Μέθοδος σταθερού σημείου - Επαναληπτικές ακολουθίες

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $g \in C[a,b]$ και $g:[a,b] \to [a,b]$, με $\xi \in [a,b]$ σταθερό σημείο της g, $g(\xi)=\xi$. Αν η g' είναι συνεχής σε μια περιοχή γύρω από το ξ και $|g'(\xi)|<1$, τότε η επαναληπτική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1}=g(x_n)$, με x_0 αρκετά κοντά στο ξ, συγκλίνει στο ξ.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $h>0$ τ.ω. η g' είναι συνεχής στο $[\xi-h, \xi+h] \subset [a,b]$

Αφού $|g'(\xi)|<1$, υπάρχει ένα $\delta>0$, με $\delta \leq h$ τ.ω. $I_\delta = [\xi-\delta, \xi+\delta]$

οπου $|g'(x)| \leq L < 1$, $\forall x \in I_\delta$ και g' συνεχης στο I_δ

Πράγματι επειδή η g' είναι συνεχής στο $[\xi-h, \xi+h]$, υπάρχει ένα διάστημα $[\xi-\delta, \xi+\delta]$, με $\delta \leq h$ τ.ω.

$$|g'(x)-g'(\xi)| < \varepsilon = \frac{1}{2}(1-|g'(\xi)|), \quad x \in [\xi-\delta, \xi+\delta]$$

Τότε για $x \in [\xi-\delta, \xi+\delta]$

$$|g'(x)| \leq |g'(x)-g'(\xi)| + |g'(\xi)| < \frac{1}{2}(1-|g'(\xi)|) + |g'(\xi)| = \frac{1}{2}(1+|g'(\xi)|) < 1$$

Το ζητούμενο λοιπόν $L = \frac{1}{2}(1+|g'(\xi)|)$

Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι για x_0 κοντά στο ξ, η επαναληπτική ακολουθία θα συγκλίνει στο ξ

Έστω ότι $x_n \in I_\delta = [\xi-\delta, \xi+\delta]$, τότε

$$x_{n+1} - \xi = g(x_n) - g(\xi) = g'(\eta_k)(x_n - \xi) \quad , \text{ για κάποιο } \eta_k \in I_\delta$$

Άρα $|x_{n+1} - \xi| \leq L|x_n - \xi|$ και επειδή $L<1$ και $x_n \in I_\delta$ θα έχουμε $x_{n+1} \in I_\delta$

Συνεπώς αν $x_0 \in I_\delta$, τότε επαγωγικά έχουμε ότι η επαναληπτική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in I_\delta$

Επίσης εύκολα έχουμε, αν $x_0 \in I_\delta$,

$$|x_n - \xi| \leq L|x_{n-1} - \xi| \leq L^2|x_{n-2} - \xi| \leq \ldots \leq L^n|x_0 - \xi| \leq L^n \cdot \delta$$

Οπότε αφού $L<1$, $L^n \to 0$, $n\to\infty$ και $x_n \to \xi$, $n \to \infty$

Ψευδοκώδικας Αλγορίθμου σταθερού σημείου.

Δεδομένα : x_0 αρχική προσέγγιση

ε μέγιστο σφάλμα, (κριτήριο τερματισμού)

N_{max} μέγιστος αριθμός επαναλήψεων.

$x = g(x_0)$ (Πρώτη επανάληψη)

$n = 1$

σφάλμα $= |x - x_0| / |x|$

Όσο ($n \leq N_{max}$ και σφάλμα $> \varepsilon$)

$x_0 = x$

$x = g(x_0)$ (Επόμενες επαναλήψεις)

$n = n + 1$

σφάλμα $= |x - x_0| / |x|$

Τύπωσε x, σφάλμα και το n

[Αν το σφάλμα $\leq \varepsilon$, τότε η προσέγγιση είναι το x]

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα σταθερού σημείου για να βρούμε τη ρίζα μιας συνάρτησης

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$

Αυτή έχει ως ρίζα το $x^* \approx 2.09455 \in [2,3]$. Επειδή $f(2) = 8-4-5 = -1 < 0$
$f(3) = 27-6-5 > 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης στο $(2,3)$ και να βρούμε μια ρίζα της f.

Επειδή $f'(x) = 3x^2 - 2$, η οποία $f'(x) \geq 0$ για $x \in [2,3]$, θα ισχύει ότι η f είναι αύξουσα στο $[2,3]$ και άρα θα έχει μόνο μια ρίζα στο $(2,3)$.
(Δηλ. η x^* είναι η μοναδική ρίζα στο $[2,3]$)

Στη συνέχεια θέλουμε να δούμε αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο σταθερού σημείου για να προσεγγίσουμε τη x^*

Επειδή $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow (x^*)^3 - 2x^* - 5 = 0 \Leftrightarrow x^* = \dfrac{(x^*)^3 - 5}{2}$

μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi_1(x) = \dfrac{x^3 - 5}{2}$

η οποία έχει ως σταθερό σημείο τη ρίζα x^* της f.

Θέλουμε τώρα να δούμε αν η φ_1 στο $[2,3]$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος σταθερού σημείου

Είναι προφανές ότι $\varphi_1 \in C^1[2,3]$. Θέλουμε τώρα να ελέγξουμε αν $|\varphi_1'(x)| < 1$, για κάθε $x \in [2,3]$

Η σχέση $|\varphi'(x)| < 1 \iff \left|\frac{3}{2}x^2\right| < 1 \iff |x^2| < \frac{2}{3}$

$\iff |x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$

Οπότε $|\varphi'(x)| < 1$, μόνο για $x \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2/3}\right]$

Άρα $|\varphi'(x)| > 1$ για $x \in [2,3]$, Συνεπώς δεν ισχύει το θεώρημα σταθερού σημείου για τη φ_1 στο $[2,3]$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική συνάρτηση αντί της φ_1;

Η σχέση $|\varphi'(x)| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{3}{2}x^2\right| < 1 \Leftrightarrow |x^2| < \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Οπότε $|\varphi'(x)| < 1$, μόνο για $x \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2/3}\right)$

Άρα $|\varphi'(x)| > 1$ για $x \in [2,3]$. Συνεπώς δεν ισχύει το θεώρημα σταθερού σημείου για τη φ_1 στο $[2,3]$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική συνάρτηση αντί της φ_1;

Έστω $\lambda \neq 0$ τότε η $f(x^*) = 0 \iff (x^*)^3 - 2x^* - 5 + \lambda x^* = \lambda x^*$

$$\iff \frac{(x^*)^3 - (2-\lambda)x^* - 5}{\lambda} = x^*$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε τώρα τη $\varphi_2(x) = \dfrac{x^3 - (2-\lambda)x - 5}{\lambda}$

Η ρίζα x^* της f, θα είναι σταθερό σημείο της φ_2

Ποιό $\lambda \neq 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε;

Θα πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα $\varphi_2(2), \varphi_2(3) \in [2,3]$

Έτσι προκύπτουν καταρχήν οι σχέσεις $2 \leq \varphi_2(2) \leq 3$ & $2 \leq \varphi_2(3) \leq 3$

$$\varphi_2(2) = \frac{8-(2-\lambda)2-5}{\lambda} = \frac{2\lambda - 1}{\lambda} \quad , \quad \varphi_2(3) = \frac{27-(2-\lambda)3-5}{\lambda} = \frac{16+3\lambda}{\lambda}$$

Πρέπει λοιπόν $2 \leq \frac{2\lambda-1}{\lambda} \leq 3$. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda > 0$ καταλήγουμε σε άτοπο

και αν $\lambda < 0$ τότε $\lambda \leq -1$.

Επίσης για $2 \leq \frac{16+3\lambda}{\lambda} \leq 3$, θα έχουμε $2\lambda \geq 16+3\lambda \geq 3\lambda$ (επειδή $\lambda < 0$)

Προκύπτει λοιπόν $\lambda \leq -16$

Τώρα $\varphi_2'(x) = \frac{3x^2-(2-\lambda)}{\lambda}$ και $\varphi_2''(x) = \frac{6x}{\lambda}$

Για $x \in [2,3]$, $\varphi_2''(x) = \dfrac{6x}{\lambda} < 0$ (διότι $\lambda \leq -16$)

Άρα η φ_2' είναι φθίνουσα στο $[2,3]$

$\varphi_2'(2) \geq \varphi_2'(x) \geq \varphi_2'(3)$

Τώρα $\varphi_2'(3) = \dfrac{3 \cdot 9 - 2 + \lambda}{\lambda} = \dfrac{25+\lambda}{\lambda} \geq 0$ για $\lambda \leq -25$

Άρα για $\lambda \leq -25$ η φ_2 είναι αύξουσα στο $[2,3]$

και επειδή $\varphi_2(2), \varphi_2(3) \in [2,3]$ για $\lambda \leq -25$

ότι $\varphi_2 : [2,3] \to [2,3]$, για $\lambda \leq -25$

Επίσης $|\varphi_2'(x)| \leq \varphi_2'(2) = \dfrac{3 \cdot 4 - 2 + \lambda}{\lambda} = \dfrac{10+\lambda}{\lambda} < 1$, για $\lambda \leq -25$

Επομένως για $\lambda \leq -25$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου και άρα η επαναληπτική ακολουθία $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$, $x_0 \in [2,3]$, θα συγκλίνει στο x^*

Μπορούμε να δείξουμε ότι για $\lambda \leq -16$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου

Ορισμός: Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία η οποία συγκλίνει στο x^*, με $x_n \neq x^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν υπάρχουν σταθερές C και a τέτοιες ώστε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^a} = C$$

τότε λέμε οτι $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x^* με τάξη a
(ασυμπτωτική σταθερά σφαλματος C)

Όσο μεγαλύτερη ειναι η τιμή της σταθεράς a τόσο πιο γρηγορα αγκλινει η ακολουθια x_n στο x^*

Επισης όσο μικρότερη ειναι η τιμή της C τόσο πιο γρηγορα θα συγκλινει

Ορισμός: Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία η οποία συγκλίνει στο x^*, με $x_n \neq x^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν υπάρχουν σταθερές C και a τέτοιες ώστε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^{a}} = C$$

Τότε λέμε ότι $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x^* με τάξη a (ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος C)

Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της σταθεράς a τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει η ακολουθία x_n στο x^*

Επίσης όσο μικρότερη είναι η τιμή της C τόσο πιο γρήγορα θα συγκλίνει

Ορισμός: Έστω $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία η οποία συγκλίνει στο x^*, με $x_n \neq x^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν υπάρχουν σταθερές C και a τέτοιες ώστε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^a} = C$$

Τότε λέμε ότι $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x^* με τάξη a
(ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος C)

Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της σταθεράς a τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει η ακολουθία x_n στο x^*

Επίσης όσο μικρότερη είναι η τιμή της C τόσο πιο γρήγορα θα συγκλίνει

Ειδικές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις είναι

(i) $\alpha = 1$, τότε η ακολουθία συγκλίνει γραμμικά

(ii) $\alpha = 2$, τότε η ακολουθία συγκλίνει τετραγωνικά

Παράδειγμα: Έστω $x_n \to 0$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \dfrac{1}{2}$

και $\tilde{x}_n \to 0$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\tilde{x}_{n+1}|}{|\tilde{x}_n|^2} = 1/2$

Για ευκολία ας δεχθούμε ότι $\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \approx \dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{|\tilde{x}_{n+1}|}{|\tilde{x}_n|^2} \approx 1/2$

$$|x_n - 0| = |x_n| \approx \frac{1}{2}|x_{n-1}| \approx \left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_{n-2}| \approx \dots \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0|$$

Επίσης

$$|\tilde{x}_n - 0| = |\tilde{x}_n| \approx \frac{1}{2}|\tilde{x}_{n-1}|^2 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 |\tilde{x}_{n-2}|^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |\tilde{x}_{n-2}|^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} |\tilde{x}_{n-2}|^4$$

$$\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{2^2-1} |\tilde{x}_{n-2}|^4 \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{2^2-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^2} |\tilde{x}_{n-3}|^{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^3-1} |\tilde{x}_{n-3}|^{2^3}$$

$$\approx \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} |\tilde{x}_0|^{2^n}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $g:[a,b]\to[a,b]$ και $g\in C^1[a,b]$

με $|g'(x)|\le L<1, \ \forall x\in[a,b]$

Αν x^* σταθερό σημείο της g στο $[a,b]$ και $g'(x^*)\neq 0$ τότε η επαναληπτική ακολουθία $x_{n+1}=g(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$ με $x_0\in[a,b]$ συγκλίνει γραμμικά στο μοναδικό σταθερό σημείο x^* της g.

<u>Απόδειξη</u>:

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο x^* της g στο $[a,b]$ επειδή ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου.

Έχουμε

$$x_{n+1}-x^*=g(x_n)-g(x^*)=g'(\xi_n)(x_n-x^*)$$ για κάποιο ξ_n ανάμεσα στα x_n & x^*

Αφού $x_n\to x^*$ και η g' είναι συνεχής στο $[a,b]$, έχουμε $\xi_n\to x^*$ & $g'(\xi_n)\to g'(x^*)$

Συνεπώς $\dfrac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|} = |g'(\xi_n)| \xrightarrow{n\to\infty} |g'(x^*)| \neq 0$

<u>Παρατήρηση</u>: Για να έχουμε τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη του 1 θα πρέπει να ισχύει $g'(x^*)=0$

<u>Ερώτηση</u>: Θα μπορούσε να ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^a} = c > 0, \quad a > 1$$

Αν συμβαίνει αυτό τότε $\dfrac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|} = \dfrac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^a} \cdot |x_n-x^*|^{a-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} |x_n-x^*|^{a-1}$

$= 0$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def g(x):
    y=(x**3-(2-l)*x-5)/l
    return y

def g_der(x):
    y=(3*x**2-(2-l))/l
    return y
```

Η συνάρτηση

$$\varphi_2(x) = \frac{x^3-(2-\lambda)x-5}{\lambda}$$

$$\varphi_2'(x) = \frac{3x^2-(2-\lambda)}{\lambda}$$

```
l=-16
x=np.linspace(1,3,100)
y=g(x)
#####
plt.plot(x,y,x,x)
plt.legend(['y=g(x)','y=x'])
plt.show()
##################
x0=2.5
tol=1e-8
nmax=100

x,n=fixed(x0,tol,nmax)
print('l:',l)
print('x0:',x0)
print('Αριθμός βημάτων:%d'%n)
print('Προσέγγιση σταθερού σημείου:%.10f'%x)
print('Προσέγγιση παραγώγου:%.10f'%g_der(x))
```

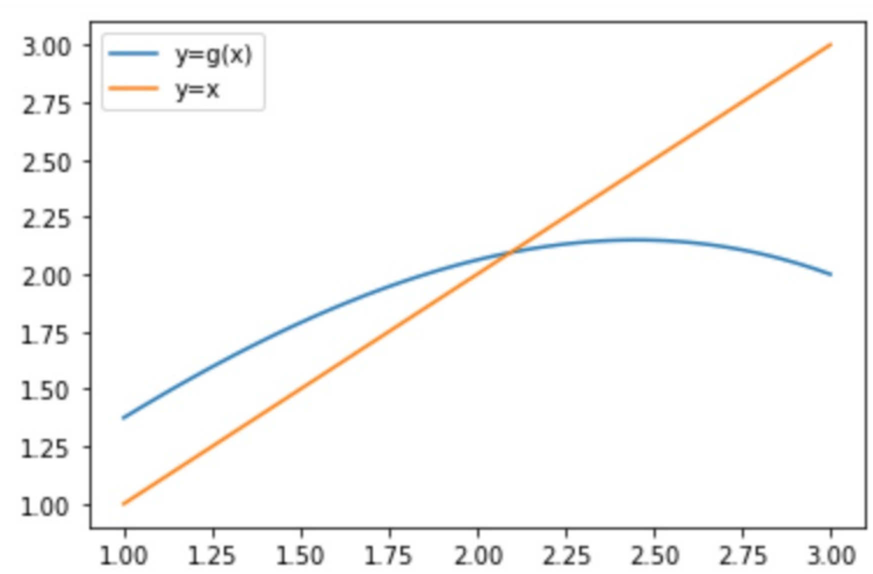
Είδαμε για $\lambda \leq -16$

η g_2 ικανοποιεί τις

υποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου για το $[2,3]$

Επιλέγουμε $x_0 = 2.5$

Η $x_n \to x^*$, $n \to \infty$



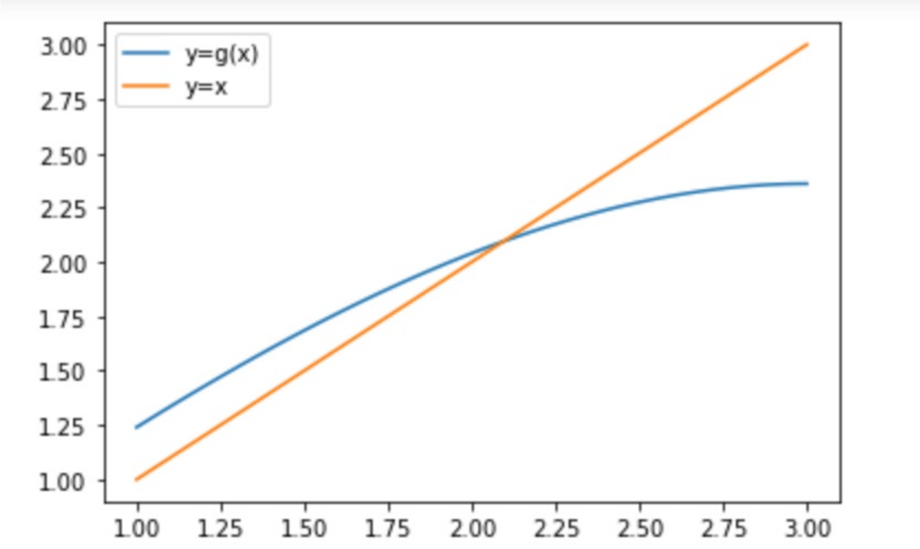

```
l: −16
x0: 2.5
Αριθμός βημάτων:14
Προσέγγιση σταθερού σημείου:2.0945514902
Προσέγγιση παραγώγου:0.3024101353
```

Επίσης $|x_{n+1}-x^*| \approx C\,|x_n-x^*|$

$$C = \varphi_2'(x^*)$$

Η προσέγγιση του $C \approx 0.302\ldots$

(για φ_2, με $\lambda = -16$)




```
l: -25
x0: 2.5
Αριθμός βημάτων:28
Προσέγγιση σταθερού σημείου:2.0945514990
Προσέγγιση παραγώγου:0.5535424821
```

Μπορούμε να επιλέξουμε
$\lambda = -25$

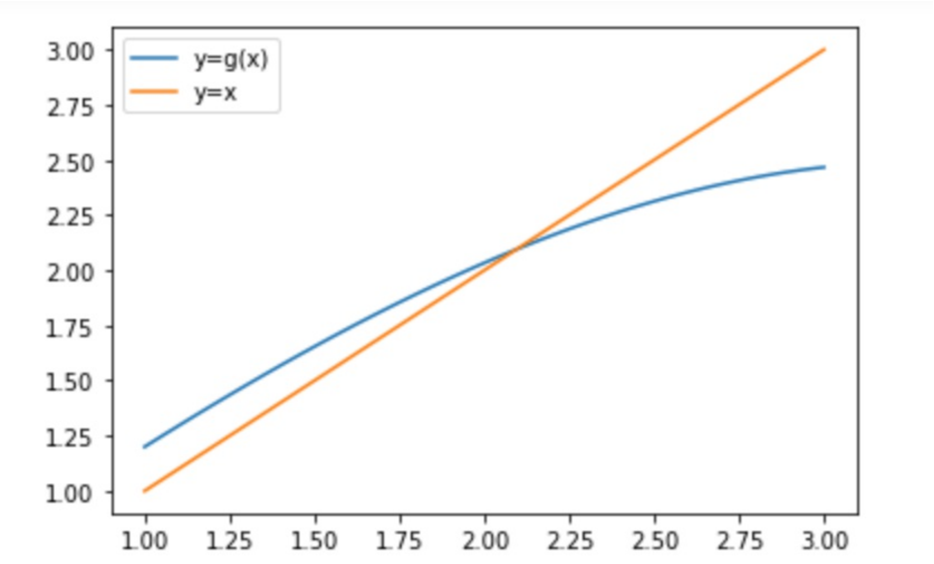
Τώρα χρειαζόμαστε περισσότερα βήματα για να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος

Σε αυτή την περίπτωση

$$|x_{n+1} - x^*| \approx C\,|x_n - x^*|$$

με $C \approx 0.5532\ldots$

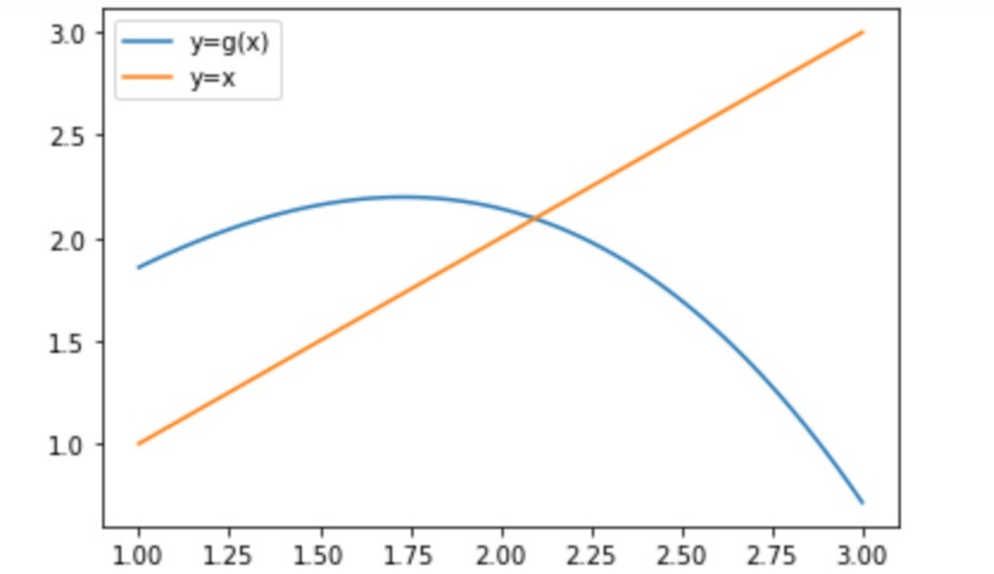
Για μεγαλύτερη τιμή $\varphi_2'(x^*)$ η ακολουθία συγκλίνει πιο αργά




```
l: -30
x0: 2.5
Αριθμός βημάτων:35
Προσέγγιση σταθερού σημείου:2.0945515058
Προσέγγιση παραγώγου:0.6279520656
```

Βγαίνουνε τα αναλογα αποτελεσματα για $\lambda=-30$

Περισσοτερα βηματα διοτι $c \approx 0.6279...$

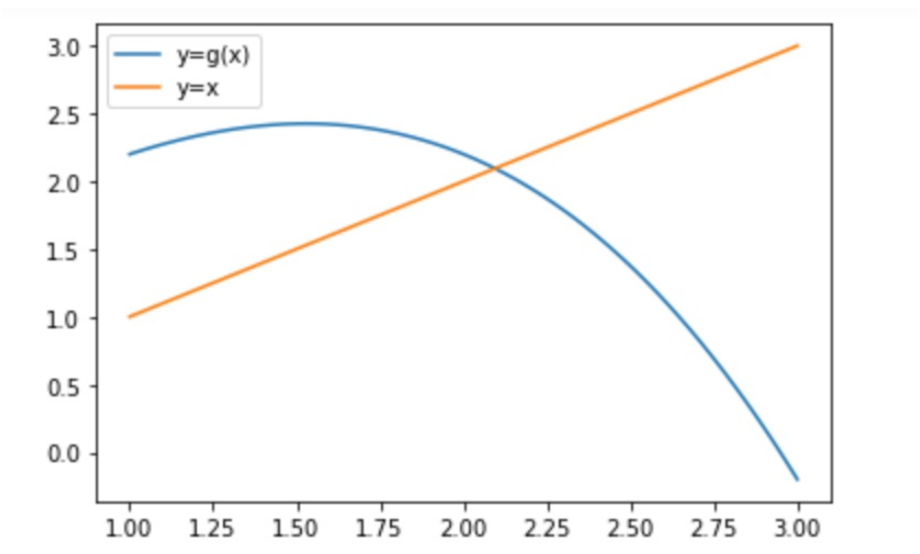


l: -7
x0: 2.5
Αριθμός βημάτων:34
Προσέγγιση σταθερού σημείου:2.0945514881
Προσέγγιση παραγώγου:-0.5944911155

Η σύγκλιση μπορεί να γίνει ακόμα και αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου. ($\lambda = -7$ δεν ισχύουν οι υποθέσεις)

Εδώ η $|\varphi_2'(x^*)| \approx 0.59\ldots < 1$

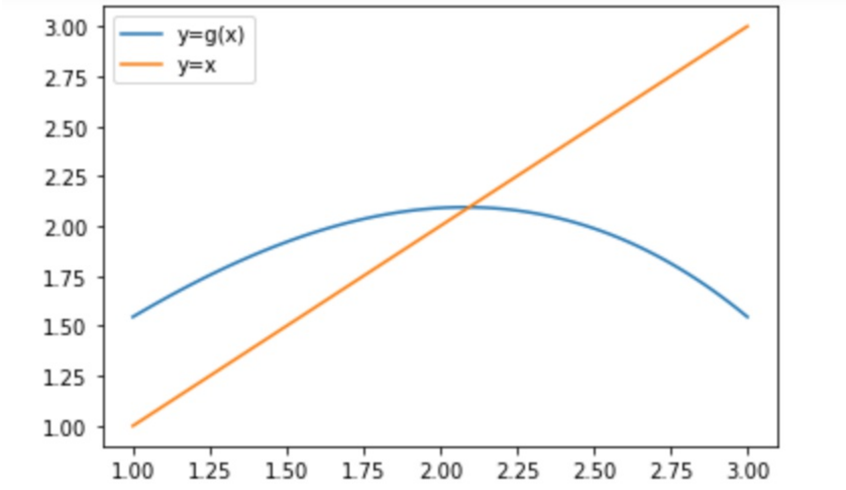
Υπάρχει λοιπόν μια περιοχή του x^*, ώστε αν x_0 ανήκει σε αυτή τη περιοχή η ακολουθία συγκλίνει.




```
l: -5
x0: 2.094
Αριθμός βημάτων:100
Προσέγγιση σταθερού σημείου:1.5418277513
Προσέγγιση παραγώγου:-0.0263396889
```

Φυσικά δεν θα συγκλίνει η μέθοδος για κάποια λ ακόμα και αν ξεκινήσουμε πολύ κοντά στο σημείο x^*

Επιλέξαμε $\lambda = -5$, και ο αλγόριθμος σταμάτησε γιατί ξεπεράσαμε τον μέγιστο αριθμό βημάτων ($N_{max} = 100$) που θέσαμε. Η λύση που έδωσε ο αλγόριθμος, προφανώς δεν είναι σταθερό σημείο της g_2




```
l: -11
x0: 2.5
Αριθμός βημάτων:6
Προσέγγιση σταθερού σημείου:2.0945514814
Προσέγγιση παραγώγου:-0.0146761567
```

Δοκιμάζοντας διαφορα λ μπορουμε να βρουμε οτι για $\lambda = -11$ αν και δεν ισχυουν οι υποθεσεις του θεωρηματος σταθερού σημειου, η συγκλιση γινεται πολύ γρηγορα.

Με τη μεθοδο της διχοτόμησης για να προσεγγισουμε τη ρίζα x^* με σφαλμα το πολύ 10^{-8} θα χρειαστουμε:

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-8} \text{ ή } n\log_{10}2 > 8 \Rightarrow n > \frac{8}{\log_{10}2} \simeq 26.5$$

$n = 27$ βήματα.