Επαναληπτικές μέθοδοι

Οι μέθοδοι που έχουμε θεωρήσει μέχρι τώρα, μετά από έναν συγκεκριμένο αριθμό βημάτων κατασκευάζουν την ακριβή λύση ενός γραμμικού συστήματος. Αυτή η διαδικασία μπορεί να ονομαστεί "άμεση" διότι είναι προκαθορισμένη και πάντα γνωρίζουμε ότι αν την ολοκληρώσουμε θα οδηγηθούμε στη λύση του γραμμικού συστήματος.

Στον Η/Υ όμως, λόγω της πεπερασμένης αριθμητικής που χρησιμοποιούμε, γίνονται σφάλματα, τα οποία οδηγούν στο να μην παίρνουμε την ακριβή λύση, αλλά μια προσέγγιση της.

Επίσης, για να κατασκευαστεί αυτή η προσέγγιση που δίνουν οι αλγόριθμοι που έχουν θεωρηθεί μέχρι τώρα, θα πρέπει να ολοκληθούν μέχρι τέλους, το οποίο απαιτεί μεγάλο αριθμό πράξεων για μεγάλους πίνακες, π.χ. αν $n = 1000$ τότε θέλουμε περίπου $\frac{1}{3}10^9$ πράξεις

Θα μπορούσαμε με λιγότερες πράξεις να κατασκευάσουμε μια προσέγγιση της λύσης;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνουν οι λεγόμενες επαναληπτικές μέθοδοι

Οι πιο γνωστές είναι η μέθοδος Jacobi και η μέθοδος Gauss-Seidel

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε αυτές τις δύο μεθόδους, βασική προϋπόθεση είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A να μην είναι μηδενικά.

Μέθοδος Jacobi

Για το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ θα έχουμε

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j \Big) \quad , i=1,2,\dots,n$$

Όταν θέλουμε να βρούμε το σταθερό σημείο $x^* \in \mathbb{R}$ μιας συνάρτησης $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x^*) = x^*$, θεωρήσαμε μια επαναληπτική ακολουθία $x^{(k)} \in \mathbb{R}$ τ.ω. $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ και αν η ακολουθία συγκλίνει τότε προσεγγίζουμε το σταθερό σημείο x^*.

Με με τη μέθοδο Jacobi κάνουμε κάτι ανάλογο, για γραμμικά συστήματα.

Η ακριβής λύση $x \in \mathbb{R}^n$, του γραμμικού συστήματος $Ax=b$ είναι ένα σταθερό σημείο για τις εκφράσεις

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j \Big), \quad i = 1, \dots, n.$$

Θεωρούμε λοιπόν ένα διάνυσμα $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ και κατασκευάζουμε μια επαναληπτική ακολουθία $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, τ.ω

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \Big)$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Η ακριβής λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$ είναι $x = (1, 2, -1, 1)^T$. Η μέθοδος Jacobi γίνεται

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(6 - x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)}\right)$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{11}\left(25 + x_1^{(m)} + x_3^{(m)} - 3x_4^{(m)}\right)$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(-11 - 2x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + x_4^{(m)}\right)$$

$$x_4^{(m+1)} = \frac{1}{8}\left(15 - 3x_2^{(m)} + x_3^{(m)}\right)$$

Μέθοδος Gauss-Seidel

Αυτή προκύπτει με παρόμοιο τρόπο με Jacobi.

Το $x \in \mathbb{R}^n$, το οποίο είναι λύση του $Ax=b$ και ικανοποιεί

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

Σε αυτή τη μέθοδο αλλάζουμε τη αναδρομή για την οποία θεωρούμε ότι το x είναι σταθερό σημείο. Τώρα θεωρούμε την ακολουθία $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ η οποία προκύπτει ως εξής

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right\}, \quad i=1,\dots,m$$

Παρατηρήστε ότι στη μέθοδο Gauss-Seidel για να υπολογίσουμε τη συνιστώσα $x_i^{(m+1)}$ του νέου διανύσματος $x^{(m+1)}$, βασιζόμαστε όχι μόνο στο προηγούμενο διάνυσμα $x^{(m)}$, αλλά και στις συνιστώσες του διανύσματος $x^{(m+1)}$ που έχουμε ήδη υπολογίσει δηλαδή $x_1^{(m+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(m+1)}$

Έτσι για το προηγούμενο παράδειγμα με $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(6 + x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)}\right)$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{11}\left(25 + x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)} - 3x_4^{(m)}\right)$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(-11 - 2x_1^{(m+1)} + x_2^{(m+1)} + x_4^{(m)}\right)$$

$$x_4^{(m+1)} = -\frac{1}{8}\left(15 - 3x_2^{(m+1)} + x_3^{(m+1)}\right)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η μέθοδος Jacobi δεν απαιτεί να γνωρίζουμε $x^{(m+1)}$ σε προηγούμενες συνιστώσες από τη $x_i^{(m+1)}$, κάτι που απαιτεί η μέθοδος Gauss-Seidel. Για αυτό το λόγο η μέθοδος Jacobi είναι ιδανική για να τη χρησιμοποιήσουμε σε παράλληλους υπολογιστές και να ζητήσουμε να υπολογίσουν οι συνιστώσες σύγχρονα σε παράλληλους υπολογιστές.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τις δύο αυτές μεθόδους χρησιμοποιώντας ένα πιο γενικό πλαίσιο. Σκοπός μας είναι να διαπιστώσουμε πότε οι ακολουθίες που δίνουν αυτές οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν στην επιθυμητή λύση.

Ας θεωρήσουμε ότι ο πίνακας A διασπάται στην ακόλουθη μορφή

$$A = D - L - U$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} = \underset{D}{\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}} - \underset{L}{\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & 0 \end{pmatrix}} - \underset{U}{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{(n-1)n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}$$

Επομένως η σχέση $Ax = b$ γράφεται τώρα

$$Ax = (D - L - U)x = b \quad \text{ή} \quad Dx = (L+U)x + b$$

Αν ο D είναι αντιστρέψιμος δηλαδή $a_{ii} \neq 0$, $i=1,\dots,n$

$$x = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{\text{πίνακας επανάληψης}} x + D^{-1} b$$

Προκύπτει μια επαναληπτική μέθοδος (η μέθοδος Jacobi)
Ορίζουμε την επαναληπτική ακολουθία

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1}b, \quad m = 0,1,\dots, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε τη μέθοδο Gauss-Seidel

Επειδή $Ax=b$ δίνει $(D-L)x = Ux + b$, αν ο $(D-L)^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος

$$x = \underbrace{(D-L)^{-1}U}_{\text{πίνακας επανάληψης}} x + (D-L)^{-1} b$$

Αν ο D είναι αντιστρέψιμος δηλαδή $a_{ii} \neq 0$, $i=1,\dots,n$

$$x = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{\text{πίνακας επανάληψης}} x + D^{-1} b$$

Προκύπτει μια επαναληπτική μέθοδος (η μέθοδος Jacobi)
Ορίζουμε την επαναληπτική ακολουθία

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)\,x^{(m)} + D^{-1} b, \quad m=0,1,\dots, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε τη μέθοδο Gauss-Seidel

Επειδή $Ax=b$ δίνει $(D-L)x = Ux + b$, αν ο $(D-L)^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος

$$x = \underbrace{(D-L)^{-1}U}_{\text{πίνακας επανάληψης}} x + (D-L)^{-1} b$$

Αν ο D είναι αντιστρέψιμος δηλαδή $a_{ii} \neq 0$, $i=1,\ldots,n$

$$x = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{\text{πίνακας επανάληψης}} x + D^{-1} b$$

Προκύπτει μια επαναληπτική μέθοδος (η μέθοδος Jacobi)
Ορίζουμε την επαναληπτική ακολουθία

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)\,x^{(m)} + D^{-1} b \,, \quad m = 0,1,\ldots \,, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε τη μέθοδο Gauss-Seidel

Επειδή $Ax=b$ δίνει $(D-L)x = Ux + b$, αν ο $(D-L)^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος

$$x = \underbrace{(D-L)^{-1} U}_{\text{πίνακας επανάληψης}} x + (D-L)^{-1} b$$

Έτσι παίρνουμε την επαναληπτική ακολουθία

$$x^{(m+1)} = (D-L)^{-1} U x^{(m)} + (D-L)^{-1} b \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots , \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Αυτές οι δύο επαναληπτικές μέθοδοι εύκολα βλέπουμε ότι είναι οι μέθοδοι Jacobi & Gauss-Seidel που ορίσατε προηγουμένως.

Επειδή $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$, εύκολα βλέπετε ότι

ότι κάθε συνιστώσα του

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1} b$$

Είναι ίδια με τη μέθοδο Jacobi.

Επίσης η μέθοδος

$$x^{(m+1)} = (D-L)^{-1} U x^{(m)} + (D-L)^{-1} b$$

γράφεται και ως

$$(D-L)\, x^{(m+1)} = U x^{(m)} + b$$

Κάθε συνιστώσα αυτής της σχέσης είναι ίδια με τη μέθοδο Gauss-Seidel που ορίσαμε προηγουμένως.