Επαναλήψεις σταθερού σημείου

Ορισμός: Έστω φ μια πραγματική συνάρτηση. Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού της φ λέγεται σταθερό σημείο της αν ισχύει $\varphi(x^*) = x^*$

Ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις της ρίζας μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι να βρούμε προσεγγίσεις ενός σταθερού σημείου μιας άλλης συνάρτησης $g(x)$, διαφορετικής από την $f(x)$.

Αν x^* είναι ρίζα της $f(x^*) = 0$, τότε θέλουμε να υπάρχει μια άλλη συνάρτηση $g(x)$, για την οποία το x^* να είναι σταθερό σημείο

$$g(x^*) = x^*$$

Η πιο εύκολη περίπτωση που μας έρχεται στο μυαλό είναι

$$g(x) = x + f(x)$$

έτσι αν $f(x^*) = 0$, εύκολα βλέπουμε ότι

$$x^* = g(x^*) = x^* + f(x^*)$$

Αυτή η τετριμμένη περίπτωση δεν μας εξυπηρετεί στις περισσότερες περιπτώσεις.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 2$ για $-2 \le x \le 3$ έχει σταθερά σημεία $x = -1$ και $x = 2$ γιατί $g(-1) = 1 - 2 = -1$ και $g(2) = 4 - 2 = 2$

Η συνάρτηση

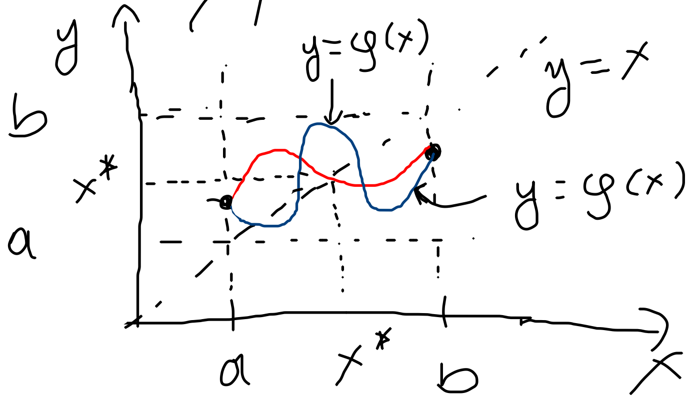
$f(x) = x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τα σημεία

$x = -1$ και $x = 2$

Άρα οι ρίζες της f είναι σταθερά σημεία της g.

Θεώρημα: Κάθε συνεχής συνάρτηση $g : [a,b] \to [a,b]$ έχει στο διάστημα $[a,b]$ τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Γεωμετρική ερμηνεία



Απόδειξη

Λόγω της υπόθεσης $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$ ισχύει μια από τις εξής σχέσεις

$$\varphi(a) = a \quad \text{ή} \quad \varphi(b) = b \quad \text{ή} \quad \left(a < \varphi(a) \ \& \ \varphi(b) < b\right)$$

Αν ισχύει μια από τις δυο πρώτες τότε έχουμε ένα σταθερό σημείο.

Έστω τώρα ότι ισχύει η τρίτη περίπτωση. Αν θεωρήσουμε τη βοηθητική συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \varphi(x) - x$,

αυτή είναι προφανώς συνεχής στο $[a,b]$ και $g(a) = \varphi(a) - a > 0$, $g(b) = \varphi(b) - b < 0$. Οπότε σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα που έχουμε δείξει, υπάρχει ένα σημείο

$$x^* \in (a,b) \quad \text{τ.ω.} \quad g(x^*) = 0 \Rightarrow \varphi(x^*) = x^*$$

Παρατηρηση: Η συνθήκη $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$ ειναι ικανή αλλά όχι αναγκαία. (Δηλ. αν την υποθέσουμε δειχνουμε το αποτελεσμα του Θεωρηματος, αλλά μπορεί να μην ισχύει και το αποτελεσμα του θεωρηματος να ισχύει)

Παράδειγμα: Αν θεωρησουμε τη συναρτηση $\varphi(x) = 2x^2$. Αυτή εχει στο $[-1,1]$ σταθερά σημεια το $x=0$ και $x=\frac{1}{2}$,
$\varphi(0)=0$ και $\varphi(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Ομως $\varphi([-1,1]) \subset [0,2]$

Παράδειγμα (εφαρμογής του θεωρήματος)

Έστω $\varphi(x) = 2^{-x}$. Αυτή έχει σταθερό σημείο στο $[0,1]$;

Για να το δείξουμε βλέπουμε αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος

$$\varphi(x) = 2^{-x} = e^{\ln(2^{-x})} = e^{-x\ln(2)}$$

$$\varphi'(x) = -\ln(2)\left(e^{-x\ln(2)}\right) = -\ln(2)2^{-x} < 0$$

Συνεπώς η φ είναι φθίνουσα.

$$\varphi(0) = e^0 = 1 \quad \text{και} \quad \varphi(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Άρα $\varphi([0,1]) \subset [\frac{1}{2}, 1] \subset [0,1]$. Οπότε υπάρχει $x^* \in [0,1]$ με $x^* = 2^{-x^*}$

<u>Παράδειγμα</u>: Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1,2]$

Είναι φανερό ότι $f(1) = e - 2 - 1 = e - 3 < 0$ $(e \approx 2.71)$

και $f(2) = e^2 - 4 - 1 = e^2 - 5 > 0$ $(e^2 > 7)$

Οπότε υπάρχει $\xi \in [1,2]$ με $f(\xi) = 0$. Θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $g(x)$ τ.ω. το ξ να είναι σταθερό σημείο $(g(\xi) = \xi)$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln(2x+1)$. Τότε έχουμε ότι

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} - 2\xi - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} = 2\xi + 1 \Leftrightarrow \xi = \ln(2\xi + 1)$$
$$\Leftrightarrow \xi = g(\xi)$$

Επίσης έχουμε για τη g στο διάστημα $[1,2]$, $g(1) = \ln(2+1) = \ln(3) \in [1,2]$

και $g(2) = \ln(5) \in [1,2]$ (Διότι $\ln(e) = 1$ & $\ln(e^2) = 2$)

Επιπλέον $g'(x) = \dfrac{2}{2x+1} > 0$ στο $[1,2]$, άρα η g είναι αύξουσα στο $[1,2]$

Οπότε $g([1,2]) = [g(1), g(2)] \subset [1,2]$

Από το θεώρημα που δείξαμε υπάρχει $x^* \in [1,2]$ τ.ω. $g(x^*) = x^*$.

Αντί για τη g που μόλις χρησιμοποιήσαμε μπορούμε να φανταστούμε

$$\tilde{g}(x) = \frac{e^x - 1}{2}.$$

Αυτή προκύπτει από την f ως εξής

Έστω ξ ρίζα της $f(\xi) = 0 \Rightarrow e^{\xi} - 2\xi - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{\xi} - 1}{2} = \xi$

και άρα $\tilde{g}(\xi) = \xi$

Θα διερευνήσουμε τώρα αν η $\tilde{g}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος.

Εύκολα βλέπουμε ότι $\tilde{g}(1) = \dfrac{e-1}{2} < 1$ $\quad (e \simeq 2.71)$

και $\tilde{g}(2) = \dfrac{e^2-1}{2} > 2$ $\quad (e^2 \simeq 7)$

Άρα $\tilde{g}([1,2]) \not\subset [1,2]$. Οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε

για τη $\tilde{g}$ το θεώρημα που δείξαμε προηγουμένως

Μέθοδος για προσέγγιση σταθερού σημείου

<u>Ορισμός</u>: Έστω $g:[a,b]\to[a,b]$ συνεχής τότε για $x_0\in[a,b]$

θεωρούμε την ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως

$$\boxed{x_{k+1}=g(x_k), \qquad k=0,1,2,\ldots}$$

Αυτή η μέθοδος καλείται απλή επανάληψη και οι αριθμοί $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ καλούνται επαναλήψεις

Αν η ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, το όριο της θα είναι σταθερό σημείο της g, αφού η g είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = g(x^*)$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω ότι g είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, λέμε ότι η g είναι συστολή στο $[a,b]$ αν υπάρχει σταθερά L, $0<L<1$ τέτοια ώστε $|g(x)-g(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x,y \in [a,b]$

<u>Ορισμός</u>: Αν η σταθερά $L>0$ είναι τέτοια ώστε
$$|g(x)-g(y)| \leq L|x-y|, \ \forall x,y \in [a,b]$$
(χωρίς απαραίτητα $L<1$) τότε λέμε ότι η g ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz στο $[a,b]$

Παρατηρηση: Αν $\varphi \in C^1[a,b]$ (Συνεχως παραγωγισιμη συναρτηση στο $[a,b]$)

τοτε η φ ικανοποιεί στο $[a,b]$ τη συνθηκη του Lipschitz

Από το θεωρημα μέσης τιμης, $\forall x,y \in [a,b]$ $\exists$ ξ τ.ω.

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x-y)$$

Επομενως αν θέσουμε $L = \max_{\xi \in [a,b]} |\varphi'(\xi)|$

τότε

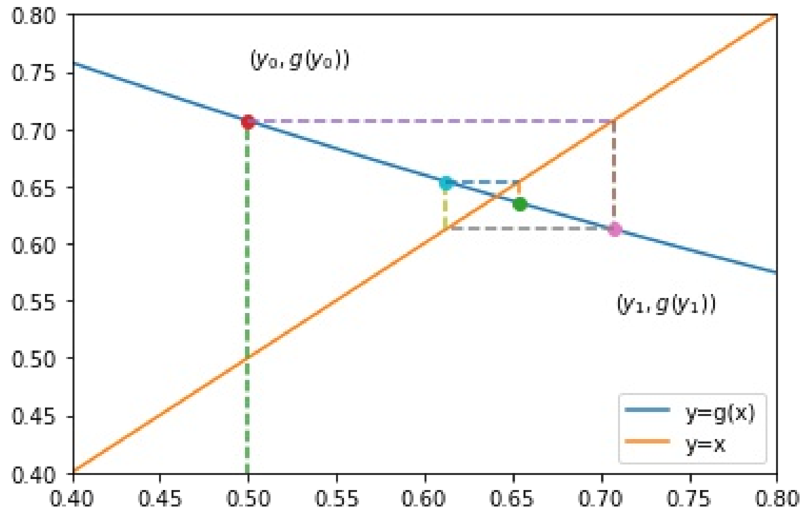
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\, |x-y|$$

Προσοχή όμως είναι αναγκαίο το διάστημα $[a,b]$ να είναι κλειστό, ώστε να υπάρχει το $\max\limits_{\xi\in[a,b]} |\varphi'(\xi)|$ (να είναι πραγματικός αριθμός)

Αν το διάστημα δεν είναι κλειστό, τότε το $\max\limits_{\xi\in(a,b)} |\varphi'(\xi)|$ μπορεί να είναι άπειρο.

Π.χ. αν $\varphi(x)=\sqrt{x}$, και θεωρήσουμε το $(0,1)$, η $\varphi\in C^1(a,b)$

όμως $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ και $\max\limits_{x\in(a,b)} |\varphi'(x)| = \infty$

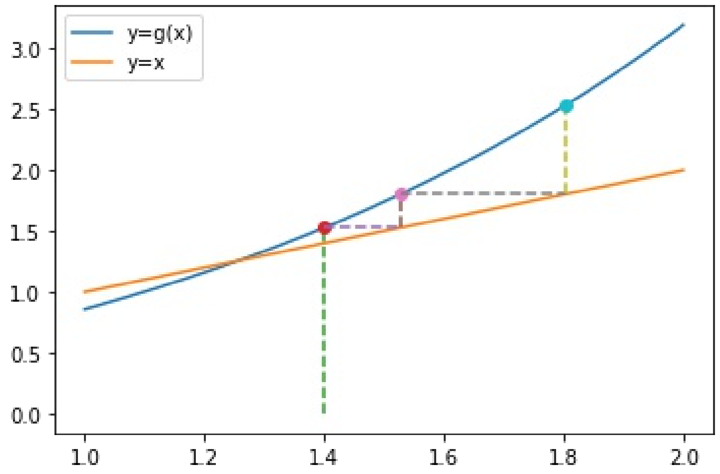


$$g(x) = 2^{-x}$$

Στο $[0,1]$ έχει σταθερό σημείο

$$g(x^*) = x^*$$

Ξεκινώντας την επανάληψη με $x_0 = 0.5$ η επαναληπτική ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φαίνεται να τείνει προς το σταθερό σημείο



$$g(x) = \frac{e^x - 1}{2}$$

Η g έχει σταθερό σημείο στο $[1,2]$

Ξεκινώντας με $x_0 = 1.4$ η επαναληπτική ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φαίνεται να απομακρύνεται από το σταθερό σημείο

<u>Θεώρημα</u> (Σταθερού σημείου): Έστω $\varphi: [a,b] \to [a,b]$, όπου φ είναι συστολή με σταθερά $(L<1)$. Τότε η φ έχει στο $[a,b]$ ένα μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x^* \in [a,b]$ τ.ω. $\varphi(x^*) = x^*$

Αν τώρα επιλέξουν $x_0 \in [a,b]$, τότε η επαναληπτική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι καλά ορισμένη $(x_n \in [a,b])$

και $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ και ισχύει

(i) $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max(x_0 - a, b - x_0)$

(ii) $|x_n - x^*| \leq \dfrac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

(iii) $|x_n - x^*| \leq \dfrac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με θεώρημα που δείξαμε προηγουμένως αφού

$\varphi : [a,b] \to [a,b]$

υπάρχει σταθερό σημείο της φ στο $[a,b]$

Θα δείξουμε κατ' αρχήν την μοναδικότητα του σταθερού σημείου

Έστω ότι υπάρχουν 2 σταθερά σημεία $x^*, y^* \in [a,b]$, $x^* \neq y^*$ τ.ω

$\varphi(x^*) = x^*$ και $\varphi(y^*) = y^*$

Θα έχουμε ότι

$$|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)| \leq L|x^* - y^*| < |x^* - y^*| \quad (L < 1)$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο γιατί $|x^* - y^*| \neq 0$ και δεν μπορεί να ισχύει η γνήσια ανισότητα.

Η επαναληπτική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ είναι καλά ορισμένη

διότι αν $x_0\in[a,b]$ τότε κάθε όρος $x_n\in[a,b]$

Έστω x^* το μοναδικό σταθερό σημείο της φ στο $[a,b]$.

$$|x_n-x^*| = |\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)| \le L|x_{n-1}-x^*| \le L^2|x_{n-2}-x^*|$$
$$\le \dots \le L^n|x_0-x^*| \le L^n \max(x_0-a,\, b-x_0)$$

Συνεπώς αφού $\alpha L<1$, $L^n\to 0$ καθώς $n\to\infty$, οπότε $|x_n-x^*|\to 0$, $n\to\infty$

και η ακολουθία $x_n\to x^*$, $n\to\infty$

Στη συνέχεια θα δείξουμε τις 2 σχέσεις που απομένουν

Ισχύει ότι

$$|x_2 - x_1| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq L\,|x_1 - x_0|$$

$$|x_3 - x_2| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq L\,|x_2 - x_1| \leq L^2\,|x_1 - x_0|$$

$$\vdots$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \ldots\ldots \leq L^n\,|x_1 - x_0|$$

Συνεπώς $\quad |x_{n+k} - x_n| \leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|$

$$\leq \left(L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \ldots + L^n\right)|x_1 - x_0|$$

$$= L^n\left(1 + L + L^2 + \ldots + L^{k-1}\right)|x_1 - x_0|$$

$$= L^n\,\frac{1 - L^k}{1 - L}\,|x_1 - x_0| \leq L^n\,\frac{1}{1 - L}\,|x_1 - x_0|$$

Στη συνέχεια λόγω της σύγκλισης της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$|x_{n+k}-x_n| \xrightarrow{k\to\infty} |x^*-x_n|$$

Οπότε έχουμε $|x_n-x^*| \leq \dfrac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$

Τέλος για την τελευταία σχέση, θεωρούμε τη βοηθητική ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία ορίζεται $y_0=x_{n-1}$, $y_1=x_n$, $y_2=x_{n+1}$, κ.ο.κ

Η (y_n) είναι μια επαναληπτική ακολουθία, γιατί $y_{n+1}=\varphi(y_n)$, $n=0,1,2,\dots$ και θα ισχύουν για αυτή οι σχέσεις που έχουμε δείξει μέχρι στιγμής για τη x_n

Οπότε $$|y_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |y_1 - y_0|$$

άρα για $n=1$
$$|y_1 - x^*| \le \frac{L}{1-L} |y_1 - y_0|$$

Συνεπώς $$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: (1) Αν η συνθήκη Lipschitz για τη φ ισχύει με $L=1$ τότε η επαναληπτική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορεί να μην συγκλίνει.

<u>Π.χ.</u> $\varphi:[-1,1]\to[-1,1]$ με $\varphi(x)=-x$.

Για αυτή τη φ υπάρχει σταθερό σημείο $x^*=0$, όμως για $x_0\neq 0$ παίρνουμε την ακολουθία $x_1=-x_0,\ x_2=x_0,\ x_3=-x_0,\ \dots$ η οποία προφανώς δεν συγκλίνει.

(2) Από μόνη της η συνθήκη Lipschitz $(L<1)$ δεν αρκεί για να δείξουμε ότι η επαναληπτική ακολουθία $x_n\to x^*$. Είναι <u>απαραίτητη</u> και η $\varphi([a,b])\subset[a,b]$.

<u>Π.χ.</u> Η $\varphi(x)=\frac{1}{2}x$, ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, με $L<1$.

$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq\frac{1}{2}|x-y|$, όμως $\varphi[1,2]\to[\frac{1}{2},1]$ και <u>δεν</u> έχει σταθερό σημείο στο $[1,2]$

Παράδειγμα: Η $\varphi(x) = 2^{-x}$ έχει σταθερό σημείο x^* στο $[0,1]$.
Το δείξαμε σε προηγούμενο παράδειγμα.
Για να δείξουμε ότι αυτό είναι μοναδικό, αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συστολή (έχει σταθερά Lipschitz $L < 1$)

$$L = \max_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| = \max_{x \in [0,1]} |(\ln 2)\, 2^{-x}| = \ln 2 \approx 0.693$$

(Η 2^{-x} είναι φθίνουσα)

Συνεπώς η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_{n+1} = 2^{-x_n}$, $x_0 \in [0,1]$ συγκλίνει στο σταθερό σημείο x^* της $\varphi(x) = 2^{-x}$, στο $[0,1]$.