Αριθμητική Ολοκλήρωση
(κανόνας Gauss)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους ($w(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$). Θέτουμε

$$I(f) = \int_a^b w(x)\, f(x)\,dx$$

και θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \approx I(f)$$

Τώρα, όμως, σε αντίθεση με τους τύπους Newton-Cotes δεν θα θεωρήσουμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$

Στους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης που θέλουμε να κατασκευάσουμε τώρα, θέλουμε να προσδιορίσουμε εκτός από τα βάρη w_i και τους κόμβους x_i, έτσι ώστε ο τύπος Q_n να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του <u>μέγιστου</u> δυνατού βαθμού.

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε θεωρήσει έναν κανόνα Q_n, τότε αυτός δεν ολοκληρώνει ακριβώς <u>όλα</u> τα πολυώνυμα βαθμού $2n$.

Έστω $p(x) = (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \cdots (x-x_n)^2 \in \mathbb{P}_{2n}$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$I(p) > 0 \quad \text{και} \quad Q_n(p) = 0$$

Οι τύποι ολοκλήρωσης Gauss που θα κατασκευάσουμε (με n κόμβους) ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $2n-1$

Θεώρημα: Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w:[a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα. Τότε

α) Αν $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ οι ρίζες του p_n, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα βάρη $w_1, \ldots, w_n$, όλα θετικά, τέτοια ώστε ο τύπος ολοκλήρωσης Q_n,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$,

$$Q_n(p) = \int_a^b w(x)\, p(x)\, dx, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}$$

β) Αν ο τύπος ολοκλήρωσης Q_n με κόμβους $x_1, \dots, x_n$ και βάρη $w_1, \dots, w_n$,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$, τότε οι κόμβοι $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι ρίζες του P_n

<u>Απόδειξη</u> : (Συνέχεια στο επόμενο μάθημα)