Απολυτο Σφαλμα $\qquad x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow fl(x)$

$$|fl(x) - x|$$

Σχετικό Σφάλμα

$$\frac{|fl(x) - x|}{|x|}$$

Παράδειγμα: $y = 0.\underbrace{333333}_{6 \text{ ψηφία}} \times 10^1$

Αν κάνουμε πράξεις με $k=4$ ψηφία τότε

$$fl(y) = 0.3333 \times 10^1$$

Απόλυτο σφάλμα $|fl(y) - y| = |(0.3333 - 0.333333) \times 10^1| = |0.000033 \times 10^1|$

$$= 0.33 \times 10^{-3}$$

Σχετικό σφάλμα $\dfrac{|fl(y) - y|}{|y|} = \dfrac{0.33 \times 10^{-3}}{0.333333 \times 10^1} = \dfrac{0.33}{0.333333} \times 10^{-4} \approx 0.99 \times 10^{-4}$

Παράδειγμα

$$y = 0.333333 \times 10^{10} \Rightarrow fl(y) = 0.3333 \times 10^{10}$$

Απόλυτο σφάλμα $|fl(y) - y| = 0.33 \times 10^{6}$

Σχετικό σφάλμα $\dfrac{|fl(y)-y|}{|y|} = \dfrac{0.33 \times 10^{6}}{0.333333 \times 10^{10}} \cong 0.99 \times 10^{-4}$

Για όλα τα $y = 0.333333 \times 10^{t}$ το σχετικό σφάλμα παραμένει το ίδιο!!

Το σχετικό σφάλμα φαίνεται να δίνει μια πιο αντικειμενική εικόνα για την ακρίβεια αναπαράστασης των αριθμών ενός Η/Υ.

Μέγιστο σχετικό σφάλμα

$$y = \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} \ldots d_m \times 10^e$$

$$fl(y) = \begin{cases} \pm 0.d_1 \ldots d_{k-1} d_k \times 10^e, & \text{αν } d_{k+1} < 5 \\ \pm (0.d_1 d_2 \ldots d_{k-1} d_k + 1 \times 10^{-k}) \times 10^e, & \text{αν } d_{k+1} \geq 5 \end{cases}$$

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι το σφάλμα στρογγυλοποίησης

αν $e=0$

$$|fl(y)-y| \leq \frac{1}{2}\times 10^{-k}$$

Οπότε για $e \neq 0$

$$\frac{|fl(y)-y|}{|y|} \leq \frac{1/2 \times 10^{e-k}}{|0.d_1 \ldots d_m \times 10^{e}|} \leq \frac{1/2 \times 10^{e-k}}{(0.1)\times 10^{e}} = \frac{1}{2}\times 10^{1-k}$$

Μέγιστο σχετικό σφάλμα στρογγυλοποίησης

Παράδειγμα $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{1}{3}$ κάνουμε πράξεις με ακρίβεια $k=5$ (αποκοπή)

$fl(x) = 0.71428$ $\quad fl(y) = 0.33333$

$fl(x) + fl(y) = \underline{1}.04761 = 0.104761 \times 10^1$

$fl(fl(x)+fl(y)) = 0.10476 \times 10^1$

$x+y = \frac{5}{7} + \frac{1}{3} = \frac{15+7}{21} = \frac{22}{21} = 1.047619047\ldots477 \times 10^0$

Απόλυτο σφάλμα $|fl(fl(x)+fl(y)) - (x+y)| = 0.0000019047\ldots$
$= 0.19047 \times 10^{-4}$

Σχετικό σφάλμα $= 0.182\ldots \times 10^{-4}$

Παράδειγμα $\quad x = 0.45142708$

$\quad\quad\quad\quad y = -0.45115944$ $\quad$ ($k=5$ ακρίβεια αναπαράστασης)

(στρογγυλοποίηση)

$fl(x) = 0.4514\underline{\underline{3}}$

$fl(y) = -0.4511\underline{\underline{6}}$

$x+y = 0.26764 \times 10^{-3}$

$z = fl(x)+fl(y) = 0.00027 = 0.27000 \times 10^{-3}$

Σχετικό σφάλμα $\quad \dfrac{|z-(x+y)|}{|x+y|} \approx 88 \times 10^{-4}$

<u>Παρατήρηση</u>: Το μέγιστο σφάλμα αναπαράστασης (στρογγυλοποίηση) $\approx \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

Επιρροή των σφαλμάτων στρογγύλευσης
(Κάνουμε πράξεις κ-ψηφία)

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow fl(x)$ αριθμός της μηχανής

$fl(x) = x + \delta$, δ: σφάλμα αναπαράστασης

$= x(1+\varepsilon)$, $|\varepsilon|$: σχετικό σφάλμα

$$\frac{fl(x) - x}{x} = \varepsilon$$

Είδαμε ότι $|\varepsilon| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times 10^{1-k}}_{u}$

u: μέγιστο σχετικό σφάλμα αναπαράστασης

Θεώρημα (Ενδιάμεσης τιμής)

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, $a<b$ ($f \in C[a,b]$) και $f(a) \neq f(b)$, τότε για κάθε c ανάμεσα στα $f(a)$, $f(b)$ υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τ.ω. $f(\xi) = c$

Πολλαπλασιασμός

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ '$*$' η πράξη πολ/μού

$fl(fl(x) * fl(y)) = z$ το αποτέλεσμα της αναπαράστασης των x, y στον Η/Υ, η πράξη $*$, και η αναπαράσταση στον Η/Υ του αποτελέσματος

$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad fl(x) = x(1+\varepsilon_1) \quad , \quad |\varepsilon_1| \leq u = \frac{1}{2} \times 10^{1-k}$

$\qquad\qquad\qquad fl(y) = y(1+\varepsilon_2) \qquad |\varepsilon_2| \leq u$

Τότε $\quad z = fl(fl(x) * fl(y)) = \big(xy(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\big)(1+\varepsilon_3) \quad , \quad |\varepsilon_3| \leq u$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για $f(x) = (1+x)^3$

Οπότε $\quad (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = \eta \in \mathbb{R}$

Υπάρχει $\varepsilon \in [-u, u] \quad , \quad \eta = f(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^3$

Συνεπώς

$$z = xy(1+\varepsilon)^3, \quad |\varepsilon| \leq u$$

Άρα το σχετικό σφάλμα της πράξης θα είναι

$$\frac{|z-(x*y)|}{|x*y|} = \frac{|xy(1+\varepsilon)^3 - xy|}{|xy|} = |1-(1+\varepsilon)^3| = |3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3|$$

$$\leq 3u + 3u^2 + u^3$$

Επειδή $0 < u << 1$ (πολύ μικρός αριθμός σε σχέση με το 1)

$u^2 << u$ και $u^3 << u$ π.χ αν $u \approx 10^{-5}$,

$$3u + 3u^2 + u^3 \approx 3u$$

Άρα για την πράξη '$*$' πολλαπλασιασμός το σχετικό σφάλμα το πολύ να τριπλασιαστεί. (Παρόμοια για τη διαίρεση)

Πρόσθεση - αφαίρεση

Τώρα η πράξη '$*$' είναι η πρόσθεση $+$

$$z = fl\left(fl(x) + fl(y) \right) = fl\left(x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2) \right)$$

$$= \left[x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2) \right](1+\varepsilon_3) = x(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) + y(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$

$$= x(1+\delta)^2 + y(1+\varepsilon)^2 \quad , \quad |\delta|, |\varepsilon| < u$$

$$z = x(1+\delta)^2 + y(1+\varepsilon)^2 = x(1+2\delta+\delta^2) + y(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)$$

$$= x+y + 2(x\delta + y\varepsilon) + (x\delta^2 + y\varepsilon^2)$$

$$\approx x+y + 2(x\delta + y\varepsilon)$$

Όπως το σχετικό σφάλμα της πράξης '+'

$$\frac{|z-(x+y)|}{|x+y|} \approx \frac{2|x\delta + y\varepsilon|}{|x+y|} \leq \frac{2u(|x|+|y|)}{|x+y|}$$

1^{η} περιπτωση: x, y να ειναι ομοσημοι

$$|x+y| = |x| + |y|$$

Σε αυτή την περιπτωση το σχετικό σφαλμα το πολύ διπλασιαζεται

2^{η} περιπτωση: x, y να ειναι ετεροσημοι (πράξη αφαίρεση)

Δεν ισχυει $|x+y| = |x| + |y|$ και ο λόγος $\dfrac{|x|+|y|}{|x+y|}$ μπορεί να ειναι πολύ μεγαλος

Παράδειγμα: $x = 451852000$, $y = -451851000$

Η μηχανή "κρατάει" $k=5$ ψηφία.

$$fl(x) = fl(0.451852 \times 10^9) = 0.45185 \times 10^9, \quad fl(y) = fl(-0.451851 \times 10^9) = -0.45185 \times 10^9$$

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) = fl(0) = 0$$

Όμως $x+y = 1000$

Μπορουμε να αποφυγουμε τη δημιουργια μεγαλου σφάλματος αν αφαιρουμε "κοντινούς" αριθμούς;

Μπορουμε αν βρουμε μια ισοδύναμη αναπαρασταση της πράξης, που να αποφεύγει την αιτια του μεγάλου σφάλματος

Παράδειγμα: $\sqrt{7892} - \sqrt{7891}$

Αφαίρεση κοντινών αριθμών θα δημιουργήσει μεγάλο σφάλμα στον Η/Υ

$$\sqrt{7892} - \sqrt{7891} = \frac{\left(\sqrt{7892} - \sqrt{7891}\right)\left(\sqrt{7892} + \sqrt{7891}\right)}{\sqrt{7892} + \sqrt{7891}} = \frac{1}{\sqrt{7892} + \sqrt{7891}}$$

Με παρόμοιες ταυτότητες προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την επιρροή σφαλμάτων στρογγύλευσης

Ένα άλλο παράδειγμα είναι ο υπολογισμός της

$f(x) = x - \sin(x)$, $|x|$ μικρό

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad , \text{ άρα } \quad \sin(x) \simeq x \text{ για } |x| \text{ μικρό}$$

Θα βρούμε το ανάπτυγμα Taylor της $\sin(x)$ με κέντρο το $x_0 = 0$

$$\sin(x) = \sin(0) + x \cdot \sin'(0) + \frac{x^2}{2} \sin''(0) + \dots$$

$$= 0 + x \cdot \cos(0) + \frac{x^2}{2}\left(-\sin(0)\right) + \frac{x^3}{3!}\left(-\cos(0)\right) + \frac{x^4}{4!}\sin(0)$$

$$+ x^5/5! \cdot \cos(\xi) \quad , \quad \xi \in (0,x)$$

Οπότε $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \varepsilon(x)$, με $|\varepsilon(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$

Άρα αν αντικαστήσουμε την τιμή της $f(x) = x - \sin(x)$

με την ποσότητα $\frac{x^3}{3!} \simeq f(x) = x - \sin(x)$

το σφάλμα που κάνουμε είναι μικρότερο από $\frac{|x|^5}{5!}$

Ο υπολογισμός του $\frac{x^3}{3!}$ δεν δημιουργεί μεγάλα σφάλματα στρογγυλοποίησης

Παράδειγμα: Υπολογισμός ριζών εξίσωσης 2ου βαθμού

$$x^2 - 2bx + 1 = 0$$

Οι ρίζες είναι $x_1 = \frac{2b + \sqrt{4b^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \frac{2b - \sqrt{4b^2-4}}{2}$

$$= b + \sqrt{b^2 - 1} \qquad = b - \sqrt{b^2 - 1}$$

Αν $b^2 \gg 1$ (πολύ μεγαλύτερο), τότε η αριθμητική του Η/Υ θα δώσει $b^2 - 1 \approx b^2$ και άρα η ρίζα $x_2 \approx b - b$

Διαφορετικός υπολογισμός: Είναι γνωστό ότι $x_1 x_2 = 1$ (σταθερό όρο της εξίσωσης)

$$x_2 = \frac{1}{x_1}$$

Η πρόσθεση δεν ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες που γνωρίζουμε

i) Υπάρχει μοναδικός αριθμός 0, το μηδέν τ.ω.

$$x+0=x \quad , \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Στον Η/Υ υπάρχουν πολλοί αριθμοί με παρόμοια συμπεριφορά

Είδαμε παραδείγματα όπου $x\neq 0$, $\quad 1+x=1$ (στον Η/Υ)

ii) Προσεταιριστική ιδιότητα

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$

Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για πράξεις των Η/Υ

$K=5$ (ψηφία για πράξεις)

$\alpha = 1$, $\beta = 3\times10^{-5}$, $\gamma = 3\times10^{-5}$ (Αριθμοί της μηχανής)

$$1+3\times10^{-5} = 0.1\times10^{1} + 0.000003\times10^{1} = 0.100003\times10^{1}$$

$$fl(\alpha+\beta) = 0.1\times10^{1}$$

Οπότε $fl\big(fl(\alpha+\beta)+\gamma\big) = 0.1\times10^{1} = \alpha$

Όμως $\alpha+(\beta+\gamma)$ θα υπολογιστεί ως εξής:

$$fl(\beta+\gamma) = fl(0.3\times10^{-4} + 0.3\times10^{-4}) = 0.6\times10^{-4}$$

$$fl(\alpha + fl(\beta+\gamma)) = fl(0.1\times10^{1} + 0.000006\times10^{1}) =$$

$$= fl(0.100006\times10^{1}) = 0.1000\underline{1}\times10^{1}$$

$$= 1.000\underline{1} \neq \alpha$$

$\beta = 3\times10^{-5} \neq 0$ ούτε στη Η/Υ

$1+\beta \neq 0$ όμως $fl(1+\beta)=1$

$1+\beta = 1$ στον Η/Υ

$\beta+\beta+\beta = 3\beta$ στον Η/Υ

$x = 5$ ψηφίων.

$$X + 1 = X$$

$=$ μεγάλος αριθμός

$$X = 10^{10}$$

$$1 + x = 1$$

$\Uparrow$

x "μηδέν της μηχανής"

Σφάλματα υπολογισμών αθροισμάτων.

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1+1}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+2} = S_1 + \frac{1}{4+2}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$$

$$\boxed{S_{k+1} = S_k + \frac{1}{k(k+1)}}\ , \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \ , \quad S_0 = 1.$$

Υπολογισμοί (κ = 10 ψηφία)

$n=9$ $\quad \tilde{S}_9 = 1.90000$ $\quad \tilde{S}_9$ αριθμός Η/Υ

$n=9999$ $\quad \tilde{S}_{9999} = 1.999\underline{899972}$ (Στον Η/Υ)

Ακριβώς υπολογισμός

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 + \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_9 = 2 - \frac{1}{10} = 1.9$$

$$S_{9999} = 2 - \frac{1}{10000} = 1.9999$$