_{i+1} τις ίδιες τιμές με το S, συνεπώς θα ταυτίζεται με την S στο $[x_i, x_{i+1}]$.

Οπότε από το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής που έχουμε δείξει θα έχουμε

για $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $\exists\ \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ τ.ω.

$$f(x) - S(x) = f(x) - P_i(x) = \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})\, f''(\xi_i)$$

Συνεπώς

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in (x_i, x_{i+1})} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \, \|f''\|_\infty$$

$$\leq \frac{h_{i+1}^2}{8} \|f''\|_\infty$$

Άρα θα ισχύει και η ζητούμενη σχέση.