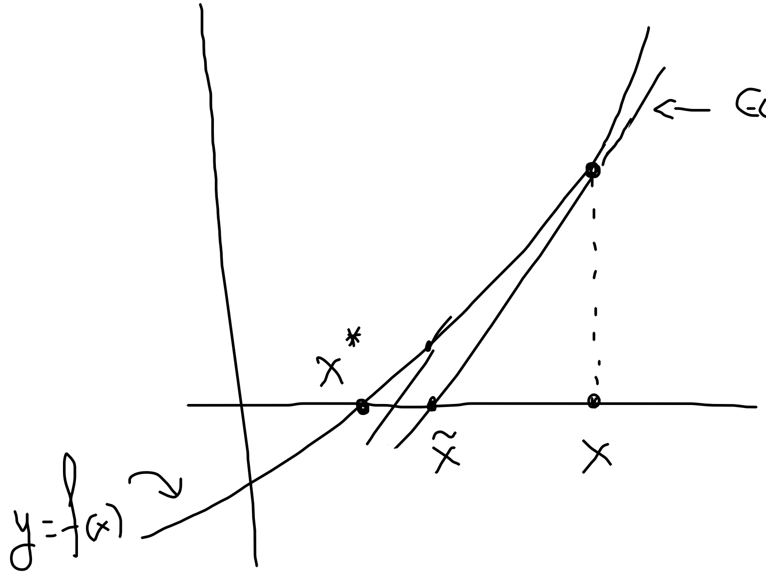
Μέθοδος Νεύτωνα

Θέλουμε να προσδιορίσουμε μια ρίζα x^* της συνάρτησης f, $f(x^*)=0$



← εφαπτομένη στο σημείο $(x, f(x))$

$$y(t) = f(x) + (t-x)\,f'(x)$$

εξίσωση ευθείας που εφάπτεται στο $(x, f(x))$

Το σημείο που τέμνει η ευθεία αυτή τον άξονα του x είναι το $\tilde{x}$ για το οποίο

$$0 = f(x) + (\tilde{x}-x)\,f'(x)$$

ή $$\tilde{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία θα πάρουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$.

Αυτή η ευθεία θα τέμνει τον άξονα των x σε νέο σημείο $\tilde{\tilde{x}}$ για το οποίο $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} - \dfrac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}$

Φαίνεται ότι με αυτή τη διαδικασία παίρνουμε σημεία που πλησιάζουν τη ρίζα x^* της $f(x)$

Η επαναληπτική μέθοδος θα ορισθεί ως

$$x_0 \text{ δοσμένο}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Διαφορετική προσέγγιση κατασκευής της μεθόδου

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη

Από το ανάπτυγμα Taylor θα έχουμε

$$0 = f(x^*) = f(x) + (x^* - x)\, f'(x) + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 f''(\xi)$$

για κάποιο ξ ανάμεσα στα x, x^*

Αν $f'(x) \neq 0$ τότε $x^* = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} - \dfrac{1}{2}(x - x^*)^2 \dfrac{f''(\xi)}{f'(x)}$

Αν τώρα το σημείο x είναι "κοντά" στο x^* τότε

$$x^* \simeq x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Μέθοδος Νεύτωνα

x_0 δοσμένο και ορίζουμε την ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n \geq 0$$

Αυτή είναι μια επαναληπτική ακολουθία της μορφής

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

όπου $\quad g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f και f' είναι συνεχείς κοντά στο x^*, $f'(x^*) \neq 0$, τότε το x^* είναι σταθερό σημείο της φ

$$x_n \to x^* \text{ τότε } \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = \varphi(x^*)$$

Συνεπώς από την εξίσωση $x^* = \varphi(x^*) \Rightarrow f(x^*) = 0$

Άρα το σταθερό σημείο x^* της φ είναι ρίζα της f

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι η f' δεν μηδενίζεται κοντά στο x^*, τότε η φ είναι παραγωγίσιμη και

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Συνεπώς

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*) f''(x^*)}{((f'(x^*))^2} = 0$$

Έχουμε δείξει ότι αφού $|\varphi'(x^*)| < 1$, για x_0 κοντά στο x^*

η επαναληπτική ακολουθία $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$, θα συγκλίνει στο $x^* = \varphi(x^*)$

Επίσης η ταχύτητα σύγκλισης θα είναι μεγαλύτερη του 1

Υπάρχει $a > 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^a} = C \neq 0$$

Θεώρημα: (Τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω x^* απλή ρίζα μιας συνάρτησης f (δηλαδή $f(x^*)=0$ και $f'(x^*)\neq 0$) και έστω ότι η f είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $I_\delta=[x^*-\delta, x^*+\delta]$ τέτοιο ώστε για κάθε $x_0\in I_\delta$ η ακολουθία (x_n) που κατασκευάζεται με τη μέθοδο του Νεύτωνα

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\dots$$

να συγκλίνει στο x^*.

Επιπλέον

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^2}=\frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}$$

δηλαδή η ταχύτητα σύγκλισης είναι <u>τουλάχιστον</u> τετραγωνική

Θεώρημα: (Τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Newton)

Έστω x^* απλή ρίζα μιας συνάρτησης f (δηλαδή $f(x^*)=0$ και $f'(x^*)\neq 0$) και έστω ότι η f είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $I_\delta=[x^*-\delta, x^*+\delta]$ τέτοιο ώστε για κάθε $x_0\in I_\delta$ η ακολουθία (x_n) που κατασκευάζεται με τη μέθοδο του Newton

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

να συγκλίνει στο x^*

Επιπλέον

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^2}=\frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}$$

δηλαδή η ταχύτητα σύγκλισης είναι τουλάχιστον τετραγωνική

Απόδειξη: Αν θέσουμε $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, μπορούμε να δούμε ότι $\varphi(x^*) = x^*$

Επιπλέον η $f''(x)$ είναι συνεχής κοντά στο x^* τότε η

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}$$ είναι συνεχής κοντά στο x^* και

$\varphi'(x^*) = 0$ (επειδή $f'(x^*) \neq 0$)

Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $I_\delta = [x^* - \delta, x^* - \delta]$, και $L < 1$,

$$\max_{x \in I_\delta} |\varphi'(x)| \leq L < 1$$

Για $x \in I_\delta$ θα έχουμε $|x^* - \varphi(x)| = |\varphi(x^*) - \varphi(x)| \leq L|x^* - x| < |x - x^*| < \delta$

Άρα $\varphi(x) \in I_\delta$

Δηλαδή $\varphi : I_\delta \to I_\delta$ και $\max_{x \in I_\delta} |\varphi'(x)| \leq L < 1$

Η φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου στο I_δ

Οπότε $\forall x_0 \in I_\delta$ η επαναληπτική ακολουθία $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $x_n \to x^*$

Η ακολουθία αυτή είναι αυτή που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Δείξαμε λοιπόν τη σύγκλιση της μεθόδου για x_0 κοντά στο x^*.

Θέλουμε τώρα να δείξουμε την ταχύτητα σύγκλισης ότι είναι 2.

Επειδή η f στο I_δ είναι 2-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη από το Θεώρημα Taylor θα έχουμε

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_n),$$ για κάποιο ξ_n ανάμεσα στα x_n, x^*

Επίσης
$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(J_n),$$ για κάποιο J_n ανάμεσα στα x_n, x^*

Οπότε

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_n)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(J_n)}$$

ή
$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_n)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(J_n)}$$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)\left[f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(J_n)\right] - \left[(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_n)\right]}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(J_n)}$$

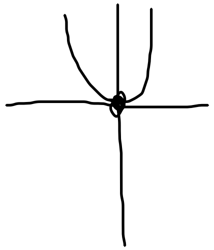
$$= \frac{(x_n - x^*)^2 f''(J_n) - (x_n - x^*)^2 \frac{1}{2} f''(\xi_n)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(J_n)}$$

Συνεπώς $$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(J_n) - \frac{1}{2} f''(\xi_n)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(J_n)}$$

Επειδή $x_n \to x^*$, θα έχουμε $J_n, \xi_n \to x^*$, άρα

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

Παρατηρήσεις για το Θεώρημα τετραγωνικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα



Υποθέσαμε ότι η ρίζα της f είναι απλή $(f'(x^*) \neq 0)$

Αν η ρίζα x^* έχει πολ/τητα μεγαλύτερη του 1 (δηλ. $f'(x^*) = 0$) τότε η σύγκλιση δεν είναι τετραγωνική

π.χ. $f(x) = x^2$. Η ρίζα έχει πολ/τητα 2, $f'(0) = 0$.

Η μέθοδος του Νεύτωνα γίνεται $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^2}{2x_n}$

$$= x_n - \frac{x_n}{2} = \frac{1}{2} x_n$$

Ευκολα βλεπουμε οτι $\forall x_0 \neq 0 \quad x_n \to 0, \; n \to \infty$

και επισης $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{2}$. Άρα $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{|x_{n+1} - 0|}{|x_n - 0|} = \dfrac{1}{2}$

Η ταχυτητα συγκλισης ειναι 1 και όχι 2.

<u>Παράδειγμα</u> Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos x - x$

Θέλουμε να προσεγγίσουμε τη ρίζα της f στο διάστημα $[0, \pi/2]$ χρησιμοποιώντας

(α) τη μέθοδο της διχοτόμησης

(β) Μια μέθοδο σταθερού σημείου

(γ) Τη μέθοδο του Νεύτωνα

(α) Η τιμή της f στο 0 είναι $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$

και η $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) - \pi/2 = -\pi/2 < 0$

Άρα ανάμεσα στο $(0, \pi/2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα. Η $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$ στο $[0, \pi/2]$. Άρα η f είναι φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$, οπότε έχει μόνο μια ρίζα

Παράδειγμα Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos x - x$

Θέλουμε να προσεγγίσουμε τη ρίζα της f στο διάστημα $[0, \pi/2]$ χρησιμοποιώντας

(α) τη μέθοδο της διχοτόμησης

(β) Μια μέθοδο σταθερού σημείου

(γ) τη μέθοδο του Νεύτωνα

(α) Η τιμή της f στο 0 είναι $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$

και η $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) - \pi/2 = -\pi/2 < 0$

- Άρα ανάμεσα στο $(0, \pi/2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα. Η $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$ στο $[0, \pi/2]$. Άρα η f είναι φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$, οπότε έχει μόνο μια ρίζα

Αν θέλουμε να προσεγγίσουμε τη ρίζα με ακρίβεια 10^{-8}, τότε

$$\frac{\pi/2}{2^n} < 10^{-8} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi}{2}10^{8} < 2^n$$

$$\underset{\approx\ 8.2}{\log_{10} \frac{\pi}{2}10^{8}} < \underset{(0.3)\,n}{(\log_{10} 2)\, n} \quad \text{ή} \quad n > 27.3$$

Θέλουμε 28 βήματα.

(7) Η ρίζα x^* της f

(β) Η ρίζα x^* της $f(x^*)$, θα ικανοποιεί ότι $x^* = \cos(x^*)$

Άρα η ρίζα x^* είναι σταθερό σημείο της $g(x) = \cos(x)$

$g'(x) = -\sin(x)$ και $|g'(x^*)| < 1$, διότι $x^* \neq \pi/2$.

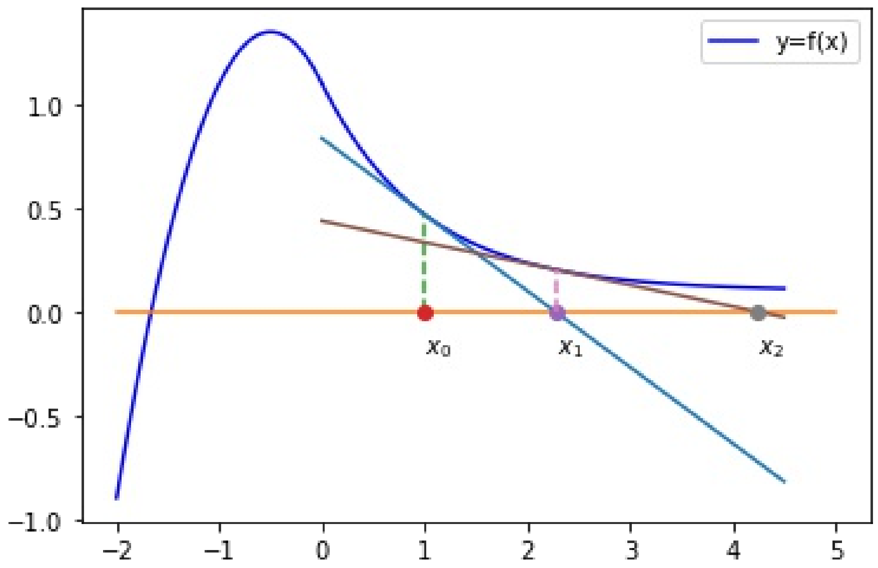
Οπότε υπάρχει ένα διάστημα $[a,b] \subset [0, \pi/2]$ και στο οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε την επαναληπτική ακολουθία $x_{n+1} = g(x_n) = \cos(x_n)$, $n \geq 0$ για x_0 "κοντά" στο x^*, και $x_n \to x^*$

γ) Η μέθοδος του Νεύτωνα

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1} = x_n + \frac{\cos(x_n) - x_n}{\sin(x_n) + 1}$$

Η x^* είναι απλή ρίζα της f, και είναι 2-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Για x_0 "κοντά" στη ρίζα x^*, η μέθοδος Νεύτωνα θα συγκλίνει με τετραγωνική ταχύτητα.

Η μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να αποτυγχάνει να συγκλίνει προς τη ρίζα της συνάρτησης f, λόγω κακής επιλογής της αρχικής προσέγγισης

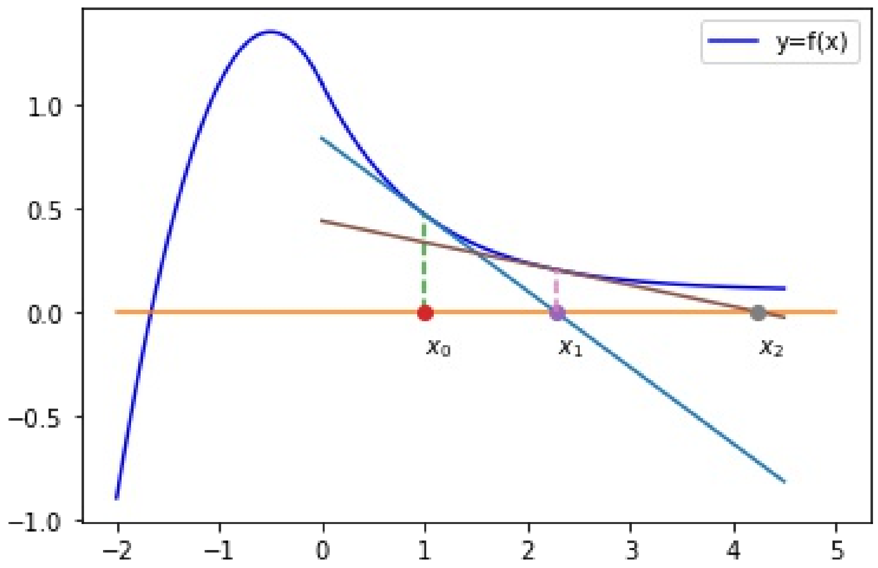


Παράδειγμα

Εστω η $f(x)$ έχει ρίζα

Επιλέγουμε x_0 που δεν είναι "αρκετά κοντά" και η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \dots$ απομακρύνεται από τη ρίζα.

Η μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να αποτυγχάνει να συγκλίνει προς τη ρίζα της συνάρτησης f, λόγω κακής επιλογής της αρχικής προσέγγισης

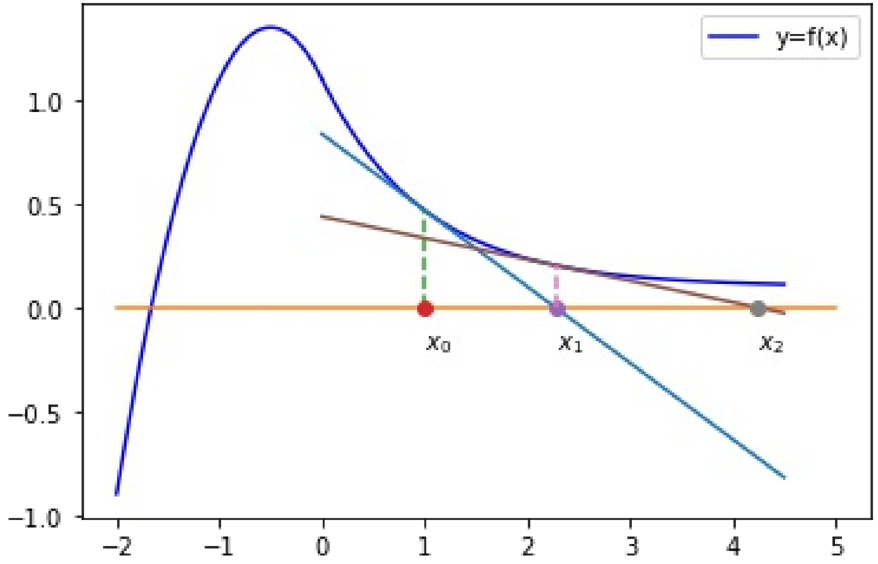


<u>Παράδειγμα</u>

Εδώ η $f(x)$ έχει ρίζα

Επιλέγουμε x_0 που δεν είναι "αρκετά κοντά" και η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ απομακρύνεται από τη ρίζα.

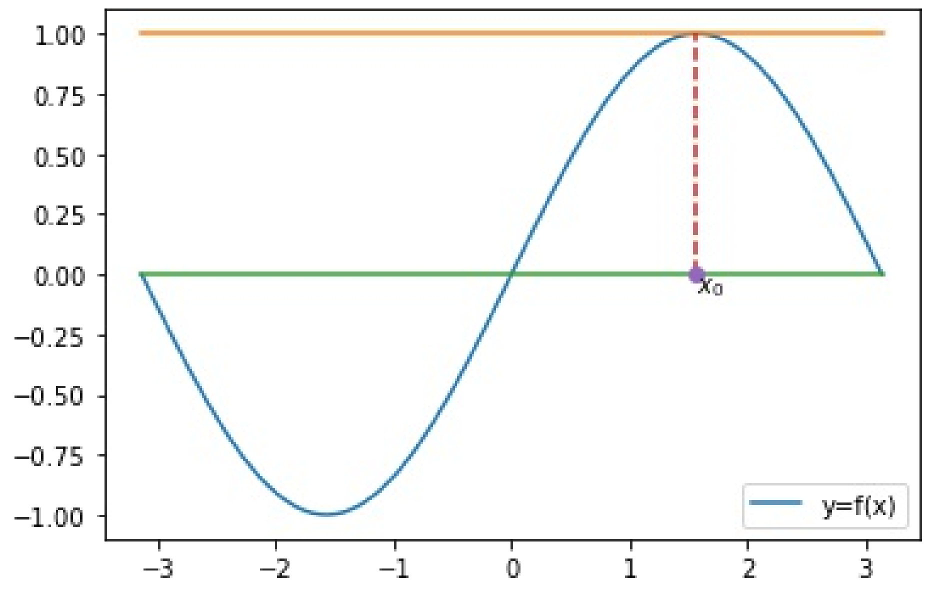
Η μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να αποτυγχάνει να συγκλίνει προς τη ρίζα της συνάρτησης f, λόγω κακής επιλογής της αρχικής προσέγγισης



Παράδειγμα

Εάν η $f(x)$ έχει ρίζα

Επιλέγουμε x_0 που δεν είναι "αρκετά κοντά" και η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ απομακρύνεται από τη ρίζα.



Παράδειγμα

Ενώ η $f(x)$ έχει ρίζα, επιλέγουμε x_0 που είναι τοπικό ακρότατο της f.

Επομένως $f'(x_0)=0$, οπότε δεν μπορεί να υπολογιστεί το σημείο x_1, και άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Νεύτωνα