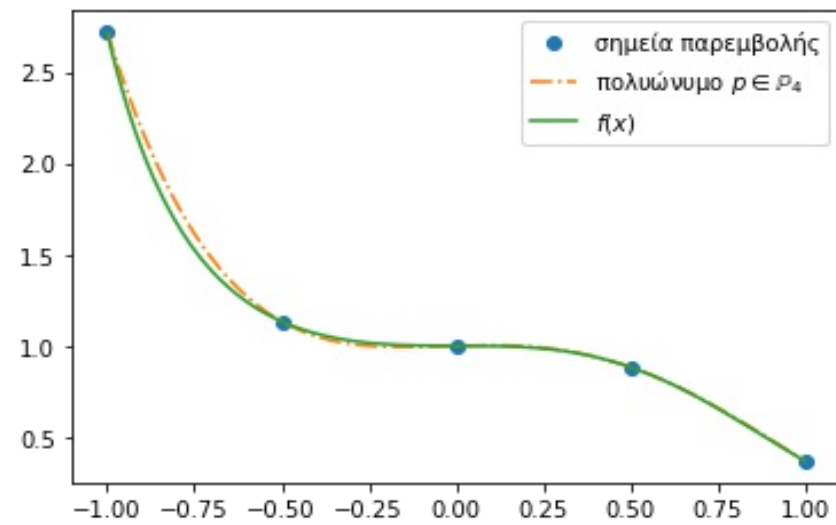
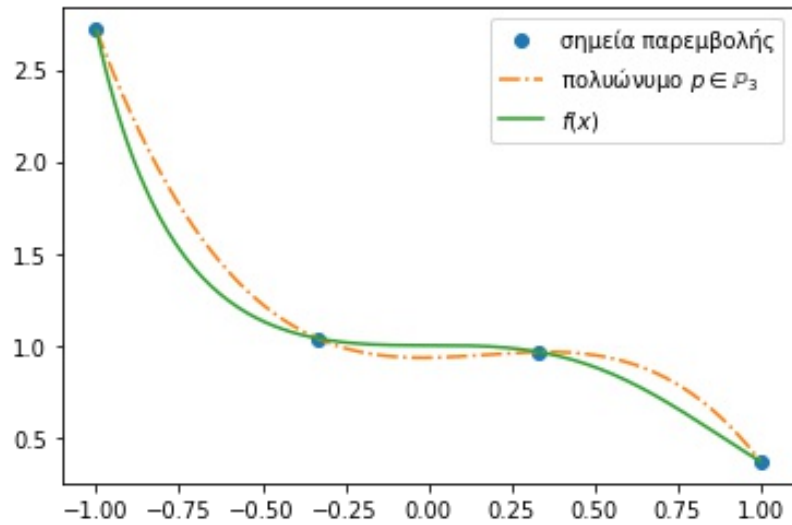


Συμπεριφορά πογκωνίου παρεμβολής για μεγάλα n .

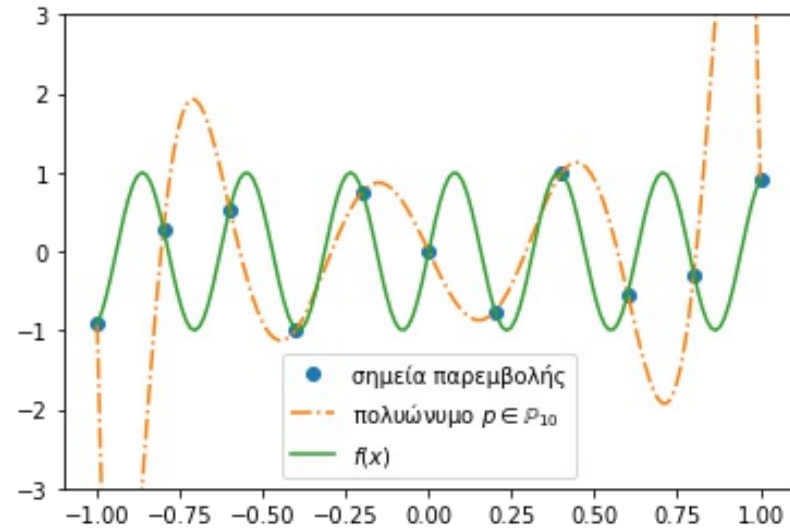
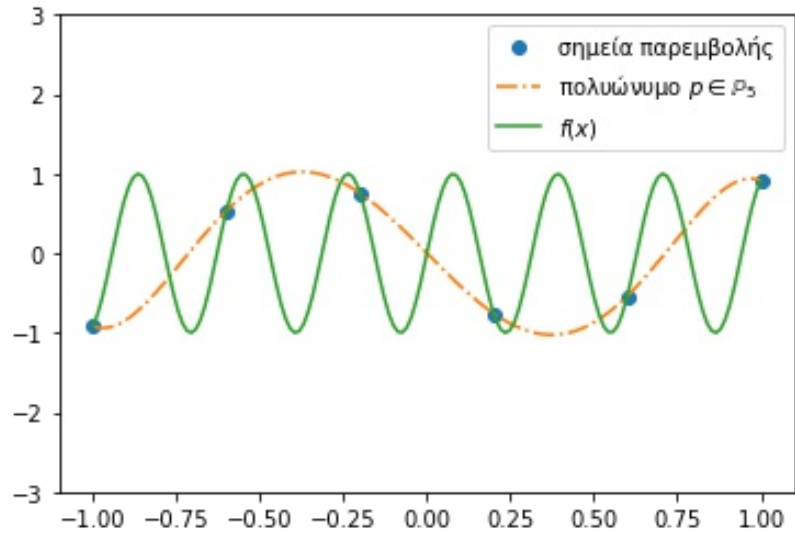
Το πογκωνίο παρεμβολής μιας συναρτήσεως f είναι μια συναρτήση η οποία συνδέεται με την f ως οριζόντια παρεμβολή.

Προφανώς στα υποδομη οριζόντια θα φαίνεται διαφορετικές τιμές (αλλιώς θα ήταν η f και αυτή ένα πογκωνίο).

Επειδή ένας γράφος που κατασκευάζουμε στο πογκωνίο παρεμβολής είναι να προσεγγίσουμε τιμές της f , στα υποδομη οριζόντια (εκτός από τους κέντρα x_i), αυξανόμενος του βαθμού του πογκωνίου. η (παιρνώντας δηλ περισσότερους κόμβους) περιμένουμε να "πλησιάσουμε καλύτερα" την f .



Αύξαναμε τον αριθμό των σημείων που παρεμβολίζουμε
 παρακολουθώντας το γραφικό του τμήματος παρεμβολής να
 πλησιάζει καλύτερα στο γραφικό της συνάρτησης f



Δυστυχώς όμως, μπορεί η f να είναι τέτοια ώστε
 αυξαντας τον αριθμό των σημείων παρεμβολής, το γραφικό του
 πομπυλιού παρεμβολής να μην πλησιάζει αυτό της f
 Να υπάρχουν δηλαδή σημεία που το σφάλμα να μεγαλώνει συνεχώς

Για να μετρησουμε αυτή τη συμπεριφορά, ως θεωρούμε $n+1$ σημεία στο $[-1, 1]$ (διαφορετικά ανά δυο)
 $x_0, \dots, x_n \in [-1, 1]$

Είχατε δείξει ότι το σφάλμα της παρεμβύθης ικανοποιεί τη ακόλουθη σχέση, (αν $n \in \mathbb{N}$ $f \in C^{n+1}[-1, 1]$),

$\forall x \in [-1, 1]$ υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τ.ω.

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \phi_{n+1}(x)$$

όπου $\phi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$

και p_n το πολυώνυμο παρεμβύθης ως προς τα σημεία x_0, \dots, x_n

και άρα

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\phi_{n+1}\|_\infty$$

$$\text{όπου } \|g\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |g(x)|$$

Αν υποθέσουμε ότι $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ παραμένει φραγμένο καθώς αυξάνουμε την τάξη της παραγωγής, αυτό που

θα πρέπει να δούμε είναι πόσο μεγαλώνει $\|\phi_{n+1}\|_\infty$,

καθώς παίρνουμε όλο και περισσότερα σημεία παραγωγής - κόμβους.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα σημεία

$$x_0, x_1, \dots, x_n \in [-1, 1] \text{ είναι κανονικά}$$

δηλαδή έχουμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[-1, 1]$
Αυτά τα σημεία τότε θα ικανοποιούν

$$x_i = -1 + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad , \quad h = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + h, \quad x_2 = -1 + 2h, \quad \dots, \quad x_n = -1 + n \cdot h = 1$$

Πρόταση: Αν x_0, \dots, x_n είναι κανονικά σημεία του $[-1, 1]$ τότε

$$n \text{ } \phi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \text{ κανονικά}$$

$$\|\phi_{n+1}\|_{\infty} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\phi_{n+1}(x)| \leq \frac{n!}{4} h^{n+1}$$

$$\text{όταν } h = \frac{2}{n}$$

Απόδειξη: Θα το δείξουμε ως άσκηση.

Λόγω αυτής της Πρότασης έχουμε για το σφάλμα της παρεμβολής Lagrange, αν τα σημεία x_0, \dots, x_n είναι βέλιστα στο $[-1, 1]$

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Επομένως αν $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ παραμένει φραγμένο καθώς το $n \rightarrow \infty$ ελέγχουμε σε $h = \frac{2}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ και.

$$\|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0$$

Άρα βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση αν αυξήσουμε τον αριθμό των σημείων της παρεμβολής ή παρεμβολόσα θα πλησιάσει στο και καλύτερα την f

Parabelrunge: $f(x) = e^x$ τότε $f^{(n+1)}(x) = e^x$, $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{και } \|f^{(n+1)}\|_{\infty} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| = e$$

$$\|f - p_n\|_{\infty} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \cdot e = \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \frac{e}{4(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ισχυριόμαστε: Αν έχουμε έναν ομοιομορφο διαφορισμό, καθώς το ημίτονο των σημείων της παρεμβολής τείνει στο άπειρο, η ακολουθία των πομπών παρεμβολής μιας οποιαδήποτε συνεχούς συνάρτησης f στο $[-1, 1]$ συγκλίνει ομοιομορφα στην f

$$\forall f \in C[-1, 1], \quad \|f - P_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ισχυριόμην: Αν έχουμε έναν ομοιομορφο διαφορίσιμ, καθώς το ημίτονο των σημείων της παρεμβολής είναι στο άπειρο, η ακολουθία των πολλαπλών παρεμβολής μιας οποιαδήποτε συνεχούς συνάρτησης f στο $[-1, 1]$ συγκλίνει ομοιομορφικά στην f

$$\forall f \in C[-1, 1], \quad \|f - P_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ο ισχυρισμός είναι λάθος !!!