Θεώρημα: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$. Τότε ισχύουν

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

και $$\|f - p\|_\infty \le \max_{a \le x \le b} \left(\left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \right) \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}$$

όπου $$\|g\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |g(x)|$$

Απόδειξη: Αν $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ τότε προφανώς το

αριστερό μέλος και το δεξιό μέλος της ισότητας είναι ταυτοτικά 0 και άρα ισχύει

Έστω λοιπόν $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$.

Θέτουμε $\phi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$ και ορίζουμε τη

βοηθητική συνάρτηση φ

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\phi(x)} \phi(t), \quad t \in [a, b]$$

Προφανώς $\varphi \in C^{n+1}[a, b]$.

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\Phi(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{και άρα}$$

$$g(x_i) = f(x_i) - p(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

Επιπλέον για το x που έχουμε επιλέξει, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$.

$$g(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi(x) = 0.$$

Συνεπώς η συνάρτηση g έχει στο $[a, b]$ τουλάχιστον $n+2$, διαφορετικές ανά δύο, ρίζες

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle (γνωστό από το απειροστικό λογισμό), η φ' έχει $n+1$ ρίζες (διαφορετικές ανά δύο)

Στη συνέχεια θα έχουμε ότι η φ'' έχει n ρίζες

και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στο γεγονός ότι

η $\varphi^{(n+1)}$ θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a,b]$

Άρα $\exists\ \xi \in (a,b)$ τ.ω. $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Προφανώς $\Phi^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ και $p^{(n+1)}(t) = 0$

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}(n+1)!$$

Άρα $g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}(n+1)! = 0$

από όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\phi(x)$$

Παραδείγματα

1) Ας θεωρήσουμε τα σημεία $x_0 = a$ και $x_1 = b$ και τις τιμές $f(a)$, $f(b)$, αντίστοιχα, μιας συνάρτησης $f \in C^2[a,b]$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα, θα έχουμε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής $p_1 \in \mathbb{P}_1$,

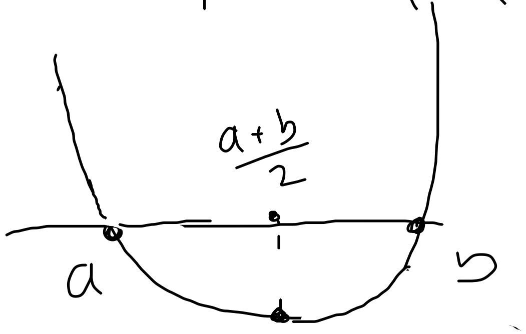
$$\max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)| \le \frac{1}{2!} \max_{a \le x \le b} |(x-a)(x-b)| \cdot \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

Το πολυώνυμο p_1 εύκολα βλέπουμε ότι θα είναι το

$$p_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Για να βρούμε το μέγιστο της $|(x-a)(x-b)|$ εύκολα παρατηρούμε ότι

είναι πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα σημεία a και b.



Η μέγιστη και απόλυτη τιμή στο $[a,b]$, θα τη λαμβάνει στο σημείο $\frac{a+b}{2}$

και θα είναι $(b-a)^2/4$. Οπότε

$$\max_{a\le x\le b}|p_1(x)-f(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

2) Έστω $p_2 \in \mathbb{P}_2$ το πολυώνυμο παρεμβολής που παρεμβάλλεται στις τιμές της συνάρτησης f, $f(x) = \sin x$ στα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$. Για το σφάλμα θα έχουμε

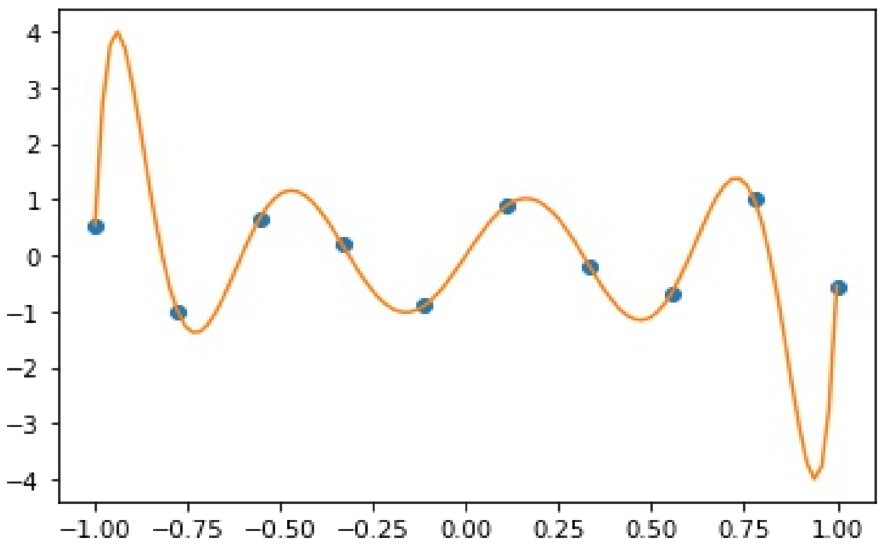
$$\max_{0 \le x \le \pi/2} |p_2(x) - \sin(x)| \le \frac{1}{3!} \max_{0 \le x \le \pi/2} \left| x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right| \max_{0 \le x \le \pi/2} |f^{(3)}(x)|$$

$$= \frac{1}{3!} \frac{\sqrt{3}\,\pi^3}{288} \cdot 1 \simeq 0.031$$

Κατασκευή πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange

- Είδαμε ότι αν έχουμε $n+1$ σημεία (διαφορετικά ανά δύο) $x_0, \dots, x_n$ και $(n+1)$ τιμές $y_0, \dots, y_n$ τότε υπάρχει μοναδικό $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

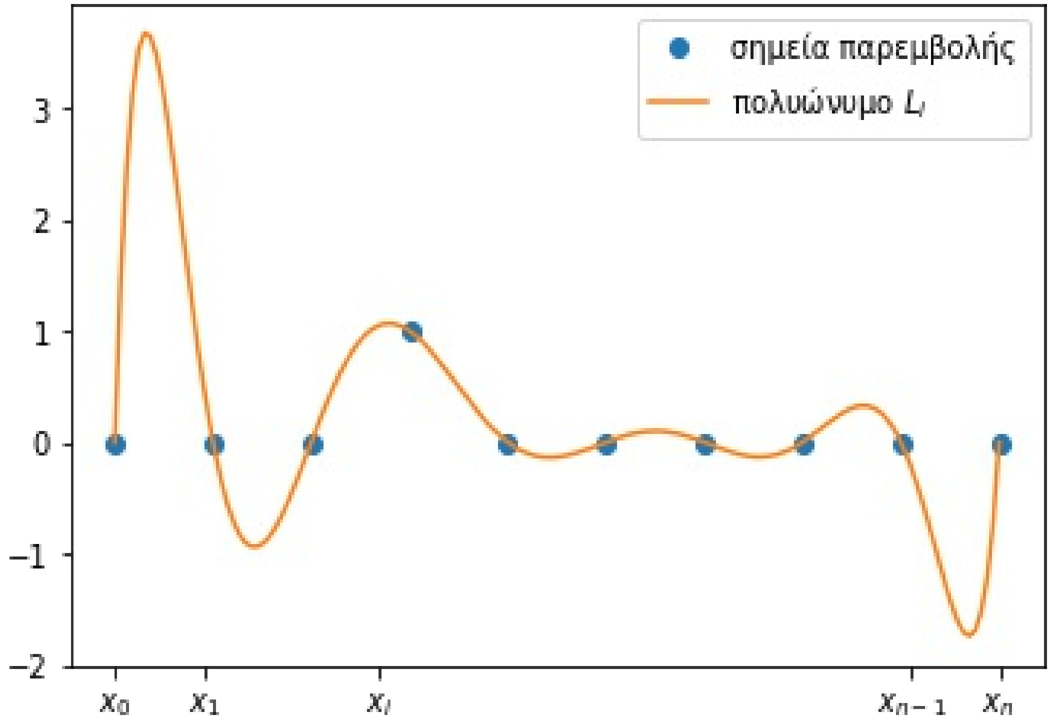
$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$



Ας θεωρήσουμε τώρα τα πολυώνυμα $L_i \in \mathbb{P}_n$ τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

$$L_i(x_j) = 0 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$$

$$L_i(x_i) = 1$$



Το L_i θα εχει ριζες τα $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$

αρα θα γραφεται ως $L_i(x) = a_i (x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$

$$= a_i \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} (x-x_j)$$

όπου $a_i \in \mathbb{R}$, την οποια θελουμε να προσδιορισουμε.

Αυτό θα γινει από τη σχεση

$$L_i(x_i)=1$$

Οπότε $L_i(x_i) = a_i \prod\limits_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} (x_i - x_j) = 1 \Rightarrow a_i = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \dfrac{1}{x_i - x_j}$

Τα πολυώνυμα L_i, $i=0,\dots,n$ λέγονται πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $\{x_0,\dots,x_n\}$

Παρατήρηση: Αν μεταβάλουμε έστω και ένα από τα $n+1$ σημεία $x_0,\dots,x_n$ τότε αλλάζουν όλα τα πολυώνυμα L_i, $i=0,\dots,n$

<u>Κατασκευή πολυωνύμου παρεμβολής</u>

Αν f μια συνάρτηση ορισμένη στα σημεία $x_0, \dots, x_n$, τότε το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$, της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$,

$$p(x_i) = f(x_i) \quad , \; i = 0, \dots, n$$

θα γράφεται

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Αυτή η παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής p της f, καλείται <u>παράσταση σε μορφή Lagrange</u> του πολυωνύμου παρεμβολής

Είναι απλό να δούμε ότι το δεξιό μέλος είναι πολυώνυμο βαθμού n και στα σημεία $\{x_0, \ldots, x_n\}$ λαμβάνει τις τιμές $\{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$

Επειδή το πολυώνυμο βαθμού n το οποίο παρεμβάλει $n+1$ σημεία είναι μοναδικό, θα έχουμε την ισότητα.

Παράδειγμα: Θέλουμε να βρούμε το $p \in \mathbb{P}_2$ το οποίο παρεμβάλλει τις τιμές της $f(x) = \frac{1}{x}$ στα σημεία $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$

Χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Lagrange.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\, \ell_i(x) = \frac{1}{x_0}\ell_0(x) + \frac{1}{x_1}\ell_1(x) + \frac{1}{x_2}\ell_2(x)$$

Προσδιορίζουμε τα ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2

Σύμφωνα με αυτά που έχουμε δείξει

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{2} \frac{1}{x_i - x_j}(x - x_j)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2}(x-2.5)(x-4)$$

$$= x^2 - 6.5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \ldots = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \ldots = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}$$

Οπότε

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) L_i(x) = \frac{1}{2} L_0(x) + \frac{2}{5} L_1(x) + \frac{1}{4} L_2(x)$$

$$= \dots = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

<u>Παρατήρηση</u>: Μια άλλη μορφή των πολυωνύμων Lagrange είναι η ακόλουθη.

Θέτουμε $\Phi(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \in \mathbb{P}_{n+1}$

τότε

$$\Phi'(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)$$
$$+ \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} (x-x_j)$$

Οπότε $\Phi'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} (x_i - x_j)$

Συνεπώς για $x \neq x_i$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}(x - x_j)$$

$$= \frac{1}{\phi'(x_i)} \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_j) = \frac{1}{\phi'(x_i)} \frac{\phi(x)}{(x - x_i)}$$

Δηλαδή

$$L_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x)}{\phi'(x_i)(x - x_i)}, & x \neq x_i \\ 1, & x = x_i \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Η μορφή Lagrange του πολυωνύμου παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμη για να δείχνουμε ιδιότητες του πολυωνύμου.

Όμως πρακτικά είναι δύσκολη στη χρήση της διότι οποιαδήποτε μεταβολή ενός κόμβου x_i, $i=0,1,\dots,n$ ή η προσθαφαίρεση ενός κόμβου στους ήδη υπάρχοντες μας αναγκάζει να υπολογίσουμε τα πολυώνυμα Lagrange από την αρχή.

Μορφή Νεύτωνα

Μια άλλη αναπαράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής Langrange P, είναι η μορφή Νεύτωνα

Προσοχή: Δεν υπολογίζουμε διαφορετικό πολυώνυμο αλλά γράφουμε το ίδιο πολυώνυμο παρεμβολής με διαφορετικό τρόπο, από τη μορφή Lagrange που δείξαμε προηγουμένως.

Έστω $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δυο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ οι τιμές που θέλουμε να παρεμβάλουμε

$$p(x_i) = y_i \ , \quad i = 0, \ldots, n$$

Μορφή Νεύτωνα του p είναι η ακόλουθη

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

με $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Οι αντίστοιχες a_i, $i = 0, \ldots, n$ μπορούν να υπολογισθούν με τον ακόλουθο τρόπο

$$p(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad p(x_0) = a_0 = y_0 .$$

$$p(x_1) = y_1 \quad \Rightarrow \quad p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}$$

$$p(x_2) = y_2 \quad \Rightarrow \quad p(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

$$\Rightarrow \quad a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{\dfrac{y_2 - a_0}{x_2 - x_0} - a_1}{x_2 - x_1}$$

K.O.K pa tous $a_3, \dots, a_n$

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα που θέλουμε να βρούμε $p \in \mathbb{P}_2$ που παρεμβάλει τις τιμές της $f(x) = \frac{1}{x}$ στα $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$, σε μορφή Νεύτωνα.

Το p είχαμε δείξει ότι $p(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$
και είχαμε καταλήξει σε αυτό χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Lagrange L_i

Τώρα θα γράψουμε το p, ως

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

και θα βρούμε τους συντελεστές a_0, a_1, a_2

$$p(x_0) = a_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2}$$

$$p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{5}$$

ή $a_0 + a_1(2.5-2) = \frac{2}{5}$

ή $a_1 = \left(\frac{2}{5} - a_0\right) / (2.5-2) = -1/5$

$$p(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$$

οπότε $a_2 = \ldots = \frac{1}{20}$, άρα το p μπορεί να γραφεί <u>καί</u> σαν

μορφή $p(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(x-2) + \frac{1}{20}(x-2)(x-2.5)$

Παρατηρήσεις :

1) Ένα βασικό πλεονέκτημα που έχει η μορφή του Νεύτωνα είναι ο υπολογισμός της τιμής του πολυωνύμου.
Αυτό μπορεί να γίνει σε $O(n)$ πράξεις (προσθέσεις + πολ/μούς)

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$= a_0 + (x-x_0)\Big(a_1 + (x-x_1)\big(a_2 + \dots + (x-x_{n-2})(a_{n-1} + a_n(x-x_{n-1}))\big)\Big)$$

Για να προσδιορίσουμε την τιμή $p(x)$, αρχίζουμε από το "πιο εσωτερικό" όρο $a_n(x-x_{n-1})$ και "προχωράμε" επαναληπτικά προς τα "έξω"

2) Αν πάρουμε τους πρώτους $k+1$ κόμβους από τους $\{x_0, \dots, x_n\}$, το πολυώνυμο $p_k \in \mathbb{P}_k$, που προκύπτει αν από τη μορφή Νεύτωνα του p, πάρουμε τους πρώτους $k+1$ όρους,

$$p_k(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_k(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})$$

αυτό θα είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange που αντιστοιχεί στο υποσύνολο $\{(x_i, y_i),\ 0 \leq i \leq k\}$ των αρχικών δοσμένων σημείων παρεμβολής

Οπότε μπορούμε εύκολα να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε σημεία παρεμβολής x_i ή να μεταβάλουμε τιμές y_i χωρίς να υπολογίσουμε εξ' αρχής το πολυώνυμο, όπως στη μορφή Lagrange.

Προσοχή όμως αυτό μπορεί να γίνει τροποποιώντας κόμβους ή τιμές από τις "τελευταίες" στη σειρά.

Διαιρεμένες Διαφορές

Είδαμε ένα τρόπο για να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_i, $i=0,\dots,n$

στην αναπαράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Newton.

Ένας άλλος τρόπος είναι με τη χρήση των λεγόμενων

__διαιρεμένων διαφορών__

Συμβολισμός:

$$\begin{cases} \Delta^0(x_0)f = f(x_0) \\ \Delta^i(x_0,x_1,\dots,x_i)f = \dfrac{\Delta^{i-1}(x_1,\dots,x_i)f - \Delta^{i-1}(x_0,\dots,x_{i-1})f}{x_i - x_0}, \quad i \geq 1 \end{cases}$$

Ο αριθμός $\Delta^i(x_0,\dots,x_i)$ λέγεται **διαιρεμένη διαφορά** τάξεως i της f ως προς τα σημεία $x_0,\dots,x_i$

Ισχύει ότι $$a_i = \Delta^i(x_0,\dots,x_i)f, \quad i=0,\dots,n$$

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωρούμε και πάλι τη $f(x) = \frac{1}{x}$ και τα σημεία

$x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$

Είχαμε δει ότι $p(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(x - x_0) + \frac{1}{20}(x - x_0)(x - x_1)$

$$\Delta^0(x_0)f = f(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta^1(x_0, x_1)f = \frac{\Delta^0(x_1)f - \Delta^0(x_0)f}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2} - 2} = -\frac{1}{5}$$

$$\Delta^2(x_0, x_1, x_2)f = \frac{\Delta^1(x_1, x_2)f - \Delta^1(x_0, x_1)f}{x_2 - x_0}$$

Γνωρίζουμε το $\Delta^1(x_0, x_1)f$, αλλά όχι το $\Delta^1(x_1, x_2)f$.

$$\Delta^1(x_1, x_2)f = \frac{\Delta^0(x_2)f - \Delta^0(x_1)f}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{10}$$

Οπότε:

$$\Delta^2(x_0, x_1, x_2)f = \frac{\Delta^1(x_1, x_2)f - \Delta^1(x_0, x_1)f}{x_2 - x_0} = \frac{1}{20}$$

Για τον υπολογισμό των διηρημένων διαφορών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον παρακάτω πίνακα.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$\ldots$
$x_0 = 2$	$\Delta^0(x_0)f$			
$x_1 = 2.5$	$\Delta^0(x_1)f$	$\Delta^1(x_0,x_1)f$		
$x_2 = 4$	$\Delta^0(x_2)f$	$\Delta^1(x_1,x_2)f$	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)f$	
$\vdots$				

Παράδειγμα: Μας δίνεται ο πίνακας με τα δεδομένα.

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
y	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

και θέλουμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα διαιρεμένων διαφορών.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	
$x_0 = 1$	3			
$x_1 = \frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{\frac{13}{4} - 3}{3/2 - 1} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$		
$x_2 = 0$	3	$\frac{3 - 13/4}{0 - 3/2} = \frac{-1/4}{-3/2} = 1/6$	$\frac{1/6 - 1/2}{0 - 1} = 1/3$	
$x_3 = 2$	$5/3$	$\frac{5/3 - 3}{2 - 0} = -2/3$	$\frac{-2/3 - 1/6}{2 - 3/2} = -\frac{5}{3}$	-2

Οπότε το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι (σε μορφή Νεύτωνα)

$$p(x) = 3 + \frac{1}{2}(x - x_0) + \frac{1}{3}(x - x_0)(x - x_1) - 2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) - 2(x-1)(x - 3/2)\,x$$