Στρογγυλοποίηση

Είναι μια σημαντική ιδιότητα στην Αριθμητική Ανάλυση

Έστω x ένας θετικός δεκαδικός αριθμός

$$x = 0.d_1 d_2 d_3 \ldots$$

όπου $d_1, d_2, d_3, \ldots$ ψηφία $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 8, 9$

Στρογγυλοποίηση του x σε n ψηφία - γίνεται ο αριθμός $\tilde{x}$

- Ελέγχουμε το $n+1$ - ψηφίο
  - Αν το $n+1$ ψηφίο είναι $0, 1, 2, 3, 4$ τότε

    $$\tilde{x} = 0.d_1 \ldots d_{n-1} d_n$$

  - Αν το $n+1$ ψηφίο είναι $5, 6, 7, 8$ ή 9 τότε

    $$\tilde{x} = 0.d_1 \ldots d_n + 0.\underbrace{0 \ldots 0}_{n-1}\underset{n\text{-θέση}}{1}$$

Παραδείγματα

Στρογγυλοποίηση στο 4ο δεκαδικό ψηφίο

$$x = 0.1735499 \Rightarrow \tilde{x} = 0.1735$$

$$x = 0.9999500 \Rightarrow \tilde{x} = 1.0000$$

$$x = 0.4321609 \Rightarrow \hat{x} = 0.4322$$

Σφάλμα στρογγυλοποίησης

i) $x = \underbrace{0.d_1\dots d_n}_{\tilde{x}} \,|\, \overbrace{d_{n+1}d_{n+2}\dots}^{\varepsilon} = \tilde{x} + \varepsilon$, $d_{n+1} = 0, 1, 2, 3$ ή 4

$$\varepsilon = 0.0\dots 0 d_{n+1}d_{n+2} < 0.\underbrace{0\dots 0}_{n\text{-θέσεις}}\underset{\uparrow\,(n+1)\text{-θέση}}{5}0\dots = 5\times 10^{-(n+1)} = 5\times 10^{-1}\times 10^{-n} = \frac{1}{2}\times 10^{-n}$$

ii) $x = \overbrace{0.d_1\dots d_n}^{\hat{x}} \,|\, d_{n+1}d_{n+2}\dots$, $d_{n+1} = 5, 6, 7, 8$ ή 9 , $0.0\dots 0 d_{n+1}d_{n+2}\dots = 0.d_{n+1}d_{n+2}\dots \times 10^{-n} = \delta \times 10^{-n}$

$$\tilde{x} = 0.d_1\dots d_n + 1\times 10^{-n} = \hat{x} + 1\times 10^{-n}.$$

$$\tilde{x} - x = \hat{x} + 1\times 10^{-n} - \hat{x} - \delta\times 10^{-n} = (1-\delta)\times 10^{-n} \le (0.5)\times 10^{-n} = \frac{1}{2}\times 10^{-n}$$

Σφάλμα στρογγυλοποίησης : $|x-\tilde{x}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n}$

Αποκοπή σε n-ψηφία

$$x = 0.d_1 d_2 \dots d_n | d_{n+1} \dots \quad , \quad \tilde{x} = 0.d_1 \dots d_n$$

$$0.\underbrace{0 \dots 0}_{n\text{-ψηφία}} d_{n+1} d_{n+2} \dots = \delta \times 10^{-n} \quad , \quad 0 \leq \delta < 1$$

Τότε σφάλμα αποκοπής $|x-\tilde{x}| = \delta \times 10^{-n} < 10^{-n}$

Αναπαράσταση αριθμών στον Η/Υ.

- Δεκαδικό σύστημα - ψηφία : 0, 1, 2, ..., 9

$427.325 = 4\times 10^{2} + 2\times 10^{1} + 7\times 10^{0} + 3\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2} + 5\times 10^{-3}$

- Δυαδικό σύστημα - ψηφία : 0, 1

$\underbrace{1001.11101}_{\text{2-δικό σύστημα}} = 1\times 2^{3} + 0\times 2^{2} + 0\times 2^{1} + 1\times 2^{0} + 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5}$

$= 9.90625$ (10-δικό)

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής - Επιστημονικός τρόπος αναπαράστασης αριθμών

$732.5051 = 0.7325051 \times 10^{3}$

$-0.005612 = -0.5612 \times 10^{-2}$

Αριθμοί μηχανής – Αριθμοί Η/Υ.

$$x = \pm 0.d_1 \ldots d_k \times 10^e \quad , \quad d_1 \neq 0 \quad , \quad L \leq e \leq U$$

Σφάλμα αναπαράστασης αριθμών στον Η/Υ

Το σφάλμα που προκύπτει από την αντικατάσταση ενός πραγματικού αριθμού (μπορεί να έχει άπειρα ψηφία) με έναν αριθμό μηχανής, ανεξάρτητα αν κάνουμε αποκοπή ή στρογγυλοποίηση

Αριθμοί μηχανής - Αριθμοί Η/Υ.

$$x = \pm 0.d_1 \dots d_k \times 10^e \quad , \quad d_1 \neq 0 \quad , \quad L \leq e \leq U$$

Σφάλμα αναπαράστασης αριθμών στον Η/Υ

Το σφάλμα που προκύπτει από την αντικατάσταση ενός πραγματικού αριθμού (μπορεί να έχει άπειρα ψηφία) με έναν αριθμό μηχανής, ανεξάρτητα αν κάνουμε αποκοπή ή στρογγυλοποίηση

Έστω μια μηχανή Η/Υ με στοιχεία $k=4$ και $U=-L=100$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow fl(x)$ αριθμός της μηχανής

$$x = 3.33333 = 0.\underbrace{333333}_{\text{6-ψηφία}} \times 10^{1} \Rightarrow fl(x) = 0.\underbrace{3333}_{\text{4-ψηφία}} \times 10^{1}$$

Αριθμοί μηχανής

0.3000×10^{31}

0.1000×10^{-41}

$$0.0001 \times 10^{10} = \underbrace{0.1000 \times 10^{7}}_{\text{Αρ. μηχανής}}$$

$$134.7 = \underbrace{0.1347 \times 10}^{3}$$

Αριθμοί μηχανής

$0.0001 \times 10^{-100} = 0.1000 \times 10^{-103}$

Δεν είναι αριθμός της μηχανής
γιατί ο εκθέτης $-103 < L = -100$

$1.0000 \times 10^{100} = 0.1000 \times 10^{101}$ Δεν είναι αριθμός της μηχανής
γιατί ο εκθέτης $101 > U = 100$

Στο διάστημα $[10^{-1}, 1)$ βρίσκονται οι αριθμοί
0.1000, 0.1001, 0.1002, ..., 0.9999

Ο επόμενος αριθμός της μηχανής του 0.9999
είναι $1.0000 = 0.1000 \times 10^{1}$

Στο διαστημα $[1,10)$ οι αριθμοί της μηχανης ειναι

$1 = 0.1000 \times 10^1$, 0.1001×10^1, ..., $0.9999 \times 10^1 = 9.999$

Σε καθε διαστημα της μορφης $[10^t, 10^{t+1})$

βρισκονται το ίδιο πλήθος αριθμοί της μηχανης

Το πλήθος σε καθε διαστημα $[10^t, 10^{t+1})$ εξαρτάται από

τον αριθμό των ψηφίων που "κρατάει" ενας αριθμος μηχανης

Αν $k = 4$, $x = 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^t$

τοτε έχουμε 9×10^3, $(k-1=3)$ αριθμούς

$k=1$ $\quad 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$

$k=2$ $\quad 0.10, 0.11, \ldots, 0.99 \sim 90$ αριθμοι

Επομένως αν έχω κ-ψηφία στους αριθμούς της μηχανής (ακρίβεια κ-ψηφίων)

στο διάστημα $[10^{k-1}, 10^k)$ έχω $9\times 10^{k-1}$ αριθμούς

$k=4 \to$ $[10^3, 10^4)$ έχω 9×10^3 αριθμούς (δηλαδή μόνο τους ακέραιους)

Σε αυτό το διάστημα κανένας δεκαδικός δεν είναι αριθμός της μηχανής.

Παράδειγμα πράξεων $(k=4)$

$$x = 4 \times 10^{-6} = 0.4000 \times 10^{-5}$$

Για να προσθέσουμε $1+x$ πρέπει και οι 2 να είναι σε μορφή αριθμών της μηχανής και να τους έχουμε γράψει ως αριθμούς με τον "ίδιο εκθέτη"

$$1 + x = 1 + 0.4000 \times 10^{-5} = 0.1000 \times 10^{1} + 0.4000 \times 10^{-5}$$

$$= 0.1000 \times 10^{1} + 0.\underbrace{000000}_{6\ \text{ψηφία}}4 \times 10^{1} = 0.1\underbrace{00000}_{6\text{-ψηφία}}4 \times 10^{1}$$

$$fl(1+x) = 0.1000 \times 10^{1} = \underline{1} \qquad \left(fl(10^{10}+1) = 10^{10} \right)$$

Οπότε ο $x = 4 \times 10^{-6}$ έχει για τη μηχανή με $k=4$ την ιδιότητα που έχει ο 0 στην πρόσθεση, οπότε και καλείται και "μηδέν της μηχανής". Το "μηδέν της μηχανής" <u>δεν</u> είναι μοναδικό.

Απόλυτο σφάλμα

$$|fl(x) - x|$$

Σχετικό σφάλμα

$$\frac{|fl(x) - x|}{|x|}$$